Coloration dans les graphes structurés

Lucas Pastor

Jeudi 24 novembre 2016

Travail en commun avec **Frédéric Maffray**

Contexte

Laboratoire G-SCOP

Laboratoire G-SCOP

- Sous la direction de Frédéric Maffray.

Laboratoire G-SCOP

- Sous la direction de Frédéric Maffray.
- Co-direction de Sylvain Gravier (Institut Fourier)

Laboratoire G-SCOP

- Sous la direction de Frédéric Maffray.
- Co-direction de Sylvain Gravier (Institut Fourier)
- Equipe Optimisation Combinatoire.

Laboratoire G-SCOP

- Sous la direction de Frédéric Maffray.
- Co-direction de Sylvain Gravier (Institut Fourier)
- Equipe Optimisation Combinatoire.
- Théorie structurelle des graphes, optimisation, coloration.

Coloration dans les graphes

Coloration de graphe

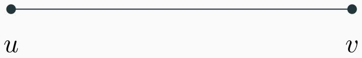
Étant donné un graph $G = (V, E)$. On définit une coloration propre de G comme une application $c : V \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet de G une couleur tel que, pour toute paire de sommet uv adjacent on vérifie $c(u) \neq c(v)$.

Coloration de graphe

Étant donné un graph $G = (V, E)$. On définit une coloration propre de G comme une application $c : V \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet de G une couleur tel que, pour toute paire de sommet uv adjacent on vérifie $c(u) \neq c(v)$.

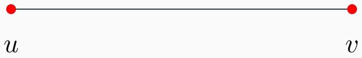
Coloration de graphe

Étant donné un graph $G = (V, E)$. On définit une coloration propre de G comme une application $c : V \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet de G une couleur tel que, pour toute paire de sommet uv adjacent on vérifie $c(u) \neq c(v)$.



Coloration de graphe

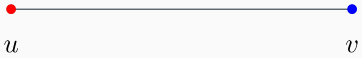
Étant donné un graph $G = (V, E)$. On définit une coloration propre de G comme une application $c : V \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet de G une couleur tel que, pour toute paire de sommet uv adjacent on vérifie $c(u) \neq c(v)$.



interdit!

Coloration de graphe

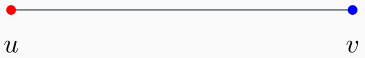
Étant donné un graph $G = (V, E)$. On définit une coloration propre de G comme une application $c : V \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet de G une couleur tel que, pour toute paire de sommet uv adjacent on vérifie $c(u) \neq c(v)$.



coloration propre

Coloration de graphe

Étant donné un graph $G = (V, E)$. On définit une coloration propre de G comme une application $c : V \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet de G une couleur tel que, pour toute paire de sommet uv adjacent on vérifie $c(u) \neq c(v)$.



coloration propre

k-coloration

On peut alors associer à un graphe G le problème de décision suivant. Est-il possible de colorer proprement G avec au plus k couleurs? Ce problème porte le nom de k-coloration.
Dans le cas général ce problème est NP-complet.

Graphe chemin

On dénote par P_ℓ le graphe chemin sur ℓ sommets.

Graphe chemin

On dénote par P_ℓ le graphe chemin sur ℓ sommets.

P_6

Graphe chemin

On dénote par P_ℓ le graphe chemin sur ℓ sommets.

P_6

Graphe taureau

On appel graphe taureau, le graphe formé d'un triangle et de deux sommets supplémentaires adjacents à deux sommets différents du triangle.

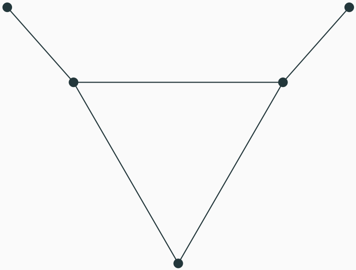
Graphe chemin

On dénote par P_ℓ le graphe chemin sur ℓ sommets.

P_6

Graphe taureau

On appel graphe taureau, le graphe formé d'un triangle et de deux sommets supplémentaires adjacents à deux sommets différents du triangle.



taureau

Structure

On dit qu'un graphe est sans H si il ne contient pas un sous-graphe H induit. On parle alors de la classe des graphes sans H.

Structure

On dit qu'un graphe est sans H si il ne contient pas un sous-graphe H induit. On parle alors de la classe des graphes sans H.

Collections de chemins

Pour tout $k \geq 3$ et H un sous-graphe induit interdit qui n'est pas une collection de chemins, décider si un graphe sans H est k-colorable est NP-complet.

Structure

On dit qu'un graphe est sans H si il ne contient pas un sous-graphe H induit. On parle alors de la classe des graphes sans H.

Collections de chemins

Pour tout $k \geq 3$ et H un sous-graphe induit interdit qui n'est pas une collection de chemins, décider si un graphe sans H est k-colorable est NP-complet.

Complexité du problème

Quelle est la complexité de la k-coloration dans les graphes sans P_ℓ pour $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$?

Structure

On dit qu'un graphe est sans H si il ne contient pas un sous-graphe H induit. On parle alors de la classe des graphes sans H.

Collections de chemins

Pour tout $k \geq 3$ et H un sous-graphe induit interdit qui n'est pas une collection de chemins, décider si un graphe sans H est k-colorable est NP-complet.

Complexité du problème

Quelle est la complexité de la k-coloration dans les graphes sans P_ℓ pour $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$?

$k \backslash \ell$	$\ell = 4$	5	6	7	≥ 8
$k = 3$	P	P	P	P	
$k = 4$	P	P		NPC	NPC
$k = 5$	P	P	NPC	NPC	NPC
$k \geq 6$	P	P	NPC	NPC	NPC

Structure

On dit qu'un graphe est sans H si il ne contient pas un sous-graphe H induit. On parle alors de la classe des graphes sans H.

Collections de chemins

Pour tout $k \geq 3$ et H un sous-graphe induit interdit qui n'est pas une collection de chemins, décider si un graphe sans H est k-colorable est NP-complet.

Complexité du problème

Quelle est la complexité de la k-coloration dans les graphes sans P_ℓ pour $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$?

$k \backslash \ell$	$\ell = 4$	5	6	7	≥ 8
$k = 3$	P	P	P	P	
$k = 4$	P	P		NPC	NPC
$k = 5$	P	P	NPC	NPC	NPC
$k \geq 6$	P	P	NPC	NPC	NPC

Théorème, F. Maffray, L. P.

Il existe un algorithme polynomial qui détermine si un graphe G sans P_6 ni taureau est 4-colorable et produit une telle coloration si elle existe.

Théorème, F. Maffray, L. P.

Il existe un algorithme polynomial qui détermine si un graphe G sans P_6 ni taureau est 4-colorable et produit une telle coloration si elle existe.

Théorème, F. Maffray, L. P.

Il existe un algorithme polynomial qui détermine si un graphe G sans P_6 ni taureau ni gemme est k-colorable et produit une telle coloration si elle existe.

Théorème, F. Maffray, L. P.

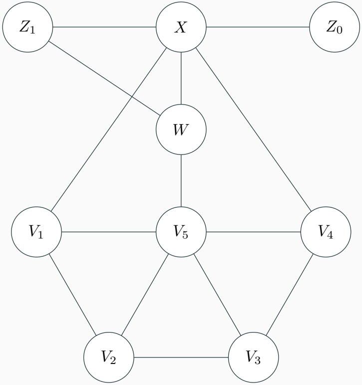
Il existe un algorithme polynomial qui détermine si un graphe G sans P_6 ni taureau est 4-colorable et produit une telle coloration si elle existe.

Théorème, F. Maffray, L. P.

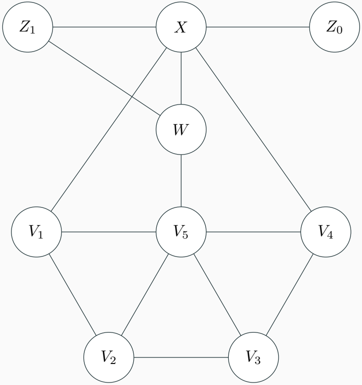
Il existe un algorithme polynomial qui détermine si un graphe G sans P_6 ni taureau ni gemme est k-colorable et produit une telle coloration si elle existe.

Idée de la preuve

En analysant finement ces graphes, on peut déterminer précisément leur structure. Avec cette structure précise on est alors capable de décider de la 4-coloration (ou k-coloration) efficacement.

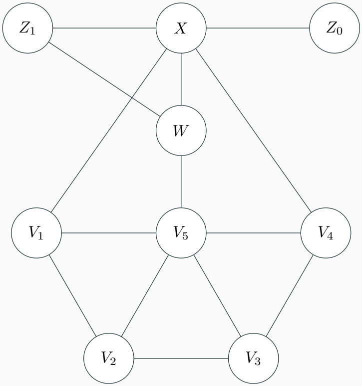

Z_1
X
Z_0
W
V_1
V_5
V_4
V_2
V_3

X n'est pas vide



X n'est pas vide

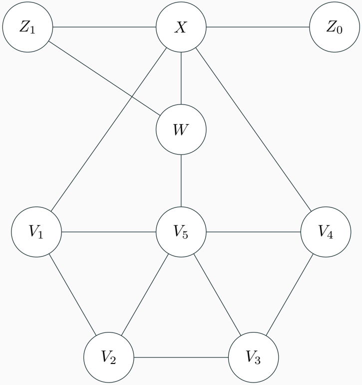
V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$



X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

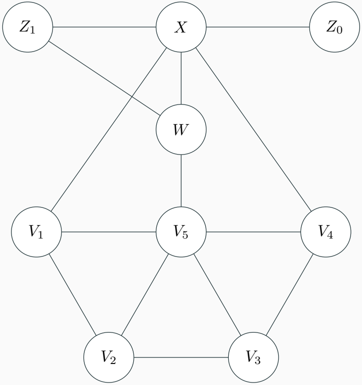


X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X



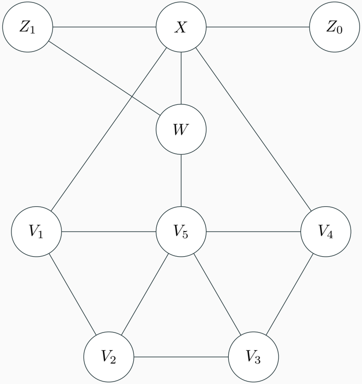
X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G



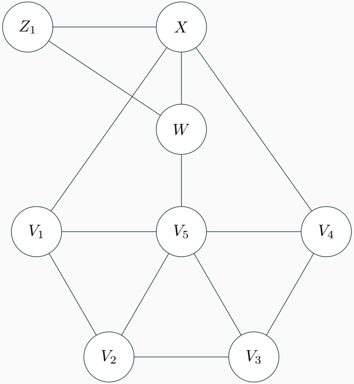
X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G



X n'est pas vide

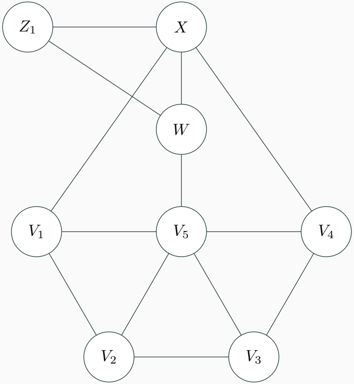
V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G

On peut supposer que X est une clique et que $|X| \leq 3$



X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

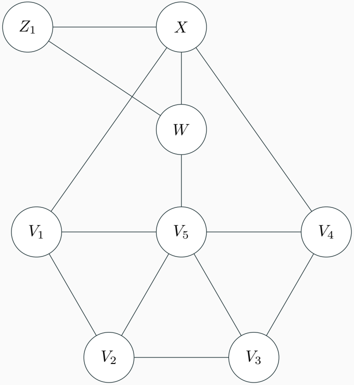
W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G

On peut supposer que X est une clique et que $|X| \leq 3$

Si $|X| \geq 2$, soit $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup X$



X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

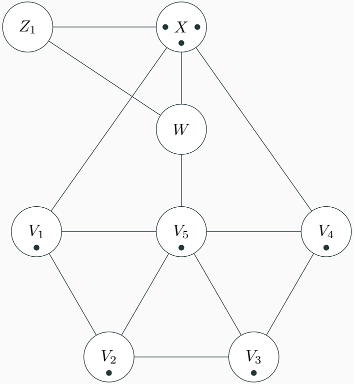
W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G

On peut supposer que X est une clique et que $|X| \leq 3$

Si $|X| \geq 2$, soit $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup X$



X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

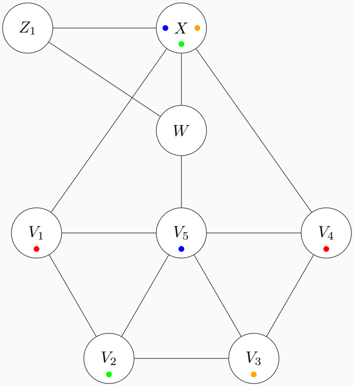
W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G

On peut supposer que X est une clique et que $|X| \leq 3$

Si $|X| \geq 2$, soit $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup X$



X n'est pas vide

V_5 est complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

W est complet à X et anti-complet à $V_1 \cup \ldots \cup V_4$

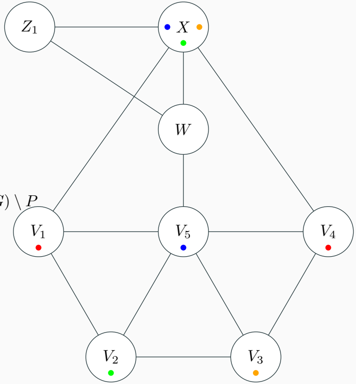
Z_1 est complet à X

Toute 4-coloration de $G \setminus Z_0$ s'étend à une 4-coloration de G

On peut supposer que X est une clique et que $|X| \leq 3$

Si $|X| \geq 2$, soit $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup X$

On peut tester efficacement l'extension de la coloration à $V(G) \setminus P$



- S. Gravier, F. Maffray, L. Pastor. On the choosability of claw-free perfect graphs.
  Graphs and Combinatorics 32:6 (2016) 2393–2413.
- F. Maffray, L. Pastor. The maximum weight stable set problem in (P_6, bull)-free graphs.
  Lecture Notes in Computer Science 9941 (2016) 85–96.
- F. Maffray, L. Pastor. 4-coloring (P_6, bull)-free graphs.
  Discrete Applied Mathematics (2016), to appear.
- R. de Joannis de Verclos, R. J. Kang, L. Pastor. Colouring squares of claw-free graphs.
  Submitted.
- A. Harutyunyan, L. Pastor, S. Thomassé. Disproving the normal graph conjecture.
  Submitted.
- F. Maffray, L. Pastor. Maximum Weight Stable Set in (P_7, bull)-free graphs.
  In preparation.
- N. Bousquet, A. Lagoutte, F. Maffray, L. Pastor. Clique-Stable Seperation in apple-free graphs.
  In preparation.

Le soutien AGIR a permis :

- Collaboration avec Henning Bruhn-Fujimoto et Laura Gellert à Ulm, Allemagne.
- Collaboration avec Marthe Bonamy à Bordeaux (LaBri), France.
- Collaboration avec Ross Kang et Rémi de Joannis de Verclos, Nijmegen, Pays-Bas.
- Conférences, workshops, écoles d'été.

Conclusion

Question

- Est-ce qu'il y a une famille finie de graphes minimaux sans P_6 ni taureau 5-colorable mais pas 4-colorable?

Question

- Est-ce qu'il y a une famille finie de graphes minimaux sans P_6 ni taureau 5-colorable mais pas 4-colorable?
- Nos algorithmes sont en $\mathcal{O}(n^8)$ et $\mathcal{O}(n^6)$. Est-il possible d'améliorer la complexité?

Question

- Est-ce qu'il y a une famille finie de graphes minimaux sans P_6 ni taureau 5-colorable mais pas 4-colorable?
- Nos algorithmes sont en $\mathcal{O}(n^8)$ et $\mathcal{O}(n^6)$. Est-il possible d'améliorer la complexité?

Conjecture S. Huang 2013

Le problème de la 4-coloration peut être décidé en temps polynomial dans les graphes sans P_6.

Merci pour votre attention.