Directions conjuguées : orthogonalité sur l'ellipse versus orthogonalité sur le cercle

Gilles Leborgne

3 septembre 2013

Position du problème : on prend une première photo, appelée photo 1, d'un cercle dessiné au sol à partir d'un avion passant à la verticale : sur la photo apparaît un cercle. Voir cercle figure 1.

On prend une deuxième photo, appelée photo 2, de ce même cercle quand l'avion qui n'est pas à la verticale : sur la photo la représentation du cercle est une ellipse. Voir ellipse figure 1.

La figure 1 superpose les deux photos (après mise à l'échelle).

Problème : On dessine deux vecteurs orthogonaux (au sens usuel euclidien) sur le sol : ils apparaissent bien orthogonaux (au sens usuel euclidien) sur la photo 1, mais n'apparaissent pas orthogonaux (au sens usuel euclidien) sur la photo 2 (en général). Ce qui est représenté figure 1 par :

1- la tangente en un point Q d'un cercle est perpendiculaire (au sens usuel euclidien) au vecteur $\overrightarrow{OQ}$, alors que

2- la tangente précédente apparaît sur la photo 2 au point P de l'ellipse, et, sur la photo 2, n'est pas perpendiculaire (au sens usuel euclidien) au vecteur $\overrightarrow{OP}$.

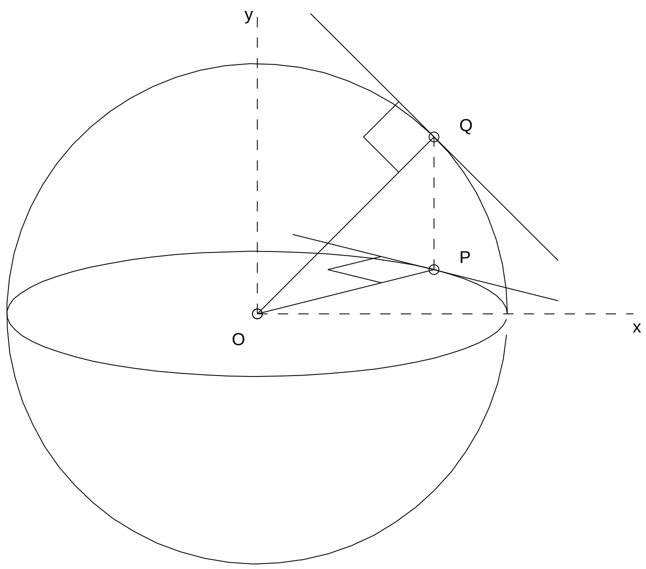

Figure 1 – Dans le plan Oxy : l'orthogonalité euclidienne (pour le cercle) et l'orthogonalité elliptique (pour l'ellipse).

Question : sur la photo 2, si $\vec{v}$ est un vecteur tangent à l'ellipse, quel produit scalaire $(\cdot,\cdot)_M$ doit-on utiliser pour avoir $(\overrightarrow{OP},\vec{v})_M = 0$?

Si on dispose d'un tel produit scalaire $(\cdot,\cdot)_M$, si $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ est le produit scalaire euclidien, alors, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs dessinés sur le terrain (ou dessinés sur la photo 1), si $\vec{a}_p$ et $\vec{b}_p$ sont ces mêmes deux vecteurs vus sur la photo 2, alors $(\vec{a},\vec{b})_{\mathbb{R}^2} = 0$ ssi $(\vec{a}_p,\vec{b}_p)_M = 0$.

C'est à dire : les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$-orthogonaux (au sens usuel euclidien) ssi les vecteurs $\vec{a}_p$ et $\vec{b}_p$ les représentant sur la photo 2 sont $(\cdot,\cdot)_M$-orthogonaux.

Résultat : Si l'ellipse est donnée par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, on va voir qu'il faut utiliser le produit scalaire de matrice $M = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

1 Cercle dans $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit O un point donné (origine). Quitte à changer l'origine et les axes, un cercle est donné par la courbe paramétrée :

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{c}(\theta) = R\cos\theta\vec{e}_1 + R\sin\theta\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 = R\cos\theta \\ x_2 = R\sin\theta \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}_{|(\vec{e})}, \qquad \theta \in [0, 2\pi], \tag{1.1}$$

d'image le cercle usuel de centre $\vec{0}$ et de rayon R dans le plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

2 Changement de base

Soit A la position de l'avion (d'où est prise la photo) dans $\mathbb{R}^3$, et soit φ_0 l'angle que fait l'avion avec la verticale, avec donc $\varphi_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (où $\varphi_0 = 0$ correspond à la photo 1 = photo prise à la verticale).

On tourne autour de l'axe Ox_1 comme sur la figure 1.

On change de base orthonormée, pour aller dans la nouvelle base orthonormée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ telle que $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$ et $\vec{b}_3$ donne l'axe OA où A est la position de l'avion :

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1, \qquad \vec{b}_2 = \cos\varphi_0\vec{e}_2 + \sin\varphi_0\vec{e}_3, \qquad \vec{b}_3 = -\sin\varphi_0\vec{e}_2 + \cos\varphi_0\vec{e}_3. \tag{2.1}$$

Si $\varphi_0 = 0$ on vérifie que $\vec{b}_3 = \vec{e}_3$, i.e. si $\varphi_0 = 0$ l'axe OA est "la verticale au sol", et $(\vec{b}_i) = (\vec{e}_i)$.

La matrice de changement de base est la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ 0 & \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$ dont la colonne j contient les composantes de $\vec{b}_j$ dans la base canonique $(\vec{e}_i)$.

3 Le cercle dans la nouvelle base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

Soit (y_1, y_2, y_3) les composantes de $\vec{c}(\theta)$ dans la base $(\vec{b}_i)$:

$$\vec{c}(\theta) = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{|(\vec{b})} \tag{3.1}$$

Ayant $[\vec{b}_j]_{|(\vec{e})} = P.[\vec{e}_j]_{|(\vec{e})}$ pour tout j, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ 0 & -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$, les formules de changement de base donnent :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos\varphi_0 x_2 - \sin\varphi_0 x_3 \\ \sin\varphi_0 x_2 + \cos\varphi_0 x_3 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

D'où avec (1.1) on obtient l'équation du cercle dans la base $(\vec{b}_i)$:

$$\vec{c}(\theta) = \begin{pmatrix} y_1 = R\cos\theta \\ y_2 = R\cos\varphi_0\sin\theta \\ y_3 = R\sin\varphi_0\sin\theta \end{pmatrix}_{|(\vec{b})}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{3.3}$$

4 Le cercle projeté sur le plan orthogonal $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$: l'ellipse

La projection de $\vec{c}(\theta)$ sur le plan $\mathrm{Vect}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ orthogonal à OA donne la courbe paramétrique pour $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} y_1 = R\cos\theta \\ y_2 = R\cos\varphi_0\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \qquad a = R, \quad b = R\cos\varphi_0. \tag{4.1}$$

(On retrouve le cercle quand $\varphi_0 = 0$). Son image est l'ellipse comme sur la photo 2. (L'équation de l'ellipse s'écrit aussi $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.)

5 Orthogonalité elliptique

Sur un cercle $\vec{c}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$, la tangente au cercle est toujours perpendiculaire au rayon pour le produit scalaire euclidien $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$: un vecteur tangent est $\vec{c}\,'(\theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}_{|(\vec{e})}$, et donc $(\vec{c}\,'(\theta), \vec{c}_2(\theta))_{\mathbb{R}^2} = 0$ pour tout θ.

Sur l'ellipse $\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$, c'est faux en général : un vecteur tangent est $\vec{r}\,'(\theta) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}_{|(\vec{b})}$, et donc, la base $(\vec{b}_i)$ étant orthonormée :

$$(\vec{r}\,'(\theta), \vec{r}(\theta))_{\mathbb{R}^2} = (b^2 - a^2)\cos\theta\sin\theta \tag{5.1}$$

non nul quand $a \neq b$ ou quand $\theta \neq k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (égalité sur les petit et grand axes).

Et on rappelle le but de ce poly : on veut trouver un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_M$ tel que, pour tout θ :

$$\vec{r}\,'(\theta) \perp_M \vec{r}(\theta) \qquad \text{i.e.} \qquad (\vec{r}\,'(\theta), \vec{r}(\theta))_M = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad ([\vec{r}\,'(\theta)]^T.M.[\vec{r}(\theta)] = 0. \tag{5.2}$$

i.e., pour tout θ :

$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta & b\cos\theta \end{pmatrix}.M.\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} = 0. \tag{5.3}$$

Il est immédiat que :

$$M = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Ainsi, sur la photo 2, si on dessine la base orthonormée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ (la photo est 2-dimensionnelle et correspond à la projection du cercle sur le plan $(O, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$), si P est un point sur l'ellipse et si $\vec{v}$ est un vecteur tangent $\vec{v}$ à l'ellipse, alors $(\overrightarrow{OP}, \vec{v})_M = 0$.

Et on retrouve la relation d'orthogonalité correspondant au "vrai" cercle : si Q est un point du cercle représenté par le point P (sur l'ellipse) sur la photo 2, et si $\vec{w}$ est un vecteur tangent au cercle représenté par le vecteur $\vec{v}$ (tangent à l'ellipse) sur la photo 2, alors $(\vec{w}, \overrightarrow{OQ})_{\mathbb{R}^2} = 0$ (orthogonalité du monde réel) équivaut à $(\vec{v}, \overrightarrow{OP})_M = 0$ (la $(\cdot,\cdot)_M$-orthogonalité sur la photo 2).

6 Orthogonalité pour $(\cdot,\cdot)_M$: directions conjuguées

Soit M une matrice symétrique définie positive. Rappel : la forme bilinéaire suivante :

$$(\vec{x}, \vec{y})_M = [\vec{x}]^T.M.[\vec{y}], \tag{6.1}$$

définit un produit scalaire ($[\vec{x}]$ est la matrice colonne des composantes de $\vec{x}$ dans la b.o.n. euclidienne, idem pour $[\vec{y}]$).

Définition : on dit que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont M-conjugués ssi :

$$\vec{x} \perp_M \vec{y}, \qquad \text{i.e.} \qquad (\vec{x}, \vec{y})_M = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad [\vec{x}]^T.M.[\vec{y}] = 0, \tag{6.2}$$

qui est la relation d'orthogonalité pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_M$.