

Rappels (et plus) de Topologie

Gilles LEBORGNE

9 octobre 2020

Table des matières

1 Ouverts et espaces topologiques séparés	2
1.1 Définitions	2
1.2 Construction d'une topologie	3
1.3 Topologie usuelle de \mathbb{R}	4
1.4 Topologie usuelle de \mathbb{R}^n	4
1.5 Voisinages et base de voisinages	5
1.6 Deux topologies essentielles de ℓ^2	6
1.6.1 Définitions	6
1.6.2 Topologie forte de ℓ^2	7
1.6.3 Topologie faible de ℓ^2	7
1.7 Comparaison de topologies	7
1.8 Convergence et limite	8
1.9 Topologie induite	8
1.10 Topologie produit	9
1.10.1 Produit fini	9
1.10.2 Produit infini	9
1.11 Topologie quotient	10
2 Espaces topologiques et fermés	11
3 Point adhérent, point isolé, point d'accumulation, valeur d'adhérence, densité	12
4 Compacité de Borel–Lebesgue	13
4.1 Recouvrement	14
4.2 Définition de Borel–Lebesgue	14
4.3 Les compacts sont toujours fermés	15
4.4 Famille de fermés et compacité	15
4.5 Les compacts de \mathbb{R} usuel sont les fermés bornés	16
4.6 Le caractère compact dépend du choix de la topologie, exemple de ℓ^2	17
4.6.1 $\bar{B}(0, 1)$ n'est pas compacte pour la topologie forte de ℓ^2	17
4.6.2 $\bar{B}(0, 1)$ est compacte pour la topologie faible de ℓ^2	17
4.7 Ensemble relativement compact	18
5 Espace métrique	18
5.1 Définitions	18
5.2 Topologie d'un espace métrique	19
5.3 Topologie usuelle non métrique : celle de la convergence simple	20
5.4 Comparaison de distances	21
5.5 Limite, valeur d'adhérence, suites de Cauchy	23
6 Compacité de Bolzano–Weierstrass	24
6.1 Compacité au sens de Bolzano–Weierstrass	24
6.2 Équivalence définitions de Bolzano–Weierstrass et de Borel–Lebesgue	24
6.2.1 La compacité de Borel–Lebesgue implique celle de Bolzano–Weierstrass	24
6.2.2 Recouvrement et boules $B(x, \varepsilon)$ dans un espace métrique	24
6.2.3 Caractérisation d'un compact par les boules $B(x, \varepsilon)$	25
6.2.4 La compacité de Bolzano–Weierstrass implique celle de Borel–Lebesgue	25
6.3 Un compact est fermé et borné	26
6.4 Dans $(\mathbb{R}, d(\cdot, \cdot))$ un fermé borné n'est pas nécessairement compact	26
7 Espace métrique complet	26
7.1 Densité	26
7.2 Espace métrique séparable et compacité	26
7.3 Espace complet	27
7.4 \mathbb{R} le complété de \mathbb{Q}	28
7.5 Théorème de Baire	28

8	Convergence simple et uniforme de fonctions	29
8.1	Convergence simple de fonctions	29
8.2	Convergence uniforme de fonctions	29
9	Espace normé	30
9.1	Définition et distance associée	30
9.2	Équivalences de normes	31
9.3	Les normes sont équivalentes en dimension finie	32
9.4	Non équivalences des normes en dimension infinie	32
9.5	Espace métrique localement compact, espace normé	32
10	Espace muni d'un produit scalaire	33
11	Continuité	34
11.1	Définition et caractérisations	34
11.2	Premières propriétés	35
11.3	Applications aux espaces métriques et normés	36
11.4	Limite d'un produit de fonctions continues	37
11.5	Uniforme continuité	38
11.6	Fonction Lipschitzienne	38
11.7	Homéomorphie	39
12	Exemples d'applications linéaires non continues	39
13	Familles de semi-distances et espaces de Fréchet	40
13.1	Famille de semi-distances et espace métrisable	40
13.2	Convergence	41
13.3	Continuité	41
13.4	Famille dénombrable de semi-normes, espace de Fréchet	42
13.5	Continuité des applications linéaires	42
13.6	Famille de semi-normes, espace localement convexe séparé	42

1 Ouverts et espaces topologiques séparés

1.1 Définitions

Soit E un ensemble quelconque. Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E .
Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ (un ensemble de sous-ensembles de E).

Définition 1.1 (Topologie) \mathcal{O} est une topologie sur E ssi :

O_1 : Toute union (finie ou infinie) d'éléments de \mathcal{O} est dans \mathcal{O} (stabilité par union), i.e. pour tout ensemble I (quelconque), pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ où $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$, on a $(\bigcup_{i \in I} U_i) \in \mathcal{O}$,

O_2 : Toute intersection finie d'éléments de \mathcal{O} est dans \mathcal{O} (stabilité par intersection finie), i.e. pour tout J ensemble fini, i.e. tel que $\text{Card} J < \infty$ (de cardinal fini), pour toute famille $(U_i)_{i \in J}$ où $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in J$, on a $(\bigcap_{i \in J} U_i) \in \mathcal{O}$,

O_3 : $E \in \mathcal{O}$ et $\emptyset \in \mathcal{O}$.

Définition 1.2 Si \mathcal{O} est une topologie sur E , les éléments de \mathcal{O} sont appelés ouverts de E , et (E, \mathcal{O}) espace topologique.

(Donc un ouvert est un sous-ensemble de E qui appartient à une topologie \mathcal{O} sur E .)

Remarque 1.3 On peut remplacer O_2 par : $\forall A, B \in \mathcal{O}$ on a $A \cap B \in \mathcal{O}$, i.e. toute intersection de deux éléments de \mathcal{O} est dans \mathcal{O} (récurrence). ■

Exemple 1.4 Topologie grossière : $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$.

Topologie discrète : $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$. En particulier si $E \neq \emptyset$, les singletons $\{x\}$ sont des ouverts comme tout sous-ensemble de E .

Et tout ensemble E peut être muni des topologies grossière et discrète.

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $A \neq E$. Alors $\mathcal{O} = \{\emptyset, A, E\}$ est une topologie. (Une union quelconque $B = \bigcup_I U_i$ a pour résultat $B = \emptyset$ ou A ou E : en effet l'union ne peut contenir que des $U_i = \emptyset$, A ou E . Si $B = \emptyset$ ou A ou E c'est bon. Sinon B contient un $x \notin A$, donc x dans l'un des U_i qui n'est pas A , donc cet $U_i = E$, donc B contient E , donc $B = E$.) ■

Définition 1.5 (Topologie séparée) Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est séparé ssi de plus :

O_4 : $x, y \in E$ et $x \neq y$ impliquent qu'il existe deux ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Remarque 1.6 La topologie grossière n'est pas séparée.

Les espaces topologiques qu'on utilise usuellement sont séparés. En particulier, on verra que tout espace métrique (i.e. muni d'une distance) est séparé (c'est donc en particulier vrai pour un espace normé).

Noter que la topologie de la convergence simple des fonctions n'est pas une topologie métrique. Mais cette topologie est tout de même séparée. Voir plus loin paragraphe 5.3.

De fait, quand on vérifie que \mathcal{O} est une topologie, on regarde également si elle est séparée, i.e. on vérifie généralement O_1, O_2, O_3 et O_4 . ■

Remarque 1.7 Ne pas confondre "espace séparé" qui est la définition ci-dessus, et "espace séparable" qui ne s'applique qu'à des espaces métriques E et qui signifie que E contient une suite dénombrable dense, voir plus loin définition 7.2. ■

Définition 1.8 Soit E un espace topologique, soit $A \subset E$. On appelle intérieur de A , et on note $\overset{\circ}{A}$ ou A° ou $\overset{\circ}{\widehat{A}}$, la réunion de tous les ouverts contenus dans A , i.e. $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}, U \subset A} U$.

Proposition 1.9 Soit $A \subset E$. Alors $\overset{\circ}{A} \subset A$, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, et c'est le plus grand ouvert contenu dans A . Et A est ouvert ssi $A = \overset{\circ}{A}$.

Preuve. Par définition de $\overset{\circ}{A}$ on a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$. Puis, avec la définition O_1 , $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. Et si V est un ouvert inclus dans A alors $V \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}, U \subset A} U$, et donc $\overset{\circ}{A} \supset V$, et donc $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Si $A \subset \mathcal{O}$ (A est un ouvert), alors $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}, U \subset A} U = \overset{\circ}{A}$, et comme on a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a $A = \overset{\circ}{A}$. ■

Exercice 1.10 Montrer que $A \subset B$ implique $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et que $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$. ■

Exercice 1.11 Montrer que $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, mais qu'en général $(A \cup B)^\circ \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ (prendre $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$). ■

Pour $A \subset E$ on note :

$$\mathcal{C}_E A = E - A \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in E \text{ t.q. } y \notin A\}, \quad (1.1)$$

le complémentaire de A dans E .

Définition 1.12 L'extérieur de A est $(E - A)^\circ$ (intérieur $\overset{\circ}{E - A}$ de $E - A$). (Quand on aura vu les fermés, c'est aussi $E - \bar{A}$).

La frontière de A est $E - (\overset{\circ}{A} \cup (E - A)^\circ)$. (Quand on aura vu les fermés, c'est aussi $\bar{A} - \overset{\circ}{A}$).

1.2 Construction d'une topologie

Soit E un ensemble et $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles de E .

On souhaite trouver la plus petite topologie pour laquelle tous les U_i sont ouverts. (N.B. : la topologie discrète est telle que tous les U_i sont nécessairement ouverts, mais ce n'est pas toujours la plus petite).

Proposition 1.13 et définition. Soit E un ensemble, et soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles.

- 1- Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble qui contient toutes les intersections finies des U_i ,
- 2- soit \mathcal{O} l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de \mathcal{B} ,
- 3- on impose \emptyset et E dans \mathcal{O} .

Alors \mathcal{O} est une topologie, et c'est la plus petite qui contient tous les U_i : toute topologie qui contient les U_i contient \mathcal{O} . Elle est appelée topologie engendrée par les U_i .

Preuve. Il est clair que si une topologie contient les U_i alors elle contient \mathcal{O} , car O_2, O_1 et O_3 doivent être vérifiés. Montrons donc que \mathcal{O} est une topologie.

Comme \mathcal{O} contient \emptyset et E , O_3 est vérifié. Considérons donc que la famille $(U_i)_{i \in I}$ contient \emptyset et E .

Par définition de \mathcal{O} , un élément $A \subset \mathcal{O}$ est de la forme $A = \bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{j \in J} V_{kj} \right)$ où K est un ensemble quelconque et

J un ensemble fini, et où $V_{kj} \in (U_i)_{i \in I}$ pour tout $(k, j) \in K \times J$ (i.e. V_{kj} est l'un des U_i : pour tout $(k, j) \in K \times J$ il existe $i \in I$ tel que $V_{kj} = U_i$).

Vérifions \mathcal{O}_1 : une réunion quelconque d'éléments de \mathcal{O} est de la forme $A = \bigcup_{\ell \in L} \left(\bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{j \in J} V_{kj}^\ell \right) \right) =$

$\bigcup_{(k,\ell) \in K \times L} \left(\bigcap_{j \in J} W_{(k,\ell)j} \right)$ où $W_{(k,\ell)j} = V_{kj}^\ell \in (U_i)_{i \in I}$. Comme $K \times L$ ensemble quelconque et J fini, on a bien $A \in \mathcal{O}$.

Vérifions \mathcal{O}_2 : soit, pour $\alpha = 1, 2$, les deux ensembles $A_\alpha = \bigcup_{k_\alpha \in K_\alpha} \left(\bigcap_{j_\alpha \in J_\alpha} V_{k_\alpha j_\alpha}^\alpha \right)$ dans \mathcal{O} (les ensembles K_1, K_2 étant quelconques et les ensemble J_1, J_2 étant finis). Notons $W_{k_\alpha} = \bigcap_{j_\alpha \in J_\alpha} V_{k_\alpha j_\alpha}^\alpha$

On a $A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{k_1 \in K_1} W_{k_1} \right) \cap \left(\bigcup_{k_2 \in K_2} W_{k_2} \right) = \bigcup_{(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2} (W_{k_1} \cap W_{k_2})$, voir exercice suivant 1.14. Comme $W_{k_1} \cap W_{k_2} = \bigcap_{(j_1, j_2) \in J_1 \times J_2} (V_{k_1 j_1}^1 \cap V_{k_2 j_2}^2)$ et que $J_1 \times J_2$ est fini, on a $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$. Par récurrence, l'intersection finie de toute famille finie d'ouverts de \mathcal{O} est un ouvert de \mathcal{O} .

Donc \mathcal{O} vérifie $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ et \mathcal{O}_3 et est donc une topologie. \blacksquare

Exercice 1.14 Redémontrer le résultat sur les ensembles : si $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ et $\{B_\beta : \beta \in J\}$ sont deux familles quelconques d'ensembles, alors l'intersection des unions est l'union des intersections :

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta \right) = \bigcup_{\alpha \in I, \beta \in J} (A_\alpha \cap B_\beta).$$

Réponse. $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta \right)$ ssi
 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$ et $x \in \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta \right)$ ssi
 $(\exists \alpha \in I : x \in A_\alpha)$ et $(\exists \beta \in J : x \in B_\beta)$ ssi
 $\exists (\alpha, \beta) \in I \times J$ t.q. $x \in (A_\alpha \cap B_\beta)$. \blacksquare

1.3 Topologie usuelle de \mathbb{R}

Définition 1.15 C'est la topologie engendrée par les intervalles ouverts (i.e. la plus petite topologie contenant les intervalles ouverts). Et \mathbb{R} muni de cette topologie est appelé \mathbb{R} usuel.

On construit la topologie usuelle \mathcal{O} de \mathbb{R} à l'aide de la proposition précédente, avec ici l'avantage qu'une intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert : $]a, b[\cap]c, d[=]\alpha, \beta[$ où $\alpha = \max(a, c)$ et $\beta = \min(b, d)$ quand $\alpha < \beta$, et $= \emptyset$ sinon. Puis par récurrence pour l'intersection de n intervalles ouverts. L'étape 1 de la proposition précédente n'est pas utile ici.

Et donc un ouvert sera une réunion qq d'intervalles ouverts.

Il est immédiat que \mathcal{O}_4 est vérifiée : cette topologie est séparée.

Noter qu'un singleton $[a, a] = \{a\}$ n'est pas un ouvert. En effet, ce n'est pas une réunion d'intervalles ouverts car aucun intervalle ouvert n'est contenu dans $[a, a]$ (à part \emptyset , mais une réunion qq d'ensembles vides est l'ensemble vide), et ce n'est pas une intersection finie d'intervalles ouverts car une telle intersection est un intervalle ouvert. La topologie usuelle de \mathbb{R} n'est donc pas la topologie discrète.

Remarque 1.16 Dans la proposition 1.13 l'ordre de construction (i) puis (ii) est important, i.e. on considère les ouverts $\bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{j \in J} V_{kj} \right)$ (avec J fini). Si on commence par faire (ii) puis (i), on considère alors les ouverts $A_{LJ} = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{\ell \in L} U_{\ell j} \right)$, mais on n'a pas la stabilité par union qq : il faut refaire (ii). En effet une union quelconque d' A_{LJ} n'est pas de la forme intersection finie d'union qq.

D'ailleurs, on verra au paragraphe suivant qu'une base de voisinages est l'ensemble \mathcal{B} (constituée des intersections finies), qui est construit à l'étape (i) de la proposition précédente. \blacksquare

1.4 Topologie usuelle de \mathbb{R}^n

Soit \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne usuelle : notant $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n}$ la base canonique usuelle, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est donné par $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$:

$$\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (1.2)$$

Définition 1.17 La topologie usuelle de \mathbb{R}^n est la topologie engendrée par les boules ouvertes $B(\vec{x}, \varepsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{y} - \vec{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\}$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon > 0$.

Pour $\alpha < \beta$, on note (α, β) un intervalle de type $[\alpha, \beta]$, $] \alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$ ou $] \alpha, \beta [$.

Définition 1.18 Un pavé dans \mathbb{R}^n est un ensemble de type : il existe des $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ avec $a_i < b_i$ t.q., notant $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \dots, n, x_i \in (a_i, b_i)\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \dots, n, \exists \lambda_i \in (0, b_i - a_i), \vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

et \vec{x}_0 est un sommet du pavé.

Proposition 1.19 Tout ouvert de \mathbb{R}^n est une réunion disjointe (au plus) dénombrable de pavés.

Preuve. On suit Rudin [5]. On appelle boîte d'amplitude $\delta > 0$ et de sommet $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ le "pavé carré" (semi-ouvert) :

$$Q(\vec{x}, \delta) = \{\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \dots, n, y_i \in [x_i, x_i + \delta]\}. \quad (1.4)$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$P_k = \{\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \exists m_{ki} \in \mathbb{Z}, x_i = m_{ki} 2^{-k}\}, \quad (1.5)$$

l'ensemble des points de \mathbb{R}^n dont les coordonnées sont des multiples de 2^{-k} . On note :

$$\Omega_k = \{Q(\vec{x}, 2^{-k}) : \vec{x} \in P_k\}, \quad (1.6)$$

l'ensemble des boîtes d'amplitude 2^{-k} de sommet un des $\vec{x} \in P_k$.

On a immédiatement :

0- le volume d'un $Q \in \Omega_k$ est $\mu_\ell(Q) = (2^{-k})^n = 2^{-nk}$.

1- Pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique boîte $Q_k \subset \Omega_k$ t.q. $\vec{y} \in Q_k$ (et Ω_k constitue un "pavage" de \mathbb{R}^n par des pavés de "taille 2^{-nk} ").

2- Si $Q \in \Omega_k$ et $Q' \in \Omega_m$ avec $k < m$ alors soit $Q' \subset Q$, soit $Q' \cap Q = \emptyset$.

3- Si $Q \in \Omega_k$ et si $k < m$, alors l'ensemble P_m a exactement $2^{(m-k)n}$ points dans Q .

Montrons : tout ouvert U non vide de \mathbb{R}^n est une réunion dénombrable de boîtes disjointes appartenant à $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$, ce qui montrera la proposition.

Comme U est ouvert, pour tout $\vec{y} \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset U$. Et donc, avec 0- et 1-, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $Q_k \subset \Omega_k$ t.q. $\vec{y} \in Q_k$ avec $Q_k \subset B(\vec{y}, \varepsilon)$. Et donc U est la réunion de toutes ces boîtes Q_k .

De cette réunion, on extrait toutes les boîtes de Ω_1 (faire un dessin), puis on exclut les boîtes de $\Omega_2, \Omega_3, \dots$, qui sont incluses dans les boîtes de Ω_1 extraites. Des boîtes restantes, on extrait toutes les boîtes de Ω_2 , puis on exclut les boîtes de $\Omega_3, \Omega_4, \dots$, qui sont incluses dans les boîtes de Ω_1 et Ω_2 déjà extraites. Et on itère le procédé. On a ainsi recouvert U par des boîtes disjointes de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$. ■

1.5 Voisinages et base de voisinages

On se donne un espace topologique (E, \mathcal{O}) .

Définition 1.20 On appelle voisinage ouvert d'un point $x \in E$ tout sous-ensemble $V \subset E$ contenant un ouvert contenant x .

Notation. Pour $x \in E$, on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages ouverts de x .

Donc :

$$[V \text{ voisinage ouvert de } x] \iff [V \in \mathcal{V}(x)] \iff [\text{il existe } U \in \mathcal{O} \text{ tel que } x \in U \text{ et } U \subset V].$$

Remarque 1.21 Quand on disposera des fermés (resp. des compacts), on appellera voisinage fermé (resp. voisinage compact) de x : un fermé (resp. compact) F qui contient un ouvert $U \in \mathcal{V}(x)$.

N.B. : dans ce poly, quand on parlera de voisinage sans autre précision, ce sera de voisinages ouverts dont il s'agira. ■

Exemple 1.22 Dans \mathbb{R} usuel, $[-1, 1[\cup]2, 3]$ et $] -3; 2[$ appartiennent à $\mathcal{V}(0)$. Pas $[0, \infty[$. ■

Proposition 1.23

1- L'intersection de deux voisinages ouverts de x est un voisinage ouvert de x .

2- Si $W \supset V$ où V est un voisinage ouvert de x alors W est un voisinage ouvert de x .

Preuve. Immédiat. ▀

Proposition 1.24 *Un ouvert est voisinage ouvert de chacun des ses points, et réciproquement, si $A \subset E$ est un ensemble qui est voisinage ouvert de chacun de ses points alors A est ouvert.*

Preuve. Par définition d'un voisinage ouvert, si U est ouvert et si $x \in U$ alors, comme $U \supset U$, on a : U est voisinage ouvert de x .

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in A$ on a $A \in \mathcal{V}(x)$. Donc pour chaque $x \in A$ il existe $U_x \subset A$ avec U_x ouvert et $x \in U_x$. Et on a immédiatement $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, d'où A est union d'ouverts, d'où A est ouvert. ▀

Proposition 1.25 *Si (E, \mathcal{O}) est séparé, alors pour tout $x \in E$ on a $\bigcap_{V \subset \mathcal{V}(x)} V = \{x\}$.*

Preuve. Comme $x \in V$ pour tout $V \subset \mathcal{V}(x)$, on a bien $\{x\} \subset \bigcap_{V \subset \mathcal{V}(x)} V$.

Puis soit $y \in E$, $y \neq x$. Comme E est séparé, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ t.q. $y \notin V$. Donc y n'appartient pas à l'intersection. Donc seul x appartient à l'intersection. ▀

Définition 1.26 Soit $x \in E$. Une partie $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages ouverts en x ssi :

- 1- $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$, et
- 2- $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B \subset V$ (tout voisinage de x contient un élément de la base).

Définition 1.27 Si une base $\mathcal{B}(x)$ de voisinages ouverts en x est constituée d'ouverts, on dit que $\mathcal{B}(x)$ est une base d'ouverts.

Exemple 1.28 Dans \mathbb{R} usuel, pour $x \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{B}(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ où $B_n =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$: $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages ouverts en x (ici base dénombrable de voisinages) qui est également une base d'ouverts en x .

En effet, soit $V \in \mathcal{V}(x)$: il existe donc $]a, b[\ni x$ et $]a, b[\subset V$. On prend alors $h = \frac{1}{2} \min(x-a, b-x)$, puis n un entier tel que $n \geq \frac{1}{h}$: alors $B_n =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\subset]a, b[\subset V$. ▀

Définition 1.29 Un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages ouverts de E ssi pour tout $x \in E$ il existe $\mathcal{B}(x)$ une base de voisinages ouverts en x t.q. $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}$.

Et si $B \subset \mathcal{O}$, on dit que B est une base d'ouverts de E .

Définition 1.30 Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est à base dénombrable de voisinages ouverts ssi il existe une base \mathcal{B} de voisinages ouverts qui soit dénombrable.

Exemple 1.31 \mathcal{O} lui-même constitue une base de voisinages.

Dans \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle, l'ensemble $\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages ouverts de \mathbb{R} .

Dans \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle, l'ensemble $\{]q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}[: q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base dénombrable de voisinages ouverts de \mathbb{R} ; et donc \mathbb{R} est un espace topologique à base dénombrable de voisinages ouverts. ▀

Proposition 1.32 *On se place dans le cadre de la proposition 1.13 : soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E et \mathcal{O} la topologie engendrée par les U_i .*

Alors pour tout ouvert $A \in \mathcal{O}$, il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que l'ouvert $\bigcap_{j \in J} U_j$ soit entièrement dans A . Autrement dit, l'ensemble des intersections finies de U_i constitue une base d'ouverts.

Preuve. Par définition A contient une union (qqq) d'intersections finies (cf. proposition 1.13), donc contient un élément de l'union (puisqu'il les contient tous), i.e. contient une intersection finie. Et une intersection finie est un ouvert par définition de la topologie engendrée. ▀

1.6 Deux topologies essentielles de ℓ^2

1.6.1 Définitions

Soit :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}, \quad (1.7)$$

l'ensemble de toutes les suites de réels. C'est la limite de \mathbb{R}^n quand $n \rightarrow \infty$. (Ou encore $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est l'ensemble des suites finies de réels, alors que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est l'ensemble des suites infinies de réels).

L'espace ℓ^2 est le sous-ensemble des suites d'énergie finie :

$$\ell^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}. \quad (1.8)$$

C'est le prototype des "espaces de Hilbert" en dimension infinie (voir plus loin).

1.6.2 Topologie forte de ℓ^2

C'est la topologie engendrée par les boules ouvertes

$$B((x_n), r) = \{(y_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - x_n)^2 < r^2\}.$$

C'est la topologie pour laquelle les boules $B((x_n), r)$ constituent une base de voisinages. On notera $\|(x_n)\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (norme), et donc $B((x_n), r) = \{(y_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2 : \|(y_n) - (x_n)\|_{\ell^2} < r\}$.

1.6.3 Topologie faible de ℓ^2

C'est la topologie \mathcal{O} engendrée par les $]a_1, b_1[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots, \mathbb{R} \times]a_2, b_2[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots, \dots$ (voir également la définition de la topologie produit). Cette topologie a pour base d'ouverts l'ensemble \mathcal{B} constituée des ouverts qui sont les intersections finies :

$$\left(\prod_{1 \leq j \leq n}]a_j, b_j[\right) \times \left(\prod_{i > n} \mathbb{R} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $a_j, b_j \in \bar{\mathbb{R}}$. I.e., pour la topologie faible, un ouvert est de type $(\prod_{j=1, \dots, n}]a_j, b_j[) \times (\prod_{i > n} \mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_j, b_j \in \bar{\mathbb{R}}$, et tout voisinage ouvert d'un point contient un ouvert de ce type. Et en particulier un ouvert pour la topologie faible n'est jamais borné au sens de la topologie forte.

Remarque 1.33 On verra que cette topologie est celle qui rend continue toutes les applications “projection sur la j -ème composante” $p_j : (x_n) \in \ell^2 \rightarrow x_j \in \mathbb{R}$, puisque par définition une application est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, et que la topologie faible (= la topologie produit) est construite à partir des ouverts $p_j^{-1}(]a, b[) = (\prod_{i < j} E_i) \times]a, b[\times (\prod_{i > j} E_i)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. ■

C'est une des topologies les plus utiles pour obtenir certains théorèmes d'existence (voir les paragraphes sur la compacité).

1.7 Comparaison de topologies

Définition 1.34 Soit E muni de deux topologies \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 . On dit que \mathcal{O}_1 est plus fine (ou plus forte ou plus précise) que \mathcal{O}_2 ssi : $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$, i.e. ssi : tout ouvert de \mathcal{O}_2 est un ouvert de \mathcal{O}_1 .

Dans ce cas on dit aussi que \mathcal{O}_2 est plus grossière (ou moins fine ou moins précise) que \mathcal{O}_1 .

Et si $\mathcal{O}_2 \subsetneq \mathcal{O}_1$, on dit que \mathcal{O}_1 est strictement plus fine que \mathcal{O}_2 .

Les topologies \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 sont dites équivalentes si elle sont identiques, i.e. ssi \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_2 est plus fine que \mathcal{O}_1 , i.e. $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Donc, plus la topologie est fine, plus elle a d'ouverts, et plus elle est “précise”.

Exemple 1.35 Toute topologie sur un ensemble est plus fine que la topologie grossière.

Dans \mathbb{R} , la topologie usuelle \mathcal{O}_1 (euclidienne) est strictement plus fine que la topologie grossière \mathcal{O}_2 (par exemple $]0, 1[$ n'est pas un ouvert de la topologie grossière).

La topologie discrète est plus fine que toute autre topologie définie sur E .

Dans \mathbb{R} , la topologie discrète est strictement plus fine que la topologie usuelle : un singleton $\{x\}$ n'est pas ouvert pour la topologie usuelle. ■

Exemple 1.36 Exemple dans \mathbb{R}^2 : la topologie euclidienne (usuelle) donnée par la norme $\|\vec{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ (les boules sont “rondes”), et la topologie produit (ayant $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) donnée par la norme $\|\vec{x}\|_{\infty} = \sup(|x_1|, |x_2|)$ (les boules sont “carrées”) sont identiques : un ouvert d'un point x pour une topologie est également ouvert pour l'autre. Faire un dessin : une boule rectangulaire $B_{\infty}(x, \eta_x)$ est l'union des boules rondes $B_2(y, \varepsilon_y)$ où $y \in B_{\infty}(y, \eta_y)$ et ε_y est la distance de y au carré, et une boule ronde $B_2(x, \varepsilon_x)$ est l'union des boules rectangulaires $B_{\infty}(y, \eta_y)$ où $y \in B_2(x, \varepsilon_x)$ et η_y est la distance de y au cercle.

Ici les normes sont différentes mais elles définissent la même topologie (les mêmes ouverts). ■

Exemple 1.37 La topologie forte de ℓ^2 contient la topologie faible de ℓ^2 : les ouverts de la topologie faible appartiennent à la topologie forte (ce sont des ouverts pour la topologie forte).

Mais les boules ouvertes $B(0, R)$, avec $R > 0$, de la topologie forte ne sont jamais des ouverts de la topologie faible car elles sont bornées : la topologie forte contient strictement la topologie faible.

Dans ℓ^2 la topologie forte est strictement plus fine que la topologie faible. ■

Proposition 1.38 \mathcal{O}_1 est plus fine (i.e. plus forte) que \mathcal{O}_2 ssi : pour tout $a \in E$, tout voisinage ouvert de a pour \mathcal{O}_2 est un voisinage ouvert de a pour \mathcal{O}_1 .

Deux topologies sur E qui admettent les mêmes voisinages ouverts sont identiques.

Preuve. Supposons \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 . Alors si V_a est un voisinage ouvert de a pour \mathcal{O}_2 , il existe $U_a \in \mathcal{O}_2$ avec $U_a \subset V_a$, et l'hypothèse $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ donne $U_a \in \mathcal{O}_1$. D'où V_a est un voisinage ouvert de a pour \mathcal{O}_1 .

Réciproquement, si c'est vrai pour tout voisinage ouvert, c'est vrai pour tout ouvert : soit $U_2 \in \mathcal{O}_2$ (ouvert pour \mathcal{O}_2) et soit $x \in U_2$. En particulier U_2 est un voisinage de x pour \mathcal{O}_2 , donc c'est un voisinage de x pour \mathcal{O}_1 , donc U_2 contient un ouvert $U_{1x} \in \mathcal{O}_1$ avec $x \in U_{1x}$. D'où $U_2 = \bigcup_{x \in U_2} U_{1x}$ est donc un ouvert de \mathcal{O}_1 . Donc si $U_2 \in \mathcal{O}_2$ alors $U_2 \in \mathcal{O}_1$.

D'où si \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 ont les mêmes voisinages alors elles ont les mêmes ouverts, i.e. $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. \blacksquare

1.8 Convergence et limite

Définition 1.39 Une suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ de points de E converge vers un point $x \in E$ (et on note $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$) ssi pour tout voisinage V de x il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $x_n \in V$:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \iff \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V. \quad (1.9)$$

Et x est appelé limite de la suite (x_n) .

Réécriture de (1.9) : pour tout voisinage V de x ("aussi petit soit-il"), il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_n)_{n \geq N}$ est toute entière dans V .

Proposition 1.40 Dans (1.9), on peut remplacer " $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ " par " $\forall V$ dans une base d'ouverts".

Preuve. C'est immédiat. \blacksquare

Définition 1.41 Une suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ de points de E est convergente dans E ssi il existe $x \in E$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Remarque 1.42 La notion de limite vers x n'a de sens que si $x \in E$. En particulier il faut pouvoir considérer les $\mathcal{V}(x)$. Ainsi dans \mathbb{Q} muni de la topologie usuelle (induite par \mathbb{R} voir paragraphe suivant 1.9), une suite de rationnels (q_n) qui converge vers $\sqrt{2}$ n'est pas convergente dans \mathbb{Q} (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Elle sera convergente uniquement dans \mathbb{R} qui est le complété de \mathbb{Q} .

Pour parler de complété, on aura besoin de travailler dans un espace métrique et d'introduire les suites de Cauchy, i.e. les suites telles que " $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$ ". Noter qu'un des intérêts primordiaux des suites de Cauchy sera également de savoir si une suite (x_n) est "convergente" sans avoir à connaître (ou à deviner) la limite x . \blacksquare

1.9 Topologie induite

Définition 1.43 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique et soit A un sous-ensemble de E (i.e. $A \subset E$). On appelle topologie induite sur A la topologie $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ (les ouverts sont ceux de E intersection A).

Exemple 1.44 Soit $E = [0, 1]$. La topologie induite par \mathbb{R} donne pour base de voisinages de E les intersections $]a, b[\cap [0, 1]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. Donc $[0, 1]$ est un ouvert de E (puisque c'est l'ensemble E tout entier), de même que $[0, \frac{1}{2}[=]-1, \frac{1}{2}[\cap [0, 1]$. \blacksquare

Proposition 1.45 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique et soit $A \subset E$. Alors (A, \mathcal{O}_A) muni de la topologie induite est un espace topologique.

Preuve. On a :

- \mathcal{O}_1 - $\bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap A$ est bien dans \mathcal{O}_A .
- \mathcal{O}_2 - $\bigcap_{i \in J} (U_i \cap A) = (\bigcap_{i \in J} U_i) \cap A$ pour J fini est bien dans \mathcal{O}_A .
- \mathcal{O}_3 - $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}_A$ et $A = E \cap A \in \mathcal{O}_A$.

\blacksquare

Proposition 1.46 Soit E espace topologique, $A \subset E$ et A muni de la topologie induite.

Si A est ouvert dans E et si B est ouvert dans A alors B est ouvert dans E .

Preuve. Si $B \in \mathcal{O}_A$, on a $B = U \cap A$ où U est ouvert de E . D'où si A est ouvert dans E , $U \cap A$ est ouvert dans E , d'où B ouvert dans E . \blacksquare

Remarque 1.47 Si B est ouvert dans A et si on ne suppose pas A ouvert dans E , on ne peut pas conclure que B est ouvert dans E : prendre $E = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et $A = [0, 1[$ et $B = A$. On a bien B ouvert dans (A, \mathcal{O}_A) , mais B n'est pas ouvert dans \mathbb{R} . (Ici A n'est pas ouvert dans \mathbb{R} .) \blacksquare

1.10 Topologie produit

1.10.1 Produit fini

Proposition 1.48 (Et définition pour un produit fini d'espaces topologiques).

Si (E_1, \mathcal{O}_1) et (E_2, \mathcal{O}_2) sont deux espaces topologiques, alors $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ engendre une topologie (est une base d'ouverts) dans $E_1 \times E_2$. Et $(E_1 \times E_2, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ est appelé espace topologique produit.

Et si les (E_j, \mathcal{O}_j) , pour $j \in J$ et $\text{Card} J < \infty$, sont des espaces topologiques, alors $\prod_{j \in J} \mathcal{O}_j$ est une topologie dans $\prod_{j \in J} E_j$. Et $(\prod_{j \in J} E_j, \prod_{j \in J} \mathcal{O}_j)$ est appelé espace topologique produit.

Preuve. Les propriétés O_1 , O_2 et O_3 sont immédiatement vérifiées. ▀

Exemple 1.49 L'espace usuel $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est muni de la topologie dont les ouverts sont générés à l'aide des "pavés" $]a, b[\times]c, d[$ pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ▀

Remarque 1.50 La proposition précédente permettra d'avoir le résultat fondamental : une fonction $\vec{f} : x \in E \rightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ est continue ssi ses composantes $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont toutes continues. ▀

1.10.2 Produit infini

On ne généralise pas la définition 1.48 à un produit infini d'espaces topologiques, une telle généralisation ne donnant pas suffisamment de résultats intéressants. On utilise la définition suivante qui permettra d'avoir un espace topologique avec "peu d'ouverts" (topologie "faible"), chaque ouvert étant "grand", et donc un espace topologique avec "beaucoup de compacts", et donc de nombreux résultats d'existence :

Définition 1.51 (Topologie produit pour un nombre dénombrable d'espaces topologiques.)

Soit $(E_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces topologiques. Dans l'espace produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$ on considère les ensembles :

$$\left(\prod_{i < j} E_i \right) \times U_j \times \left(\prod_{i > j} E_i \right), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall U_j \in \mathcal{O}_j.$$

La plus petite topologie engendrée par ces ensembles est appelée topologie produit, chaque ensemble précédent étant donc en particulier un ouvert.

Exercice 1.52 Voir paragraphe 1.6 : la topologie faible de ℓ^2 est la topologie produit induite par la topologie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \prod_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}$, chaque \mathbb{R} étant muni de la topologie usuelle. ▀

Proposition 1.53 Si les (E_i, \mathcal{O}_i) sont des espaces topologiques pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors les ensembles :

$$\left(\prod_{j \leq n} U_j \right) \times \left(\prod_{i > n} E_i \right),$$

forment une base de voisinages ouverts quand n décrit \mathbb{N} et quand les U_j sont des ouverts de E_j (donc éventuellement E_j tout entier).

Preuve. On applique la proposition 1.13 : les $(\prod_{j \leq n} U_j) \times (\prod_{i > n} E_i)$ sont les intersections finies. ▀

Définition 1.54 (Topologie produit pour un nombre infini quelconque d'espaces topologiques.)

Si $(E_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques où I est un ensemble infini quelconque, dans l'espace $\prod_{i \in I} E_i$ on impose que tout ensemble $\prod_{i \in I} U_i$, où $U_i = E_i$ sauf pour un nombre fini de $i \in I$ et où U_i est ouvert dans E_i pour tout i , est ouvert. La topologie engendrée est appelée topologie produit.

(On dit également que $U_i = E_i$ pour presque tout $i \in I$ pour dire que $U_i = E_i$ pour tout i sauf pour un nombre fini.)

Remarque 1.55 Ces définitions donneront des résultats fondamentaux dans le cas d'applications continues entre espaces munis de familles de semi-normes. ▀

Exercice 1.56 Montrer que si chaque E_i est séparé, alors $E = \prod_{i \in I} E_i$ est séparé lorsqu'il est muni de la topologie produit. ▀

1.11 Topologie quotient

Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique et soit \mathcal{R} une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

Définition 1.57 Une classe d'équivalence de E est un sous-ensemble X de E tel que si $x \in X$ alors $X = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}$.

On note E/\mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence, appelé ensemble quotient.

Soit $\pi : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ l'application, appelée surjection canonique, définie par :

$$\pi(x) = \dot{x}, \quad (1.10)$$

i.e. à chaque $x \in E$ on associe l'ensemble \dot{x} qui est sa classe d'équivalence.

Définition 1.58 Le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E/\mathcal{R})$ défini par :

$$\dot{\mathcal{O}} = \{\mathcal{A} \subset E/\mathcal{R} \text{ t.q. } \pi^{-1}(\mathcal{A}) \text{ ouvert dans } E\} \quad (1.11)$$

est appelée la topologie quotient.

Proposition 1.59 (et définition.) $\dot{\mathcal{O}}$ est une topologie sur E/\mathcal{R} . Ainsi $(E/\mathcal{R}, \dot{\mathcal{O}})$ est un espace topologique, appelé espace topologique quotient.

Preuve. On vérifie immédiatement O_1 , O_2 et O_3 : $\dot{\mathcal{O}}$ est une topologie sur E/\mathcal{R} . ▀

Comme $\mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, la topologie quotient s'écrit également :

$$\dot{\mathcal{O}} = \{\mathcal{A} \subset E/\mathcal{R} \text{ t.q. } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \pi^{-1}(A) \text{ ouvert dans } E\}$$

(Voir plus loin exercice 1.62.)

Exemple 1.60 Soit dans \mathbb{R} la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$.

Les éléments X de $\mathbb{R}/\mathcal{R} \stackrel{\text{noté}}{=} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont les sous-ensembles de \mathbb{R} de la forme $x + \mathbb{Z} \subset X$ pour x qcq dans \mathbb{R} .

Ici $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$ (souvent noté $= X$) quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Noter que dans certains cas on pourra ainsi identifier \mathbb{R}/\mathbb{Z} avec $[0, 1[$: si $X \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ alors il existe $x \in [0, 1[$ tel que $x \in X$: en effet, si $y \in X$, ayant $X = y + \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - k \in [0, 1[$ et $y - k \in X$. Et usuellement pour $X \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on prend comme élément x le représentant le $x \in [0, 1[$ vérifiant $\dot{x} = X$ (le x tel que $x \in [0, 1[\cap X$).

Attention cependant à ne pas faire systématiquement cette identification : voir exemple 1.61. ▀

Exemple 1.61 Dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\pi(x) = \dot{x} = x + \mathbb{Z}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\pi^{-1}(\dot{x}) = \pi^{-1}(x + \mathbb{Z}) = x + \mathbb{Z}$ (et on n'a pas $\pi^{-1}(\dot{x}) = \{x\}$).

Et par exemple, $]\frac{1}{2}, 1[+ \mathbb{Z} \in \dot{\mathcal{O}}$ (est un ouvert de \mathbb{R}/\mathbb{Z}) puisque $\pi^{-1}(]\frac{1}{2}, 1[+ \mathbb{Z}) =]\frac{1}{2}, 1[+ \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{1}{2} + k, 1 + k[$ est ouvert dans \mathbb{R} .

Et par exemple, $\pi([0, \frac{1}{2}[) = [0, \frac{1}{2}[+ \mathbb{Z} = \pi([0, \frac{1}{2}[+ \mathbb{Z})$. Et $[0, \frac{1}{2}[+ \mathbb{Z}$ n'est pas ouvert dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Noter que si on note π_r la restriction de π à $[0, 1[$, on a $\pi_r : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bijectif, avec $\pi_r^{-1}(X) = x$ où x est le représentant $x \in [0, 1[$ de la classe X .

Et par exemple, $\pi_r^{-1}([0, \frac{1}{2}[+ \mathbb{Z}) = [0, \frac{1}{2}[$ est ouvert dans $[0, 1[$ alors que $\pi^{-1}([0, \frac{1}{2}[+ \mathbb{Z}) = [0, \frac{1}{2}[+ \mathbb{Z}$, n'est pas ouvert dans \mathbb{R} : c'est donc π et non π_r qu'il faut utiliser pour la topologie quotient de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . ▀

Exercice 1.62 Montrer que si $f : E \rightarrow F$ est une application d'un ensemble E vers un ensemble F , alors pour toute union $\bigcup_{i \in I} F_i$ de sous-ensembles de F on a $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i)$.

(On rappelle que pour $B \subset F$ on a $f^{-1}(B) = \{a \in E : f(a) \in B\}$.)

Réponse. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i)$. Donc il existe $j \in I$ tel que $x \in f^{-1}(F_j)$. Soit alors $y \in F_j$ tel que $y = f(x)$. Et $y \in \bigcup_{i \in I} F_i$ donne $x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i)$. D'où $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i) \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i)$.

Soit $x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i)$. Soit alors $y \in \bigcup_{i \in I} F_i$ tel que $f(x) = y$. Comme y est dans l'union, il existe $j \in I$ tel que $y \in F_j$. Donc $x \in f^{-1}(F_j) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i)$. Donc $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i)$. ▀

Remarque 1.63 Si F est un autre espace topologique, alors une application $f : E/\mathcal{R} \rightarrow F$ est continue ssi $f \circ \pi : E \rightarrow F$ est continue. En effet (voir plus loin pour la définition de la continuité) : si V est un ouvert de F , alors $f^{-1}(V)$ est ouvert équivaut à $\pi^{-1}(f^{-1}(V))$ ouvert, i.e. à $(f \circ \pi)^{-1}(V)$ ouvert. D'ailleurs la définition de la topologie quotient est notamment faite pour que cette propriété de continuité soit satisfaite. ▀

Remarque 1.64 Si E est séparé, E/\mathcal{R} n'est pas séparé en général. Exemple \mathbb{R}/\mathbb{Q} dont la topologie est la topologie grossière : on a $\pi^{-1}(\dot{x}) = x + \mathbb{Q}$ quand $x \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est ouvert ssi $\bigcup_{\{x\} + \mathbb{Q} \in \mathcal{A}} \{x\} = (\bigcup_{\{x\} + \mathbb{Q} \in \mathcal{A}} \{x\}) + \mathbb{Q}$

\mathbb{Q} est ouvert. Cet ensemble s'il est non vide contient un point y , et étant ouvert contient $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ pour un $\varepsilon > 0$, donc contient $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[+ \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. ▀

2 Espaces topologiques et fermés

Proposition 2.1 Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E (I un ensemble quelconque). On a :

$$E - \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E - V_i), \quad \text{et} \quad E - \left(\bigcap_{i \in I} V_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E - V_i). \quad (2.1)$$

(Le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires, et le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.)

Preuve. En effet :

$$x \in E - \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} V_i \Leftrightarrow \forall i, x \notin V_i \Leftrightarrow \forall i, x \in E - V_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (E - V_i).$$

Et :

$$x \in E - \left(\bigcap_{i \in I} V_i \right) \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} V_i \Leftrightarrow \exists i, x \notin V_i \Leftrightarrow \exists i, x \in E - V_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (E - V_i),$$

ou bien dans (2.1)₁ on remplace V_i par $E - V_i$ et on prend le complémentaire. \blacksquare

Définition 2.2 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. Un sous-ensemble F de E est dit fermé si son complémentaire $E - F$ est ouvert.

On notera \mathcal{F} l'ensemble des fermés de E , i.e. $F \in \mathcal{F}$ ssi $E - F \in \mathcal{O}$.

Exemple 2.3 Si $E = \mathbb{R}$ usuel, $[a, b]$ est fermé pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Si E est muni de sa topologie discrète et si $x \in E$ alors $\{x\}$ est à la fois ouvert et fermé. En effet, $\{x\}$ est ouvert car $\{x\} \subset E$, et $E - \{x\}$ est ouvert car $E - \{x\} \subset E$. \blacksquare

Proposition 2.4 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique.

F_1 : Une intersection quelconque de fermés est un fermé,

F_2 : Une union finie de fermés est un fermé,

F_3 : \emptyset et E sont fermés.

Preuve. Par passage au complémentaire des caractérisations O_1 , O_2 et O_3 , en appliquant (2.1), on obtient F_1 , F_2 et F_3 . \blacksquare

Définition 2.5 Soit $A \subset E$. On appelle fermeture de A , et on note \bar{A} , le plus petit fermé contenant A , i.e. l'intersection de tous les fermés contenant A :

$$\bar{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F. \quad (2.2)$$

Définition 2.6 On appelle voisinage fermé la fermeture d'un voisinage ouvert.

Définition 2.7 Et on appelle frontière (ou bord) de A l'ensemble $\bar{A} - \overset{\circ}{A}$ parfois noté ∂A .

Proposition 2.8

0- Pour tout $A \subset E$, sa fermeture \bar{A} est un fermé.

1- On a toujours $A \subset \bar{A}$.

2- A est fermé ssi $A = \bar{A}$. Et on a toujours $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

3- Si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Preuve.

0- c'est (2.2) avec F_1 .

1- $\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F \right)$ contient A (puisque chaque F de l'intersection contient A). Donc avec (2.2) on a $\bar{A} \supset A$.

2- Supposons $A = \bar{A}$. Alors A est intersection de fermés, cf. (2.2), donc A est fermé.

Supposons A fermé. Alors $A \in \mathcal{F}$, et donc $\bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F \subset A$ i.e. $\bar{A} \subset A$. Comme on a toujours $A \subset \bar{A}$ on a

$A = \bar{A}$.

En particulier, comme \bar{A} est fermé, $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

3- Si $B \supset A$ alors $\bar{B} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset B} F \supset \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F = \bar{A}$. \blacksquare

Proposition 2.9 Soit E espace topologique, $F \subset E$ et F muni de la topologie induite.

Si F est fermé dans E et si G est fermé dans F alors G est fermé dans E .

Preuve. On a $F - G$ ouvert dans F , i.e. $\exists U \in \mathcal{O}$ t.q. $F - G = U \cap F$. D'où $E - G = (E - F) \cup (F - G) = (E - F) \cup (U \cap F) = ((E - F) \cup U) \cap ((E - F) \cup F) = ((E - F) \cup U) \cup E = (E - F) \cup U$ d'où, F étant fermé, $E - G$ est l'union des deux ouverts $E - F$ et U , d'où $E - G$ est ouvert, d'où G est fermé dans E . ■

Remarque 2.10 Si G est fermé dans F on n'a pas G fermé dans E en général : prendre $E = \mathbb{R}$ et sa topologie usuelle, $F = [0, 1[= G$. Mais ici F n'est pas fermé dans \mathbb{R} . ■

Exercice 2.11 Montrer que E est séparé ssi, pour tout $a \in E$, l'intersection de tous les voisinages fermés contenant a est réduit à $\{a\}$.

Réponse. Supposons que l'intersection de tous les voisinages fermés contenant a est réduit à $\{a\}$. Soit $b \neq a$. Comme $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} \bar{V} = \{a\}$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $b \notin \bar{V}$, donc $b \in E - \bar{V}$ ouvert. Donc $a \in V$ et $b \in E - \bar{V}$ appartiennent à des ouverts disjoints : E est séparé.

Réciproquement, supposons E séparé. Soit $b \neq a$: il existe donc deux ouverts $U_a \ni a$ et $U_b \ni b$ tels que $U_a \cap U_b = \emptyset$; donc $F = E - U_b$ est un fermé qui contient U_a mais ne contient pas b . Donc $b \notin \bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} \bar{V}$. Donc l'intersection de tous les voisinages fermés contenant a est réduit à $\{a\}$. ■

3 Point adhérent, point isolé, point d'accumulation, valeur d'adhérence, densité

On rappelle que $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages ouverts de x .

Soit $A \subset E$ (sous-ensemble quelconque de E).

Définition 3.1 Un point $x \in E$ est adhérent à A (ou est une valeur d'adhérence de A) ssi tout voisinage ouvert de x contient un point de A , i.e. ssi : $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists y \in A \cap V$, i.e. ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), A \cap V \neq \emptyset, \quad (3.1)$$

i.e. $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists y \in A$ t.q. $y \in A \cap V$.

Et négation : $x \in E$ est non adhérent à A ssi $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ t.q. $A \cap V = \emptyset$.

Soit \bar{A} l'ensemble des valeurs d'adhérence de A .

Proposition 3.2

0- si $x \in A$ alors $x \in \bar{A}$ (i.e. x est adhérent à A), autrement dit $A \subset \bar{A}$.

1- $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$. En particulier les éléments de la frontière de A adhérent à A .

2- Un ensemble A est fermé ssi il contient ses valeurs d'adhérences, i.e. ssi $A = \bar{A}$.

Preuve. 0- Par définition, un $V \in \mathcal{V}(x)$ contient x , et pour $x \in A$ on a alors $A \cap V \ni x$.

1- Montrons que \bar{A} est fermé, i.e. que $E - \bar{A}$ est ouvert. Soit $z \in E - \bar{A}$, i.e. z non valeur d'adhérence : il existe $V \in \mathcal{V}(z)$, V ouvert, tel que $A \cap V = \emptyset$. Choisissons un tel V . Pour tout $y \in V$ on a $y \notin \bar{A}$: sinon y est valeur d'adhérence de A et $A \cap V \neq \emptyset$. Donc $z \in V \subset E - \bar{A}$, donc $E - \bar{A}$ est ouvert. Donc \bar{A} est fermé. Et comme \bar{A} contient A on a $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$.

Montrons que $\bar{A} \supset \bar{\bar{A}}$, i.e. montrons que $E - \bar{A} \subset E - \bar{\bar{A}}$. Ayant \bar{A} fermé, $E - \bar{A}$ est ouvert. Donc si $x \in E - \bar{A}$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ ouvert tel que $V \subset E - \bar{A}$, i.e. tel que $V \cap \bar{A} = \emptyset$, donc x n'est pas valeur d'adhérence. D'où $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$. D'où $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

2- A est fermé ssi $A = \bar{A}$. ■

Définition 3.3 Un point $x \in A$ est isolé ssi : $x \in A$ et il existe un voisinage ouvert de x qui ne contient pas d'autres éléments de A , i.e. ssi :

$$\exists V \subset \mathcal{V}(x) \quad : \quad A \cap V = \{x\}. \quad (3.2)$$

Et négation : $x \in A$ n'est pas isolé ssi $\forall V \in \mathcal{V}(x), A \cap V \supsetneq \{x\}$.

Exemple 3.4 Si $A = [1, 2[\cup \{3\}$, le point 3 est isolé dans A , le point 1 n'est pas isolé. ■

Définition 3.5 Un point $x \in E$ est un point d'accumulation de A ssi : tout voisinage ouvert de x contient un autre point de A :

$$\forall V \subset \mathcal{V}(x), \exists y \neq x \text{ t.q. } y \in A \cap V. \quad (3.3)$$

Autrement dit, $\forall V \subset \mathcal{V}(x), \exists y \in A, y \neq x$ t.q. $y \in V$.

Donc :

$$(x \in A \text{ est un point d'accumulation}) \iff (x \in A \text{ n'est pas isolé}), \quad (3.4)$$

i.e. dans A , point isolé et point d'accumulation sont contraires l'un de l'autre.

(Mais si $x \notin A$, x peut être un point d'accumulation de A , et il n'est pas isolé dans A car $x \notin A$.)

Exemple 3.6 Si $A = [1, 2] \cup \{3\}$, le point 3 n'est pas un point d'accumulation de A , et tout point de $[1, 2]$ (fermé) est point d'accumulation de A . \blacksquare

Exemple 3.7 0 est un point d'accumulation de $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ et de $B = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. \blacksquare

Définition 3.8 Un espace topologique E est discret ssi tous ses points sont isolés.

Proposition 3.9

3- Un point d'accumulation de A est une valeur d'adhérence de A , et un point $x \in E$ est un point d'accumulation de A ssi il est adhérent à $A - \{x\}$.

4- Un point isolé est adhérent.

5- Si $x \in A$ et x point d'accumulation, alors x n'est pas isolé.

6- Si tous les points de A sont isolés, alors A n'a aucun point d'accumulation.

Preuve. 3- Si $x \in E$ est point d'accumulation de A , comme (3.3) implique (3.1), c'est également une valeur d'adhérence de A et de $A - \{x\}$.

Réciproquement, si x est valeur d'adhérence de $A - \{x\}$, comme $x \notin A - \{x\}$, (3.1) implique (3.3).

4- Si x est isolé alors, par définition (3.2), $x \in A$, donc x est adhérent.

5- Et si $x \in A$ est point d'accumulation, alors (3.3) implique qu'il n'est pas isolé (négation de (3.2) dans ce cas).

6- Formulation négative de 5-. \blacksquare

Définition 3.10 Une valeur d'adhérence x d'une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est un point de l'ensemble $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bar{A}_N$ où (A_N) est la suite décroissante des ensembles $A_N = \{x_n : n \geq N\}$.

I.e. x est valeur d'adhérence de la suite (x_n) ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \in V. \quad (3.5)$$

(Tout voisinage de x contient un x_n d'indice n arbitrairement grand.)

Exemple 3.11 Soit dans \mathbb{R} la suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$ si n est pair et par $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ si n est impair. Alors (x_n) a pour valeurs d'adhérence les points 0 et 1. \blacksquare

Exemple 3.12 La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence. \blacksquare

Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique.

Définition 3.13 Soit $A \subset E$. A est dense dans E ssi $\bar{A} = E$.

Proposition 3.14 Soit $A \subset E$. Alors A est dense dans E ssi tout point de E est une valeur d'adhérence de A , i.e. ssi $\forall A = E$.

Preuve. C'est une réécriture de la proposition 3.2 1-. \blacksquare

4 Compacité de Borel–Lebesgue

La compacité est un outil essentiel pour prouver de nombreux théorèmes d'existence.

4.1 Recouvrement

Définition 4.1 Soit E un ensemble. Soit I un ensemble quelconque (d'indices) et soit $A_i \subset E$ pour $i \in I$ des sous-ensembles de E . La réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un recouvrement de E ssi $E = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Définition 4.2 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. On appelle recouvrement ouvert de E un recouvrement par des ouverts, i.e. : une réunion $\bigcup_{i \in I} U_i$ telle que $E = \bigcup_{i \in I} U_i$, où I est un ensemble quelconque et $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$.

N.B. : quand on parlera de recouvrement sans autre précision, ce sera de recouvrements ouverts dont il sera question dans de poly.

Exemple 4.3 $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ est un recouvrement de \mathbb{R} , et $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+2[$ est un recouvrement ouvert de \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle. ■

Définition 4.4 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique, soit $F \subset E$ (un sous-ensemble de E). On appelle recouvrement ouvert de F : une réunion $\bigcup_{i \in I} U_i$ telle que $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, où I est un ensemble quelconque et $U_i \subset \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$.

Remarque 4.5 Cette définition est compatible avec la définition précédente : en effet F est également un espace topologique muni de la topologie induite, et donc un recouvrement ouvert de l'espace topologique F est un recouvrement ouvert $F = \bigcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont des ouverts de F , i.e. de la forme $V_i = U_i \cap F$ où U_i est ouvert dans E , i.e. $F = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap F) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap F$, i.e. $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Et réciproquement, si $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, alors $F = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap F)$ et $\bigcup_{i \in I} (U_i \cap F)$ est un recouvrement ouvert de F espace topologique induit. ■

Exemple 4.6 $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+2[$ est un recouvrement ouvert de $]0, 1[$ lorsque \mathbb{R} est muni de sa topologie usuelle.

Et pour l'espace topologique $]0, 1[$ muni de la topologie induite usuelle de \mathbb{R} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{1}{n}, 1[$ est un recouvrement ouvert. ■

4.2 Définition de Borel–Lebesgue

Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique séparé.

Définition 4.7 (Borel–Lebesgue). L'espace topologique E est compact ssi il est séparé et de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e. ssi E est séparé et :

$$\forall (U_i)_{i \in I} \text{ recouvrement ouvert de } E \quad : \quad \exists J \subset I \text{ t.q. } \text{Card} J < \infty \text{ et } E = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

(N.B. : l'hypothèse E séparé exclut les topologies peu utilisables comme la topologie grossière. Voir également la proposition 4.15 : c'est sous l'hypothèse de séparation qu'on montre qu'un compact est fermé.)

Exemple 4.8 Dans tout espace topologique séparé, tout singleton $\{x\}$ est compact. En effet, si $\{x\} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ où les U_i sont ouverts, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$ ouvert. Donc $\{x\} \subset U_{i_0}$, sous-recouvrement ouvert fini avec $J = \{i_0\}$. ■

Exemple 4.9 L'ensemble vide \emptyset est compact, c'est trivial : de tout recouvrement $\bigcup_{i \in I} U_i$ on prend n'importe lequel des U_i : on a toujours $U_i \supset \emptyset$. ■

Exemple 4.10 Si E est un espace topologique compact, si I est un ensemble totalement ordonné (par exemple $I = \mathbb{N}$), alors si U_i est une suite croissante d'ouverts qui recouvre E (i.e. $U_i \subset U_j$ quand $i < j$ et $E = \bigcup_{i \in I} U_i$), alors il existe $j \in I$ tel que $E = U_j$.

En effet, on aura $E = \bigcup_{i \in J} U_i$ avec J fini, et on prend $j = \max(i \in J)$. ■

Exemple 4.11 Soit $E =]0, 1[$ considéré comme espace topologique muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R} . Dans ce cas $U_i =]\frac{1}{i}, 1[$ est un ouvert de E , et on a $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} U_i$. Donc $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} U_i$ est un recouvrement ouvert de l'espace topologique $]0, 1[$. Mais il n'existe pas de recouvrement fini : s'il en existait un, les U_i formant une suite croissante, on aurait $E = \bigcup_{i \in J} U_i =]\frac{1}{N}, 1[$ pour un $N \in \mathbb{N}^*$ donné, ce qui est faux. Donc $E =]0, 1[$ est un espace topologique qui n'est pas compact. ■

Proposition 4.12 Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique séparé et soit \mathcal{B} une base d'ouverts. E est compact ssi : de tout recouvrement ouvert $\bigcup_{i \in I} V_i$ de E tel que $V_i \in \mathcal{B}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Preuve. Si E est compact, alors un recouvrement par des ouverts de base étant un recouvrement ouvert particulier, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Réciproquement, soit $\bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de E . Chaque U_i est réunion $U_i = \bigcup_{x \in U_i} U_{ix}$ d'ouverts U_{ix} de \mathcal{B} tels que $U_{ix} \ni x$, car \mathcal{B} est une base de voisinages. D'où $E = \bigcup_{ix} U_{ix}$. L'hypothèse est : on peut extraire un sous-recouvrement fini de $\bigcup_{ix} U_{ix}$; soit $\bigcup_{i \in J, k=1, \dots, n} U_{ix_k} = E$ avec J fini un tel sous-recouvrement. Comme $U_{ix_k} \subset U_i$, on en déduit que $\bigcup_{i \in J} U_i = E$: on a extrait un sous-recouvrement fini, d'où E est compact. ■

Proposition 4.13 Soit E espace topologique séparé, et soit $F \subset E$. Alors F (muni de la topologie induite) est compact ssi : de tout recouvrement ouvert de F on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e. si $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ où les U_i sont des ouverts de E , alors $\exists J \subset I$, J de cardinal fini, tel que $F \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Preuve. F est séparé car E l'est (immédiat).

1- Supposons F compact. Alors pour tout recouvrement $F = \bigcup_{i \in I} V_i$ par des ouverts V_i de F on a $F = \bigcup_{i \in J} V_i$ pour un J fini. D'où, pour tout recouvrement $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ par des ouverts U_i de E , ayant $F = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap F)$ avec les $V_i = U_i \cap F$ ouverts de F , on a $F = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap F)$ pour un J fini, d'où $F \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

2- Réciproquement, supposons que de tout recouvrement $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ par des ouverts U_i de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini : $F \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Mais tout ouvert de F est de la forme $U_i \cap F$ avec U_i ouvert de E , et donc de tout recouvrement $F = \bigcup_{i \in I} V_i$ par des ouverts V_i de F on peut extraire un sous-recouvrement fini $F = \bigcup_{i \in J} V_i$. ■

Exemple 4.14 Tout $[a, b]$ intervalle fermé de \mathbb{R} (muni de la topologie usuelle) est compact. En effet : supposons $a < b$, sinon on le sait déjà, et soit $\bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert donné de $[a, b]$.

Soit l'ensemble $A = \text{déf} \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ a un recouvrement fini}\}$. A est non vide car $a \in A$. Soit $c = \sup(x \in A)$. Il s'agit de montrer que $c=b$. Comme $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et $c \in [a, b]$, il existe $k \in I$ ouvert tel que $c \in U_k$. Comme U_k est ouvert il existe $\eta > 0$ tel que $U_k \supset]c - \eta, c + \eta[$. Et $[a, c - \frac{\eta}{2}]$ a un sous recouvrement fini $\bigcup_{i \in J} U_i$ (par définition de c). Donc $[a, c + \frac{\eta}{2}] \subset (U_k \cup (\bigcup_{i \in J} U_i))$, et donc $[a, c + \frac{\eta}{2}]$ a un sous recouvrement fini. C'est absurde si $c < b$ par définition de c . D'où $c = b$. ■

4.3 Les compacts sont toujours fermés

Proposition 4.15 Soit $K \subset E$ où (E, \mathcal{O}) est un espace topologique séparé. Si K est compact dans E alors K est fermé.

Preuve. Si $K = E$, c'est trivial, car E est un fermé par définition de la topologie.

Sinon, $E - K \neq \emptyset$; montrons que $E - K$ est ouvert. Soit $a \in E - K$. Construisons un ouvert U_a qui contient a t.q. $U_a \cap K = \emptyset$.

Comme la topologie est séparée, si $f \in K$, alors comme $f \neq a$, il existe deux ouverts U_{f-a} et U_{a-f} t.q. $f \in U_{f-a}$, $a \in U_{a-f}$ et $U_{f-a} \cap U_{a-f} = \emptyset$.

$\bigcup_{f \in K} U_{f-a}$ est un recouvrement ouvert de K . Comme K est compact, on en extrait un sous-recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{j \in J} U_{f_j-a}$ où $\text{Card}(J) < \infty$ et $f_j \in K$ pour tout j .

Et par construction des U_{f-a} , l'intersection $\bigcap_{j \in J} U_{a-f_j}$ n'intercepte aucun U_ℓ pour $\ell \in J$, et donc

$$\left(\bigcup_{j \in J} U_{f_j-a} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} U_{a-f_j} \right) = \emptyset. \text{ D'où } K \cap \left(\bigcap_{j \in J} U_{a-f_j} \right) = \emptyset.$$

Et $U_a = \left(\bigcap_{j \in J} U_{a-f_j} \right)$ est un ouvert (car intersection finie) contenant a qui est dans $E - K$. C'est vrai pour tout $a \in E - K$, donc $E - K$ est ouvert, donc K est fermé. ■

4.4 Famille de fermés et compacité

Définition 4.16 Une famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de E possède la propriété de l'intersection finie ssi toute intersection finie est non vide (possède au moins un point), i.e. ssi :

$$\forall J \subset I \text{ t.q. } \text{Card} J < \infty, \quad \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset.$$

Exemple 4.17 Si pour $i \in \mathbb{N}$ on pose $F_i = \{i, i+1, \dots\} = \mathbb{N} - [0, i-1]$ (sous-ensembles de \mathbb{N}), alors la famille $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ possède trivialement la propriété de l'intersection finie : si $m_J = \max(i \in J)$ alors $\bigcap_{i \in J} F_i \ni m_J$. Noter qu'ici $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i = \emptyset$. ■

Proposition 4.18 Un espace topologique E séparé est compact ssi de toute famille de fermés de E d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide, i.e. ssi pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés :

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \implies \exists J \subset I, \text{ Card } J < \infty \text{ et } \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset.$$

Ou de manière équivalente (négation), pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés :

$$\text{si } \forall J \subset I, \text{ Card } J < \infty, \text{ on a } \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \text{ alors } \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset,$$

i.e. E topologique séparé est compact équivaut à : si une intersection finie qqc de F_i est toujours non vide, alors l'intersection de tous les F_i est non vide.

En d'autres termes : E topologique séparé est compact ssi toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E qui possède la propriété de l'intersection finie vérifie $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Preuve. On rappelle que $E - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E - F_i)$ (notations génériques). En effet,

$$x \in E - \bigcap_{i \in I} F_i \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} F_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \notin F_i, \text{ et}$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} (E - F_i) \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in E - F_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \notin F_i.$$

De même, $E - \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (E - U_i)$ (notations génériques). En effet,

$$x \in E - \bigcup_{i \in I} U_i \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} U_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \notin U_i, \text{ et}$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} (E - U_i) \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in E - U_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \notin U_i.$$

Supposons E compact. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Alors $U_i = E - F_i$ est ouvert, et comme $E = E - \emptyset = E - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E - F_i)$, E étant compact, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $E = \bigcup_{i \in J} (E - F_i) = E - \bigcap_{i \in J} F_i$. Donc $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Réciproquement. Supposons que E est séparé et supposons que, pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés, si $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ alors $\exists J \subset I$, J fini tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. Soit alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de E . On a $\emptyset = E - E = E - \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (E - U_i)$; donc l'hypothèse donne $\bigcap_{i \in J} (E - U_i) = \emptyset$ pour J fini car les $E - U_i$ sont fermés. D'où $E = E - \bigcap_{i \in J} (E - U_i) = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Enfin, la dernière proposition vient de “ $A \Rightarrow B$ ” ssi “ $\text{non} B \Rightarrow \text{non} A$ ”. ▀

Exemple 4.19 Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille décroissante de fermés de E compact (i.e. telle que $F_{n+1} \subset F_n \subset E$ pour tout n).

Alors soit $F_n = \emptyset$ à partir d'un certain n , soit les F_n sont (tous) non vides et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ (propriété de l'intersection finie). ▀

Proposition 4.20 Soit $F \subset E$. Si E est compact et si F est fermé dans E , alors F est compact.

Preuve. Soit I un ensemble quelconque et $F_i \subset F$ des fermés tels que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Les F_i sont fermés dans F qui est fermé dans E , donc les F_i sont fermés dans E . Comme E est compact, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ (propriété de l'intersection finie). ▀

Proposition 4.21 Si E est compact, alors toute suite de points possède (au moins) une valeur d'adhérence. (La réciproque sera vraie dans un espace métrique.)

Et si la valeur d'adhérence est unique alors la suite converge vers cette valeur.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . Soit $A_n = \{x_i, i \geq n\}$. On a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n =$ l'ensemble des valeurs d'adhérence. Montrons qu'il est non vide. Mais les \bar{A}_n sont fermés non vides et forment une suite décroissante, donc telle que $\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i = \bar{A}_n \neq \emptyset$. Donc si E est compact $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n \neq \emptyset$ (propriété de l'intersection finie). ▀

4.5 Les compacts de \mathbb{R} usuel sont les fermés bornés

Un sous-ensemble de \mathbb{R} usuel est dit borné ssi il est contenu dans un intervalle $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (dit intervalle borné).

Proposition 4.22 Les compacts de \mathbb{R} usuel sont les fermés bornés.

C'est faux dans un espace topologique quelconque (exemple de ℓ^2 muni de sa topologie forte).

Preuve. Soit K un compact de \mathbb{R} . Alors K est fermé (proposition précédente), et comme $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$, on peut extraire un sous-recouvrement fini, d'où $K \subset]-N, N[$ pour un N donné, d'où K est borné.

Réciproquement, soit F un fermé borné. Alors F étant borné, il existe N tel que $F \subset]-N, N[$, et on sait que $]-N, N[$ est compact (exemple 4.14), d'où F est fermé dans un compact, d'où F est compact (proposition 4.20).

C'est faux dans un espace topologique quelconque : par exemple la boule unité fermée de ℓ^2 muni de sa topologie forte n'est pas compact. Pour une démonstration simple, voir plus loin la compacité de Bolzano–Weierstrass, prendre la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où les e_n sont les vecteurs de la base canonique de ℓ^2 , suite de laquelle on ne peut extraire aucune sous-suite convergente puisque cette suite n'a aucune sous-suite de Cauchy (par Pythagore on a $\|e_n - e_m\|_{\ell^2} = \sqrt{2}$ quand $n \neq m$).

Voir également la proposition 4.23. (Cette propriété étant suffisamment importante pour qu'on insiste.) ■

4.6 Le caractère compact dépend du choix de la topologie, exemple de ℓ^2

Soit ℓ^2 muni de sa topologie forte, topologie associée à la distance usuelle $d(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ où $\|\vec{x}\|^2 = \sum_i x_i^2$. Soit $\bar{B}(0, 1) = \{\vec{x} \in \ell^2 : \|\vec{x}\| \leq 1\}$ (la boule unité fermée de ℓ^2 muni de sa topologie forte).

4.6.1 $\bar{B}(0, 1)$ n'est pas compacte pour la topologie forte de ℓ^2

Vu l'importance de cette propriété, on prend un peu d'avance : voir les espaces métriques.

Proposition 4.23 *La boule unité fermée $\bar{B}(0, 1)$ de ℓ^2 muni de sa topologie forte (voir exemple 1.6) n'est pas compacte.*

Preuve. La boule unité fermée est $\bar{B} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1\}$. Considérons la suite $(e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}^*}$ constituée des vecteurs de la base canonique, i.e. $e^{(m)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ où tous les termes de la suite sont nuls sauf le m -ième qui vaut 1. La suite est toute entière dans \bar{B} , et cette suite n'a aucune valeur d'adhérence, car il n'existe aucune sous-suite $(e^{(m_i)})_{i \in \mathbb{N}}$ de Cauchy : $\|e^{(m_i)} - e^{(m_j)}\|^2 = \|e^{(m_i)}\|^2 + \|e^{(m_j)}\|^2 = 2$ (Pythagore) ne tend pas vers 0 quand $i, j \rightarrow \infty$. Et la définition de la compacité de Bolzano–Weierstrass 6.1 indique que $\bar{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

On peut aussi le montrer avec la propriété de l'intersection finie, définition 4.16, toujours grâce au cadre métrique, avec la propriété 5.31 4- : soit $F = (e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}^*} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \{e^{(m)}\}$ (constitué des éléments de la suite). Pour tout m on a $B(e^{(m)}, 1) \cap F = \{e^{(m)}\}$, cf. Pythagore. Et soit $F_i = F - \{e^{(i)}\}$ (la suite à laquelle on a enlevé le i -ième élément). F et les F_i sont fermés, car constitués de points isolés avec $r = 1 > 0$, cf. propriété 5.31 4-. Soit $J \subset \mathbb{N}$. Si $\text{Card} J < \infty$ on a $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$ (car ils contiennent les $e^{(j)}$ tels que $j > \max(i \in J)$), et pourtant $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_i = \emptyset$ (si $e^{(m)} \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_i$ alors $\forall i$ on a $e^{(m)} \in F_m$, or $e^{(m)} \notin F_m$). ■

4.6.2 $\bar{B}(0, 1)$ est compacte pour la topologie faible de ℓ^2

Proposition 4.24 *$\bar{B}(0, 1)$ est compacte pour la topologie faible de ℓ^2 (voir exemple 1.6).*

N.B. : ce résultat est essentiel en analyse fonctionnel : il motive l'introduction de la topologie faible de ℓ^2 , voir exemple 1.6, pour laquelle $\bar{B}(0, 1)$ sera compacte, ce qui donnera des résultats d'existence qu'on ne peut pas obtenir avec la topologie forte.

Preuve. Notons $\bar{B} = \bar{B}(0, 1)$. Soit $\mathcal{R} = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de \bar{B} par des ouverts de la base de voisinages $\mathcal{V} = \{(\prod_{j=1}^n]a_j, b_j[\times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : n \in \mathbb{N}, a_j, b_j \in \bar{\mathbb{R}}\}$; les U_i sont de la forme $U_i = (\prod_{j=1}^{n_i}]a_j^i, b_j^i[\times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour $i \in I$ où $n_i \in \mathbb{N}$ et les $a_j^i, b_j^i \in \bar{\mathbb{R}}$.

Soit $i_0 \in I$ donné. On a $U_{i_0} = (\prod_{j=1}^{n_0}]a_j^{i_0}, b_j^{i_0}[\times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $n_0 = \text{déf } n_{i_0} \in \mathbb{N}$.

L'ensemble $\bar{B} \cap (\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}^{\mathbb{N}})$ (des suites de la boule unité de ℓ^2 tronquées après n_0) se comporte comme un fermé borné en dimension finie (dans \mathbb{R}^{n_0}) pour la topologie forte : c'est donc un compact pour la topologie forte. Et il est recouvert par $\bigcup_{i \in I} (U_i \cap (\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}^{\mathbb{N}}))$. Les ouverts de la topologie faible étant ouverts pour la topologie forte, de ce recouvrement, on peut donc extraire un sous-recouvrement fini : $\bar{B} \cap (\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}^{\mathbb{N}}) \subset \bigcup_{i \in J} (U_i \cap (\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}^{\mathbb{N}}))$ où $\text{Card} J < \infty$.

Et on a $\bar{B} = (\bar{B} \cap (\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}^{\mathbb{N}})) \cup (\bar{B} \cap (\{0\}^{n_0} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$.

Ce avec $\bar{B} \cap (\{0\}^{n_0} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \subset B \cap U_{i_0}$.

Donc $\bar{B} \subset (\bigcup_{i \in J} (U_i \cap (\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}^{\mathbb{N}}))) \cup U_{i_0}$ recouvrement fini : donc \bar{B} est un compact. ■

On verra également que la topologie faible de ℓ^2 est caractérisée par les projections $p_i : (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow x_i$ (projection donnant la i -ème composante), et qu'une suite $\vec{x}^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de ℓ^2 est convergente pour la topologie faible ssi :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad p_i(\vec{x}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par exemple pour la base canonique (\vec{e}^k) de ℓ^2 , on a $p_i(\vec{e}^k) = 0$ dès que $k > i$ et donc $p_i(\vec{e}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ pour chaque i fixé. Et ainsi la suite (\vec{e}^k) est convergente vers 0 pour la topologie faible (alors que (\vec{e}^k) n'est pas convergente pour la topologie forte).

Ainsi, avec la topologie faible, on aura beaucoup de suites convergentes, et donc beaucoup de limites qui existeront (pour la topologie faible) et donc de nombreux résultats d'existence.

4.7 Ensemble relativement compact

Définition 4.25 Un sous-ensemble A d'un espace topologique E est dit relativement compact si sa fermeture \bar{A} est compacte.

Remarque 4.26 Cette définition évite d'avoir à prendre systématiquement la fermeture. Ainsi un intervalle borné $[q_1, q_2]_{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{Q} est relativement compact dans \mathbb{R} . ▀

5 Espace métrique

Les espaces métriques sont des espaces topologiques particuliers relativement simples et pratiques. Ils permettent en particulier d'introduire les suites de Cauchy (et les espaces complets), ainsi que la compacité au sens de Bolzano–Weierstrass.

5.1 Définitions

Définition 5.1 Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une distance ssi :

M_1 : $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ (séparation),

M_2 : symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$,

M_3 : inégalité triangulaire : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in E$.

Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d(\cdot, \cdot)$ est une distance sur E .

Une semi-distance est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie M_2 et M_3 et $(x = y) \Rightarrow (d(x, y) = 0)$.

Un écart est une application $d : E \times E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie M_2 et M_3 et $(x = y) \Rightarrow (d(x, y) = 0)$. (La seule différence entre un écart et une semi-distance est qu'un écart peut prendre la valeur $+\infty$).

Définition 5.2 Pour (E, d) espace métrique, on appelle boule (ouverte) $B(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}, \quad (5.1)$$

et boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$.

Exemple 5.3 La distance usuelle dans \mathbb{R} est donnée par $d(x, y) = |y - x|$. ▀

Exemple 5.4 Dans \mathbb{R}^n , la distance usuelle est la distance euclidienne : $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|_2$ où $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Et une boule est "ronde".

On pose $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|_1$ où $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$. C'est une distance. Et une boule est "losange".

On pose $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|_\infty$ où $\|\vec{x}\|_\infty = \sup(|x_1|, \dots, |x_n|) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. C'est une distance. Et une boule est "carrée".

Plus généralement on pose $d_p(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|_p$ où $\|\vec{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. C'est une distance quand $p \geq 1$ (cas où M_3 est vérifiée). (On peut montrer que d_∞ est la limite de d_p quand $p \rightarrow \infty$, et pour s'en convaincre ou pourra dessiner les boules unités.) ▀

Exercice 5.5 Montrer que $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty$.

Réponse. Indication. Montrer que $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty$. Dessiner les boules unités sur une même figure dans \mathbb{R}^2 . ▀

Exemple 5.6 Soit ℓ^2 l'ensemble des suites $\vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carré sommable muni de sa distance usuelle $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_2$ où $\|\vec{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ (norme). Cette distance est associée à la topologie dite forte, voir exercice 1.6. ■

Exemple 5.7 Dans $\bar{\mathbb{R}}$, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante, bornée, telle que $f(0) = 0$ (prendre par exemple $f(x) = \arctan(x)$), on définit $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ si $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, \infty) = f_\infty - f(x)$, $d(-\infty, x) = f(x) - f_{-\infty}$ et $d(-\infty, \infty) = f_\infty - f_{-\infty}$, où on a posé $f_{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. C'est une distance. (Par contre elle ne dérive pas d'une norme : ne vérifie pas l'homogénéité, voir plus loin.) ■

Exercice 5.8 Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que $e_1(\cdot, \cdot)$ définie par $e_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ et $e_2(\cdot, \cdot)$ définie par $e_2(x, y) = \inf(1, d(x, y))$ sont également des distances sur E , et que si E est un espace vectoriel, ces distances ne dérivent pas d'une norme (voir plus loin). Pour cela :

1- Montrer que si $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une jauge, i.e. :

$$\varphi \text{ croissante, } \varphi(0) = 0, \quad x > 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0, \quad \text{et } \forall x, y \in E, \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

(sous-additivité), alors $e = \varphi \circ d$ (définie sur E^2 par $e(x, y) = \varphi(d(x, y))$) est une distance.

2- Montrer que si $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est concave et vérifie $\varphi(0) = 0$, alors $\varphi(t+t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$ pour tout $t, t' > 0$, et en déduire que φ est une jauge; puis vérifier que $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ et $\varphi(x) = \inf(1, x)$ sont de telles fonctions. Commencer par montrer que φ est concave sur \mathbb{R} ssi $\frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t} \geq \frac{\varphi(a+t')-\varphi(a)}{t'}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout t, t' t.q. $0 < t < t'$.

3- Montrer que les normes éventuellement associées $\|y-x\|_i = e_i(x, y)$ ne vérifieraient pas la propriété d'homogénéité $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Réponse. 11- $e(x, y) = 0$ équivaut à $\varphi(d(x, y)) = 0$, i.e. à $d(x, y) = 0$, i.e. à $x = y$.

12- Comme $d(x, y) = d(y, x)$ on a $e(x, y) = e(y, x)$.

13- Puis $e(x, z) = \varphi(d(x, z)) \leq \varphi(d(x, y) + d(y, z))$ car $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ et φ croissante, d'où $e(x, z) \leq \varphi(d(x, y)) + \varphi(d(y, z))$ car φ est une jauge, d'où $e(x, z) \leq e(x, y) + e(y, z)$, et M_3 est vérifiée. D'où $e(\cdot, \cdot)$ est une distance.

2- Une fonction φ est concave ssi $\varphi(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta\varphi(x) + (1-\theta)\varphi(y)$ pour tout $x, y \in E$ et tout $\theta \in]0, 1[$. On suppose $0 < x < y$, on pose $a = x$, $a+t' = y$, $a+t = \theta x + (1-\theta)y$, ce qui définit de manière unique a, t, t' en fonction de x, y, θ (avec $0 < t < t'$), et réciproquement x, y, θ en fonction de a, t, t' . En particulier, $1-\theta = \frac{t}{t'}$ i.e. $\theta = 1 - \frac{t}{t'}$. Et $\varphi(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta\varphi(x) + (1-\theta)\varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(a+t) \geq (1 - \frac{t}{t'})\varphi(a) + \frac{t}{t'}\varphi(a+t') \Leftrightarrow \frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t} \geq \frac{\varphi(a+t')-\varphi(a)}{t'}$.

Si on suppose de plus $\varphi(0) = 0$, alors on a $\frac{\varphi(t)}{t} \geq \frac{\varphi(t')}{t'} \geq \frac{\varphi(t+t')}{t+t'}$ et donc $\varphi(t+t') \leq \varphi(t') \frac{t+t'}{t'} = \varphi(t') + t \frac{\varphi(t')}{t'} \leq \varphi(t') + t \frac{\varphi(t)}{t} = \varphi(t') + \varphi(t)$.

Donc une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante positive concave t.q. $\varphi(0) = 0$ est une jauge.

Pour $e_1(\cdot, \cdot)$ on pose $\varphi(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ qui vérifie $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = (1+x)^{-2} \geq 0$ d'où φ est croissante, et $\varphi''(x) = -2(1+x)^{-3}$ d'où φ est concave croissante, d'où φ est une jauge. Donc $e_1(\cdot, \cdot)$ est bien une distance.

Pour $e_2(\cdot, \cdot)$ on a $\varphi(x) = \inf(1, x)$ qui vérifie $\varphi(0) = 0$, est croissante, et est trivialement concave, d'où φ est une jauge, d'où $e_2(\cdot, \cdot)$ est une distance.

3- Enfin, voir plus loin, si $e_i(\cdot, \cdot)$ dérivait d'une norme $\|\cdot\|$, E étant alors un espace vectoriel, on aurait $\|x-y\| = e_i(x, y)$ et donc $\|x\| = e_i(0, x)$ et donc $\|x\| \leq 1$ pour tout x . Or une norme $\|\cdot\|$ vérifie la propriété d'homogénéité $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et en particulier pour $x \neq 0$ si $n > \frac{1}{\|x\|}$ on a $\|nx\| = n \|x\| > 1$. D'où les $e_i(\cdot, \cdot)$ sont des distances qui ne dérivent pas de norme. ■

Exercice 5.9 Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{P}(X)$ la topologie discrète. Montrer que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ est une distance (appelée distance de la topologie discrète). ■

5.2 Topologie d'un espace métrique

La définition des boules ouvertes a été donnée en (5.1).

Définition 5.10 Soit (E, d) un espace métrique. On appelle topologie métrique la topologie engendrée par les boules ouvertes $B(x, r)$ pour $x \in E$ et $r > 0$ (la plus petite des topologies contenant les boules ouvertes, voir proposition 1.13).

Proposition 5.11 La topologie métrique est séparée, et les boules ouvertes $B(x, r)$ pour $x \in E$ et $r > 0$ constituent une base d'ouverts. En particulier $\{B(a, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ constitue une base dénombrable de voisinages de a .

Et tout ouvert est réunion de boules ouvertes : si U est ouvert dans E alors pour tout $x \in U$ il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset U$, et $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$.

Preuve. Si $x \neq y$, on pose $\varepsilon = d(x, y)$ et on a $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$. D'où la topologie est séparée.

Puis on applique la proposition 1.32 : l'ensemble des intersections finies de boules ouvertes constitue une base d'ouverts. Montrons qu'une telle intersection finie contient une boule : soit une intersection finie de boules ouvertes $A = \bigcap_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon_i)$. Supposons cette intersection est non vide : il existe $x \in E$ tel que $x \in B(x_i, \varepsilon_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On pose $\eta_i = \varepsilon_i - d(x, x_i) > 0$, puis $\eta = \min_{i=1, \dots, n} \eta_i > 0$. On a alors $B(x, \eta) \subset \bigcap_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon_i)$. Donc les boules centrées en x constituent une base de voisinages en x .

Donc si U est ouvert et si $a \in U$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset U$. On prend $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, et on a $B(a, \frac{1}{n}) \subset U$.

(On peut d'ailleurs prendre pour base dénombrable de voisinages de a l'ensemble des boules $B(a, \lambda_n)$ où (λ_n) est suite quelconque qui tend vers 0.) \blacksquare

Définition 5.12 Si $F \subset E$ et $a \in E$, la distance de a à F est :

$$d(a, F) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \inf_{x \in F} d(a, x). \quad (5.2)$$

En particulier, si $a \in F$ alors $d(a, F) = 0$.

Proposition 5.13 Soit (E, d) espace m\u00e9trique. Soit $F \subset E$. Alors :

1- $x \in E$ est adh\u00e9rent \u00e0 F (i.e. $x \in \bar{F}$) ssi $d(x, F) = 0$. Ou encore $x \in E$ est adh\u00e9rent \u00e0 F ssi il existe une suite (x_n) de F telle que $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2- Si F est dense dans E (i.e. $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, F \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, voir d\u00e9finition 3.13), alors tout \u00e9l\u00e9ment de E est limite d'une suite de points de F .

3- Tout ensemble ferm\u00e9 est intersection d\u00e9nombrable de parties ouvertes, et tout ensemble ouvert est r\u00e9union d\u00e9nombrable de parties ferm\u00e9es.

Preuve. 1- Si $x \in \bar{F}$ alors $F \cap U \neq \emptyset$ pour tout U ouvert de F , donc $F \cap B(x, r) \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$ en particulier $F \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit alors $x_n \in F \cap B(x, \frac{1}{n})$. La suite (x_n) ainsi form\u00e9e v\u00e9rifie $d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2- Soit F dense dans E , soit $x \in E$: on a alors $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$, pour tout n . Soit $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$. Alors $d(x, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $(a_n) \in F$ converge vers x .

3- Les deux propri\u00e9t\u00e9s \u00e9nonc\u00e9es sont \u00e9quivalentes. Montrons la premi\u00e8re. Soit F un ferm\u00e9, et soit $U_n = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$. Alors U_n est ouvert et $F \subset U_n$ pour tout n , d'o\u00f9 $F \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. D'o\u00f9 $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, car si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ alors il existe $x_n \in F$ tel que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ d'o\u00f9 tout voisinage de x rencontre F , d'o\u00f9 $x \in F$ (F \u00e9tant ferm\u00e9). \blacksquare

Exemple 5.14 Dans ℓ^2 , soit $B = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| < 1\}$ (la boule unit\u00e9 pour la topologie forte). On munit ℓ^2 de la topologie faible \mathcal{O} , voir exercice 1.6. Montrons que l'espace topologique induit (B, \mathcal{O}) est m\u00e9trisable.

ℓ^2 admet la famille d\u00e9nombrable dense $F = \{\vec{q} = (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2 : \forall n, q_n \in \mathbb{Q}\}$ (autrement dit ℓ^2 est s\u00e9parable, voir d\u00e9finition 7.2). En particulier la famille $F \cap B$ est d\u00e9nombrable dense dans B . On note $(\vec{a}^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les \u00e9l\u00e9ments de $F \cap B$ o\u00f9 $\vec{a}^k = (a_i^k)_{i \in \mathbb{N}^*}$, $a_i^k \in \mathbb{Q}$ pour tout k, i . Puis on d\u00e9finit la distance par :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in B, d_f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i) a_i^k \quad (= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\vec{x} - \vec{y}, \vec{a}^k)_{\ell^2}).$$

Et cette distance a ses boules qui engendrent la topologie faible, i.e. un ouvert pour la distance d_f est (et contient) un ouvert de \mathcal{O} et r\u00e9ciproquement.

Id\u00e9e de la d\u00e9monstration : donner la d\u00e9finition d'une boule $B_f(\vec{x}, \varepsilon)$ pour la m\u00e9trique d_f , puis dire que, pour ε qcq, on peut prendre m suffisamment grand pour que $\sum_{k>m} \frac{1}{2^k} (\vec{x} - \vec{y}, \vec{a}^k)_{\ell^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ et pour que, pour des \vec{y} suffisamment proches de \vec{x} , on ait $\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} (\vec{x} - \vec{y}, \vec{a}^k)_{\ell^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, d\u00e8s que \vec{x} et \vec{y} (et \vec{a}) sont dans B . \blacksquare

5.3 Topologie usuelle non m\u00e9trique : celle de la convergence simple

On consid\u00e8re l'ensemble $E = \mathcal{F}([0, 1]; [0, 1])$ des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

D\u00e9finition 5.15 Soit $x_0 \in [0, 1]$ et soit $f \in E$. Une suite de fonctions (f_n) de E converge simplement en x_0 vers la fonction f ssi $f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ dans \mathbb{R} usuel, i.e. ssi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_0) - f_n(x_0)| = 0.$$

D\u00e9finition 5.16 Une suite de fonctions (f_n) de E converge simplement vers la fonction $f \in E$ ssi pour tout $x \in [0, 1]$ la suite suite (f_n) converge simplement en x vers la fonction f .

Pour $f \in E$, $\varepsilon > 0$ et $x_1 \in [0, 1]$, on considère l'ensemble $V(f, \varepsilon, x_1)$ des fonctions $g \in E$ qui approchent f en x_1 à ε près :

$$V(f, \varepsilon, x_1) = \{g \in E : |g(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon\}. \quad (5.3)$$

Pour $f \in E$, $\varepsilon > 0$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ un nombre fini de points, on note :

$$V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{i=1, \dots, n} V(f, \varepsilon, x_i) = \{g \in E : \forall i = 1, \dots, n, |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}. \quad (5.4)$$

Définition 5.17 Les ensembles $V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n)$ (les x_i étant en nombre fini) sont appelés ensembles élémentaires.

Notations. Soit \mathcal{V} l'ensemble des ensembles élémentaires.

Soit \mathcal{O} la topologie engendrée par les ensembles élémentaires (auxquels on impose donc d'être ouverts), i.e. la plus petite topologie telle que $\mathcal{O} \supset \mathcal{V}$. Cf. proposition 1.13.

Proposition 5.18

- 1- \mathcal{O} est une topologie séparée et \mathcal{V} est une base de voisinages de \mathcal{O} .
 - 2- La convergence simple est la convergence au sens de la topologie \mathcal{O} .
 - 3- On appelle fonction simple une fonction nulle sauf en un nombre fini de points. L'ensemble des fonctions simples est dense dans E (pour la topologie \mathcal{O}).
 - 4- Soit f la fonction constante égale à 1 (i.e. $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$). La fonction f n'est pas limite d'une suite dénombrable $(f_n)_{\mathbb{N}}$ de fonctions simples.
 - 5- \mathcal{O} (topologie de la convergence simple) n'est pas une topologie métrique.
- (Remarque : la convergence simple est très utilisée, mais la topologie associée est peu utilisée, i.e. on a rarement besoin de la description des ouverts de cette topologie.)

Preuve. 1- La topologie est donnée par la proposition 1.13. Et si $f \neq g$ alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) \neq g(x)$. On pose $\varepsilon = \frac{|f(x) - g(x)|}{2} > 0$, et on a $V(f, \frac{\varepsilon}{2}, x) \cap V(g, \frac{\varepsilon}{2}, x) = \emptyset$. D'où la topologie est séparée.

Il est immédiat que $V(f, \varepsilon, x_1) \cap \dots \cap V(f, \varepsilon, x_n) = V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n)$. Et pour $f \in E$, l'intersection finie $\bigcap_{i=1, \dots, n} V(f, \varepsilon_i, x_i)$ contient l'ouvert $\bigcap_{i=1, \dots, n} V(f, \varepsilon, x_i)$ où $\varepsilon = \min(\varepsilon_i)$.

D'où \mathcal{V} est une base de voisinages en appliquant la proposition 1.32.

2- Il est immédiat que la topologie de la convergence simple est la topologie \mathcal{O} , cf. (1.9) : prendre la suite d'ouverts $V(f, \frac{1}{m}, x)$, poser $y = f(x)$ et $y_n = f_n(x)$.

On peut aussi noter que $\bigcup_{x \in [0, 1]} V(f, \varepsilon, x)$ est l'ensemble des fonctions g telles qu'il existe (au moins) un point y pour lequel $|g(y) - f(y)| < \varepsilon$, et que $\bigcap_{x \in [0, 1]} V(f, \varepsilon, x)$ est l'ensemble des fonctions g telles que pour tout y on a $|g(y) - f(y)| < \varepsilon$.

3- Soit $f \in E$. On veut qu'un voisinage V quelconque de f contienne une fonction f_V simple. Soit donc un voisinage V donné de f . Il contient un ouvert $V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n)$. Soit donc f_V la fonction nulle partout sauf aux points x_i où elle vaut $f(x_i)$. f_V est simple et $f_V \in V$. (Un voisinage est un ensemble "très grand".)

4- Une suite dénombrable de fonctions qui s'annule partout sauf sur un nombre fini (ou dénombrable d'ailleurs) de points est une fonction qui s'annule partout sauf sur un nombre dénombrable de points. D'où $f = 1$ n'est pas limite d'une suite (dénombrable) de fonctions simples.

5- Ayant 4-, on n'a pas la propriété 5.13 2-. ▀

5.4 Comparaison de distances

Soit E espace muni de deux distances d_1 et d_2 . On note \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 les topologies associées. On notera $B_1(x, r) = \{y : d_1(x, y) < r\}$ (resp. $B_2(x, r) = \{y : d_2(x, y) < r\}$) une boule ouverte pour la distance d_1 (resp. pour la distance d_2).

Proposition 5.19 Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) La topologie \mathcal{O}_1 est plus forte (plus fine) que la topologie \mathcal{O}_2 sur E (voir définition 1.34).
- (ii) Toute boule ouverte $B_2(x, \varepsilon)$ de \mathcal{O}_2 contient une boule ouverte $B_1(x, \eta)$ de \mathcal{O}_1 de même centre x :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, B_2(x, \varepsilon) \supset B_1(x, \eta). \quad (5.5)$$

(iii)

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, d_1(x, y) < \eta \Rightarrow d_2(x, y) < \varepsilon. \quad (5.6)$$

(Après avoir vu la continuité, cela s'exprimera : l'application identité $I : x \in (E, d_1) \rightarrow x \in (E, d_2)$ est continue.)

Preuve. (ii) \Leftrightarrow (iii). Immédiat.

(i) \Rightarrow (ii). Supposons que \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 . Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. La boule $B_2(x, \varepsilon)$ est ouverte dans \mathcal{O}_2 donc est un ouvert dans \mathcal{O}_1 (qui contient x). Comme $\{B_1(x, \eta) : \eta > 0\}$ est une base d'ouverts de x pour \mathcal{O}_1 , il existe $\eta > 0$ tel que $B_1(x, \eta)$ est contenue dans l'ouvert $B_2(x, \varepsilon)$.

(ii) \Rightarrow (i). Soit $B_2(x, \varepsilon)$ une boule ouverte dans (E, d_2) . Par hypothèse, ε et x étant fixés, on prend η tel que $B_2(x, \varepsilon) \supset B_1(x, \eta)$. Donc tout ouvert pour \mathcal{O}_2 contient un ouvert de \mathcal{O}_1 : \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 . \blacksquare

Définition 5.20 Soit E espace muni de deux distances d_1 et d_2 . On note \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 les topologies associées. On dit que les distances sont équivalentes ssi d_1 est plus fine que d_2 et d_2 est plus fine que d_1 ; ces distances définissent alors les mêmes ouverts (et donc la même topologie).

(Après avoir vu la continuité, cela s'exprimera comme : l'application identité $I : x \in (E, d_1) \rightarrow x \in (E, d_2)$ est continue ainsi que son inverse $I^{-1} : x \in (E, d_2) \rightarrow x \in (E, d_1)$).

Exemple 5.21 Dans $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, la distance usuelle $d_1(x, y) = |y - x|$ et la distance $d_2(x, y) = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|$ sont équivalentes (définissent la même topologie). \blacksquare

Proposition 5.22 (Cas particulier.) Si :

$$\exists \beta > 0, \quad d_2 \leq \beta d_1, \quad (5.7)$$

i.e. si :

$$\exists \beta > 0, \quad \forall x, y \in E, \quad d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \quad (5.8)$$

alors \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 .

Et si :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1, \quad (5.9)$$

i.e. si :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \forall x, y \in E, \quad \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \quad (5.10)$$

alors les distances sont équivalentes et elles définissent la même topologie.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{\beta}$, et alors $d_1(x, y) < \frac{\varepsilon}{\beta}$ implique $d_2(x, y) < \varepsilon$, i.e. $y \in B_1(x, \eta)$ implique $y \in B_2(x, \varepsilon)$, i.e. $B_1(x, \eta) \subset B_2(x, \varepsilon)$. \blacksquare

Définition 5.23 Si d_1 et d_2 vérifient (5.9), on dit que les distances sont fortement équivalentes.

Remarque 5.24 Deux distances fortement équivalentes sont trivialement équivalentes.

La réciproque est fautive : prendre sur \mathbb{R}_+^* les distances $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$ qui sont équivalentes (définissent la même topologie \mathcal{O}) mais ne sont pas fortement équivalentes.

N.B. : dans certains ouvrages, les distances sont dites équivalentes ssi (5.9) est vérifié, i.e la définition de l'équivalence est parfois celle qui a été définie ici comme la forte équivalence. \blacksquare

Remarque 5.25 Il est immédiat que si (5.9) est vérifiée, alors il existe $\gamma, \delta > 0$ t.q. $\gamma d_2 \leq d_1 \leq \delta d_2$: prendre $\gamma = \frac{1}{\beta}$ et $\delta = \frac{1}{\alpha}$, i.e. si d_1 est équivalente à d_2 alors d_2 est équivalente à d_1 . Autrement dit, la notion d'équivalence forte définit une relation d'équivalence. \blacksquare

Exemple 5.26 Dans \mathbb{R}^n , les distances d_1 , d_2 et d_∞ sont équivalentes. En particulier elles définissent la même topologie \mathcal{O} . \blacksquare

Exemple 5.27 Suite de l'exercice 5.8. Comme $e_1 \leq e_2 \leq 2e_1$ on en déduit que e_1 et e_2 définissent la même topologie. \blacksquare

Exercice 5.28 Montrer que si $d(\cdot, \cdot)$ est la distance usuelle sur \mathbb{R} , et si $e(x, y) = \inf(1, d(x, y))$, alors $e(\cdot, \cdot)$ est une distance équivalente à $d(\cdot, \cdot)$ mais non fortement équivalente.

Réponse. On a $e(x, y) \leq d(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Donc la topologie associée à $d(\cdot, \cdot)$ est plus fine que la topologie associée à $e(\cdot, \cdot)$.

Réciproquement, on vérifie (5.6), qui dès qu'elle est vérifiée pour les "petits ε " est trivialement vérifiée pour tous les ε . Et ici $e(x, y) = d(x, y) \leq \varepsilon$ dès que $\varepsilon \leq 1$. Donc les topologies sont identiques.

Par contre, il n'existe pas de constante $a > 0$ telle que $ad(x, y) \leq e(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: sinon avec $y=0$, on aurait $a > 0$ et $ax \leq 1$ pour tout $x > 1$, ce qui est absurde.

Les distances sont donc équivalentes (même topologie), mais ne sont pas fortement équivalentes. \blacksquare

5.5 Limite, valeur d'adhérence, suites de Cauchy

Définition 5.29 Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$. On appelle diamètre de A :

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}, \quad (5.11)$$

valeur finie ou infinie. Et si $\text{diam}(A) \in \mathbb{R}$ (i.e. si $\text{diam}(A) < \infty$), on dit que A est borné (pour la distance d).

(Dans un espace topologique quelconque, on ne parle pas de borné : penser à la topologie grossière qui ne permet pas de “mesurer” un objet donné. Le caractère borné nécessite une métrique pour pouvoir “mesurer”.)

Proposition 5.30 Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Si A est borné, il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Preuve. Soit $x_0 \in A$. Si $x \in A$ on a $d(0, x) \leq d(0, x_0) + d(x_0, x) \leq d(0, x_0) + \text{diam}(A)$. D'où $R = d(0, x_0) + \text{diam}(A) + 1$ convient. ■

On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'image d'une application $x : n \in \mathbb{N} \rightarrow x(n) = x_n \in E$, et qu'une suite extraite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est l'image de l'application $x \circ n : k \in \mathbb{N} \rightarrow x(n(k)) = x_{n_k}$ où $n : k \in \mathbb{N} \rightarrow n(k) = n_k \in \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Proposition 5.31 Si (E, d) est un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E , alors

1- (x_n) converge vers $x \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in B(x, \varepsilon), \quad (5.12)$$

i.e. à partir d'un certain rang N , x_n approche x à ε près (la suite $(x_n)_{n \geq N}$ est toute entière dans $B(x, \varepsilon)$).

2- $x \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \in B(x, \varepsilon), \quad (5.13)$$

i.e. ssi il existe une suite extraite (x_{n_k}) qui converge vers x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall k \geq M, x_{n_k} \in B(x, \varepsilon).$$

3- L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est l'ensemble :

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bar{A}_N \quad \text{où} \quad A_N = \{x_n : n \geq N\}, \quad (5.14)$$

i.e. une valeur x d'adhérence est un point de cet ensemble. (Noter que la suite $(A_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.)

4- Si F est un sous-ensemble de points isolés de (E, d) t.q. $\exists r > 0, \forall x \in F, B(x, r) \cap F = \{x\}$, alors F est fermé dans (E, d) .

Preuve. 1- Une limite est caractérisée par (1.9).

2- Une valeur d'adhérence est caractérisée par (3.5) page 13.

3- (5.14) est une reformulation de (5.13).

4- Soit $G = E - F$ (complémentaire). Soit $y \in G$. Soit $\varepsilon_y = \min_{x \in F} d(x, y)$. On a $\varepsilon > 0$, sinon y est un point d'adhérence dans F : en effet, pour $x \in F$, poser $\varepsilon_{xy} = d(x, y)$; on a $\varepsilon_{xy} > 0$ car $y \neq x$; on a $\varepsilon_y = \min_{x \in F} \varepsilon_{xy}$ et $\varepsilon_y > 0$ car sinon on prend une suite (x_n) t.q. $\varepsilon_{x_n y} \leq \frac{1}{n}$, et on choisit n t.q. $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, qui donne $d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y) + d(y, x_{n+1}) < r$, contraire à l'hypothèse sur r . Donc G est ouvert, donc F est fermé. ■

Définition 5.32 Dans (E, d) métrique, une suite (x_n) est de Cauchy ssi $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$ i.e. ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(x_n, x_m) \leq \varepsilon. \quad (5.15)$$

De manière équivalente, (x_n) est de Cauchy ssi $\text{diam}(A_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ où $A_N = \{x_n : n > N\}$.

Proposition 5.33 1- Si (x_n) est une suite convergente, alors elle est de Cauchy. (La réciproque sera vraie dans les espaces complets).

2- Une suite de Cauchy est toujours bornée de même qu'une suite convergente.

Preuve. 1- Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (x_n) est convergente, notant x sa limite, il existe $N > 0$ tel que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m > N$.

2- Avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_N, x_m) \leq 1$ pour tout $m \geq N$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d(x_n, x_N) \leq R$ où $R = \max(1, \max_{i=1, \dots, N} d(x_i, x_N))$, i.e. (x_n) est toute entière dans la boule $B(x_N, R+1)$. ■

Proposition 5.34 Si f et g sont deux fonctions

6 Compacité de Bolzano–Weierstrass

6.1 Compacité au sens de Bolzano–Weierstrass

Cette définition de la compacité n'a de sens que dans les espaces métriques.

Définition 6.1 Un espace métrique (E, d) est compact au sens de Bolzano–Weierstrass ssi toute suite (x_n) de E possède (au moins) une valeur d'adhérence $x \in E$.

Proposition 6.2 Définitions équivalentes : un espace métrique (E, d) est compact au sens de Bolzano–Weierstrass ssi :

(i) de toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) convergente dans E , i.e. :

$$\exists x \in E, \quad \exists n : \left(\begin{array}{c} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ k \mapsto n_k \end{array} \right) \text{ application croissante stricte, } \quad d(x_{n_k}, x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (6.1)$$

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de E :

$$\exists x \in E, \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon, \quad (6.2)$$

(iii) Pour toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de E , notant $A_N \stackrel{\text{déf}}{=} \{x_n : n \geq N\}$:

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{A_N} \neq \emptyset. \quad (6.3)$$

Preuve. Immédiat. ▀

6.2 Équivalence définitions de Bolzano–Weierstrass et de Borel–Lebesgue

6.2.1 La compacité de Borel–Lebesgue implique celle de Bolzano–Weierstrass

Théorème 6.3 Si (E, d) est un espace métrique et si E est compact au sens de Borel–Lebesgue alors E est compact au sens de Bolzano–Weierstrass.

Preuve. Supposons E compact au sens de Borel–Lebesgue. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de E . Montrons (6.3). Soit $A_N = \{x_n : n \geq N\}$. Soit $F = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{A_N}$ (le fermé des valeurs d'adhérences, cf. (5.14)). Supposons $F = \emptyset$. Comme E est compact au sens de Borel–Lebesgue, il existe un sous-ensemble $J \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\bigcap_{N \in J} \overline{A_N} = \emptyset$, cf. proposition 4.18.

Mais la suite $(A_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $A_n \neq \emptyset$ pour tout n , et donc notant $m = \max\{n \in J\}$ on a $x_m \in \bigcap_{N \in J} \overline{A_N}$. C'est absurde, i.e. l'hypothèse $F = \emptyset$ est absurde, donc la suite admet (au moins) une valeur d'adhérence. ▀

6.2.2 Recouvrement et boules $B(x, \varepsilon)$ dans un espace métrique

Théorème 6.4 Soit (E, d) un espace métrique compact au sens de Bolzano–Weierstrass. Alors :

$$\forall \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \text{ recouvrement ouvert de } E, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists i_x \in I, B(x, \varepsilon) \subset U_{i_x}. \quad (6.4)$$

Et donc, quand E est compact, si $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert de E , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\bigcup_{i \in I} U_i \supset \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde, i.e. supposons E compact et le contraire de (6.4) à savoir :

$$\exists \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \text{ recouvrement ouvert de } E, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \forall i \in I, B(x, \varepsilon) \not\subset U_i, \quad (6.5)$$

Soit un recouvrement de E qui satisfait à (6.5), soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$\exists x_n \in E, \forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i. \quad (6.6)$$

Considérons la suite (x_n) ainsi construite. Comme E est compact au sens de Bolzano–Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*} =^{\text{noté}} (y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergente dans E . Notons $y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in E$. Comme $y_\infty \in E \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe $i \in I$ tel que $y_\infty \in U_i$.

Et U_i étant ouvert dans E , il existe $r > 0$ t.q. $B(y_\infty, r) \subset U_i$: soit N (assez grand) pour que $(y_n)_{n \geq N} \in B(y_\infty, \frac{r}{2})$ (possible par définition de la limite); imposons de plus $\frac{1}{N} < \frac{r}{2}$, donc $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$ pour tout $n \geq N$. L'inégalité triangulaire donne $B(y_n, \frac{r}{2}) \subset B(y_\infty, r)$ pour $n \geq N$ (définition de N) et $B(y_\infty, r) \subset U_i$ (définition de r), donc $B(y_n, \frac{r}{2}) \subset U_i$. Absurde puisque $B(y_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$ par construction de la suite (y_n) , cf. (6.6). Donc (6.5) est faux, i.e. (6.4) est vrai. D'où $\bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{x \in E} U_x \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. ■

Exemple 6.5 Soit $E =]0, \frac{1}{2}]$ muni de la topologie usuelle induite par \mathbb{R} ; l'union $R = \bigcup_{i=2}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ est un recouvrement qui satisfait à (6.5) : se donner un ε , puis $x = \varepsilon$: la boule $B(x, \varepsilon) =]0, 2\varepsilon[$ n'est incluse dans aucun des intervalles $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$; mais $]0, 1]$ n'est pas compact.

Si on veut le faire avec $\bar{E} = [0, \frac{1}{2}] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, comme $0 \in E$, nécessairement $0 \in U_i$ pour un des U_i ; et pour cet U_i (qui est un ouvert), il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $U_i \supset]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Et par exemple, on est obligé de compléter le recouvrement R précédent en considérant $R \cup]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

Et le théorème 6.4 nous dit alors que pour le recouvrement $R \cup]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$: $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \exists n \geq 2,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ (et le $x=0$ impose en particulier $\varepsilon \leq \varepsilon_0$). Et que pour cet ε on a ici, pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe n t.q. $B(x, \varepsilon) \subset]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$, i.e. $B(x, \varepsilon) \subset R \cup]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. ■

Exercice 6.6 Calculer un ε pour lequel (6.4) est vrai pour le recouvrement de l'exemple précédent.

Réponse. Si $\varepsilon_0 \geq 1$, c'est trivial. Supposons donc $\varepsilon_0 < 1$.

Si $x \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, on a $B(x, \frac{\varepsilon_0}{2}) \subset]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$: on prendra donc $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Si $x \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, on veut trouver ε t.q. il existe n avec $B(x, \varepsilon) \subset]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$.

Commençons par le cas particulier $x = \frac{\varepsilon_0}{2}$ (le cas "le plus embêtant") : on doit trouver n t.q. $\frac{\varepsilon_0}{2} - \varepsilon \geq \frac{1}{n+1}$ et $\frac{\varepsilon_0}{2} + \varepsilon \leq \frac{1}{n-1}$. Prenons $n-1 = E(\frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{2} + \varepsilon})$ la partie entière de $\frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{2} + \varepsilon}$. Alors $n+1 = n-1 + 2 \geq \frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{2} - \varepsilon}$ sera satisfait en particulier si $\frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{2} - \varepsilon} - \frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{2} + \varepsilon} \leq 1$, i.e. dès que $2\varepsilon \leq (\frac{\varepsilon_0}{2} - \varepsilon)(\frac{\varepsilon_0}{2} + \varepsilon)$, i.e. dès que $\varepsilon^2 + 2\varepsilon - (\frac{\varepsilon_0}{2})^2 \leq 0$. Toujours possible car le discriminant réduit est $\Delta_0 = 1 + (\frac{\varepsilon_0}{2})^2 > 0$: on prend $\varepsilon = -1 + \sqrt{\Delta_0}$.

Enfin soit $x > \frac{\varepsilon_0}{2}$. On doit trouver n t.q. $x - \varepsilon \geq \frac{1}{n+1}$ et $x + \varepsilon \leq \frac{1}{n-1}$. Prenons $n-1 = E(\frac{1}{x + \varepsilon})$ la partie entière de $\frac{1}{x + \varepsilon}$. Alors $n+1 = n-1 + 2 \geq \frac{1}{x - \varepsilon}$ sera satisfait en particulier si $\frac{1}{x - \varepsilon} - \frac{1}{x + \varepsilon} \leq 1$, i.e. dès que $2\varepsilon \leq (x - \varepsilon)(x + \varepsilon)$, i.e. dès que $\varepsilon^2 + 2\varepsilon - x^2 \leq 0$. Toujours possible car le discriminant réduit est $\Delta_1 = 1 + x^2 > 0$: il suffit de choisir $\varepsilon \leq -1 + \sqrt{\Delta_1}$. Comme $\Delta_1 \geq \Delta_0$ (car $x \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$), on prend $\varepsilon = -1 + \sqrt{\Delta_0}$, et on a $B(x, \varepsilon) \subset]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$. ■

6.2.3 Caractérisation d'un compact par les boules $B(x, \varepsilon)$

Théorème 6.7 Soit (E, d) un espace métrique complet. E est compact au sens de Bolzano–Weierstrass ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_n \in E, E = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon). \quad (6.7)$$

Preuve. \Rightarrow Si E est compact, alors $\bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$ étant un recouvrement de E on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Idem pour $\bar{A} \supset A$.

\Leftarrow Réciproquement, soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans E . Montrons qu'on peut extraire une sous-suite convergente dans E . (6.7) et $\varepsilon = \frac{1}{2}$ donnent : il existe $(x_i^1)_{i=1, \dots, n_1} \in E^{n_1}$ t.q. $\bigcup_{i=1, \dots, n_1} B(x_i^1, \frac{1}{2}) = E$ (recouvrement fini). Donc l'une des boules contient une infinité de x_i : notons $(y_i^1)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ces points; en particulier $d(y_i^1, y_j^1) \leq 1$ pour tout i, j .

On recommence avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$: on obtient une suite $(y_i^2)_{i \in \mathbb{N}^*}$ extraite de la suite $(y_i^1)_{i \in \mathbb{N}^*}$ avec $d(y_i^2, y_j^2) \leq \frac{1}{2}$ pour tout i, j . Puis avec $\varepsilon = \frac{1}{6}, \varepsilon = \frac{1}{8}, \dots$ et les suites $(y_i^3)_{i \in \mathbb{N}^*}, (y_i^4)_{i \in \mathbb{N}^*}, \dots$, toutes extraites de la précédente, avec $d(y_i^n, y_j^n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $i, j, n \in \mathbb{N}^*$. Donc la suite diagonale $(y_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est extraite de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, avec $d(y_m^m, y_n^n) \leq \frac{1}{m}$ pour tout m, n t.q. $m \leq n$. Donc la sous-suite $(y_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, donc admet une limite car E est complet. ■

Corollaire 6.8 Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $A \subset E$. \bar{A} est compact au sens de Bolzano–Weierstrass ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de E de rayon ε .

6.2.4 La compacité de Bolzano–Weierstrass implique celle de Borel–Lebesgue

Théorème 6.9 Si (E, d) est un espace métrique et si E est compact au sens de Bolzano–Weierstrass alors E est compact au sens de Borel–Lebesgue.

Et donc dans un espace métrique, la compacité au sens de Borel–Lebesgue est équivalente à la compacité au sens de Bolzano–Weierstrass.

Preuve. Avec le théorème 6.7, il suffit de considérer les recouvrements de type $\bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$. Soit $\varepsilon > 0$ et un tel recouvrement. Soit $x_0 \in E$. Si on a $B(x_0, \varepsilon) \supset E$ le théorème est démontré. Sinon soit x_1 tel que $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$. Si $B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) = E$, le théorème est démontré. Sinon soit $x_2 \notin B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$... On construit ainsi une suite par récurrence. Si la suite est finie alors le théorème est démontré.

Si la suite est infinie et vérifie $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $n \neq m$. Une telle suite n'a pas de valeurs d'adhérence (aucune sous-suite n'est de Cauchy), et donc E n'est pas compact. C'est contraire à l'hypothèse : donc la suite est finie, donc $E \subset \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon)$ (recouvrement fini). \blacksquare

6.3 Un compact est fermé et borné

Proposition 6.10 Soit (E, d) un espace métrique. Si K est un compact de E alors K est un fermé borné.

N.B. : la réciproque est fautive, déjà vu proposition 4.22, et voir § 6.4.

Preuve. La proposition 4.15 nous indique que K est fermé. Puis pour K compact, si $\varepsilon > 0$ alors $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ est un recouvrement ouvert de K , et on peut en extraire un sous-recouvrement fini : $\exists N \in \mathbb{N}, \exists (x_i)_{i=1, \dots, N} \in E^N$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon)$. Donc K est borné. \blacksquare

6.4 Dans $(\mathbb{R}, d(\cdot, \cdot))$ un fermé borné n'est pas nécessairement compact

Insistons : l'assertion "un fermé borné est compact" est fautive en générale, même dans \mathbb{R} (non usuel) : exemple, soit \mathbb{R} muni de la distance $d(x, y) = \inf(1, |x - y|)$.

Alors $\bar{B}(0, 2) = \{x : d(x, 0) \leq 2\}$ est un fermé borné et $\bar{B}(0, 2) = \mathbb{R}$. Mais \mathbb{R} tout entier n'est pas compact : prendre la suite $(x_n) = (n)$ qui n'a aucune sous-suite convergente dans (\mathbb{R}, d) car $d(m, n) = 1$ pour tout $m \neq n$ (aucune sous-suite de Cauchy).

(Sans passer par Bolzano–Weierstrass, soit $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} B(x, \frac{1}{2})$ qui est un recouvrement de \mathbb{R} . Si on peut extraire un sous-recouvrement fini il est de la forme $\bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \frac{1}{2})$. Soit alors $y = 1 + \max_{i=1, \dots, n}(x_i)$. Alors $d(x_i, y) = 1$ pour tout i et $y \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \frac{1}{2})$: donc il n'existe pas de sous-recouvrement fini.)

On aura quand même dans \mathbb{R}^n : si la distance $d(\cdot, \cdot)$ dérive d'une norme $\|\cdot\|$, alors "un fermé borné est compact dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ " : en effet, on verra que toutes les normes sont toutes équivalentes dans \mathbb{R}^n , voir plus loin proposition 9.12, et un fermé borné est compact dans \mathbb{R}^n muni de sa distance euclidienne (généralisation simple de la proposition 4.22).

Mais c'est faux en général en dimension infinie : par exemple la boule unité fermée de ℓ^2 muni de sa topologie forte n'est pas compacte, voir proposition 4.23.

7 Espace métrique complet

7.1 Densité

Pour la définition de la densité voir la définition 3.13.

Proposition 7.1 Si (E, d) est un espace métrique, alors $A \subset E$ est dense ssi :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, d(x, a) < \varepsilon, \quad (7.1)$$

ou encore ssi $\forall x \in E, d(x, A) = 0$.

Preuve. Si A dense, alors si $x \in E$, quel que soit ε on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Réciproquement, si on a (7.1), alors quel que soit ε on a $B(x, \varepsilon) \cap A \supset \{a\} \neq \emptyset$. \blacksquare

7.2 Espace métrique séparable et compacité

Définition 7.2 Un espace métrique (E, d) est séparable ssi il contient une sous-suite dénombrable dense, i.e. ssi il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E telle que :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, d(x, x_n) < \varepsilon. \quad (7.2)$$

Exemple 7.3 \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} : on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q}$ t.q. $d(x, q) < \varepsilon$. Et \mathbb{Q} étant dénombrable (il existe une surjection $n \in \mathbb{N} \rightarrow q = q(n) \in \mathbb{Q}$, voir cours de première année), \mathbb{R} est séparable. \blacksquare

Proposition 7.4 *Tout (E, d) espace métrique compact admet une base de voisinages dénombrable constituée de boules ouvertes, donc il contient un sous-ensemble dénombrable dense, et donc il est séparable.*

Preuve. À $N \in \mathbb{N}$ fixé, soit le recouvrement ouvert $\bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{N})$ de E . Comme E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe $M_N \in \mathbb{N}$ tel que $E = \bigcup_{n \leq M_N} B(x_n^N, \frac{1}{N})$ où les $x_n^N \in E$. Notons $U = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} (\bigcup_{n \leq M_N} B(x_n^N, \frac{1}{N}))$: on a U recouvre E , et U est constitué d'un nombre dénombrable d'ouverts.

Montrons que U constitue une base de voisinages. Soit une boule $B(x, r)$ dans E . Montrons qu'elle contient une des boules $B(x_n^N, \frac{1}{N})$. On choisit N tel que $\frac{1}{N} < \frac{r}{2}$: comme $x \in E$ on a $x \in \bigcup_{n \leq M_N} B(x_n^N, \frac{1}{N})$ d'où $x \in B(x_n^N, \frac{1}{N})$ pour un x_n^N donné, avec $B(x, r) \supset B(x, \frac{1}{N})$: la famille U trouvée constitue une base de voisinages.

La démarche précédente montre que la famille (x_n^N) de points trouvés est dense, et donc E est séparable. ■

7.3 Espace complet

La définition d'une suite de Cauchy a été donnée définition 5.32.

Définition 7.5 L'espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Exemple 7.6 Euler à proposer la suite des rationnels $u_1 = 1$, $u_n = \frac{n^2+2}{2n}$ approchant $\sqrt{2}$.

\mathbb{Q} muni de la distance usuelle n'est pas complet. Par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ bien qu'il soit limite d'une suite de Cauchy (q_n) dans \mathbb{Q} .

\mathbb{R} muni de la distance usuelle est complet (c'est par construction le complété de \mathbb{Q}).

$]0, 1[$ muni de la distance usuelle de \mathbb{R} n'est pas complet. Par exemple la suite $(x_n = \frac{1}{n})$ n'est pas convergente dans $]0, 1[$, bien qu'elle soit de Cauchy. ■

Proposition 7.7

- 1- Si (E, d) est complet et si $F \subset E$ est fermé dans E , alors (F, d) est complet.
- 2- Si (E, d) est complet et si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides de E telle que $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors l'intersection $\bigcap_{i=1, \dots, n} F_n$ contient un et un seul point.
- 3- Si (E, d) est métrique, si $A \subset E$ est tel que (A, d) est complet, alors A est fermé.
- 4- Toute de suite Cauchy dans (E, d) complet a une et une seule valeur d'adhérence qui est la limite de la suite.

Preuve. 1- Soit (x_n) une suite de Cauchy dans F . C'est donc une suite de Cauchy dans E complet, donc convergente vers un $x \in E$ qui est valeur d'adhérence dans F . Et F étant fermé dans E , F contient ses valeurs d'adhérence, donc $x \in F$.

2- Dans chaque F_n on prend un point x_n . On a ainsi une suite de Cauchy dans E donc convergente vers un $x \in E$. Et la suite $(x_{n+p})_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F_n fermé, donc convergente dans F_n nécessairement vers x . D'où $x \in F_n$ pour tout n . Puis $\text{diam}(\bigcap_{\mathbb{N}} F_n) = 0$, donc l'intersection ne peut pas contenir plus d'un point.

3- Si (A, d) est complet, alors A contient ses valeurs d'adhérence : en effet, si $x \in E$ est adhérent à A , il est limite d'une suite (x_n) de A , et cette suite est trivialement de Cauchy dans A , donc convergente dans A vers un $y \in A$. Et $d(x, y) = \lim d(x_n, y) = 0$, d'où $y = x \in A$.

4- On applique le point 2-.

■

Proposition 7.8

1- Si (K, d) est un espace métrique compact, alors (K, d) est complet. (Réciproque fautive : \mathbb{R} est complet, non compact, pour la distance usuelle.)

2- Si (E, d) est métrique et si la boule fermée $\bar{B}(x, r)$ de E est compacte, pour tout $x \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}$, alors E est complet.

Preuve. 1- Si K est compact, alors de toute suite de Cauchy (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente (x_{n_k}) dans K vers un élément $x \in K$. Et ce x est trivialement limite de toute la suite (x_n) (pas uniquement de la suite extraite).

2- Soit (x_n) une suite de Cauchy de E . Alors (x_n) est toute entière dans une boule $B(y, r)$ de E . D'où le résultat. ■

7.4 \mathbb{R} le complété de \mathbb{Q}

Soit \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$. Et un rationnel sera noté $(m, n) =^{\text{noté}} \frac{m}{n} = q$. Et \mathbb{Q} muni de l'addition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et de la multiplication $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ est un corps.

On munit \mathbb{Q} de la topologie usuelle (distance euclidienne $d(p, q) = |p - q|$).

Notons \mathcal{SC} l'ensemble des suites de Cauchy de \mathbb{Q} .

Si $(a_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, notons $(\mathbf{a}b_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{a}b_{2n} = a_n, \quad \mathbf{a}b_{2n+1} = b_n.$$

Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence dans \mathcal{SC} : si

$$(a_n)_{\mathbb{N}} \mathcal{R} (b_n)_{\mathbb{N}} \iff (\mathbf{a}b_n)_{\mathbb{N}} \in \mathcal{SC}.$$

On vérifie immédiatement que \mathcal{R} est bien réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{SC}/\mathcal{R} =^{\text{noté}} \mathbb{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Donc si $r \in \mathbb{R}$, on a $r = \overline{(a_n)_{\mathbb{N}}}$ où $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de rationnels (un représentant de r).

Si $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante dans \mathbb{Q} , i.e. $a_n = a_1 \in \mathbb{Q}$ pour tout n , on note simplement $\overline{(a_n)_{\mathbb{N}}} = a_1$. Ainsi tous les rationnels sont notés comme des réels.

Proposition 7.9 \mathbb{R} est complet pour la topologie quotient.

Preuve. Exercice. ▀

La topologie quotient est encore appelée topologie euclidienne.

Remarque 7.10 Le cas de la complétion des espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour $p \geq 1$ (fonctions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables t.q. $\int_{\Omega} |f(x)|^p d\Omega < \infty$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) est présenté dans le poly "Introduction à l'intégrale de Lebesgue", et procède également de la technique des classes d'équivalences. ▀

7.5 Théorème de Baire

Théorème 7.11 Soit E un espace métrique complet (non vide).

(i) Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (dénombrable) de fermés de E d'intérieur vide, alors l'intérieur de l'union est vide (si pour tout n on a F_n fermé et $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$).

De manière équivalente (complémentaire) :

(ii) Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (dénombrable) d'ouverts de E tous denses dans E alors l'intersection des U_n est dense (si pour tout n on a U_n ouvert et U_n dense alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ dense).

Et on en déduit :

(iii) Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (dénombrable) de fermés t.q. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$.

(Le théorème de Baire est souvent utilisé avec (iii)).

Preuve. Montrons (ii). Soit $B(x, r)$ une boule ouverte qcq dans E et il s'agit de montrer que $B(x, r) \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_n) \neq \emptyset$.

Comme U_0 est dense et $U_0 \cap B(x, r)$ est ouvert non vide, $\exists x_0 \in U_0 \cap B(x, r)$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B(x_0, r_0)} \subset U_0 \cap B(x, r)$. Puis de même $\exists x_1 \in U_1 \cap (U_0 \cap B(x, r))$ et $\exists r_1 > 0, r_1 < \frac{r_0}{2}$ tels que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_1 \cap U_0 \cap B(x, r)$. On construit ainsi une suite (x_n) qui est de Cauchy, donc convergente dans E complet vers un $y \in \overline{B(x_n, r_n)}$ pour tout n . Donc $y \in B(x, r)$ et par construction $y \in U_n$ pour tout n : $B(x, r) \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_n) \neq \emptyset$.

Montrons (ii) \Rightarrow (i) (passage au complémentaire). Soit donc $(F_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Posant $U_n = E - F_n$, on a $\overline{U_n} = \overline{E - F_n} = E - \overset{\circ}{F}_n = E$ et donc $(U_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts dense dans E . Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = E$ d'après (ii). Or $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E - F_n = E - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E - (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$, donc $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \emptyset$, donc (i).

Réciproquement, montrons (i) \Rightarrow (ii) (passage au complémentaire). Remonter les calculs précédents.

Montrons (i) \Rightarrow (iii). (i) s'écrit également (négation) : si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$, alors $\exists n, \overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$. Et si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$ et

E non vide, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E \neq \emptyset$, donc $\exists n, \overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$. ▀

Exemple 7.12 Dans \mathbb{R}^2 si F_n est la droite " $y = nx$ ", alors $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$ et l'union $\bigcup_{\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide (union dénombrable). ▀

8 Convergence simple et uniforme de fonctions

8.1 Convergence simple de fonctions

Cette convergence a été introduite paragraphe 5.3.

Exemple 8.1 Pour $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vérifie $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. ■

Remarque 8.2 Dans la suite, on va s'intéresser à des convergences dont les topologies sous-jacentes sont métriques : il sera beaucoup plus facile de comparer deux fonctions f, g grâce au réel $d(f, g)$. ■

8.2 Convergence uniforme de fonctions

Définition 8.3 Soit X un ensemble et (F, d) un espace métrique. On considère des fonctions $f_n \in \mathcal{F}(X; F)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}(X; F)$ ssi :

$$\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (8.1)$$

i.e. ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \quad (8.2)$$

Proposition 8.4 Si (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f .

Preuve. Immédiat. ■

Exemple 8.5 Pour $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin x$ définie sur \mathbb{R} , la suite (f_n) converge uniformément vers f donnée par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■

Et donc (f_n) ne converge pas uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}(X; F)$ ssi :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N > 0, \quad \exists n \geq N, \quad \exists x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon. \quad (8.3)$$

Exemple 8.6 Pour $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x)$ qui vérifie $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$, mais ne converge pas uniformément. Prendre par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, qui vérifie, pour tout N , il existe $n \geq N$, à savoir $n = N$, pour lequel il existe $x_n \in [0, 1]$, à savoir $x_n = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ qui vérifie $|(x_n)^n - 0| = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, i.e. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$.

D'ailleurs on verra qu'une suite (f_n) de fonctions continues sur un compact qui converge uniformément a pour limite une fonction f continue : or dans notre exemple les f_n sont continues alors que f ne l'est pas. ■

Notations. Soit X un ensemble et (F, d) un espace métrique. On note $\mathcal{B}(X; F)$ l'ensemble des fonctions bornées, i.e. :

$$\mathcal{B}(X; F) = \{f \in \mathcal{F}(X, F) : \exists R > 0, \forall x \in X, f(x) \in B(0, R)\},$$

où $B(0, R) = \{y \in F : d(0, y) \leq R\}$ est la boule de centre 0 et de rayon R de F .

Proposition 8.7 Soit X un ensemble et (F, d) un espace métrique. La fonction $d_\infty : \mathcal{B}(X; F) \times \mathcal{B}(X; F) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \quad (8.4)$$

est une distance sur $\mathcal{B}(X; F)$. Ainsi $(\mathcal{B}(X; F), d_\infty)$ est un espace métrique, et la convergence uniforme dans $\mathcal{B}(X; F)$ est la convergence pour la métrique d_∞ .

De plus, si F est complet alors $(\mathcal{B}(X, F), d_\infty)$ est complet.

Preuve. M_1 : si $d_\infty(f, g) = 0$ alors pour tout $x \in X : d(f(x), g(x)) = 0$ pour tout $x \in X$, i.e. $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$, i.e. $f = g$.

M_2 : il est immédiat que $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$.

M_3 : comme pour tout $x \in X$ on a $d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x))$ on déduit $d(f(x), h(x)) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$ pour tout x , d'où $d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$.

Puis supposons F complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, F)$. Construisons la limite f : pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans F en effet $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. Donc, F étant complet, $(f_n(x))$ est convergente. Notons $f(x)$ la limite. On a ainsi construit une fonction $f \in \mathcal{F}(X, F)$. Montrons que $f \in \mathcal{B}(X, F)$ (est bornée), i.e. $\exists R > 0$ t.q. $\forall x \in X : d_\infty(f, 0) < R$.

On a $d(f(x), 0) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), 0)$. Comme la suite $(f_n(x))$ est convergente, on a $d(f(x), f_n(x)) \leq 1$ pour n assez grand. Et $d(f_n(x), 0) \leq d_\infty(f_n, 0)$, et la suite de réels $d_\infty(f_n, 0)$ est bornée car (f_n) est de Cauchy pour la distance d_∞ . Soit $R = \sup_{n \in \mathbb{N}} d_\infty(f_n, 0)$. On a obtenu $d(f(x), 0) \leq 1 + R$ pour tout x , d'où $d_\infty(f, 0) \leq 1 + R$, d'où $f \in \mathcal{B}(X, F)$. ■

Remarque 8.8 Si on se fixe un $f_0 \in F$ et on note :

$$B_{f_0}(X, F) = \{f \in \mathcal{F}(X, F) : \exists R > 0, \forall x \in X, f(x) \in B(f_0, R)\},$$

la proposition précédente est conservée quand on remplace $B(X, F)$ par $B_{f_0}(X, F)$, la démonstration étant similaire. ■

Remarque 8.9 Sur l'espace $\mathcal{F}(X; F)$ tout entier, d_∞ n'est pas une distance mais un écart (prend ses valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$). ■

Remarque 8.10 En prenant un peu d'avance (voir paragraphe suivant), si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé, la distance d_∞ sur $(\mathcal{B}(X, F), d_\infty)$ sera la distance associée à la norme (voir plus loin) :

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_F.$$

■

9 Espace normé

Pour ce paragraphe, on a besoin des résultats de continuité qui seront cependant donnés plus loin. Introduire les espaces normés dès maintenant permet de voir les simplifications apportées par la norme par rapport à la distance.

9.1 Définition et distance associée

Les distances ont été définies sur des ensembles quelconques. Les normes ne peuvent être définies que sur des espaces vectoriels et sont des distances très particulières.

Définition 9.1 On se place dans le cadre d'un espace vectoriel E sur le corps \mathbb{R} . Une norme est une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$N_1 : p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (séparation),}$$

$$N_2 : p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \text{ pour tout } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \text{ (homogénéité),}$$

$$N_3 : p(x + y) \leq p(x) + p(y), \text{ pour tout } (x, y) \in E^2 \text{ (inégalité triangulaire).}$$

C'est une semi-norme si au lieu de N_1 on a uniquement $x = 0 \Rightarrow p(x) = 0$.

Définition 9.2 On note très souvent une norme p par $p(\cdot) = \|\cdot\|$. Une norme sur E est très souvent notée $\|\cdot\|_E$ ou encore plus simplement $\|\cdot\|$ (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la norme).

Un espace E normé est un espace vectoriel muni d'une norme p (ou $\|\cdot\|_E$), et noté (E, p) (ou $(E, \|\cdot\|_E)$).

Exemple 9.3 La norme euclidienne (norme usuelle) de \mathbb{R}^n est donnée par, si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} : \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (longueur de \vec{x} donnée par Pythagore). ■

Proposition 9.4 1- E étant un espace normé pour la norme p , on pose :

$$d(x, y) = p(y - x). \tag{9.1}$$

Alors $d(\cdot, \cdot)$ est une distance sur E appelée distance associée à la norme. De plus $d(\cdot, \cdot)$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel, i.e., pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$d(x - z, y - z) = d(x, y), \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y). \tag{9.2}$$

2- Réciproquement, si E est un e.v. muni d'une distance d qui vérifie les propriétés d'invariance par translation et d'homogénéité (9.2), alors il existe une norme p dont dérive d , à savoir $p(x) \stackrel{\text{déf}}{=} d(x, 0)$.

Preuve. 1- Soit $d(x, y) = p(y - x)$. On vérifie immédiatement M_1 , M_2 et M_3 , voir définition 5.1, ainsi que (9.2).

2- Soit $d(\cdot, \cdot)$ vérifiant (9.2). On vérifie immédiatement que $p(x) = d(x, 0)$ vérifie N_1 , N_2 et N_3 de la définition 9.1. ■

Définition 9.5 Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (E, p) complet pour la norme p , i.e., avec $d(\cdot, \cdot)$ la distance associée à la norme, $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} p(y - x)$, l'espace métrique (E, d) est complet.

Remarque 9.6 À toute norme p est associée la distance $d(x, y) = p(x - y)$. Par contre il existe des distances qui ne dérivent pas de norme, comme toutes les distances d bornées (par exemple $d(x, y) = \inf(1, p(x - y))$ où p est une norme et ici $d(x, y) \leq 1$ pour tout x, y).

En effet, une norme n'est jamais bornée (sur un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$), car elle doit vérifier l'homogénéité N_2 . ■

9.2 Équivalences de normes

Définition 9.7 Deux normes sur un espace vectoriel sont dites équivalentes ssi les distances associées sont fortement équivalentes, cf. (5.10).

Proposition 9.8 Soit E un espace vectoriel muni de deux normes p_1 et p_2 . Les normes p_1 et p_2 sont équivalentes ssi :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha p_1 \leq p_2 \leq \beta p_1, \quad (9.3)$$

i.e. ssi :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \alpha p_1(x) \leq p_2(x) \leq \beta p_1(x), \quad (9.4)$$

i.e. ssi les distances associées vérifient (5.10).

Preuve. On pose $p_i(x) = d_i(x, 0)$, et la démonstration est immédiate avec (5.10). ■

Proposition 9.9 Soit E un espace normé. Si p_1 et p_2 sont deux normes équivalentes, alors toute suite de Cauchy pour l'une est suite de Cauchy pour l'autre.

Preuve. On a $\alpha p_1(x_n - x_m) \leq p_2(x_n - x_m) \leq \beta p_1(x_n - x_m)$, d'où le résultat. ■

Proposition 9.10 Dans E est un espace vectoriel muni de deux normes p_1 et p_2 définissant les topologies \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 .

\mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 ssi :

$$\exists \beta > 0, \quad p_2 \leq \beta p_1, \quad (9.5)$$

i.e. ssi :

$$\exists \beta > 0, \quad \forall x \in E, \quad p_2(x) \leq \beta p_1(x). \quad (9.6)$$

Preuve. On pose $p_i(x) = d_i(x, 0)$. Supposons (9.5) : alors on a (5.7), et \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 .

Réciproquement : soit $B_i(0, r_i)$ la boule (ouverte) de centre 0 et de rayon r_i pour la topologie \mathcal{O}_i . Comme \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 , pour $r_2 = 1$ donné, il existe $r_1 > 0$ tel que $B_2(0, 1) \supset B_1(0, r_1)$, i.e. si $p_1(x) < r_1$ alors $p_2(x) < 1$. Donc pour x tel que $p_1(x) = \frac{r_1}{2}$ on a $p_2(\frac{x}{p_1(x)}) < \frac{2}{r_1}$, i.e. $p_2(x) \leq \beta p_1(x)$ où $\beta = \frac{2}{r_1}$ pour tout x sur la sphère $p_1(x) = \frac{r_1}{2}$. D'où, par homogénéité de la norme, pour tout $x \in E$, on a $p_2(x) \leq \beta p_1(x)$ (car $p_2(x) = c p_2(\frac{x}{c})$ où $p_1(\frac{x}{c}) = \frac{r_1}{2}$, i.e. avec $c = \frac{2p_1(x)}{r_1}$, et donc $p_2(x) \leq c \beta p_1(\frac{x}{c}) = \beta p_1(x)$).

Autre démonstration, avec la continuité : supposons \mathcal{O}_1 plus fine que \mathcal{O}_2 . En particulier on a (5.6), et l'application linéaire $I : x \in (E, d_1) \rightarrow x \in (E, d_2)$ est continue, donc il existe $\beta > 0$ tel que $p_2(x) = p_2(I(x)) \leq \beta p_1(x)$ pour tout $x \in E$ (voir proposition 11.20). De même pour α . ■

Exemple 9.11 Pour $f \in C^1([0, \pi]; \mathbb{R})$, la norme $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est plus forte = plus fine que la norme $\|f\|_\infty$ (qui est $= \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$). En effet, dès que f est telle que $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < \varepsilon$ on a $\|f\|_\infty < \varepsilon$. Et $\|\cdot\|_{C^1}$ est strictement plus fine que $\|f\|_\infty$. En effet, prendre $f_n(x) = \sin(nx)$.

Au lieu de "plus forte" ou "plus fine", ou aurait pu dire également "plus précise". ■

9.3 Les normes sont équivalentes en dimension finie

Proposition 9.12 Dans \mathbb{R}^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ (dimension finie), toutes les normes sont équivalentes.

Preuve. On a besoin 1- de la continuité : toute norme p sur \mathbb{R}^n est continue, voir plus loin proposition 11.18, et 2- l'image d'un compact par une application continue est un compact, voir plus loin proposition 11.10.

Avec ces deux résultats, on pose $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = 1\}$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . Comme S est compact (fermé borné de \mathbb{R}^n) et p est continue, on a $p(S)$ est compact, donc p atteint ses bornes sur S : soit $\alpha = \min_{\vec{x} \in S} p(\vec{x}) = p(\vec{x}_{\min})$ et soit $\beta = \max_{\vec{x} \in S} p(\vec{x}) = p(\vec{x}_{\max})$. On a $\alpha, \beta > 0$ car $\vec{x}_{\min}, \vec{x}_{\max} \neq \vec{0}$ (ils sont normés à 1).

Comme $\|\vec{x}\| = 1$ sur S , on a $\alpha\|\vec{x}\| \leq p(\vec{x}) \leq \beta\|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in S$. D'où par homogénéité (voir (N_2) de la définition 9.1) on a $\alpha\|\vec{x}\| \leq p(\vec{x}) \leq \beta\|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Donc toute norme est équivalente à la norme euclidienne, donc immédiatement toutes les normes sont équivalentes entre elles (dans \mathbb{R}^n , et plus généralement en dimension finie). ■

9.4 Non équivalences des normes en dimension infinie

Les normes ne sont pas toutes équivalentes en dimension infinie. Voici deux exemples très usuels.

Exemple 9.13 soit $K = [0, 1]$ compact de \mathbb{R} (topologie usuelle), et soit l'ensemble $C^0(K; \mathbb{R})$ des fonctions (uniformément) continues sur K à valeurs réelles, ensemble muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Montrer que $(C^0(K; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est complet. Indication : prendre une suite (f_n) de Cauchy dans $(C^0(K; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ qui converge dans $\mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ (ou plus précisément dans l'ensemble des fonctions bornées sur K) et montrer que la limite est continue.

Puis montrer que pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ définie par $\|f\|_{L^2} = \left(\int_K |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, l'espace $(C^0(K), \|\cdot\|_{L^2})$ n'est pas complet. Indication : prendre $f_n(x) = nx$ si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $f_n(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, faire un dessin, et montrer que la suite formée est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{L^2}$, converge vers une fonction discontinue.

En déduire que les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_{L^2}$ ne sont pas équivalentes. Indication : montrer que la suite (f_n) ci-dessus n'est pas de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty}$ alors qu'elle l'est dans $L^2(K; \mathbb{R})$.

(Ici $C^0(K; \mathbb{R})$ est un espace de dimension infinie). ■

Exemple 9.14 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et soit $H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \vec{\text{grad}}f \in (L^2(\Omega))^n\}$ muni de sa norme $\|f\|_{H^1} = (\|f\|_{L^2}^2 + \|\vec{\text{grad}}f\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que dans $H^1(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

Réponse. On remarque qu'on a toujours trivialement $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$. Montrons qu'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\|\cdot\|_{H^1} \leq c\|\cdot\|_{L^2}$, ou quitte à remplacer c par $c-1$ qu'il n'existe pas de constante c telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$, $\|\vec{\text{grad}}f\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}$.

On se place dans \mathbb{R} , avec $\Omega = [0, \pi]$. Soit $f_n(x) = \sin(nx)$. On a $\|f_n\|_{L^2} = \left(\int_0^{\pi} (\sin nx)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et $\|f'_n\|_{L^2} = \left(\int_0^{\pi} (n \cos nx)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = n\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, i.e. $\|f'_n\|_{L^2} = n\|f_n\|_{L^2}$. Donc pour tout $c \in \mathbb{R}$ il existe $f \in H^1(\Omega)$ telle que $\|f'_n\| \geq c\|f_n\|_{L^2}$.

D'où il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$ on ait $\|f'\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}$, d'où les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ ne sont pas équivalentes. ■

9.5 Espace métrique localement compact, espace normé

Définition 9.15 Un espace métrique (E, d) est localement compact ssi tout point $x \in E$ possède un voisinage compact (i.e. il existe K compact, $K \subset E$, $x \in K$ et $K \supset U$ avec U ouvert dans E , et a fortiori \bar{U} est un aussi voisinage compact).

Exemple 9.16 \mathbb{R}^n muni de sa métrique usuelle n'est pas compact, mais est localement compact : pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, si $\varepsilon > 0$ alors $\overline{B(\vec{x}, \varepsilon)}$ est un voisinage compact de \vec{x} . Par contre \mathbb{Q} muni de sa métrique usuelle n'est pas localement compact (dans tout voisinage d'un rationnel il existe des irrationnels). ■

Exemple 9.17 Soit (E, d) un espace métrique localement compact. Si $U \subset E$ est ouvert, U est localement compact. En effet si $x \in U$, alors 1- il existe $\varepsilon_1 > 0$ t.q. $B(x, 2\varepsilon_1) \subset U$, et 2- $x \in E$ donc il existe $\varepsilon_2 > 0$ t.q. $\overline{B(x, \varepsilon_2)}$ est un voisinage compact dans E . On prend $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, et $\overline{B(x, \varepsilon)}$ est un voisinage compact dans U .

Et si $F \subset E$ est fermé, F est localement compact. En effet, si $x \in F$ alors il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\overline{B(x, \varepsilon)}$ est un voisinage compact dans E et donc $F \cap \overline{B(x, \varepsilon)}$ est un voisinage compact dans F . ■

Théorème 9.18 (de Riesz.) *Cas d'un espace vectoriel normé réel. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. E est localement compact ssi E est de dimension finie.*

Preuve. \Leftarrow : En prenant un peu d'avance : si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, alors E est isomorphe à \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^n est localement compact.

\Rightarrow : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé localement compact. Soit $\vec{x} = \vec{0} \in E$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q. $K = \bar{B}(\vec{0}, \varepsilon)$ est un voisinage compact de x . Comme $K = \bigcup_{\vec{x} \in K} B(\vec{x}, \frac{\varepsilon}{2})$, on peut le recouvrir pour un nombre fini : $K = \bigcup_{i=1}^N B(\vec{x}_i, \frac{\varepsilon}{2})$. On pose $F = \text{Vect}\{\vec{x}_i : i = 1, \dots, n\}$. Montrons que $F = E$ (et donc que $\dim E \leq N$). Sinon, il existe $\vec{y} \in E$ t.q. $\vec{y} \notin F$ et $d(\vec{y}, F) = \alpha$, avec $\alpha > 0$ car F est de dimension finie donc localement compact donc complet donc fermé dans E .

Soit $\vec{y}_0 \in F$ tel que $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \frac{3}{2}\alpha$ (et \vec{y}_0 existe par définition de $d(\vec{y}, F) = \inf_{\vec{z} \in F} d(\vec{y}, \vec{z})$). (Dans le cas particulier où $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire, on peut prendre pour \vec{y}_0 la projection de \vec{y} sur F .) Soit $\vec{z} = \varepsilon \frac{\vec{y} - \vec{y}_0}{\|\vec{y} - \vec{y}_0\|}$. On a $\vec{z} \in K = \bar{B}(\vec{0}, \varepsilon)$, donc il existe $i \in [1, N]$ t.q. $\vec{z} \in B(\vec{x}_i, \frac{\varepsilon}{2})$, i.e. t.q. $\|\vec{z} - \vec{x}_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $\vec{x}_i, \vec{y}_0 \in F$, on a $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \frac{\varepsilon}{2} + \vec{y}_0 = \text{noté } \vec{x}_0 \in F$. Comme $\vec{x}_0 = \vec{y} - \frac{\|\vec{y} - \vec{y}_0\|}{\varepsilon}(\vec{z} - \vec{x}_i)$, on a $\|\vec{y} - \vec{x}_0\| = \frac{\|\vec{y} - \vec{y}_0\|}{\varepsilon} \|\vec{z} - \vec{x}_i\| \leq \frac{3}{2}\alpha \frac{1}{2} < \alpha$, avec $\|\vec{y} - \vec{x}_0\| \geq d(\vec{y}, F) \geq \alpha$. C'est absurde. \blacksquare

10 Espace muni d'un produit scalaire

On se place dans le cadre d'un espace vectoriel E sur le corps \mathbb{R} .

Définition 10.1 Un produit scalaire est une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est symétrique et définie positive.

Définition 10.2 La norme définie par $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ est appelée norme associée au produit scalaire (on vérifie qu'effectivement c'est une norme).

Définition 10.3 Un semi-produit scalaire est une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est symétrique, positive et $\varphi(x, x) = 0$ implique $x = 0$. Et alors $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ est appelée semi-norme associée (on vérifie qu'effectivement c'est une semi-norme).

Définition 10.4 Un espace muni d'un produit scalaire est appelé un espace pré-hilbertien. Et il est appelé hilbertien s'il est de plus complet pour la norme associée.

Proposition 10.5 (Critère de Jordan–Von Neumann.) *Une norme $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme (la somme des carrés des diagonales est égale à deux fois la somme des carrés des côtés) :*

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

le produit scalaire étant donné par $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

Preuve. On vérifie immédiatement que φ ainsi défini à partir de la norme $\|\cdot\|$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Et réciproquement, étant donné un produit scalaire φ , on vérifie immédiatement que $\|\cdot\| = \sqrt{\varphi(\cdot, \cdot)}$ est bien une norme. \blacksquare

Théorème 10.6 (Cauchy–Schwarz.) *Si φ est un produit scalaire (ou un semi produit scalaire), et si $\|\cdot\|$ est la norme associée (ou la semi-norme associée), alors :*

$$\forall x, y \in E, \quad |\varphi(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \tag{10.1}$$

i.e. le produit scalaire est inférieur ou égal au produit des normes. Et si φ est un produit scalaire, on a égalité ssi x et y sont proportionnels.

Preuve. On se donne $x, y \in E$ avec $y \neq 0$ (le cas $y=0$ étant trivial), et on considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|x + ty\|^2$. Comme $0 \leq f(t) = \varphi(x + ty, x + ty) = \|y\|^2 t^2 + 2\varphi(x, y)t + \|x\|^2$ est un polynôme de degré 2 en t toujours positif, son discriminant réduit $\Delta' = \varphi(x, y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ est ≤ 0 . C'est l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Et on a égalité lorsque $\Delta' = 0$, i.e. quand on a une racine double, donc pour t t.q. $f(t) = 0$, donc pour $x + ty = 0$ (car φ est définie positive), donc pour x proportionnel à y . \blacksquare

Théorème 10.7 Projection. *Soit E un Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E . Alors pour tout $z \in E$, il existe un unique $z_0 \in F$ tel que $(z - z_0, y) = 0$ pour tout $y \in F$. Et z_0 est appelé la projection de z sur F .*

Preuve. Montrons l'unicité. S'il existe deux vecteurs $z_1, z_2 \in F$ tels que $(z - z_1, y) = 0 = (z - z_2, y)$ pour tout $y \in F$, alors $(z_1 - z_2, y) = 0$ pour tout $y \in F$, en particulier pour $y = z_1 - z_2$, d'où $z_1 = z_2$. D'où s'il y a existence, il y a unicité.

Montrons l'existence. Soit $z \in E$. Soit $\alpha = \inf_{z_1 \in F} (\|z - z_1\|)$. Il s'agit de montrer que l'inf est atteint pour un $z_0 \in F$. Mais F est fermé, donc il existe bien un $z_0 \in F$ tel que $\alpha = \|z - z_0\|$. En effet, soit une suite $(z_n) \in F$ minimisante, construite comme : $z_n \in F$ et $\|z - z_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$. Alors cette suite est de Cauchy. En effet, $\|z_n - z_m\|^2 = 2\|z_n - z\|^2 + 2\|z_m - z\|^2 - 4\|\frac{z_m + z_n}{2} - z\|^2$ (vérification immédiate), avec $\frac{z_m + z_n}{2} \in F$ donc $\|\frac{z_m + z_n}{2} - z\| \geq \alpha$, donc $\|z_n - z_m\| \rightarrow 0$. Et F étant fermé dans E Banach, $(F, \|\cdot\|_E)$ est un Banach, et donc la suite de Cauchy converge dans F vers un élément $z_0 \in F$. Et comme la norme est continue, on a $\alpha = \|z - z_0\|$.

(Noter que si $z \in F$ le résultat est trivial : $z_0 = z$). \blacksquare

Un résultat fondamental obtenu dans un Hilbert est :

Théorème 10.8 Théorème de représentation de Riesz. Si E est un espace de Hilbert, si $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, alors il existe un vecteur $\tau \in E$ tel que :

$$\|\tau\|_E = \|\ell\|_{E'} \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \ell(x) = (\tau, x)_E.$$

(Représentation d'une forme linéaire continue par un vecteur dans le cas d'un Hilbert, ce vecteur étant orthogonal à l'hyperplan noyau $\text{Ker} \ell$.)

Preuve. Démonstration semblable au cas $E = \mathbb{R}^n$. Si $\ell = 0$ alors $\tau = 0$ convient. Sinon $\text{Ker} \ell \neq E$ et $\text{Ker} \ell = \ell^{-1}(\{0\})$ est fermé car ℓ est continue. Soit $z \notin \text{Ker} \ell$. Soit z_0 sa projection orthogonale sur $\text{Ker} \ell$ qui existe car $\text{Ker} \ell$ est fermé. Soit $n = \frac{z - z_0}{\|z - z_0\|}$ (vecteur normal à $\text{Ker} \ell$ et unitaire). Et soit $\tau = \lambda n$ où $\lambda = \ell(n) \in \mathbb{R}$. \blacksquare

Remarque 10.9 Attention : le théorème de représentation de Riesz est souvent mal interprété et mal utilisé : en particulier, les objets ℓ et τ ne sont pas comparables, l'un étant une fonction (servant à mesurer les vecteurs) et l'autre un vecteur. Les dimensions ne sont pas les mêmes ; le théorème permet essentiellement de simplifier certains calculs quand on sait de quoi on parle. Voir également les formules de changement de base qui ne sont pas les mêmes pour les formes et les vecteurs. \blacksquare

11 Continuité

11.1 Définition et caractérisations

Pour X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une fonction et $B \subset Y$, on rappelle que :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \tag{11.1}$$

est le sous-ensemble de X appelé image réciproque de B par f .

Proposition 11.1 Pour $f : X \rightarrow Y$ une fonction et $B \subset Y$, on a

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B), \tag{11.2}$$

i.e. l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque.

Preuve. On a $x \in f^{-1}(Y - B)$ ssi $f(x) \notin B$ ssi $x \notin f^{-1}(B)$. \blacksquare

Définition 11.2 On se donne deux espaces topologiques (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) . Soit une application $f : X \rightarrow Y$ et soit $x \in X$. Alors f est dite continue (ponctuellement) en x ssi :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \quad \exists V \in \mathcal{V}(x), \quad f(V) \subset W, \tag{11.3}$$

i.e. pour tout voisinage ouvert W de $f(x)$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $f(V) \subset W$, ou encore :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \quad f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x), \tag{11.4}$$

i.e. l'image réciproque de tout voisinage ouvert de $f(x)$ est un voisinage ouvert de x .

Définition 11.3 L'application f est dite continue sur X (ou dans X) si elle est continue en tout point $x \in X$.
Et on note $C^0(X, Y)$ l'ensemble des applications continues sur X à valeurs dans Y .

Proposition 11.4

1- f est continue en $x \in X$ ssi l'image réciproque de tout ouvert contenant $y = f(x)$ contient un ouvert contenant x , i.e. ssi :

$$\forall W \text{ ouvert de } Y \text{ t.q. } f(x) \in W, \quad \exists V \text{ ouvert de } X \text{ t.q. } x \in V \text{ vérifiant } f^{-1}(W) \supset V.$$

2- Et f est continue sur X ssi l'image réciproque de tout ouvert de Y par f est un ouvert de X .

Preuve. 1- Si f est continue, comme (11.3) est vraie pour tout voisinage ouvert, (11.3) est encore vraie pour tout ouvert.

Réciproquement, si c'est vrai pour tout ouvert, alors un voisinage ouvert contenant un ouvert, c'est vrai pour tout voisinage ouvert.

2-Immédiat. ▀

Remarque 11.5 L'image directe $f(U)$ d'un ouvert U par une application continue n'est pas un ouvert en général. Prendre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = 1$ (fonction constante), ou encore $f(x) = \sin(x)$. ▀

Proposition 11.6 $f \in C^0(X, Y)$ ssi pour tout fermé G de Y , $f^{-1}(G)$ est un fermé de X .

Preuve. Soit G fermé dans Y . Alors $Y - G$ est un ouvert de Y . Donc si f est continue sur X , $f^{-1}(Y - G)$ est ouvert. Mais $f^{-1}(Y - G) = Y - f^{-1}(G)$ d'où $f^{-1}(G)$ est fermé.

Réciproquement, si W est ouvert dans Y , alors $Y - W$ est fermé dans Y , et l'hypothèse $f^{-1}(Y - W)$ fermé donne $Y - f^{-1}(W)$ fermé, donc $f^{-1}(W)$ ouvert. Donc f est continue sur X . ▀

Remarque 11.7 Par contre l'image directe d'un fermé par une application continue n'a aucune raison d'être fermée. Par exemple $f : [1, \infty[\rightarrow]0, 1]$ donné par $f(x) = \frac{1}{x}$. Mais on va voir que l'image d'un compact par une application continue est compact. En particulier dans \mathbb{R} , l'image d'un fermé borné par une application continue est fermée et bornée. ▀

Et en termes d'images directes :

Proposition 11.8 $f \in C^0(X, Y)$ ssi : pour tout $A \subset X$ on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve. Supposons f continue sur X . Alors $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé. Et $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ fermé donne $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. D'où $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Réciproquement, on suppose que pour tout A on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, i.e. $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Soit W fermé dans Y . Montrons que $A = f^{-1}(W)$ est fermé. On a $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(W))}) \subset f^{-1}(\overline{W}) = f^{-1}(W) = A$ d'où $A = \overline{A}$. D'où f est continue. ▀

Remarque 11.9 Pour f continue et F fermé dans X on peut avoir $f(F) \subsetneq \overline{f(F)}$. Par exemple $f : [1, \infty[\rightarrow]0, 1]$ donné par $f(x) = \frac{1}{x}$: on prend $F = [1, \infty[$ qui est fermé et on a $f(F) =]0, 1]$ qui n'est pas fermé. ▀

11.2 Premières propriétés

Proposition 11.10 « Si f est continue alors l'image directe d'un compact est un compact. »

Énoncé complet : si K est un espace topologique compact, si Y est un espace topologique séparé et si $f \in C^0(K, Y)$ alors $f(K)$ est compact dans Y .

Preuve. On a " $f^{-1}(\bigcup_i V_i) = \bigcup_i (f^{-1}(V_i))$ " car $x \in f^{-1}(\bigcup_i V_i)$ ssi $f(x) \in (\bigcup_i V_i)$ ssi $\exists i : f(x) \in V_i$ ssi $\exists i : x \in f^{-1}(V_i)$ ssi $x \in \bigcup_i (f^{-1}(V_i))$.

D'où si $(\bigcup_i V_i) \supset f(K)$ est un recouvrement ouvert, on a $\bigcup_i (f^{-1}(V_i)) \supset K$, et $\bigcup_i (f^{-1}(V_i))$ est un recouvrement ouvert car f est continue. D'où si K est compact on peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i \in J} V_i$, d'où $(\bigcup_{i \in J} V_i) \supset f(K)$ est un sous-recouvrement fini. D'où $f(K)$ est compact. ▀

Corollaire 11.11 Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, avec \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle, et si K est un compact de X alors f atteint ses bornes supérieure et inférieure sur K :

$$\exists a, b \in K : f(a) = \min_{x \in K} f(x), \quad f(b) = \max_{x \in K} f(x).$$

Preuve. On a $f(K)$ compact donc fermé borné dans \mathbb{R} . Donc f atteint ses bornes dans K . ▀

Corollaire 11.12 Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, avec Y séparé, et si $A \subset X$ est relativement compact alors $f(A)$ est relativement compact dans Y . I.e., si \bar{A} est compact et si f est continue, alors $\overline{f(A)}$ est compact.

Preuve. Avec la proposition 11.10 on a $f(\bar{A})$ qui est compact donc fermé et donc $f(A) \subset f(\bar{A})$ donne $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$, et la proposition 11.8 donne $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, d'où $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$ est compact. ■

Proposition 11.13 Soit \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux topologies sur un ensemble E . Alors \mathcal{O}_1 est plus fine que \mathcal{O}_2 ssi l'application identité $I : (E, \mathcal{O}_1) \rightarrow (E, \mathcal{O}_2)$ est continue.

Preuve. En effet, dire que I est continue c'est dire que un ouvert U_2 pour la topologie \mathcal{O}_2 est un ouvert pour la topologie \mathcal{O}_1 , i.e. que $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$. ■

Proposition 11.14 Si X, Y et Z sont trois espaces topologiques, et si $f : X \rightarrow Y$ est continue sur X et $g : Y \rightarrow Z$ est continue sur Y , alors $g \circ f$ est continue sur X .

Preuve. On a " $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ ". D'où si C est ouvert dans Z alors $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ est un ouvert de X , d'où $g \circ f$ est continue. ■

Proposition 11.15 Si une application $f : X \rightarrow Y$ est continue au point $x \in X$, alors, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x). \quad (11.5)$$

I.e., une fonction continue $f : X \rightarrow Y$ transforme une suite convergente (x_n) en une suite convergente $(f(x_n))$.

Et la réciproque est vraie si x admet une base dénombrable de voisinages (ce sera vrai en particulier vrai pour les espaces métriques), i.e. si (11.5) est vrai alors f est continue.

Preuve. Soit (x_n) une suite qui converge vers x , i.e. telle que $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, x_m \in V$.

On veut : $\forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f(x_n) \in W$. Soit W ouvert fixé contenant $f(x)$. f étant continue, $f^{-1}(W)$ contient un ouvert V contenant x . Pour ce V on prend $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq M, x_m \in V$. Et donc, pour tout $m \geq M$ on a $f(x_m) \in W$.

Réciproquement, supposons (11.5) et f non continue en un point x , et soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de x . Et soit W ouvert de Y , t.q. $f(x) \in W$ et $f^{-1}(W)$ ne contient aucun U_n . Donc dans tout U_n on peut choisir un point x_n tel que $f(x_n) \notin W$. On a ainsi construit une suite (x_n) qui vérifie $x_n \rightarrow x$ et $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. En effet, (1.9) est trivialement vérifiée pour (x_n) et mis en défaut pour $(f(x_n))$. C'est contraire à l'hypothèse, donc si on a (11.5) alors f est continue. ■

11.3 Applications aux espaces métriques et normés

Proposition 11.16 soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application donnée. On a f continue en $x \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f^{-1}(B_F(f(x), \varepsilon)) \supset B_E(x, \eta),$$

i.e. ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B_E(x, \eta)) \subset B_F(f(x), \varepsilon),$$

i.e. ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in B_E(x, \eta), f(y) \in B_F(f(x), \varepsilon),$$

i.e. ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E : d_E(x, y) < \eta \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (11.6)$$

Preuve. On applique (11.3). ■

Corollaire 11.17 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$ une application donnée. On a f continue en $x \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E \text{ t.q. } \|x - y\|_E < \eta, \text{ on a } \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon. \quad (11.7)$$

Et si f est continue en x alors f est bornée dans un voisinage de x :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in B_E(x, \varepsilon), d_F(f(x), f(y)) \leq \eta. \quad (11.8)$$

Preuve. C'est la traduction de (11.6). ▀

Proposition 11.18 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle (valeur absolue). Alors, pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|, \quad (11.9)$$

et $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

Preuve. On pose $f = \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$. Cela revient à écrire que si $\|x - y\| < \eta$ alors $|\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$: c'est vérifié en prenant $\eta = \varepsilon$ car $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ grâce à l'inégalité triangulaire. ▀

Proposition 11.19 soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. L'application $f : E \rightarrow F$ est continue au point $x \in X$, ssi : pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_E(x_n, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_F(f(x_n), f(x)) = 0. \quad (11.10)$$

I.e., une fonction continue $f : X \rightarrow Y$ transforme une suite convergente (x_n) en une suite convergente $(f(x_n))$, et réciproquement si f transforme toute suite convergente en une suite convergente, alors f est continue (cas des espaces métriques).

Preuve. Avec la proposition 11.15, équation (11.5), on sait que si f est continue alors (11.10) est vérifiée.

Réciproquement, supposons (11.10) vérifiée pour toute suite (x_n) qui converge vers x , et montrons que f est continue en x . Supposons que f n'est pas continue en x : donc il existe $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0, \text{ en particulier pour } \eta = \frac{1}{n}, \exists x_n \text{ tel que } d_E(x, x_n) < \frac{1}{n} \text{ et } d_F(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon.$$

On a ainsi construit une suite (x_n) telle que $d_E(x_n, x) \rightarrow 0$ et telle que $d_F(f(x_n), f(x)) \not\rightarrow 0$. C'est contraire à l'hypothèse. Un tel ε n'existe donc pas, et donc f est continue en x . ▀

Proposition 11.20 Soit $\ell : E \rightarrow F$ une application linéaire de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) ℓ est continue dans E ,
- (ii) ℓ est continue en 0,
- (iii) ℓ est bornée sur la boule unité (ou sur toute partie bornée de E).
- (iv) $\exists c > 0, \forall x \in E, \|\ell(x)\|_F \leq c\|x\|_E$,

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) : trivial,

(ii) \Rightarrow (iii) : en effet, l'hypothèse est : $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\ell(B_E(x, \eta)) \subset B_F(x, \varepsilon)$. D'où ℓ étant linéaire, on déduit que $\ell(B_E(x, 1)) \subset B_F(x, \frac{\varepsilon}{\eta})$, et donc ℓ est bornée sur la boule unité par $\frac{\varepsilon}{\eta}$.

(iii) \Rightarrow (iv) : car ℓ linéaire étant bornée sur la boule unité, on a $\ell(\frac{x}{\|x\|_E}) \leq c$ où $c = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

(iv) \Rightarrow (i) : soit $x \in E$, alors $\|\ell(x) - \ell(\tilde{x})\|_F = \|\ell(x - \tilde{x})\|_F < c\|x - \tilde{x}\|_E$, et f est continue en x . ▀

11.4 Limite d'un produit de fonctions continues

Proposition 11.21 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Si $f, g : E \rightarrow F$ sont continues en x_0 alors fg est continue en x_0 et :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = (fg)(x_0). \quad (11.11)$$

Preuve. Avec la notation "petit o" : $f(x) = f(x_0) + o(1)$ et $g(x) = g(x_0) + o(1)$, d'où $f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + o(1)$.

Ou encore :

$$\begin{aligned} \|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)\|_F &\leq \|f(x)g(x) - f(x)g(x_0)\|_F + \|f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)\|_F \\ &\leq \|f(x)\|_F \|g(x) - g(x_0)\|_F + \|g(x_0)\|_F \|f(x) - f(x_0)\|_F \end{aligned}$$

avec f borné dans un voisinage de x_0 et $\|g(x) - g(x_0)\| \rightarrow 0$ et $\|f(x) - f(x_0)\| \rightarrow 0$. ▀

11.5 Uniforme continuité

Définition 11.22 soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces métriques. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite uniformément continue ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in E, \quad d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (11.12)$$

(Dès que $d(x, y) < \eta$, à quelque endroit que ce soit dans E , on est sûr que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.)

L'uniforme continuité n'est pas une notion ponctuelle contrairement à la continuité simple dans E . Cette notion n'a de sens que dans un espace métrique (pas dans un espace topologique quelconque).

Exemple 11.23 Dans (E, p) espace normé, la norme $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application uniformément continue (lorsque \mathbb{R}_+ est muni de la topologie usuelle de \mathbb{R}). En effet, on a (11.9), et à ε fixé on prend $\eta = \varepsilon$. ■

Proposition 11.24 Une application uniformément continue est continue en tout point.

Preuve. Si f satisfait à (11.12), on a trivialement (11.6). ■

Par contre, la réciproque est fautive : par exemple, la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}_+^* est continue sans être uniformément continue : en effet, $\exists \varepsilon > 0$, on prend $\varepsilon = 1$, tel que $\forall \eta > 0, \exists x > 0$ et $\exists y > 0$, on prend $x = \min(\eta, 1)$ et $y = \frac{1}{2}x$, on ait $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x} = \max(\frac{1}{2\eta}, \frac{1}{2}) \geq \varepsilon$. Faire un dessin qui montre que $|f(x) - f(\frac{x}{2})| \rightarrow_{x \rightarrow 0} \infty$.

Proposition 11.25 Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction continue sur E (avec E et F espaces métriques). Si E est compact, alors f est uniformément continue.

Preuve. E compact et f continue sur E donnent $f(E)$ compact. Supposons f non uniformément continue : il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$\forall \eta > 0$, on prend $\eta = \frac{1}{n}$, il existe x_n, y_n avec $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

On a ainsi construit en particulier une suite (x_n) dans E . Et la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in E$ car E est compact. Mais $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$, d'où $d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$ et donc la suite (y_{n_k}) converge aussi vers x .

Comme $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(x)) + d(f(x), f(y_{n_k}))$ et comme f continue donne $d(f(x_{n_k}), f(x)) \rightarrow 0$ et $d(f(y_{n_k}), f(x)) \rightarrow 0$ on a $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \rightarrow 0$.

C'est impossible avec $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0$. Donc un tel $\varepsilon > 0$ n'existe pas, et donc f est uniformément continue. ■

Proposition 11.26 Soit E muni de deux distances d_1 et d_2 . Si l'identité algébrique $I : x \in (E, d_1) \rightarrow x \in (E, d_2)$ est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in E \quad : \quad d_1(x, y) < \eta \Rightarrow d_2(x, y) < \varepsilon, \quad (11.13)$$

alors la distance d_1 est plus forte (plus fine) que la distance d_2 .

Preuve. Si (11.13) est vraie, alors si $y \in B_1(x, \eta)$ alors $y \in B_2(x, \varepsilon)$, i.e. $B_1(x, \eta) \subset B_2(x, \varepsilon)$, et donc toute boule $B_2(x, \varepsilon)$ contient dans la boule $B_1(x, \eta)$ et donc d_1 est plus fine que d_2 . ■

Exemple 11.27 Soit $H^1(\Omega)$ muni de la distance usuelle $L^2(\Omega) : d_0(f, g) = \|f - g\|_{L^2}$, et soit $H^1(\Omega)$ muni de sa distance usuelle $d_1(f, g) = \|f - g\|_{H^1}$ où $\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\text{grad} f\|_{L^2}^2$.

Alors l'identité algébrique $(H^1(\Omega), d_1) \rightarrow (H^1(\Omega), d_0)$ est trivialement uniformément continue (car " $d_0(f, g) \leq d_1(f, g)$ ") et donc la distance d_1 est plus fine (plus forte, plus précise) que la distance d_0 . ■

11.6 Fonction Lipschitzienne

Définition 11.28 Une application $f : E \rightarrow F$ d'un espace métrique (E, d_E) dans d'un espace métrique (F, d_F) est dite lipschitzienne (ou k -lipschitzienne) ssi :

$$\exists k > 0, \quad \forall x, y \in E, \quad d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y). \quad (11.14)$$

Exemple 11.29 Dans (E, p) espace normé, la norme $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application lipschitzienne (lorsque \mathbb{R}_+ est muni de la topologie usuelle de \mathbb{R}). En effet, on a (11.9) et on prend $k=1$. ■

Proposition 11.30 Une application lipschitzienne est uniformément continue.

Preuve. Immédiat. ▀

Remarque 11.31 Par contre, la réciproque est fautive. Exemple : $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue car continue sur un compact. Mais elle n'est pas lipschitzienne.

D'ailleurs : si $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $f \in C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ alors f lipschitzienne implique f' bornée dans $]0, 1[$. En effet, (11.14) donne $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq k$ pour tout $x \neq y$, ▀

Exemple 11.32 Si $I : x \in (E, d_1) \rightarrow x \in (E, d_2)$ est lipschitzienne, i.e.

$$\exists k > 0, \quad \forall x, y \in E, \quad d_2(x, y) \leq k d_1(x, y),$$

alors la distance d_1 est plus forte (plus fine) que la distance d_2 . Et d_1 est équivalente à d_2 ssi de plus I^{-1} est lipschitzienne. ▀

11.7 Homéomorphie

Définition 11.33 $f : X \rightarrow Y$ est injective (f is one-to-one) ssi : “si $x_1, x_2 \in X$ vérifient $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$ ”; ou encore ssi “ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ”, i.e. deux points distincts ont deux images distinctes.

Définition 11.34 $f : X \rightarrow Y$ est surjective (f is onto) ssi : “ $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$ ” (tout point de Y a un antécédent dans X), i.e. ssi “ $f(X) = Y$ ”.

Définition 11.35 $f : X \rightarrow Y$ est bijective (f is one-to-one and onto) ssi : f est injective et surjective.

Si $f : X \rightarrow Y$ est bijective, on note son inverse par $f^{-1} : Y \rightarrow X$, défini par $f^{-1}(y) = x$ lorsque $y = f(x)$.
Noter que si $f : X \rightarrow Y$ est injective alors $f : X \rightarrow f(X)$ est bijective.

Définition 11.36 Deux espaces topologiques X et Y sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : X \rightarrow Y$ qui soit bicontinue (i.e. continue d'inverse continue), i.e. s'il existe une bijection qui échange leurs ouverts.

Remarque 11.37 Isomorphie : deux espaces vectoriels sont isomorphes s'il existe une application linéaire bijective de l'un dans l'autre. Une telle bijection conserve les propriétés algébriques. Alors qu'un homéomorphisme est une bijection, non linéaire en général, qui conserve les propriétés topologiques. ▀

12 Exemples d'applications linéaires non continues

On rappelle qu'en dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues : si $(x_n) \rightarrow x$, et si ℓ est linéaire, alors $(\ell(x_n)) \rightarrow \ell(x)$, i.e. : si ℓ est linéaire alors ℓ est continue.

Et c'est faux en dimension infinie.

Exemple 12.1 (Une forme linéaire non continue.) Soit $E = P$ l'ensemble des polynômes définis sur \mathbb{R} muni de la norme, pour $p \in P$:

$$\|p\| = \sup_{x \in [0, 1]} |p(x)|.$$

On vérifie immédiatement que $\|\cdot\|$ est une norme sur P (en particulier, $\|p\| = 0$ implique que p est nul sur tout un intervalle ouvert (non vide), et donc que p est nul sur \mathbb{R}). Noter que $(P, \|\cdot\|)$ n'est pas un Banach car non complet.

Et soit :

$$\delta_3 : p \in P \rightarrow p(3) \in \mathbb{R}$$

(masse de Dirac au point 3). Il est immédiat que δ_3 est une forme linéaire sur P (c'en est une sur $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$).

Mais $\delta(x^n) = 3^n \rightarrow \infty$, alors que $\|x^n\| = 1$, i.e. $\sup_{p \in P, \|p\|=1} |\delta_3(p)| = \infty$, et donc la forme linéaire n'est pas bornée sur la boule unité, donc n'est pas continue. ▀

Exemple 12.2 On considère $E = (C^1([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (espace normé non complet) et $F = (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (espace normé complet), et l'application linéaire de dérivation :

$$D : f \in E \rightarrow f' \in F.$$

Et soit $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$. On a $f'_n(x) = \sin nx$ et donc $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ et $\|D(f_n)\|_\infty = 1$. Donc D n'est pas continue.

(Par contre, si on munit $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ de sa norme $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ qui en fait un Banach, alors l'application linéaire D est continue : “image” $\|f'\|_\infty$ bornée par “antécédent” $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.) ▀

Exemple 12.3 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Soit $E = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$ (espace pré-hilbertien) et $F = (L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ (espace de Hilbert). Pour $u \in H_0^1(\Omega)$ on note $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{(L^2)^n}$ qui fait de $H_0^1(\Omega)$ un Hilbert pour le produit scalaire associé. Et soit l'application laplacien :

$$\Delta : u \in E \rightarrow \Delta u \in F.$$

Limitons nous au cas 1-D, i.e. $\Omega =]0, \pi[\subset \mathbb{R}$, i.e. $\Delta = D^2$ est l'opérateur de dérivation seconde. C'est opérateur est linéaire.

Soit $u_n = \frac{1}{n^2} \sin nx$. On a $u'_n = \frac{1}{n} \cos nx$, d'où $\|u_n\|_E = \|u_n\|_{H_0^1} = \|u'_n\|_{L^2} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Et on a $u''_n = -\sin nx$, d'où $\|\Delta u_n\|_F = \|u''_n\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

D'où $u_n \rightarrow 0$ dans E et $\Delta u_n \not\rightarrow 0$ dans F , i.e. Δ n'est pas continue.

(Notez que u_n est solution du problème aux valeurs propres $v'' = -n^2 v$ avec $v(0) = v(\pi) = 0$, appelé également problème du ressort.) \blacksquare

Exemple 12.4 Soit ℓ^2 l'ensemble des suites $\vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de \mathbb{R} telles que $\|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Et soit l'application linéaire $A : E \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$ définie sur les vecteurs de base $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ (de composantes toutes nulles sauf la i -ème) par :

$$A\vec{e}_n = n\vec{e}_n.$$

où E (domaine de définition de A) est le sous-espace de ℓ^2 formé des suites telle que $\sum_{i=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty$. (Noter que $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet.) Ayant $\|A\vec{e}_n\| = n$ alors que $\|\vec{e}_n\| = 1$, on en déduit que A n'est pas borné sur la boule unité, donc A n'est pas continu. \blacksquare

Remarque 12.5 Dans tous les exemples $u : E \rightarrow F$ explicites ci-dessus, pour lesquels u linéaire n'est pas continue, $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet. Ou si on préfère, le domaine de définition de u n'est pas complet. Ces applications linéaires non continues sont également appelées opérateurs non bornés (au sens "non bornés sur la boule unité").

Il n'existe pas d'exemple explicite d'application linéaire continue bijective d'un Banach dans un Banach dont l'inverse est non continue (résultat dû à Solovay) : il faut invoquer l'axiome du choix pour prouver l'existence de telles applications. \blacksquare

13 Familles de semi-distances et espaces de Fréchet

On trouve très souvent des espaces métriques caractérisés par des semi-normes ou semi-distances. Par exemple $f \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R})$ est caractérisé par $\|f^{(k)}\|_\infty < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où l'intérêt de caractériser ces espaces à l'aide des semi-normes.

13.1 Famille de semi-distances et espace métrisable

Proposition 13.1 et définition. Soit E un ensemble, et soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de semi-distances sur E , i.e. telle que $d_k \leq d_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la famille $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété de séparabilité :

$$\text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, d_k(x, y) = 0 \text{ alors } x = y. \quad (13.1)$$

Alors $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)} \quad (13.2)$$

est une distance sur E , et (E, d) est un espace métrique, avec en particulier $d \leq 1$.

Preuve. On a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, d'où $d(x, y) \leq 1$, et on déduit que d est bien à valeur dans \mathbb{R}_+ . Puis $\varphi(z) = \frac{z}{1+z}$ est une jauge, voir exercice 5.8, d'où on déduit facilement que d est une distance. \blacksquare

Définition 13.2 $(E, (d_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ est dit métrisable, et les propriétés de convergence ou de continuité sur $(E, (d_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ sont définies comme étant celles de l'espace métrique (E, d) avec d défini par (13.2).

Remarque 13.3 Si la famille n'est pas croissante, on peut la remplacer par une famille croissante en posant par exemple $\tilde{d}_k = \sum_{i=1}^k d_i$ (ou encore $\tilde{d}_k = \max_{i=1, \dots, k} (d_i)$). \blacksquare

Exercice 13.4 Montrer que considérer :

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf(1, d_k(x, y)) \quad (13.3)$$

au lieu de (13.2) donne également (E, d) métrique avec $d \leq 1$. \blacksquare

13.2 Convergence

Lemme 13.5 Avec d donné par (13.2), on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in E \quad : \quad d(x, y) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)}, \quad (13.4)$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in E \text{ t.q. } d(x, y) < \frac{1}{2^k} \quad : \quad d_k(x, y) \leq \frac{2^k d(x, y)}{1 - 2^k d(x, y)}, \quad (13.5)$$

Preuve. On a $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^K}$, et $\sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)} \leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \frac{d_K(x, y)}{1 + d_K(x, y)} = \frac{d_K(x, y)}{1 + d_K(x, y)}$ car la suite (d_k) est croissante et $\varphi(z) = \frac{z}{1+z}$ est croissante.

Et on a $d(x, y) \geq \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)}$, d'où $d_k(x, y) \leq \frac{2^k d(x, y)}{1 - 2^k d(x, y)}$ dès que $d(x, y) < \frac{1}{2^k}$. \blacksquare

Proposition 13.6 Soit $(E, (d_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ un espace métrisable. Une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers x ssi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{k, \varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ t.q. } : \forall n \geq N_{k, \varepsilon} \text{ on a } d_k(x_n, x) < \varepsilon. \quad (13.6)$$

(Quelle que soit la semi-distance d_k qu'on se donne, on a l'expression mathématique usuelle de la continuité pour la semi-distance d_k .)

Preuve. Par définition de la convergence, avec $d(\cdot, \cdot)$ donnée par (13.2), la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers x ssi :

$$\forall \alpha > 0, \exists M_\alpha \in \mathbb{N} \text{ t.q. } : \forall n \geq M_\alpha \text{ on a } d(x_n, x) < \alpha. \quad (13.7)$$

1- Supposons (13.7), et soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ donnés. Et on prend $\alpha > 0$ avec $\alpha < \frac{1}{2^k}$ tel que $\frac{2^k \alpha}{1 - 2^k \alpha} < \varepsilon$, toujours possible car $\frac{2^k \alpha}{1 - 2^k \alpha} \rightarrow_{\alpha \rightarrow 0} 0$, on pose $N_{k, \varepsilon} = M_\alpha$, et avec (13.5) on déduit (13.6).

2- Réciproquement, supposons (13.6); soit $\alpha > 0$. On prend $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, k t.q. $\frac{1}{2^k} \leq \frac{\alpha}{2}$, $M_\alpha = N_{k, \varepsilon}$, et on utilise (13.4) pour obtenir $d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ car $\frac{z}{1+z} \leq z$ pour tout $z \geq 0$. D'où (13.7). \blacksquare

13.3 Continuité

Proposition 13.7 Soit $(E, (d_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ un espace métrisable et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On a f continue en $x \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } : \forall y \in E \text{ vérifiant } d_k(x, y) < \eta \text{ on a } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (13.8)$$

Preuve. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Par définition f continue est en x dans l'espace métrique (E, d) ssi :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0 \text{ t.q. } : \forall y \in E \text{ vérifiant } d(x, y) < \beta \text{ on a } |f(x) - f(y)| < \alpha. \quad (13.9)$$

Supposons (13.8) et montrons (13.9). Soit $\alpha > 0$. Prenons $\varepsilon = \alpha$ puis k et η vérifiant (13.8). Puis choisissons β t.q. $\beta < \frac{1}{2^k}$ et $\frac{2^k \beta}{1 - 2^k \beta} < \eta$, par exemple $\beta = \frac{1}{2} \min(\frac{1}{2^k}, \frac{\eta}{2^k(1+\eta)})$. Alors $d(x, y) < \beta$ implique $d_k(x, y) < \eta$, cf. (13.5), implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon = \alpha$.

Réciproquement, supposons (13.9). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \varepsilon$ et soit β vérifiant (13.9). On a (13.4) : on choisit donc k et η tels que $\frac{1}{2^k} \leq \frac{\beta}{2}$ et $\frac{\eta}{1+\eta} \leq \frac{\beta}{2}$. Et on a bien $d_k(x, y) < \eta$ implique $d(x, y) < \beta$ implique $|f(x) - f(y)| < \alpha = \varepsilon$. \blacksquare

Proposition 13.8 Soit $(E, (d_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ un espace métrisable, soit $(F, (\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ un autre espace métrisable et soit $f : E \rightarrow F$. On a f continue en $x \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall j \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } : \forall y \in E \text{ vérifiant } d_k(x, y) < \eta \text{ on a } \delta_j(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (13.10)$$

Preuve. Soit $f : E \rightarrow F$. On a f continue en x ssi :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall y \in E : d(x, y) < \beta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \alpha. \quad (13.11)$$

où d et δ sont données par (13.2).

Comme précédemment, on applique (13.4) et (13.5), d'où (13.10) est équivalent à (13.11). \blacksquare

13.4 Famille dénombrable de semi-normes, espace de Fréchet

Proposition 13.9 et définition. Soit E un espace vectoriel, et soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de semi-normes sur E , i.e. telle que $p_k \leq p_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la famille $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété de séparabilité :

$$\text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k(x) = 0 \text{ alors } x = 0. \quad (13.12)$$

Alors $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)} \quad (13.13)$$

est une distance sur E , d'où (E, d) est un espace métrique. En particulier $d \leq 1$.

Définition 13.10 Si de plus (E, d) est complet, cf. (13.13), l'espace métrisable $(E, (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ est appelé un espace de Fréchet.

Les propriétés de convergence ou de continuité sur $(E, (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ sont définies comme étant celles de l'espace métrique (E, d) avec d défini par (13.13).

Proposition 13.11 Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers x dans E ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $p_k(x_n - x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Preuve. On a $p_k(x_n - x) = d_k(x, x_n)$, et on applique la proposition 13.6. ▀

13.5 Continuité des applications linéaires

Proposition 13.12 (Continuité des applications linéaires.) Soit $(E, (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ un espace métrisable pour la famille de semi-normes (p_k) , soit $(F, (q_j)_{j \in \mathbb{N}^*})$ un autre espace métrisable pour la famille de semi-normes (q_j) , et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a f continue en $x \in E$ ssi :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists c_{jk} > 0, \forall x \in E : q_j(f(x)) < c_{jk} p_k(x). \quad (13.14)$$

(Toute image est bornée par un antécédent à une constante près.)

Preuve. On applique (13.10) avec f linéaire. ▀

Exemple 13.13 Topologie de la convergence uniforme dans \mathbb{R} . (Même démarche dans \mathbb{R}^n .) On note $B(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ qui sont bornées. On pose $K_k = [-k, k]$; en particulier $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} K_k$. Et pour $f \in B(\mathbb{R})$ on pose $p_k(f) = \sup_{x \in K_k} |f(x)|$. On considère l'espace métrisable $(\mathbb{R}, (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$. La métrique associée est appelée métrique de la convergence uniforme sur les compacts ou bien plus simplement métrique de la convergence compacte. On montre que $B(\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet. Voir proposition 8.7. ▀

Exemple 13.14 Topologie de $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \text{noté } \mathcal{E}$ (notation des distributions). Pour $f \in \mathcal{E}$ on pose $p_{k,n}(f) = \sup_{x \in K_k} \sup_{i \leq n} |f^{(i)}(x)|$, où $K_k = [-k, k]$. On montre que $(\mathcal{E}, (p_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}})$ est un espace de Fréchet.

Pour le montrer : 1- on se sert de l'exercice précédent : soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathcal{E} . Elle converge vers une fonction continue f . On considère la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une fonction continue f_1 . Montrons que $f_1 = f'$. On se place dans le compact K_k . Soit $x_0, x \in K_k$. On a $f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{y=x_0}^x f'_n(x) dx$ avec (f'_n) qui converge uniformément vers f_1 dans K_k et donc $\int_{y=x_0}^x f'_n(x) dx \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_{y=x_0}^x f_1(x) dx$. D'où $f(x) - f(x_0) = \int_{y=x_0}^x f_1(x) dx$, et $f' = f$ dans K_n . Vrai pour tout n , donc $f' = f$ dans \mathbb{R} . On itère le procédé. ▀

13.6 Famille de semi-normes, espace localement convexe séparé

On se donne un ensemble I (d'indices) quelconque (par exemple non dénombrable). On pose comme définition les propriétés souhaitées (valides dans le cas dénombrable) :

Définition 13.15 Une famille $(p_k)_I$ de semi-normes sur E est dite famille filtrante ssi :

$$\forall \alpha, \beta \in I, \quad \exists \gamma \in I \text{ t.q. } \max(p_\alpha, p_\beta) \leq p_\gamma.$$

Définition 13.16 Si cette famille filtrante vérifie la propriété de séparabilité, i.e. si :

$$\forall \alpha \in I, \quad p_\alpha(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

alors l'espace $(E, (p_k)_{k \in I})$ est dit "espace localement convexe séparé" (elcs).

Définition 13.17 Une suite (x_n) de E converge vers $x \in E$ ssi :

$$\forall \alpha \in I, \quad p_\alpha(x_n - x) \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0.$$

Définition 13.18 (Continuité des applications linéaires.) Soit $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in I})$ un elcs, soit $(F, (q_\beta)_{\beta \in J})$ un autre elcs, et soit $f : E \rightarrow F$ une application **linéaire**. On dit que f est continue en $x \in E$ ssi :

$$\forall \beta \in J, \exists \alpha \in I, \exists c_{\alpha\beta} > 0, \forall x \in E : q_\beta(f(x)) < c_{\alpha\beta} p_\alpha(x). \quad (13.15)$$

On sort alors du cadre des espaces métriques. On peut ainsi décrire la convergence simple.

Références

- [1] Aubin J.P. : Initiation à l'analyse appliquée. Masson, 1994.
- [2] Brézis H. : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1983.
- [3] Choquet G. : Cours de topologie, Masson 1992.
- [4] Dixmier J. : Topologie générale. Puf, 1981.
- [5] Rudin W. : *Analyse complexe et réelle*. Masson, 1995.
- [6] Schwartz L. : Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Collection enseignement des sciences, 1970.
- [7] Sonntag Y. : *Topologie et analyse fonctionnelle*. Ellipses.
- [8] Wagschal C. : Topologie et analyse fonctionnelle. Hermann, 1995.