# Inverse d'une matrice : la matrice transposée des cofacteurs divisée par le déterminant

Gilles Leborgne

1er juin 2011

## Table des matières



## 1 Définition de l'inverse de $A$

On note $I$ la matrice $n*n$ identité.
Soit $A$ une matrice $n*n$. La matrice $A$ est inversible s'il existe une $M$ matrice $n*n$ telle que :

$$A.M = I, \qquad \text{et} \qquad M \overset{\text{noté}}{=} A^{-1}. \tag{1.1}$$

**Exercice 1.1** Montrer qu'en dimension finie, ici dans $\mathbb{R}^n$, si $A.M = I$ alors $M.A = I$.

**Réponse**. On considère $A$ et $M$ comme des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Soit $(\vec{b}_i)_{i=1,\dots,n} =^{\text{noté}} (\vec{b}_i)$ une base de $\mathbb{R}^n$, soit $\vec{a}_i = M.\vec{b}_i$ pour tout $i$. Alors $(\vec{a}_i)$ une base de $\mathbb{R}^n$ : sinon, $(A.\vec{a}_i)$ n'est pas une base, donc $(A.\vec{a}_i) = (A.M.\vec{b}_i) = (\vec{b}_i)$ n'est pas une base, contraire à l'hypothèse. Et $A.M.\vec{b}_i = \vec{b}_i$ donne $M.A.M.\vec{b}_i = M.\vec{b}_i$, soit $M.A.\vec{a}_i = \vec{a}_i$, vrai pour tout $i$. Donc $M.A = I$. ∎

## 2 Définition des matrices mineures et des mineurs

Soit $A$ une matrice $m*n$. Les matrices mineures de $A$, ou plus simplement les mineures de $A$, sont les $m*n$ matrices $M_{ij}$ de taille $(m-1)*(n-1)$ obtenues à partir de $A$ en enlevant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.

**Exemple 2.1** Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$. Les 6 mineures sont $M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$,..., $M_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$. ∎

Et dans le cas $m = n$ (matrices carrées), les mineurs sont les réels $m_{ij} = \det(M_{ij})$, déterminants des matrices mineures $M_{ij}$.

## 3 Définition des cofacteurs et matrice des cofacteurs

Soit $A$ une matrice $n*n$ et ses $n^2$ mineures $M_{ij}$ (et ses $n^2$ mineurs $m_{ij}$).
Les $n^2$ cofacteurs de $A$ sont les $n^2$ réels :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) \qquad (= (-1)^{i+j} m_{ij}). \tag{3.1}$$

Et la matrice $C$ des cofacteurs est la matrice $n*n$ donnée par :

$$C = [c_{ij}]. \tag{3.2}$$

# 4 Inverse : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$

**Proposition 4.1** *Si $A$ est une matrice $n*n$ inversible, si $C$ est sa matrice des cofacteurs, et $C^T$ désignant la transposée, on a :*

$$A.C^T = \det(A).I. \tag{4.1}$$

*Autrement dit* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} C^T$.

*Notations développées :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{n1} \\ \vdots & ... & \vdots \\ c_{1n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det(A) & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \det(A) \end{pmatrix} . \tag{4.2}$$

**Preuve.** On a $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix} = \det(A)$, i.e. $\sum_{j=1}^n a_{1j} c_{1j} = \det(A)$, soit encore $\sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1j}) = \det(A)$ : en effet, c'est le résultat de base du calcul des déterminants obtenus par développement à partir de la 1ère ligne.

Idem pour $i$ à la place de 1 : tous les termes diagonaux valent $\det(A)$.

On a $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_{21} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix} = \det(B)$ où $B$ est la matrice obtenue à partir de $A$ comme suit : toutes les lignes de $B$ sont celles de $A$ sauf la 2-ième où on a recopié la première (donc pour tout $j = 1, ..., n$ on a $\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } i \neq 2, & b_{ij} = a_{ij} \\ \text{si } i = 2, & b_{2j} = a_{1j} = b_{1j} \end{array} \right\}$). En effet, les mineures de $A$ et de $B$ relatifs à la deuxième ligne sont identiques (les mineures suppriment cette ligne), on note $m_{2j}$ les mineurs associés, et donc, en développant par rapport à la 2ème ligne : $\det B = \sum_j b_{2j} (-1)^{i+j} m_{2j} = \sum_j a_{1j} (-1)^{i+j} m_{2j} = \sum_j a_{1j} c_{2j}$. Et comme $B$ est dégénérée (ses deux premières lignes sont égales), on a $\det(B) = 0$.

Idem pour tous les termes non diagonaux, qui sont donc nuls. ∎

**Exemple 4.2** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et $ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. ∎

**Exemple 4.3** Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, et $\det(A) \neq 0$, alors

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$. ∎

# 5 Cas particulier de $\mathbb{R}^3$

On considère $A = [a_{ij}] = \left( (\vec{c}_1) \quad (\vec{c}_2) \quad (\vec{c}_3) \right)$ où le vecteur $\vec{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ donne la $j$-ème colonne de $A$. Par définition du déterminant, $\det(A) =$ le volume du parallélépipède de côtés les vecteurs $\vec{c}_j$. Pour que $A$ soit inversible, il faut donc que ce volume soit non nul, i.e. que les 3 vecteurs $\vec{c}_j$ n'appartiennent pas au même plan (i.e. qu'ils forment une base). Notons alors :

$$A^{-1} = M = [m_{ij}] = \begin{pmatrix} (\vec{\ell}_1) \\ (\vec{\ell}_1) \\ (\vec{\ell}_1) \end{pmatrix},$$

dont les lignes sont données par les composantes des vecteurs $\vec{\ell}_i$. Dire que $M.A = I$ revient à dire que, avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{\ell}_i.\vec{c}_j = \delta_{ij}. \tag{5.1}$$

Donc $\vec{\ell}_1$ est orthogonal à $\vec{e}_2$ et à $\vec{c}_3$, donc est parallèle à $\vec{c}_2 \wedge \vec{c}_3$, soit $\vec{\ell}_1 = \alpha\vec{c}_2 \wedge \vec{c}_3$. Et $\alpha$ est déterminé par $\vec{\ell}_1.\vec{c}_1 = 1$, soit $\alpha(\vec{c}_2 \wedge \vec{c}_3).\vec{c}_1 = 1$, soit $\alpha \det(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3) = 1$, i.e $\alpha \det(A) = 1$. De même pour $\vec{\ell}_2$ et $\vec{\ell}_3$ D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (\vec{c}_2 \wedge \vec{c}_3) \\ (\vec{c}_3 \wedge \vec{c}_1) \\ (\vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2) \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

On peut faire de même dans $\mathbb{R}^n$, après avoir défini les produits vectoriels $\vec{c}_1 \wedge ... \wedge \vec{c}_{n-1}$.