

Eléments finis P_1 en 1D

Auteur : Quentin Christ

06/02/2023

L'objectif ici est d'implémenter dans le cas 1D la résolution numérique d'un problème d'éléments finis P_1 avec conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann et conditions aux limites mixtes.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Omega = [a, b]$ satisfaisant l'équation suivante :

$$-\beta u'' + \alpha u = f \quad (1)$$

avec comme conditions dans les différentes sections : (1.) $u|_\Gamma$ donnée puis (2.) $u'|_\Gamma$ donnée et enfin (3.) $u|_{\Gamma_1}, u'|_{\Gamma_2}$ pour $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ données.

On cherchera à déterminer la résolution numérique par la méthode des éléments finis dans ces 3 cas à partir de leurs formulations variationnelles respectives.

1 Conditions aux limites de Dirichlet

1.1 Application de la méthode des éléments finis

La formulation variationnelle du problème avec conditions aux limites de Dirichlet est de la forme: pour $u|_\Gamma$ connue:

$$\int_a^b \beta u'(x) v'(x) \, dx + \int_a^b \alpha u(x) v(x) \, dx = \int_a^b f(x) v(x) \, dx$$
$$\iff a(u, v) = l(v) \quad (2)$$

On se donne n points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ et on pose $u_h \in V_h$ avec $V_h \subset H^1(\Omega)$ la solution approchée du problème.

De plus, on pose la base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ associée à V_h (fonctions P_1). Le problème variationnelle (2) est alors transformé en : trouver $u_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h$, $a(u_h, v_h) = l(v_h)$.

Cela revient à résoudre : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad a(u_h, \varphi_i) = l(\varphi_i), \quad u_h(a) \text{ et } u_h(b) \text{ connues} \quad (3)$$

On a également : $u_h = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$, d'où :

$$(3) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{j=2}^{n-1} a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = l(\varphi_i) - a(\varphi_1, \varphi_i) c_1 - a(\varphi_n, \varphi_i) c_n$$

$$\Leftrightarrow A\vec{c} = \vec{b}$$

avec $(A_{ij}) = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_i = l(\varphi_i) - a(\varphi_1, \varphi_i) c_1 - a(\varphi_n, \varphi_i) c_n$, et $\vec{c}$ inconnu.

1.2 Implémentation

- Pour le calcul de (A_{ij}) et de b_i , $\forall i, j$; on va chercher à minimiser le nombre d'opérations en calculant uniquement les valeurs pour lesquels les φ_i sont non nulles.
- De plus, pour (A_{ij}) , on peut réaliser un assemblage de deux autres matrices correspondant respectivement aux deux intégrales.
- Finalement, on résout le système $A\vec{c} = \vec{b}$ à l'aide de la méthode LU.
- Le calcul des intégrales est réalisé à partir de la méthode de Simpson et en particulier de Riemann pour déterminer $\int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx$.
- Les valeurs u_1 et u_n sont initialisés de part les conditions aux limites imposées.
- Le script réalise automatiquement un maillage constant à partir du nombre de points donné mais est suffisamment flexible pour pouvoir être modifié rapidement et utiliser un maillage quelconque.

Remarque : la méthode de Riemann est suffisante pour déterminer $\int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx$ car on intègre ici une fonction constante par morceaux.

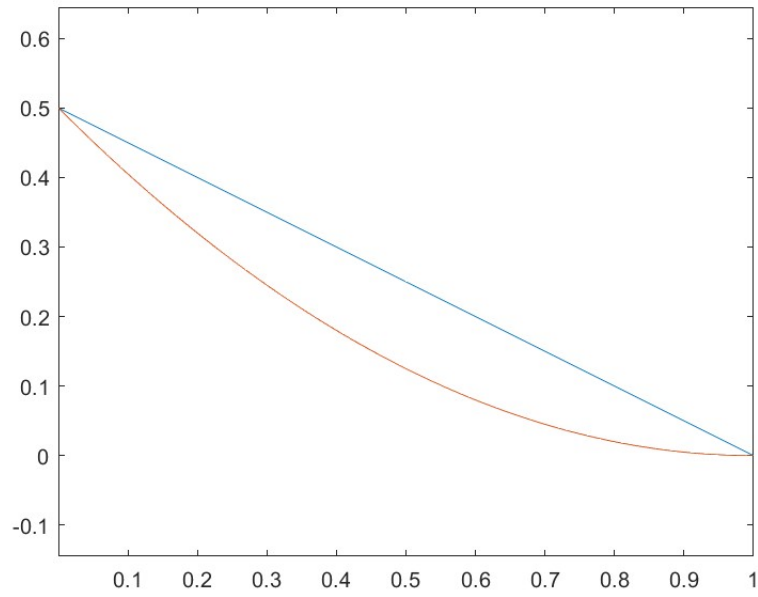


Figure 1: Résolution de $-u'' = -1$ sur $[0, 1]$ avec $u(0) = 0.5$ et $u(1) = 0$, en orange la solution analytique et en bleu la solution par MEF pour $n = 3$ (2 mailles).

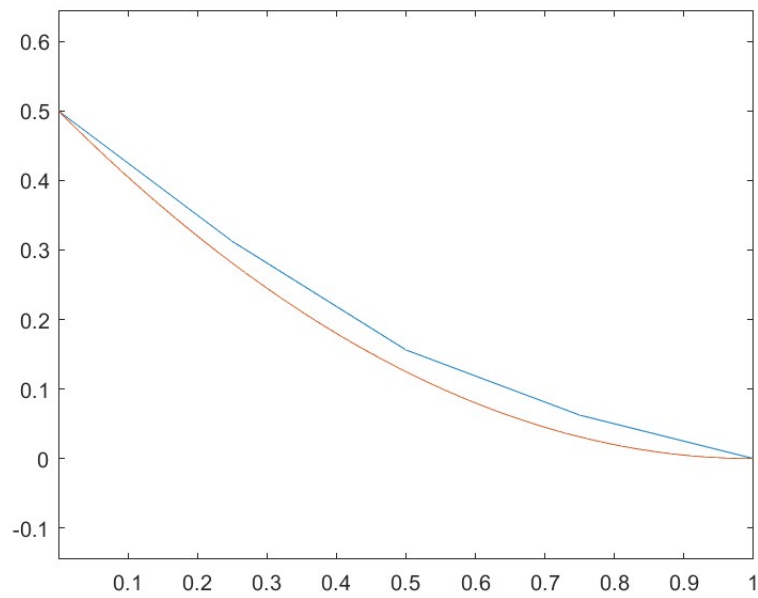


Figure 2: cas $n = 5$ (4 mailles)

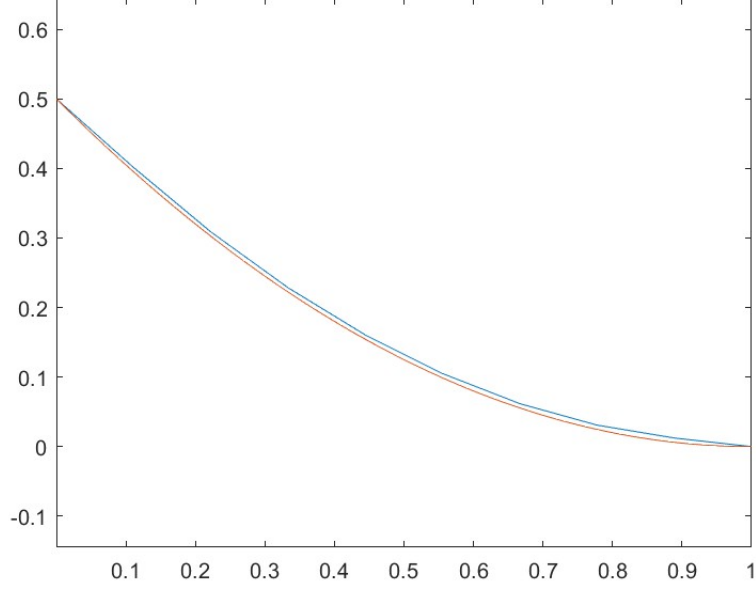


Figure 3: cas $n = 10$ (9 mailles)

2 Conditions aux limites de Neumann

2.1 Application de la méthode des éléments finis

La formulation variationnelle du problème avec conditions aux limites de Neumann est de la forme: pour $u'|_{\Gamma}$ connue:

$$\int_a^b \beta u'(x) v'(x) \, dx + \int_a^b \alpha u(x) v(x) \, dx = \int_a^b f(x) v(x) \, dx + \beta [u'(x) v(x)]_a^b$$

$$\iff a(u, v) = l(v) \quad (4)$$

En suivant le schéma précédent, cela revient à résoudre :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = l(\varphi_i)$$

$$\iff A\vec{c} = \vec{b}$$

avec $(A_{ij}) = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_i = l(\varphi_i) = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) \, dx + \beta [u'(x) \varphi_i(x)]_a^b$, et $\vec{c}$ inconnu.

Remarque : Lorsque $\alpha = 0$, le théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas, en effet lorsqu'on cherche à vérifier la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, on a :

$$a(u, u) = \beta \cdot \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \beta \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

On en déduit alors qu'on ne peut pas conclure concernant l'existence d'une unique solution satisfaisant le problème variationnelle.

2.2 Implémentation

Il suffit de reprendre la même démarche que précédemment en rajoutant les lignes $b_1 = b_1 - \beta u'(a)$ et $b_n = b_n + \beta u'(b)$ à la fin du calcul du second membre et naturellement retirer les conditions aux limites de Dirichlet.

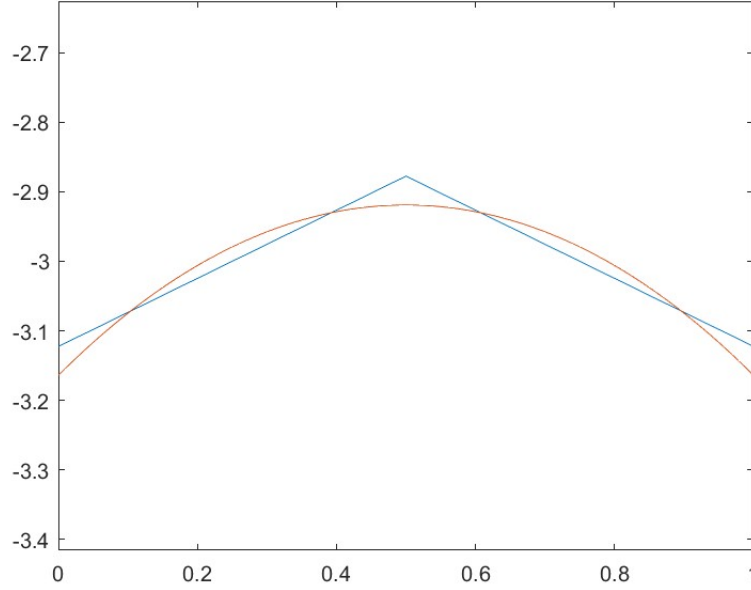


Figure 4: Résolution de $-u'' + u = -1$ sur $[0, 1]$ avec $u'(0) = 1$ et $u'(1) = -1$, en orange la solution analytique et en bleu la solution par MEF pour $n = 3$ (2 mailles).

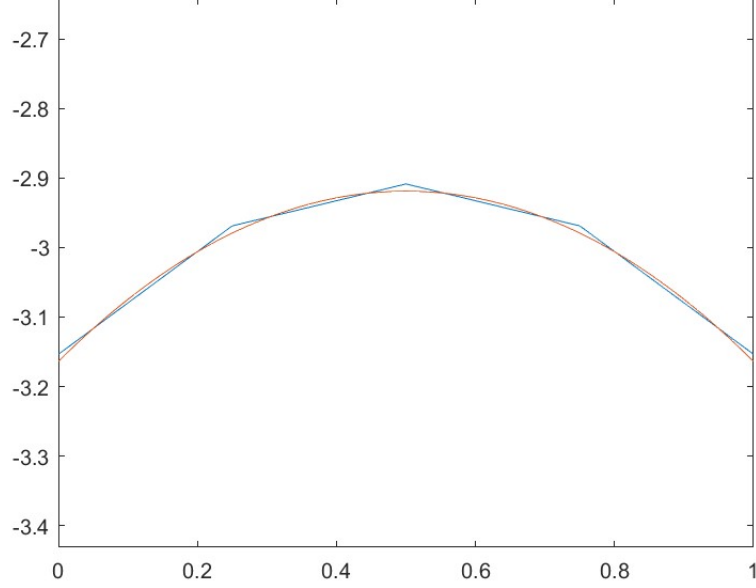


Figure 5: cas $n = 5$ (4 mailles).

3 Conditions aux limites mixtes

3.1 Application de la méthode des éléments finis

La formulation variationnelle du problème avec conditions aux limites mixtes est de la forme: pour $u|_{\Gamma_1}$ et u'_{Γ_2} connues:

$$\int_a^b \beta u'(x) v'(x) dx + \int_a^b \alpha u(x) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx + \beta [u'(x) v(x)]_a^b$$

$$\iff a(u, v) = l(v) \quad (5)$$

Cela revient à résoudre : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad a(u_h, \varphi_i) = l(\varphi_i), \quad u_h(a) \text{ et } u'_h(b) \text{ connues}$$

On a également : $u_h = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$, d'où :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \sum_{j=2}^n a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = l(\varphi_i) - a(\varphi_1, \varphi_i) c_1$$

$$\iff A\vec{c} = \vec{b}$$

avec $(A_{ij}) = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_i = l(\varphi_i) - a(\varphi_1, \varphi_i) c_1$, et $\vec{c}$ inconnu.

3.2 Implémentation

On réalise la même chose que précédemment en mettant la condition de Dirichlet à gauche et la condition de Neumann à droite.

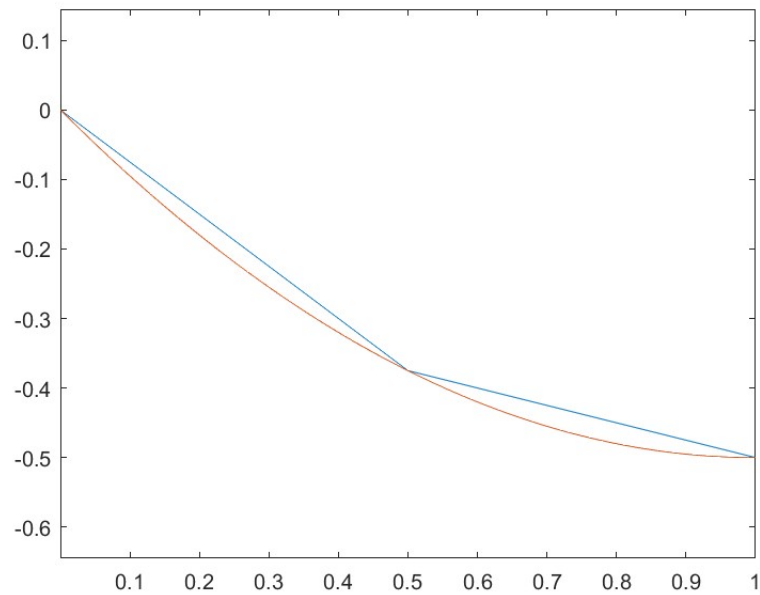


Figure 6: Résolution de $-u'' = -1$ sur $[0, 1]$ avec $u(0) = 0$ et $u'(1) = 0$, en orange la solution analytique et en bleu la solution par MEF pour $n = 3$ (2 mailles).

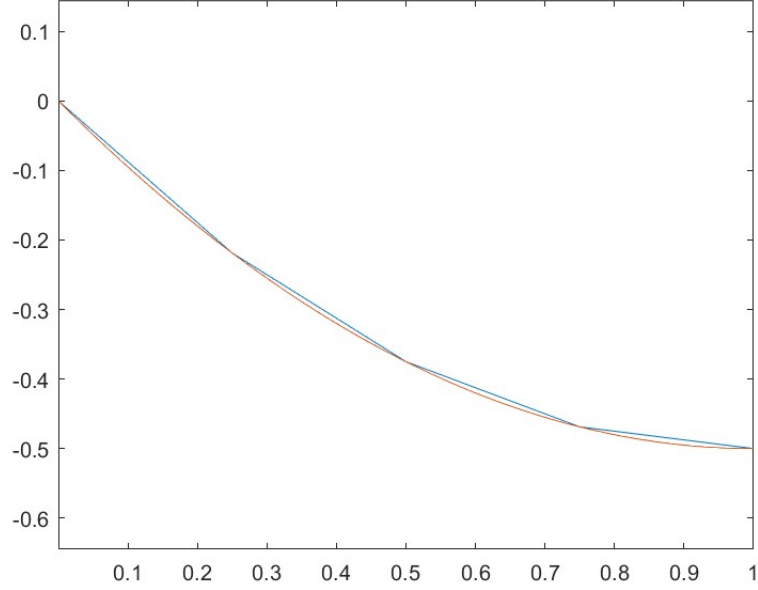


Figure 7: cas $n = 5$ (4 mailles).

4 Implémentation de la base des fonctions P_1

On cherche ici à évaluer φ_i et φ'_i , $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- Pour se faire, lorsqu'on donne un certain nombre de points définis par un vecteur x et un entier i défini par rapport à un maillage x_m , on doit pouvoir retourner les valeurs numériques $\varphi_i(x)$ définis autour du point $x_m(i)$ (pour lequel la fonction atteint son sommet).
- les images sont calculées de la manière suivante :
$$\begin{cases} \varphi_k(x) = (x - x_m(k-1)) / (x_m(k) - x_m(k-1)) & \text{si } x_m(k-1) < x < x_m(k) \\ \varphi_k(x) = (x - x_m(k+1)) / (x_m(k) - x_m(k+1)) & \text{si } x_m(k+1) > x > x_m(k) \end{cases}$$

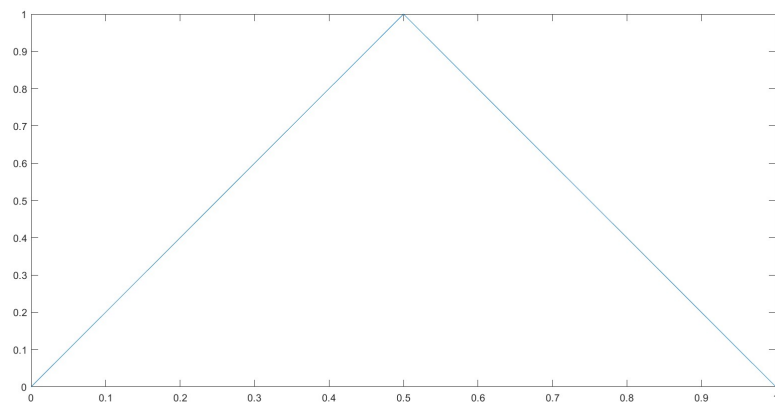


Figure 8: $\varphi_2(x)$ pour $x_m = [0, 0.5, 1]$.

- Concernant la dérivée on peut faire plus simplement en retournant la dérivée à gauche ou à droite en fonction de si on se trouve à gauche ou à droite du sommet sur le bon intervalle.