Initiation LaTeX

Yannis ROCHE

Prep'Isima 1 Année universitaire 2020-2021

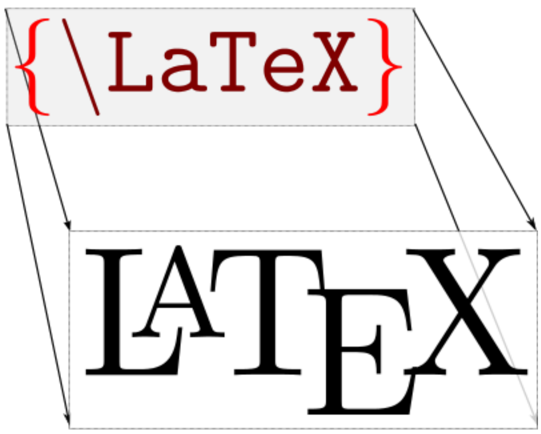

Figure 1 – Université Clermont Auvergne

Figure 2 – ISIMA

Figure 3 – La réalité derrière LaTeX

À rendre pour le 25/03

Encadrant : Yves-jean DANIEL

Université Clermont Auvergne : 34 Avenue Carnot, 63000 Clermont-Ferrand
ISIMA : 1 Rue de la Chebarde, 63178 Aubière

Table des matières

Table des figures

Références

[1] *LaTeX/Mise en forme du texte*, **WikiBooks**

[2] *LaTeXBase Reference*

[3] *List of Greek letters and math symbols*, **Overeaf**

[4] *Initiation à LaTeX*, **Jean-Christophe MICHEL**

1 Introduction

Ce Document constitue mon tout premier contact avec LaTeX, et, bien qu'il soit assez facile d'appréhender la puissance de ce traitement de texte, sa maîtrise l'est beaucoup moins. En effet, même s'il est assez évident qu'une fois maîtrisé, son extrême polyvalence puisse permettre à son utilisateur de rédiger des documents très organisés et pouvant comporter toute sorte de notations scientifiques, encore faut il maîtriser ce dît traitement de texte. Car même si les balises ont été conçus pour être les plus intuitives possible, l'immense diversité de notations scientifiques existante contraint à l'existence d'autant de balises de texte parfois difficiles à retenir et souvent à l'origine d'une réelle difficulté à lire le texte sans l'exporter.

2 Résolution des l'exercice

2.1 Exercice 1

Pour n entier naturel non nul, on pose $u_0 = 0$ et $u_n = u_{n-1} + n$.
Alors

$$\forall n \geq 0, u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2 Exercice 2

La formule de Stirling exprime, pour n grand, que

$$n! \sim Cn^n \sqrt{n} \exp(-n),$$

où $C = \sqrt{2\pi}$. Cette constante peut se calculer en utilisant la formule de Wallis, que l'on trouve grâce aux intégrales éponymes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$$

Alors

$$\forall n \geq 0, u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.3 Exercice 3

La fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$$

et appelée "fonction Gamma (d'Euler)", généralise la factorielle.
En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n!$. On peut aussi montrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

en se ramenant à l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ (par changement de variables), cette dernière valant $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (par exemple en considérant le carré de I et un passage en coordonnées polaires).

2.4 Exercice 4

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$M \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det M = \pm 1$$

2.5 Exercice 5

Considérons $\phi, \Sigma, \hbar, \varepsilon$ *et* ℓ des réels et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

2.6 Exercice 6

Écrivons le moment magnétique

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P) \mathrm{d}\tau \text{ ($\mathcal{V}$ étant un volume).}$$

2.7 Exercice 7

L'exerice 3 peut aider au calcul de l'intégrale de Fresnel

$$\varphi \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \exp{(ix^2)} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp{(\frac{i\pi}{4})}$$

en montrant, pour α dans $]0,1[$, que

$$J : \alpha \longmapsto \int_{]0,+\infty[} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{it} \mathrm{d}t$$

vérifie

$$J(\alpha) = \Gamma(\alpha) \mathrm{e}^{i\alpha\frac{\pi}{2}}.$$

Alors

$$\forall n \geq 0, u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.8 Exercice 8

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ alors sa transformée de Fourier, notée $\hat{f}$, est continue et vérifie (pour une définition bien choisie)

$$\hat{f}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 \text{ et } \left\| \frac{\hat{f}}{2\pi} \right\|_{\infty} \leq \|f\|_1.$$

2.9 Exercice 9

Soit $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$. Supposons les a_i premiers entiers entre eux dans leur ensemble (pour $i \in \{1, \ldots, k\}$) et notons, pour $n \geq 1$, u_n le nombre de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i = n$. Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

2.10 Exercice 10

Pour avoir la valeur d'une intégrale, deux méthodes existent :

1. Calculer sa valeur exacte. Différents outils peuvent être utilisés, en particulier :
   - la règle des invariants de Bioche :
     - si $-x \leftarrow x$ est un invariant, on utilise $u = \cos x$,
     - si c'est $\pi - x \leftarrow x$, on utilise $u = \sin x$,
     - si c'est $\pi + x \leftarrow x$, on utilise $u = \tan x$;
   - le théorème des résidus ;
   - l'égalité de Plancherel-Parseval.
2. Calculer une valeur approchée. On distingue deux types de méthodes :
   (a) des méthodes déterministes, contenant :
      i. les méthodes de Newton-Cotes,
      ii. les méthodes de Gauss ;
   (b) une méthode probabiliste : la méthode de Monte-Carlo.

2.11 Exercice 11

À savoir sur les méthodes de quadrature :

Méthode	Ordre
Rectangles à gauche	0
Rectangles à droite	0
Point milieu	1
Trapèzes	1
Simpson	3

2.12 Exercice 12

Voici un parallèle entre des méthodes de calcul approché d'intégrales et des schémas de résolution approchée d'équations différentielles ordinaires :

Méthode de quadrature		Schéma EDO
Nom	Ordre	Nom
Rectangles à gauche	0	Euler explicite
Rectangles à droite	0	Euler implicite
Point milieu	1	Euler modifié
Trapèzes	1	Crank-Nicolson
Simpson	3	Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

2.13 Exercice 13

Si l'on ajoute une section (peut importe le positionnement de cette nouvelle section), la numérotation des sections et des sous-sections s'adaptent automatiquement.

2.14 Exercice 14

A la première compilation, la numérotation de la table des matières ne correspond pas à la numérotation affichée au niveau du titre des sections, tandis qu'à la seconde compilation, les deux correspondent bien. Peut être qu'en ouvrant une première fois le PDF exporté, cela met à jour la table des matière qui s'affiche correctement en recompilant le fichier ".tex".

2.15 Exercice 15

On a l'identité remarquable, numérotée (1) :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1}$$

2.16 Exercice 16

Pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, le déterminant de Vandermonde est

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

2.17 Exercice 17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. Alors on peut montrer successivement que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}},$$
$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}_{=\mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}.$$

2.18 Exercice 18

Soit $f : \underset{x\mapsto \frac{\sin x}{x}}{\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}}$. On peut prolonger f par continuité en $\sin_c$ définie par

$$\sin_c(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 & sinon \end{cases}$$

2.19 Exercice 19

Définition 1 (Base hilbertienne)**.** Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est orthogonale, normée et totale.

Définition 2. Un espace métrique (E, d) est dit *séparable* si tout ouvert non vide de E contient au moins un point d'une partie dénombrable de E.

Exemple 1. $\mathbb{R}^n$ est séparable.

Théorème 3 (Caractérisation)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille othonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.*

2. Pour tout $x \in H$,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \qquad (\textit{égalité de Parseval}).$$

3. On a

$$(e_n, \quad n \in \mathbb{N})^{\perp} = \{0\}.$$

Remarque. Le théorème 3 s'étend au cas des espaces de Hilbert non séparables.

En ajoutant [section] à la 2° ligne de code, les définitions et théorèmes serait des sous-sections. Ainsi, Définition 1 deviendrait Définition 2.1.

2.20 Exercice 20

1. Résultat visible dès la première compilation (indices valides...).
2. Le titre de la section est celui entre accolades, mais celui qui apparaît dans la table des matières est celui entre crochets.
3. Insère une nouvelle ligne dans la *toc* contenant un titre de niveau *section* qui s'appelle *Conclusion*.