Déterminants

Gilles Leborgne

5 novembre 2020

Table des matières

Soit E un espace vectoriel de dimension m. Typiquement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On note $E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ son dual (l'ensemble des formes linéaires sur E, i.e. l'ensemble des applications linéaires sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Si ℓ est une forme linéaire, alors pour $\vec{v} \in E$ on note $\ell(\vec{v}) = \ell.\vec{v}$ (notation de la distributivité)

1 Forme multilinéaire alternée : rappels

Une forme p-linéaire (linéaire, bilinéaire et trilinéaire quand $p = 1$ et 2 et 3) est une application $z : (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p) \in E^p \to \mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chaque $\vec{v}_i$:

$$z(..., \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \lambda\vec{w}_i, \vec{v}_{i+1}, ...) = z(..., \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, ...) + \lambda z(..., \vec{v}_{i-1}, \vec{w}_i, \vec{v}_{i+1}, ...),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\vec{v}_i, \vec{w}_i \in E$ pour tout $i = 1, ..., p$.

Elle est dite alternée ssi $z(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p)$ est nulle dès que deux des $\vec{v}_i$ sont égaux, ou de manière équivalente ssi :

$$z(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_i, ..., \vec{v}_j, ..., \vec{v}_p) = -z(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_j, ..., \vec{v}_i, ..., \vec{v}_p) \tag{1.1}$$

pour tout $\vec{v}_i \in E$ pour tout $i, j = 1, ..., p$ (démonstration : mettre $\vec{v}_i + \vec{v}_j$ à la place de $\vec{v}_i$ et de $\vec{v}_j$ dans la formule ci-dessus).

Soit S_p l'ensemble des bijections de $\{1, ..., p\}$ dans lui-même, une telle bijection étant appelée une permutation.

Une transposition τ est une permutation $\tau \in S_p$ qui échange deux entiers : $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, et $\tau(k) = k$ pour tout $k \neq i, j$.

Toute permutation est composée de transpositions, et la signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation est 1 si elle est composée d'un nombre pair de transpositions et -1 sinon. Et cette signature est indépendante de la composée des transpositions choisie.

Si z est p-linéaire (non alternée a priori), alors la forme p-linéaire z_a définie par :

$$z_a(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p) = \sum_{\sigma \in S_p} z(\vec{v}_{\sigma_1}, ..., \vec{v}_{\sigma_p}) \tag{1.2}$$

est une forme p-linéaire alternée qui est appelée antisymétrisée de z.

Soit p formes linéaires $\ell^1, ..., \ell^p \in E^*$. Le produit tensoriel de ces p formes est l'application multilinéaire $\ell^1 \otimes ... \otimes \ell^p : E^p \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(\ell^1 \otimes ... \otimes \ell^p)(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{i=1}^{p} \ell^i.\vec{v}_i \qquad (= \ell^1(\vec{v}_1)\ell^2(\vec{v}_2)...\ell^p(\vec{v}_p)). \tag{1.3}$$

Le produit extérieur $\ell^1 \wedge ... \wedge \ell^p$ de ces p formes est la partie alternée de $\ell^1 \otimes ... \otimes \ell^p$: avec (1.2) :

$$\ell^1 \wedge ... \wedge \ell^p = \sum_{\sigma \in S_p} \ell^{\sigma_1} \otimes ... \otimes \ell^{\sigma_p}. \tag{1.4}$$

Exemple 1.1 Cas $m = p = 2$. Cas $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{E}_i)$ de base duale (dx^i). On a deux permutations $\{1, 2\} \to \{1, 2\}$, l'identité I et la permutation caractérisée par $\sigma(1) = 2$. D'où :

$$dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1,$$

et $(dx^1 \wedge dx^2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$ aire du parallélogramme de côtés $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (donc $= \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ voir la suite). ▪

Et donc, pour tout $\vec{v}_i$:

$$(\ell^1 \wedge ... \wedge \ell^p)(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} \ell^i.\vec{v}_{\sigma_i}. \tag{1.5}$$

Exemple 1.2 Suite. On a $\varepsilon(I) = +1$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$, donc $(dx^1 \wedge dx^2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = +(dx^1.\vec{v}_1)(dx^2.\vec{v}_2) - (dx^1.\vec{v}_2)(dx^2.\vec{v}_1) = (dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. ▪

2 Forme m-linéaire alternée et déterminant $\det_B$

Proposition 2.1 *Si $p = m$ (la dimension de E) alors l'ensemble $\mathcal{A}_m(E)$ des formes m-linéaires alternées est de dimension 1. Et si $B = (\vec{b}_i)_{i=1,...m}$ est une base de E de base duale $(b^i)_{i=1,...m}$, alors $b^1 \wedge ... \wedge b^m$ est la base (formée d'un seul vecteur) de $\mathcal{A}_m(E)$ qui vérifie :*

$$(b^1 \wedge ... \wedge b^m)(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = 1. \tag{2.1}$$

Donc si $z \in \mathcal{A}_m(E)$ (est une forme m-linéaire alternée) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = \lambda\, b^1 \wedge ... \wedge b^m,$$

à savoir $\lambda = z(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m)$.

Preuve. (b^i) étant la base duale, avec (1.5) et $b^i.\vec{b}_{\sigma_i} = \delta^i_{\sigma_i}$ on a immédiatement (2.1).

Soit z une forme m-linéaire alternée. Une telle forme est entièrement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs de base, i.e. par les $z(\vec{b}_{\sigma_1}, ..., \vec{b}_{\sigma_m})$ pour toute permutation $\sigma \in S_m$. Toute permutation est composée de transposition, et donc, z étant alternée, z est déterminée $z(\vec{b}_{\sigma_1}, ..., \vec{b}_{\sigma_m})$ où σ est croissante, donc avec σ l'identité : z est déterminée par $z(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) =^{\text{noté}} \lambda$. ▪

Définition 2.2 Soit B une base de E (de dimension m). Le déterminant $\det_B$ relativement à la base B est défini par

$$\det_B \stackrel{\text{déf}}{=} b^1 \wedge ... \wedge b^m. \tag{2.2}$$

Corollaire 2.3 *Si $C = (\vec{c}_i)$ est une autre base, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\det_B = \lambda \det_C, \tag{2.3}$$

à savoir $\lambda = \det_B(\vec{c}_1, ..., \vec{c}_m)$.

Définition 2.4 Si $\lambda > 0$ on dit que les bases B et C ont même orientation.

3 Déterminant $\det_B(L)$ d'un endomorphisme

Définition 3.1 Soit $L \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $B = (\vec{b}_i)_{i=1,...m}$ une base de E de base duale $(b^i)_{i=1,...m}$. On définit le déterminant $\det_B(L)$ par :

$$\det_B(L) \stackrel{\text{déf}}{=} \det_B(L.\vec{b}_1, ..., L.\vec{b}_m). \tag{3.1}$$

Soit les réels :

$$L^i_j \stackrel{\text{déf}}{=} b^i.(L.\vec{b}_j). \tag{3.2}$$

Autrement dit $[L] = [L^i_j]$ appelée la matrice de L relativement à la base B de $L = \sum_{i,j=1}^m L^i_j \vec{b}_i \otimes b^j$. On note :

$$\det_B(L) \stackrel{\text{noté}}{=} \det_B[L^i_j]. \tag{3.3}$$

4 Déterminant det dans $\mathbb{R}^m$ (volume algébrique)

On se place dans le cas $E = \mathbb{R}^m$ muni de sa base canonique $(\vec{E}_i)$, et on note (dx^i) sa base duale.

Définition 4.1 Le déterminant dans $\mathbb{R}^m$ est le déterminant $\det =^{\text{déf}} \det_{(\vec{E}_i)}$:

$$\det = dx^1 \wedge ... \wedge dx^m. \tag{4.1}$$

Et le déterminant est appelé "volume algébrique". Et si $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m \in \mathbb{R}^m$, le réel $\det(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ est le volume algébrique limité par les vecteurs $\vec{v}_1, ...\vec{v}_m$.

Exemple 4.2 Dans $\mathbb{R}^2$ on a $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$. ▪

Remarque 4.3 Dans un espace vectoriel de dimension m, il n'y a pas de base canonique en général : par exemple dans un "plan incliné" dans $\mathbb{R}^3$ (où il n'y a pas de base "canonique").

"La base canonique" n'a de sens que dans un espace produit comme $\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ où la base canonique est $(\vec{E}_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \vec{E}_m = (0, ..., 0, 1))$.

D'ailleurs l'espace $\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ n'est qu'un espace abstrait qui sert de modèle qu'on applique sur un espace observé (il reste alors à fixer "l'unité de longueur" et "la direction des vecteurs de base"). ▪

5 Déterminant $\det(\mathcal{A})$ d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^m$

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ (application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même). On note a^i_j les composantes de $\mathcal{A}.\vec{E}_j$ dans la base canonique $(\vec{E}_i)$:

$$\forall j = 1, ..., n, \quad \mathcal{A}.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^m a^i_j \, \vec{E}_i, \qquad [\mathcal{A}] = [a^i_j]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,m}} \stackrel{\text{noté}}{=} [a^i_j] \stackrel{\text{noté}}{=} A, \tag{5.1}$$

om $[\mathcal{A}]$ est appelée la matrice de $\mathcal{A}$ dans la base canonique. Quand on note simplement $[a^i_j]$, le i est utilisé pour repérer la ligne i et le j est utilisé pour repérer la colonne j. Autrement dit :

$$a^i_j = dx^i.(\mathcal{A}.\vec{E}_j), \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \sum_{ij} a^i_j \, \vec{E}_i \otimes dx^j. \tag{5.2}$$

Définition 5.1 Le déterminant de $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ est :

$$\det(\mathcal{A}) \stackrel{\text{déf}}{=} \det(\mathcal{A}.\vec{E}_1, ..., \mathcal{A}.\vec{E}_m) = \det[a^i_j] = \det[A], \tag{5.3}$$

6 Déterminant $\det(A)$ d'une matrice

Si $A = [a^i_j]$ est une matrice $m*m$, on lui associe l'endomorphisme $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ défini relativement à la base canonique par :

$$\mathcal{A} = \sum_{ij} a^i_j \, \vec{E}_i \otimes dx^j, \qquad [\mathcal{A}] = A = [a^i_j]. \tag{6.1}$$

et le déterminant de la matrice est par définition le déterminant de l'endomorphisme associé :

$$\det(A) \overset{\text{déf}}{=} \det(\mathcal{A}) \overset{\text{noté}}{=} \det[a^i_j]. \tag{6.2}$$

On note I la matrice $n*n$ identité, $I = [\delta^i_j]$: en particulier $\det(I) = 1$ $(= \det(\vec{E}_1, ..., \vec{E}_m))$.

7 Définition des matrices mineures et des mineurs

Soit A une matrice $m*n$. Les matrices mineures de A, ou plus simplement les mineures de A, sont les $m*n$ matrices M^i_j de taille $(m{-}1)*(n{-}1)$ obtenues à partir de A en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Exemple 7.1 Soit $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \end{pmatrix}$. Les 6 mineures sont $M^1_1 = (\, a^2_2 \quad a^2_3 \,)$, $M^1_2 = (\, a^2_1 \quad a^2_3 \,)$,..., $M^2_3 = (\, a^1_1 \quad a^1_2 \,)$. ▪

Et dans le cas $m = n$ (matrices carrées), les mineurs sont les réels $m^i_j = \det(M^i_j)$, déterminants des matrices mineures.

8 Définition des cofacteurs et matrice des cofacteurs

Soit $A = [a^i_j]$ une matrice $n*n$ et ses n^2 mineurs m_{ij}.
Les n^2 cofacteurs de A sont les n^2 réels :

$$c^i_j \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{i+j} m^i_j \qquad (= (-1)^{i+j} \det(M^i_j)). \tag{8.1}$$

Et la matrice C des cofacteurs est la matrice $n*n$:

$$C \overset{\text{déf}}{=} [c^i_j]. \tag{8.2}$$

9 Calculs par récurrence des déterminants de matrices : mineurs et cofacteurs

Quand $C = [c^i_j]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$, on note $C^T = [c^j_i]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ la matrice transposée.

Proposition 9.1 *Le déterminant de A est donné par exemple par le développement par rapport à la première colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m a^i_1 \, c^i_1 = (A.C^T)^1_1 = (C.A^T)^1_1 \qquad (= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \, a^i_1 \, m^i_1), \tag{9.1}$$

où $C^T = [c^j_i]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ est la matrice transposée de C.

Et de même, en développant par rapport à la j-ème colonne pour $j \in [1,m]_{\mathbb{N}}$ quelconque :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m a^i_j \, c^i_j = (A.C^T)^j_j = (C.A^T)^j_j. \tag{9.2}$$

Preuve. Le déterminant est une forme multi-linéaire alternée sur les colonnes, et donc :

$$\begin{aligned}\det(A) = & \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m) = \sum_i a_1^i \det(\vec{E}_i, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m) \\ & = \sum_i a_1^i \det(\vec{E}_i, \vec{a}_2 - a_2^1 \vec{E}_i ..., \vec{a}_m - a_m^1 \vec{E}_i) = \sum_i a_1^i c_1^i.\end{aligned}$$

▪

Exemple 9.2 Dans $\mathbb{R}^3$ on trouve (développement par rapport à la première colonne) :

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = a_1^1 \det \begin{pmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} - a_1^2 \det \begin{pmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} + a_1^3 \det \begin{pmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

▪

10 Déterminant de la transposée

Si $A = [a_j^i]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,m}}$, sa matrice transposée est $A^T = [a_i^j]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,m}}$.

Donc si C est la matrice des cofacteurs de A, alors C^T est la matrice des cofacteurs de A^T. D'où :

Proposition 10.1 *On a :*

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{10.1}$$

Preuve. Avec (9.2) on a $\det(A) = \frac{1}{m} \sum_{ij} a_j^i c_j^i = \frac{1}{m} \sum_{ij} a_i^j c_i^j = \det(A^T)$. ▪

11 Définition de l'inverse de A

Soit A une matrice $n * n$. La matrice A est inversible s'il existe une M matrice $n * n$ telle que :

$$A.M = I, \qquad \text{et} \qquad M \overset{\text{noté}}{=} A^{-1}. \tag{11.1}$$

Exercice 11.1 Montrer qu'en dimension finie, ici dans $\mathbb{R}^n$, si $A.M = I$ alors $M.A = I$.

Réponse. On considère A et M comme des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Soit $(\vec{b}_i)_{i=1,...,n} =^{\text{noté}} (\vec{b}_i)$ une base de $\mathbb{R}^n$, soit $\vec{a}_i = M.\vec{b}_i$ pour tout i. Alors $(\vec{a}_i)$ une base de $\mathbb{R}^n$: sinon, $(A.\vec{a}_i)$ n'est pas une base, donc $(A.\vec{a}_i) = (A.M.\vec{b}_i) = (\vec{b}_i)$ n'est pas une base, contraire à l'hypothèse. Et $A.M.\vec{b}_i = \vec{b}_i$ donne $M.A.M.\vec{b}_i = M.\vec{b}_i$, soit $M.A.\vec{a}_i = \vec{a}_i$, vrai pour tout i. Donc $M.A = I$. ▪

12 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Si $A = [a_j^i]$ et $B = [b_j^i]$ alors le produit matriciel donne :

$$AB = [z_j^i], \qquad \text{où} \qquad z_j^i = \sum_k a_k^i b_j^k. \tag{12.1}$$

Proposition 12.1 *Si A et B sont deux matrices $m \times m$ alors :*

$$\det(AB) = \det(A)\ \det(B), \tag{12.2}$$

i.e. le déterminant du produit est le produit des déterminants. En particulier si A est inversible alors :

$$\det(A^{-1}) = \det(A^\circ)^{-1}. \tag{12.3}$$

Preuve. Démonstration par récurrence sur la dimension de l'espace à l'aide de (9.2). ▪

13 Inverse : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$

Proposition 13.1 *On a, I étant la matrice identité de $\mathbb{R}^m$ et C étant la matrice des cofacteurs de A :*

$$A.C^T = C.A^T = \det(A)\, I = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix}, \tag{13.1}$$

et donc quand A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, C^T. \tag{13.2}$$

Preuve. Terme diagonal : $(A.C^T)^i_i = \sum_{j=1}^m a^i_j c^i_j = \det(A)$, cf. (9.2).

Terme extra diagonal, $j \neq i$. Cas $i = 1$ et $j = 2$ (idem pour les autres cas). Soit B la matrice dont les deux premières colonnes sont identiques et égales à la première colonne de A, et dont toutes les autres colonnes sont celles de A :

$$\forall i = 1, ..., m, \quad b^i_1 = b^i_2 = a^i_1 \qquad \text{et} \qquad \forall i = 1, ..., m,\ \forall j = 3, ...m, \quad b^i_j = a^i_j.$$

Deux colonnes de B étant identiques on a $\det B = 0$, et les cofacteurs c^k_2 sont donc les mêmes pour A et pour B (les colonnes $1, 3, ..., m$ de A et B sont égales). D'où :

$$(A.C^T)^1_2 = \sum_{k=1}^m a^1_k c^2_k = \sum_{k=1}^m b^1_k c^2_k = \sum_{k=1}^m b^2_k c^2_k = \det(B.C^T) = \det(B)\ \det(C^T) = 0.$$

D'où (13.1), d'où (13.2). ∎

14 Déterminant det et produit scalaire euclidien

On se place dans $\mathbb{R}^m$ muni de sa base canonique et du produit scalaire euclidien associé $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^m}$ (défini par $(\vec{E}_i, \vec{E}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}$), et on prend une base orthonormée $B = (\vec{b}_i)$ (relativement au produit scalaire euclidien), et on note (b^i) sa base duale.

Proposition 14.1 *Le déterminant est indépendant du choix de la base orthonormée de même orientation :*

$$\det_B = \det \qquad \textit{quand } B \textit{ est une b.o.n. orientée positive} \tag{14.1}$$

Preuve. Il s'agit de montrer que $b^1 \wedge ... \wedge b^m = dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$.

On a $(b^1 \wedge ... \wedge b^m)(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = 1$.

On a $(dx^1 \wedge ... \wedge dx^m)(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = (dx^1 \wedge ... \wedge dx^m)(\mathcal{P}.\vec{E}_1, ..., \mathcal{P}.\vec{E}_m) = \det(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ est l'endomorphisme de changement de base.

Soit P la matrice de $\mathcal{P}$ donné par $\mathcal{P} = \sum_{i,j=1}^m P^i_j \vec{E}_i \otimes dx^j$, où donc $\vec{b}_j = \mathcal{P}.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^m P^i_j \vec{E}_i$.

Par hypothèse $(\vec{b}_i)$ est orthonormée, soit $(\vec{b}_i, \vec{b}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}$, d'où $\delta_{ij} = \sum_{k\ell} P^k_i P^\ell_j (\vec{E}_k, \vec{E}_\ell)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{k\ell} P^k_i P^\ell_j \delta_{k\ell} = \sum_k P^k_i P^k_j = (P^T.P)^i_j$, d'où $P^T.P = I$. D'où $(\det P)^2 = 1$, d'où $\det P = 1$ car $\det P > 0$, les bases ayant même orientation. ∎

15 Déterminant $\det_B$ et produit scalaire

Soit $g(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_g$ un produit scalaire, soit $(\vec{b}_i)_{i=1,...m}$ une base, et soit $[g]_B = [g_{ij}] = [g(\vec{b}_i, \vec{b}_j)]$ la matrice de g dans la base $(\vec{b}_i)$. En d'autres termes $g = \sum_{ij} g_{ij}\, b^i \otimes b^j$.

Si $\vec{v} = \sum_k v^k \vec{b}_k$ et $\vec{w} = \sum_\ell w^\ell \vec{b}_\ell$ sont deux vecteurs exprimés sur la base $(\vec{b}_i)$, on a :

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k\ell} v^k v^\ell g_{k\ell} = [\vec{v}]_B^T.[g]_B.[\vec{w}]_B.$$

Si $\vec{v}_i = \sum_{k=1}^m v_i^k \vec{b}_k$ pour $i = 1, ..., m$ sont m vecteurs exprimés sur la base B, on note $[V]_B = [v_j^i]_B$ la matrice dont les colonnes sont les composantes des $\vec{v}_j$ dans la base $(\vec{b}_i)$. On obtient matriciellement :

$$[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} = [V]_B^T.[g]_B.[V]_B,$$

d'où pour les déterminants de matrices :

$$\det[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)] = \det[g]_B.(\det[V]_B)^2.$$

Si de plus $(\vec{b}_i)$ est une base directe relativement à $g(\cdot, \cdot)$, i.e. si $\det[g] > 0$, et si les $(\vec{v}_i)$ forment une base orientée positivement, i.e. si $\det[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)] > 0$, on en déduit :

$$\det_B(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m) = \frac{\sqrt{\det[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)]}}{\sqrt{\det[g]_B}} \qquad (= \det[V]_B), \tag{15.1}$$

expression générique utilisée par exemple dans le cas de la métrique euclidienne exprimée dans un système de coordonnées $\vec{\varphi}$.

Proposition 15.1 *Si $C = (\vec{c}_i)$ est une base quelconque on a :*

$$\det_C = \frac{1}{\sqrt{\det[g]_C}} \det_B = \frac{1}{|\det P|} \det_B. \tag{15.2}$$

où P est la matrice de passage d'une base orthonormée $B = (\vec{b}_i)$ à C, i.e. $\vec{c}_j = \sum_i P_j^i \vec{b}_i$.

Preuve. (15.1) donne $\det_C(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = \frac{\sqrt{\det[g(\vec{b}_i, \vec{b}_j)]}}{\sqrt{\det[g]_C}} = \frac{1}{\sqrt{\det[g]_C}}$ quand $B = (\vec{b}_i)$ est une base orthonormée.

Quand P est la matrice de changement de base, $\vec{c}_j = \sum_i P_j^i \vec{b}_i$, soit $P_j^i = b^i.(\vec{c}_j)$ pour tout i, j, on a $[g]_C = P^T.[g]_B.P$ car $g(\vec{c}_i, \vec{c}_j) = g(P.\vec{b}_i, P.\vec{b}_j) = \sum_{k\ell} P_i^k P_j^\ell g(\vec{b}_k, \vec{b}_\ell)$, d'où $\det[g]_C = (\det P)^2 \det[g]_B$ avec ici B orthonormée. ▪

16 Dérivée d'un déterminant

Soit $A(t) = [a_j^i(t)]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ une fonction matricielle $C^1([0, T]; \mathbb{R}^{m^2})$.

Soit $C(t)$ la matrice des cofacteurs de $A(t)$. Donc $A.C^T = \det(A)\, I$, cf. (13.1).

Lemme 16.1 *On a :*

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \sum_{i,j=1}^m \frac{da_j^i}{dt}\, c_j^i = \det(A) \sum_{i,j=1}^m \frac{da_j^i}{dt}\, (A^{-1})_i^j, \tag{16.1}$$

soit :

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \det(A)\, \mathrm{Tr}(\frac{dA}{dt}.A^{-1}), \tag{16.2}$$

où Tr *est la trace (pour une matrice $M = [m_j^i]$ on a $\mathrm{Tr}(M) = \sum_i m_i^i$).*

Preuve. Soit $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$ le vecteur dont les composantes dans la base canonique sont stockées dans la j-ème colonne de A : $[\vec{a}_j] = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^m \end{pmatrix}$. Ainsi $\det(A) = \det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m)$. Comme det est une forme multilinéaire alternée on a :

$$\frac{d(\det(A))}{dt} = \det(\frac{d\vec{a}_1}{dt}, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m) + ... + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \frac{d\vec{a}_m}{dt}).$$

Le j-ème terme de la somme développé par rapport à la j-ème colonne donne :

$$\det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{j-1}, \frac{d\vec{a}_j}{dt}, \vec{a}_{j+1}, ..., \vec{a}_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{da_j^i}{dt}\ c_j^i,$$

et on fait la somme : $\frac{d(\det A)}{dt} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{da_j^i}{dt}\ c_j^i$. ∎

Références

[1] Strang G. : *Linear Algebra and its Applications.* Harcourt Brace (1988).