Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année
http://www.isima.fr/~leborgne

Programmation linéaire : méthode du simplexe

Gilles Leborgne

30 janvier 2010

Table des matières

1 Introduction : contraintes égalités

On note $(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on note $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Et la notation $\vec{x} \geq 0$ signifie $x_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., n$.

La méthode du simplexe est une méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire, i.e. d'un problème de minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

Soient n produits en quantité $x_i \geq 0$, chaque produit coûtant c_i : si $c_i > 0$ cela "coûte", et si $c_i < 0$ cela "rapporte". On veut minimiser la fonction coût (fonction linéaire) :

$$J(\vec{x}) = c_1x_1 + ... + c_nx_n \qquad (= \sum_{i=1}^n c_ix_i = (\vec{c}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n}), \tag{1.1}$$

sous les contraintes initiales :

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, ..., n. \tag{1.2}$$

Si le min est négatif, on gagne (le plus possible), et si le min est positif, on perd (le moins possible).

Les quantités x_i sont de plus soumises à m contraintes (de production) de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.3}$$

écrites sous la forme :

$$A.\vec{x} = \vec{b}, \tag{1.4}$$

où $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice rectangle $m * n$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Par exemple, la i-ème ligne “$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i$” correspond aux capacités de production de l'usine i. Voir plus loin, paragraphe 6, le cas des contraintes inégalités qui seront systématiquement mises sous la forme égalité (1.3) grâce à l'ajout de variables supplémentaires (les variables d'écart).

Dans la suite on supposera $m < n$: il y a moins d'équations que d'inconnues.

Notons P l'ensemble des contraintes :

$$P = \{\vec{y} \geq 0,\ A.\vec{y} = \vec{b}\}. \tag{1.5}$$

Proposition 1.1 *P est un ensemble convexe.*

Preuve. Les hyperplans “$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i$” sont convexes, et le premier quadrant positif “$\vec{x} \geq \vec{0}$” est convexe. Donc P est une intersection de convexes donc est convexe. ∎

Le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{x} \in P \text{ t.q. :} \\ J(\vec{x}) = \inf\limits_{\vec{y} \in P} J(\vec{y}), \end{cases} \tag{1.6}$$

i.e. trouver $x \in P$ qui minimise J dans P.

Interprétation géométrique : $z = J(\vec{x})$ est l'équation d'un hyperplan affine de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On considère la restriction $J_{|P}$ de J à P, et on note $J_{|P} = J$ pour alléger l'écriture.

Et avec (1.6) on cherche un point $\vec{x} \in P \subset \mathbb{R}^n$ tel que $J_{|P}(\vec{x}) = z_0$ soit l'altitude la plus faible possible.

Exemple 1.2 Voir figure 1.1. Dans le cas $n = 2$, on a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni ((x_1, x_2), z)$. L'hyperplan affine des coûts est ici le plan $z = c_1x_1 + c_2x_2$ $(= J(x_1, x_2))$; on note usuellement $(x_1, x_2) = (x, y)$. Le plan graphe de J est $z = c_1x + c_2y$ et donne le coût z en fonctions des quantités produites x et y.

Dans le cas $m = 1$, les contraintes sont $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a_{11}x + a_{12}y = b_1$: c'est un segment de droite dans $\mathbb{R}^2$ = le plan horizontal $(0, x, y)$; et on cherche un $(x, y) \geq 0$ sur ce segment de droite pour lequel $z = J(\vec{x})$ est d'altitude minimal (une des extrémités de ce segment convient nécessairement). ∎

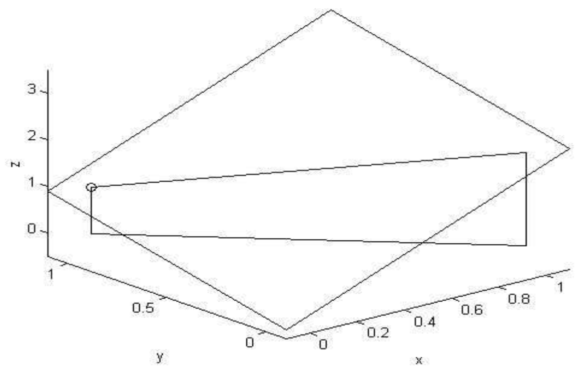

FIG. 1.1 – L'ensemble P des contraintes est $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 1$: dans le plan $(0xy)$ $(= \mathbb{R}^2)$ c'est un segment de droite. La fonction coût $z = 2x + y$ est représenté par son graphe dans $\mathbb{R}^3$: le plan incliné. L'ensemble des (x, y, z) accessibles (t.q. $(x, y) \in P$ et $z = J(x, y)$) est représenté par l'intersection du “plan incliné graphe de J” et de la “bande verticale s'appuyant sur P” (dont la trace sur le plan horizontal est le segment P). Et on cherche la valeur $z = J(\vec{x})$ la plus faible possible pour (x, y) dans le segment de droite. On trouve (on voit) que la valeur minimum est donnée quand $(x, y) = (0, 1)$ correspondant au coût minimum $z_0 = J(0, 1) = 1$.

Hypothèse. Quitte à réduire le nombre de lignes de A, on supposera A de rang maximal m (i.e. on suppose toutes les lignes de A indépendantes). L'ensemble des $\vec{x}$ vérifiant $A.\vec{x} = \vec{b}$ est donc un espace affine non vide de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-m$ (non réduit à un point ayant supposé $m<n$).

Remarque 1.3 Si on suppose $m = n$, alors il y a une seule solution $\vec{x} = A^{-1}.\vec{b}$, et la fonction coût ne peut être calculée qu'en la seule valeur $J(\vec{x})$. Il n'y a rien d'autre à calculer. Ce cas ne nous intéresse pas. ∎

Remarque 1.4 Notons $\vec{a}_j$ la j-ème colonne de A, i.e. $A = (\,\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_n\,)$, et donc $A.\vec{x} = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \vec{a}_\ell$. Si la colonne $\vec{a}_j$ est nulle, $\vec{a}_j = \vec{0}$, alors $A.\vec{x} = \sum_{\substack{\ell=1,\dots,n\\ \ell\neq j}} x_\ell \vec{a}_\ell$, et il n'y a pas de contrainte concernant la variable x_j (mise à part la contrainte permanente $x_j \geq 0$). D'où les trois cas possibles dans le calcul de la fonction coût J dans ce cas :

si $c_j > 0$ alors on aura $x_j = 0$ seule solution pour avoir un coût minimal,

si $c_j = 0$ alors x_j n'intervient pas dans le calcul du coût $J(\vec{x})$ et la quantité x_j peut être choisie quelconque,

si $c_j < 0$ alors on pourra avoir $J(\vec{x}) \to -\infty$ en prenant $x_j \to \infty$: ce cas ne nous intéressera pas. ∴

Remarque 1.5 Suite de l'exemple 1.2. La contrainte $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ permet d'éliminer une variable. Par exemple si $a_{12} \neq 0$, on a $y = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x$, d'où $J(x,y) = (c_1 - c_2\dfrac{a_{11}}{a_{12}})\,x + \dfrac{c_2 b_1}{a_{12}} \overset{\text{noté}}{=} f(x)$; et il s'agit alors de minimiser f pour les $x \geq 0$ t.q. $y \geq 0$.

Si f est croissante alors le min est obtenu pour $x = 0$ (et donc $y = \frac{b_1}{a_{12}}$), et si f décroissante et si $y = y(x)$ est également décroissante (cas usuel), alors le min est obtenu pour $y = 0$ et pour $x = \frac{b_1}{a_{11}}$. Voir figure 1.2.

N.B. : cette approche d'élimination d'une variable (y ici) n'est pas poursuivie dans la suite : elle n'est pas facilement généralisable au cas $\mathbb{R}^n$. (Et de plus cette approche ne fait pas jouer à x et y les mêmes rôles.) ∴

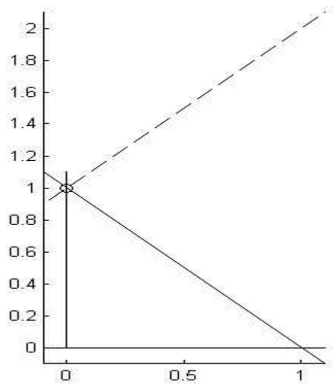

FIG. 1.2 – Représentation dans $\mathbb{R}^2$: une projection sur le plan horizontal de la figure 1.1. La contrainte $x+y=1$ donne $y=1-x$, et donc $J(x,y) = 2x+y = x+1 = f(x)$. On veut minimser f pour les x t.q. $x \geq 0$ et $y = 1-x \geq 0$, i.e. pour $0 \leq x \leq 1$. f est croissante, et donc le minimum de f est obtenu pour $x = 0$, donc pour $y = 1$. Donc le coût minimal est $z_0 = f(0) = J(0,1) = 1$.

Exemple 1.6 Dans le cas $n = 3$, on a :

soit $m = 0$ auquel cas les seules contraintes sont $\vec{x} \geq \vec{0}$;

soit $m = 1$ et on cherche une solution minimale dans le plan "$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$" où on suppose $(a_{11}, a_{12}, a_{13}) > 0$: avec les contraintes $\vec{x} \geq 0$, P est un triangle ; et l'un des trois sommets du triangle est solution (2 composantes nulles), faire un dessin ;

soit $m = 2$ et on cherche une solution minimale sur la droite intersection des deux plans "$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$" et "$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$" supposés non parallèles de normales $(a_{11}, a_{12}, a_{13}) > 0$ et $(a_{21}, a_{22}, a_{23}) > 0$: avec les contraintes $\vec{x} \geq 0$, P est un segment de droite ; et l'une des extrémités du segment est solution (une composante nulle), faire un dessin.

(L'intersection peut être vide si les plans sont parallèles ou si la droite intersection n'intersecte pas le premier quadrant, auxquels cas il n'y a pas de solution.) ∴

2 Polyèdre contenant la solution, point extrémal, sommet

Définition 2.1 Un polyèdre est un ensemble non vide de la forme, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \text{avec soit } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \ \text{soit } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \le \beta_i, \ \text{pour les } i = 1, ..., p\}.$$

C'est donc une intersection d'hyperplans et de demi-espaces.

Ici on s'intéressera aux polyèdres particuliers P de la forme (1.5). On vérifie que P est bien un polyèdre : c'est l'intersection de tous les demi-espaces $x_i \ge 0$ (ou encore $-x_i \le 0$) pour $i = 1, ..., n$, et de tous les hyperplans "$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i$", $i = 1, ..., m$, avec donc ici $p = n+m$.

Définition 2.2 Si S est un ensemble convexe fermé, un point $\vec{x} \in S$ est un point extrémal de S ssi "il n'est pas barycentre de deux autres points de S" ; i.e. $\vec{x} \in S$ est un point extrémal de S ssi :

$$\forall \vec{y}, \vec{z} \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \lambda \in]0,1[, \quad \text{si} \quad \vec{x} = \lambda\vec{y} + (1-\lambda)\vec{z} \quad \text{alors} \quad \vec{x} = \vec{y} = \vec{z}.$$

Définition 2.3 Un point extrémal d'un polyèdre est appelé un sommet.

3 Caractérisation des sommets d'un polyèdre

On va voir que si (1.6) a (au moins) une solution, alors un sommet du polyèdre P est solution. On a pour cela besoin de caractériser les sommets d'un polyèdre. Pour un $\vec{x} \in P$, on ne s'intéresse qu'aux composantes x_i qui sont > 0 (non nulles). On note :

$$\text{quand } x \in P, \qquad I^*(\vec{x}) = \{j \in \mathbb{N} : 1 \le j \le n, \ x_j \ne 0\}, \tag{3.1}$$

l'ensemble des indices des composantes de $\vec{x}$ qui sont non nulles. Et avec $I^*(\vec{x})$ on considèrera uniquement les quantités $x_j > 0$ (qui sont produites).

Et donc pour $\vec{x} \in P$, on a :

$$j \notin I^*(\vec{x}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_j = 0,$$

et :

$$A.\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_j \vec{a}_j = \sum_{i \in I^*(\vec{x})} x_j \vec{a}_j. \tag{3.2}$$

Exemple 3.1 Si $\vec{x} \in P$ a toutes ses composantes non nulles sauf la première, alors $I^*(\vec{x}) = \{2, 3, ..., n\}$. Et si $\vec{0} \in P$ on a $I^*(\vec{0}) = \emptyset$. ♣

Proposition 3.2 *On suppose que A est une matrice $m * n$ de rang m avec $m < n$ et que les colonnes $\vec{a}_j$, $1 \le j \le n$, constituant A sont toutes non nulles (voir remarque 1.4). On note :*

$$S(P) = \{\vec{x} \in P \ : \ \vec{x} \ne \vec{0} \text{ et } (\vec{a}_j)_{j \in I^*(\vec{x})} \text{ est une famille libre}\}.$$

Alors $S(P)$ est exactement l'ensemble des sommets du polyèdre P autres que le sommet éventuel $\vec{0}$.

En particulier, il y a un nombre fini de sommets dans P (en nombre $\le C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$).

(Voir les exemples 1.2 et 1.6.)

Preuve. Pour $\vec{x} \in P$, i.e. $\vec{x} \ge 0$ et satisfaisant la contrainte $A.\vec{x} = \vec{b}$, on a :

$$A.\vec{x} = \sum_{i \in I^*(\vec{x})} x_j \vec{a}_j = \vec{b},$$

par définition de $I^*(\vec{x})$.

1- Supposons que $(\vec{a}_j)_{j \in I^*(\vec{x})}$ est une famille libre. Montrons que $\vec{x}$ est un sommet. Supposons que $\vec{x} = \lambda\vec{y} + (1-\lambda)\vec{z}$ avec $\vec{y}, \vec{z} \in P$ et $\lambda \in]0,1[$. Il s'agit de montrer que $\vec{y} = \vec{z}$. On a $x_i = \lambda y_i + (1-\lambda) z_i$ pour tout i avec $\lambda \in]0,1[$. Comme $y_i, z_i \ge 0$ et $\lambda, 1-\lambda \ge 0$, si $x_i = 0$ alors $y_i = z_i = 0$.

Ayant $\vec{y}, \vec{z} \in P$ on a $A.\vec{y} = A.\vec{z} = \vec{b}$ et donc $A.(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0}$, avec $A.(\vec{y} - \vec{z}) = \sum_{j=1}^n (y_j - z_j)\vec{a}_j = \sum_{j \in I^*(\vec{x})} (y_j - z_j)\vec{a}_j$ (car si $i \notin I^*(\vec{x})$ alors $x_i = 0$ et donc $y_i = z_i = 0$).

Comme la famille $(\vec{a}_j)_{j\in I^*(\vec{x})}$ est libre, on en déduit $z_j - y_j = 0$ pour tout $i \in I^*(\vec{x})$. Ayant également $z_j - y_j = 0$ pour tout $i \notin I^*(\vec{x})$ (on a vu que $y_i = z_i = 0$ dans ce cas), on en déduit $\vec{y} = \vec{z}$, donc $= \vec{x}$. Et donc $\vec{x}$ est un sommet.

2- Supposons que $(\vec{a}_j)_{j\in I^*(\vec{x})}$ est une famille liée, et montrons que $\vec{x}$ n'est pas un sommet. Par hypothèse (famille liée), il existe des v_j non tous nuls t.q. $\sum_{j\in I^*(\vec{x})} v_j\vec{a}_j = \vec{0}$. Quitte à poser $v_j = 0$ pour $j \notin I^*(\vec{x})$, on dispose d'un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ t.q. $A.\vec{v} = \sum_{j\in I^*(\vec{x})} v_j\vec{a}_j = \vec{0}$. Par définition de $I^*(\vec{x})$, on a $x_j > 0$ pour $j \in I^*(\vec{x})$ et donc il existe $\theta > 0$ ("petit") tel que $x_j \pm \theta v_j > 0$ pour tout $j \in I^*(\vec{x})$; et on a $x_j \pm \theta v_j = 0 + \theta 0 = 0$ pour tout $j \notin I^*(\vec{x})$. Donc $A.(\vec{x} \pm \theta\vec{v}) = A.\vec{x} \pm \theta A.\vec{v} = A.\vec{x} + \theta\vec{0} = A.\vec{x} = \vec{b}$, et $\vec{x} \pm \theta\vec{v} \in P$. Comme $\vec{x}$ est milieu de $\vec{x} + \theta\vec{v}$ et de $\vec{x} - \theta\vec{v}$, on en déduit que $\vec{x}$ n'est pas un sommet.

3- Et dans une famille de n vecteurs (ici $(\vec{a}_j)$), il y a un nombre $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ de combinaisons de bases constituées de m vecteurs. Il y a donc au plus $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ sommets. ∎

4 Un sommet est solution

Proposition 4.1 *S'il y a une solution de (1.6) (dans P), alors (au moins) un sommet de P est également solution.*

Preuve. Soit $\vec{x}$ une solution de (1.6) (on suppose qu'il existe une solution). Si $I^*(\vec{x}) = \emptyset$, alors $\vec{x} = \vec{0}$ est solution, et c'est un sommet de P (sommet du premier quadrant). Supposons $I^*(\vec{x}) \neq \emptyset$. Si $\vec{x}$ est un sommet, c'est terminé. Sinon, $(\vec{a}_j)_{j\in I^*(\vec{x})}$ est une famille liée. On va montrer que $\vec{x}$ est alors sur une "face" et qu'on peut suivre cette face pour arriver à un sommet : soit $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $v_j = 0$ si $j \notin I^*(\vec{x})$ et $A.\vec{v} = \sum_{j\in I^*(\vec{x})} v_j\vec{a}_j = \vec{0}$ (famille liée). Et donc $A.(\vec{x}+\theta\vec{v}) = A.\vec{x} = \vec{b}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Choisissons θ pour arriver à un point $\vec{x}+\theta\vec{v} \in P$ tel que $I^*(\vec{x}+\theta\vec{v})$ soit de cardinal $<$ à card$(I^*(\vec{x}))$: on pourra alors avoir $(\vec{a}_j)_{j\in I^*(\vec{x}+\theta\vec{v})}$ est une famille libre. Sinon on recommence (maximum m étapes). Et on obtiendra un sommet.

On suit la ligne donnée par la direction $\vec{v}$ passant par $\vec{x}$ (on va montrer que c'est une ligne de coût nul). Par choix sur $\vec{v}$ on a $x_j = v_j = 0$ si $j \notin I^*(\vec{x})$ et donc $x_j+\theta v_j = 0$ si $j \notin I^*(\vec{x})$ pour tout θ. On veut garder $\vec{x}+\theta\vec{v} \in P$, donc θ est tel que $x_j+\theta v_j \geq 0$ pour tout $j \in I^*(\vec{x})$.

On peut toujours supposer qu'une des composantes de $\vec{v}$ est > 0 (quitte à prendre $-\vec{v}$). On pose :

$$\theta_0 = \max\{-\frac{x_j}{v_j} : v_j > 0 \text{ et } j \in I^*(\vec{x})\},$$
$$\theta_1 = \min\{-\frac{x_j}{v_j} : v_j < 0 \text{ et } j \in I^*(\vec{x})\},$$

avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$. On a $\theta_0 < 0$ et soit $\theta_1 > 0$ soit $\theta_1 = +\infty$. On a $\vec{x}+\theta\vec{v} \in P$ pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Par linéarité de J on a :

$$J(\vec{x}+\theta\vec{v}) = J(\vec{x}) + \theta J(\vec{v}), \quad \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1],$$

donc pour tout θ positifs et négatifs dans un voisinage de 0, avec $J(\vec{x})$ minimum, ce qui n'est possible que si $J(\vec{v}) = 0$ (signe de θ quelconque). On s'est déplacé avec $\theta \to \vec{x}+\theta\vec{v}$ le long d'une ligne de coût nul. Et, par définition de θ_0, l'une (au moins) des composantes de $x_j+\theta_0 v_j$ s'annule pour $j \in I^*(\vec{x})$. Donc card$(I^*(\vec{x}+\theta_0\vec{v})) <$ card$(I^*(\vec{x}))$. ∎

Corollaire 4.2 *S'il existe un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ non nul solution de (1.6), il en existe un qui a $n-m$ composantes nulles (i.e. a m composantes non nulles) et c'est un sommet du polyèdre P.*

Preuve. Un sommet de P vérifie $A.\vec{x} = \sum_{i\in I^*(\vec{x})} x_j\vec{a}_j$ où les $(\vec{a}_j)_{j\in I^*(\vec{x})}$ sont indépendants, donc card$(I^*(\vec{x})) \leq m$ et donc card$([1:p] - I^*(\vec{x})) \geq p - m$, i.e. le nombre des x_j nuls est $\geq p - m$. ∎

Remarque 4.3 Le nombre de combinaisons $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ étant rapidement très élevé, il est hors de question d'essayer de calculer tous les sommets. ∎

5 Méthode du simplexe

5.1 Initialisation

On veut trouver un sommet de P.

On ne s'intéresse ici qu'au cas où A est une matrice de la forme :

$$A = (\,A_0 \quad I_m\,)\,,$$

où I_m est la matrice identité de $\mathbb{R}^m$ et A_0 un matrice $m*(n-m)$. (Voir la suite paragraphe 6 avec l'introduction des variables d'écart correspondant au cas des contraintes inégalités "$A.\vec{x} \le \vec{b}$").

On suppose de plus que $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ vérifie $\vec{b} \ge \vec{0}$. Dans ce cas un sommet est trivialement donné par :

$$\vec{x}_0 = (0,...,0,b_1,...,b_m)^t \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{b} \end{pmatrix},$$

puisque $A.\vec{x}_0 = A_0.\vec{0} + I_m.\vec{b} = \vec{b}$ comme souhaité.

On part usuellement de ce sommet (à moins d'avoir une information particulière).

5.2 Base associée à un sommet

On part d'un sommet connu du polyèdre P. On rappelle que si $\vec{x} \in P$ est un sommet alors on a $\mathrm{card} I^*(\vec{x}) \le m$ où $I^*(\vec{x}) = \{i = 1,...,n : x_i > 0\}$ est l'ensemble des indices $_i$ tels que $x_i \neq 0$ (cf (3.1)).

Définition 5.1 Soit $\vec{x}_0$ un sommet de P. Quand $\mathrm{card} I^*(\vec{x}_0) = m$, on dit que le sommet est non dégénéré. Et sinon, i.e. quand $\mathrm{card} I^*(\vec{x}_0) < m$, on dit que le sommet est dégénéré.

(Par exemple, si $\vec{0}$ est un sommet de P, alors il est dégénéré.)

Donc, si $\vec{x}_0$ est un sommet non dégénéré, on dispose des m colonnes $(\vec{a}_j)_{j \in I^*(\vec{x}_0)}$ de A qui sont indépendantes : c'est une base de $\mathbb{R}^m$ dont on va se servir.

Si $\vec{x}_0$ est un sommet dégénéré, avec donc $\mathrm{card} I^*(\vec{x}_0) < m$, on commence par compléter la famille libre $(\vec{a}_j)_{j \in I^*(\vec{x}_0)}$ de $\mathbb{R}^m$ en une base $(\vec{a}_j)_{j \in I_0}$ de $\mathbb{R}^m$ où $I_0 \supset I^*(\vec{x}_0)$ et $\mathrm{card} I_0 = m$. (Il n'y a pas unicité de la base obtenue en générale.) C'est toujours possible puisqu'on a supposé que A est de rang m.

Proposition 5.2 *Un point $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$ est un sommet de P ssi il existe $I \subset [1,n]_{\mathbb{N}}$, avec $\mathrm{card} I = m$ tel que :*

$$\begin{cases} (\vec{a}_j)_{j \in I} \text{ est une base de } \mathbb{R}^m, \\ x_i = 0 \text{ si } i \notin I \text{ et } A.\vec{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j \vec{a}_j = \sum_{j \in I} x_j \vec{a}_j = \vec{b}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Preuve. $\Rightarrow$: si $\vec{x}$ est un sommet, alors $(\vec{a}_j)_{j \in I^*(\vec{x})}$ est une famille libre, et on peut compléter cette famille en une base car $\mathrm{rang}(A) = m$, avec $x_j = 0$ pour $j \notin I^*(\vec{x})$ et $A.\vec{x} = \sum_{j \in I^*(\vec{x})} x_j \vec{a}_j$.

$\Leftarrow$: si on a (5.1), alors $I^*(\vec{x}) \subset I$, d'où $(\vec{a}_j)_{j \in I^*(\vec{x})}$ est une famille libre, d'où $\vec{x}$ est un sommet, cf. proposition 3.2 ∎

Définition 5.3 Pour $\vec{x}_0$ un sommet et $I = I_0$ donné par la proposition 5.2, $B = (\vec{a}_j)_{j \in I_0}$ est appelée base associée au sommet $\vec{x}_0$ considérée.

(Cette base est unique si le sommet est non dégénérée, mais non unique si le sommet est dégénérée ; attention au vocabulaire : "une base associée à un sommet" est constituée de m vecteurs, et n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$, dite base algébrique ou base usuelle !)

Notation usuelle et renumérotation. Toujours avec $(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\vec{x} = \sum_{i \in I_0} x_i \vec{e}_i + \sum_{i \notin I_0} x_i \vec{e}_i.$$

Quitte à renuméroter la base, on pose alors $\vec{x} = (\vec{x}_B, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ où $\vec{x}_B$ est le vecteur contenant les composantes "de base associée" (sous-entendu pour les indices) i.e. les x_i pour $i \in I_0$, et $\vec{x}_N$ le vecteur contenant les composantes “hors base associée” (sous-entendu pour les indices) i.e. contenant les x_i pour $i \notin I_0$. La matrice A est alors écrite $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$ et on a :

$$A.\vec{x} = B.\vec{x}_B + N.\vec{x}_N,$$

avec B matrice carrée $m * m$ (de base associée), et N matrice rectangle $m * (n{-}m)$.

5.3 Une itération

Pour $\vec{x}_0$ un sommet de P on considère $I_0 \subset [1, n]_{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{card} I_0 = m$ tel que $I_0 \supset I^*(\vec{x}_0)$ et $(\vec{a}_j)_{j \in I_0}$ est une base de $\mathbb{R}^m$, voir proposition 5.2.

On sait qu’un des sommets est solution. On part d’un sommet $\vec{x}_0$ donné. On cherche un sommet $\vec{x}_1$ tel que $J(\vec{x}_1) < J(\vec{x}_0)$ et tel que, en partant de $\vec{x}_0$, une des composantes non nulle de $\vec{x}_0$ s’annule alors qu’une de ces composantes nulles devienne ≥ 0 ; donc on part d’un $x_{0i} \neq 0$ et on veut $x_{1i} = 0$, et d’un $x_{0j} = 0$ et on veut $x_{1j} \geq 0$ (on change de sommet).

Exemple 5.4 (Pris dans Strang [4], Introduction to Applied Mathematics). Dans $\mathbb{R}^4$ (cas n=4). On cherche à minimiser :

$$J(\vec{x}) = (\vec{c}, \vec{x})_{\mathbb{R}^4} = 9x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4,$$

sous les contraintes $\vec{x} \geq 0$ et :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2. \end{cases} \tag{5.2}$$

Ici on a $n = 4$, $m = 2$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il est immédiat qu’un sommet est donné par $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (la structure de $A = [A_0 \quad I_2]$ donne immédiatement le résultat : matrice $2{*}2$ identité dans A avec second membre $\vec{b}$ positif). Et les 2 dernières colonnes de A (correspondant à $I^*(\vec{x}_0) = \{3, 4\}$), à savoir $\vec{a}_3 = \vec{e}_1$ et $\vec{a}_4 = \vec{e}_2$, forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Et donc on a $J(\vec{x}_0) = 3{*}4{+}2 = 14$, appelé le coût pour ce sommet. Pour trouver un sommet $\vec{x}_1$ de coût moindre, on essaie d’annuler x_3 ou x_4, au prix de l’introduction de x_1 ou x_2. Il est clair que d’introduire x_1 coûte plus cher que d’introduire x_2 (coefficient $c_1 = 9$ à comparer $c_2 = 1$). On garde donc $x_1 = 0$ et on introduit x_2. Les contraintes (5.2) s’écrivent alors :

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 2x_1 - x_2 \quad (\geq 0), \\ x_4 = 2 - x_1 + x_2 \quad (\geq 0), \end{cases} \quad \text{en gardant} \quad x_1 = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_2 \quad (\geq 0), \\ x_4 = 2 + x_2 \quad (\geq 0), \end{cases} \quad \text{d'où} \quad J(\vec{x}) = 3(4{-}x_2) + (2{+}x_2) + 0 + x_2 = 14 - x_2.$$

On prend x_2 le plus grand possible : on prend donc $x_2 = 4$ (pour annuler x_3), ce qui donne par ailleurs $x_4 = 6$. Le nouveau sommet est $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ correspondant au coût $J(\vec{x}_1) = 14 - 4 = 10$ et à la nouvelle base $(\vec{a}_2, \vec{a}_4)$ de $\mathbb{R}^2$ (puisque $I^*(\vec{x}_1) = \{2, 4\}$).

On continue : il s’agit d’introduire x_1 ou x_3. La fonction coût indique qu’il est plus intéressant d’introduire x_3 en gardant $x_1 = 0$ (car $c_3 < c_1$). Ce qui donne, cf. (5.2) avec $x_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - x_3 \quad (\geq 0), \\ x_4 = 2 + x_2 = 6 - x_3 \quad (\geq 0), \end{cases} \quad \text{d'où} \quad J(\vec{x}) = 3x_3 + (6 - x_3) + 0 + 4 - x_3 = 10 + x_3.$$

L’introduction de x_3 augmente le coût (attendu car l’annulation de x_3 l’a diminué à l’étape précédente). Contraire au but recherché. Donc le sommet cherché est $\vec{x}_1 = (0, 6, 0, 4)$ correspondant au coût minimal $J(\vec{x}_1) = 10$. ∎

5.4 Démarche générique

Soit un sommet $\vec{x}_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})^t$ de base associée $(\vec{a}_j)_{j\in I_0}$ avec $\mathrm{card}(I_0) = m$; le coût initial est $J(\vec{x}_0)$.

Soit $k \in [0, n]_{\mathbb{N}}$ tel que $k \notin I_0$: la colonne $\vec{a}_k$ de A dépend des $\vec{a}_i$ pour $i \in I_0$, la matrice A étant de rang m. Il existe donc des composantes (uniques) $(\gamma_{ki})_{i\in I_0} \in \mathbb{R}^m$:

$$\vec{a}_k = \sum_{i\in I_0} \gamma_{ki}\vec{a}_i. \tag{5.3}$$

Il s'agit de choisir un $j \in I_0$ et un $k \notin I_0$, et de substituer k à j dans I_0 pour obtenir un nouvel ensemble $I_1 = (I_0 - \{j\}) \cup \{k\}$ tel que $(\vec{a}_i)_{i\in I_1}$ soit une base et que le sommet $\vec{x}_1$ correspondant (à déterminer) vérifie $J(\vec{x}_1) < J(\vec{x}_0)$.

Remarque 5.5 Les $(\gamma_{ki})_{i\in I_0}$ sont donnés par la résolution du système de m inconnues les $(\gamma_{ki})_{i\in I_0}$ et des m équations obtenues en prenant les produits scalaires de (5.3) avec les $(\vec{a}_j)_{j\in I_0}$. ▲

L'introduction de $\vec{a}_k$ et de la nouvelle base $(\vec{a}_i)_{i\in I_1}$ donne, pour tout $\theta_k \in \mathbb{R}$ (à contrainte $\vec{b}$ fixée) :

$$\vec{b} = A.\vec{x}_0 = \sum_{i\in I_0} x_{0i}\vec{a}_i = (\sum_{i\in I_0}(x_{0i} - \theta_k\gamma_{ki})\vec{a}_i) + \sum_{i\in I_0}\theta_k\gamma_{ki}\vec{a}_i = (\sum_{i\in I_0}(x_{0i} - \theta_k\gamma_{ki})\vec{a}_i) + \theta_k\vec{a}_k,$$

où il s'agit d'annuler un des $(x_j - \theta_k\gamma_{kj})$, les autres restant ≥ 0 ; on prend (quand c'est possible) :

$$\theta_k = \min_{i\in I_0}\{\frac{x_{0i}}{\gamma_{ki}} : \gamma_{ki} > 0\}.$$

Dans ce cas le min est obtenu pour un (au moins) des $j \in I_0$. (On obtiendra un nouveau sommet quand on aura $\theta_k > 0$.)

Puis pour nouveau sommet on considère le point $\vec{x}_1$ de composantes :

$$\begin{cases} x_{1i} = (x_{0i} - \theta_k\gamma_{ki}) & \text{si} \quad i \in I_0, \\ x_{1k} = \theta_k & \text{si} \quad i = k, \\ 0 & \text{si} \quad i \notin I_0 \cup \{k\}. \end{cases} \tag{5.4}$$

La fonction coût en ce point $\vec{x}_1$ vaut alors :

$$J(\vec{x}_1) = (\sum_{i\in I_0} c_i(x_{1i} - \theta_k\gamma_{ki})) + c_k\theta_k = J(\vec{x}_0) + \theta_k(c_k - \sum_{i\in I_0} c_i\gamma_{ki}).$$

La fonction coût diminuera donc si $\theta_k > 0$ et si $(c_k - \sum_{i\in I_0} c_i\gamma_{ki}) < 0$. Il s'agit de choisir k pour que la diminution soit la plus importante.

Théorème 5.6 *1- Si pour tout $k \notin I_0$ on a $(c_k - \sum_{i\in I_0} c_i\gamma_{ki}) \geq 0$, alors $\vec{x}_0$ est une solution.*

2- Sinon, il existe au moins un $k \notin I_0$ tel que $(c_k - \sum_{i\in I_0} c_i\gamma_{ki}) < 0$. On est alors en présence des cas suivants :

21- si $\gamma_{ki} \leq 0$ pour tout $k \notin I_0$ et tout $i \in I_0$, alors on ne peut pas trouver $\vec{x}_1$ et on a $\min_{\vec{x}\in P} J(\vec{x}) = -\infty$,

22- (cas générique) s'il existe (au moins un) $k \notin I_0$ tel que :

$$\begin{cases} (c_k - \sum_{i\in I_0} c_i\gamma_{ki}) < 0, \\ \exists i \in I_0 \quad t.q. \quad \gamma_{ki} > 0 \quad et \quad x_i > 0, \end{cases}$$

alors le point $\vec{x}_1$ donné par (5.4) est un sommet qui vérifie $J(\vec{x}_1) < J(\vec{x}_0)$, et au sommet $\vec{x}_1$ est associé la base $(\vec{a}_i)_{i\in I_1}$ où $I_1 = (I_0 - \{j\}) \cup \{k\}$ où j est l'un des indices tels que $\theta_k = \frac{x_j}{\gamma_{jk}}$,

23- Sinon (cas éventuel de cyclage), on est dans le cas

$$\begin{cases} (c_k - \sum_{i\in I_0} c_i\gamma_{ki}) < 0, \\ \exists i \in I_0 \quad t.q. \quad \gamma_{ki} > 0 \quad et \quad x_i = 0, \end{cases}$$

et on peut associer au sommet $\vec{x}_0$ une nouvelle base (cas $\vec{x}_0$ est dégénéré). On recommence alors la démarche avec cette nouvelle base : le risque de retomber sur la base initiale s'appelle le cyclage (cyclage évitable en faisant intervenir une relation d'ordre lexicographique, voir remarque suivante).

Preuve. Exercice, ou voir Ciarlet [1].

Remarque 5.7 La relation lexicographique consiste à compléter la base en choisissant systématiquement les indices $_i$ des $\vec{a}_i$ (entrant) les plus faibles possibles. On peut alors montrer qu'il n'y a pas de phénomène de cyclage.

6 Problème inégalité

6.1 Introduction : contraintes inégalités

C'est la forme usuelle du problème de simplexe. Soient les quantités $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$ (correspondant à n produits), dont le coût de fabrication est c_i. On veut minimiser la fonction coût (fonction linéaire) pour $\vec{x} \geq \vec{0}$:

$$J_n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = (\vec{c}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n}.$$

Les capacités de productions des produits x_i, $i = 1, ..., n$, sont soumises à m contraintes de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_p \geq b_1, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_p \geq b_m, \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad A.\vec{x} \geq \vec{b},$$

où $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}$ est une matrice $m \times n$ donnée.

On note :

$$P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \geq 0,\ A.\vec{x} \geq \vec{b}\},$$

le polyèdre des contraintes. Le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{x} \in P \text{ t.q. :} \\ J_n(\vec{x}) = \inf_{\vec{y} \in P} J_n(\vec{y}). \end{cases} \tag{6.1}$$

Exemple 6.1 On modifie l'exemple 1.2 en transformant la contrainte en $x + y \geq 1$, toujours avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Voir figure 6.1.

Exemple 6.2 On complète l'exemple 1.2 en ajoutant les contraintes $y \leq 1.5$ et $y - 2x \geq 1.4$. Voir figure 6.2 qui donne le polygone des contraintes dans le plan Oxy.

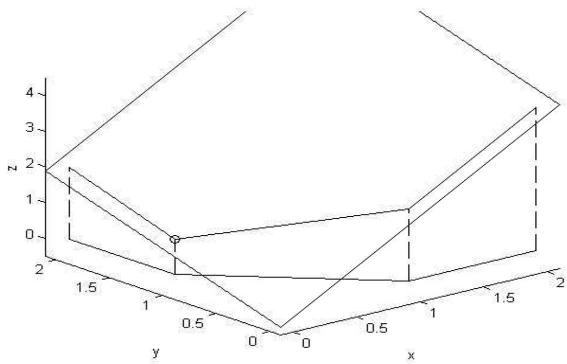

Fig. 6.1 – L'ensemble P des contraintes est $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 1$: dans le plan $(0xy)$ $(= \mathbb{R}^2)$ c'est un polygone, dont on voit la trace dans le plan horizontal. La fonction coût $z = 2x + y$ est représenté par son graphe dans $\mathbb{R}^3$: le plan incliné. Et on cherche la valeur $z = J(\vec{x})$ la plus faible possible pour (x, y) dans le polygone, ici donnée quand $(x, y) = (0, 1)$, d'où le coût minimum $z = J(0, 1) = 1$. Cela revient à laisser rouler une bille sur le plan incliné : elle s'arrête au point le plus bas, ici $(x, y, z) = (0, 1, 1)$.

Remarque 6.3 Si on dispose de la contrainte $a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$, on change les signes des a_{1j} et de b_1 pour se ramener au cas de la contrainte $(-a_{11})x_1 + ... + (-a_{1n})x_n \geq (-b_1)$.

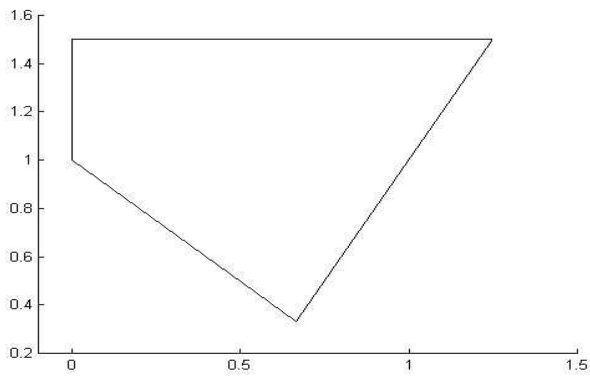

FIG. 6.2 – Polygone P des contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 1$, $y \leq 1.5$, $y-2x \geq -1$.

6.2 Mise sous forme contraintes égalités : variables d'écart

On veut se ramener à la forme programmable (1.6).

Analyse : supposons qu'on a une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de (6.1) ($\vec{x}$ réalise le minimum de J_n sous les contraintes $\vec{x} \geq 0$ et $A.\vec{x} - \vec{b} \geq 0$). On pose alors :

$$\vec{w} = A.\vec{x} - \vec{b}\ (\geq 0) \qquad \text{i.e} \qquad \begin{cases} w_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1, \\ \vdots \\ w_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m. \end{cases}$$

Définition 6.4 Les variables w_i, $i = 1, \ldots, m$ (composantes de $\vec{w}$), sont appelées les variables d'écart : si $\tilde{\vec{x}}$ est une solution de (6.1), on a $A.\vec{x} - \vec{b} \geq \vec{0}$, et les w_i (positives) mesurent l'écart avec le cas de la contrainte égalité.

Définition 6.5 Soit $\vec{x}$ une solution. Si $w_i = 0$ alors la i-ème contrainte est dite active (ou utile). Et si $w_i > 0$, la i-ème contrainte est dite inactive (ou inutile).

Exemple 6.6 Polyèdre des contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 1$, $y \leq 1.5$, $y-2x \geq -1$. Fonction coût $J(x,y) = 2x+y$. Minimun en $(x,y) = (0,1)$. On commence par mettre les contraintes sous la forme ≥ 0 : $x+y \geq 1$, $-y \geq -1.5$, $y-2x \geq -1$. Les variables d'écart données par $\vec{w} = A.\vec{x} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit $w_1 = 0$, $w_2 = 0.5$, $w_3 = 2$. Seule la 1ère est active.

Introduit les notations :

$$M = (\, A \quad -I_m \,), \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{w} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

I_m étant la matrice identité de $\mathbb{R}^m$ et donc M une matrice $m*(n+m)$, avec donc :

$$M.\vec{X} = A.\vec{x} - \vec{w}.$$

Notons :

$$\begin{aligned} Q &= \{\vec{X} \in \mathbb{R}^{n+m} : \vec{X} \geq 0,\ M.\vec{X} = \vec{b}\} \\ &= \{(\vec{x}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \vec{x}, \vec{w} \geq 0,\ A.\vec{x} - \vec{w} = \vec{b}\} \\ &= \{(\vec{x}, \vec{w}) \in P \times {\mathbb{R}^m}_+ : \vec{w} = A.\vec{x} - \vec{b}\}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Puis notons :

$$\begin{cases} K_{n+m}(\vec{X}) \overset{\text{déf}}{=} J_n(\vec{x}), \qquad \text{quand} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \\ \vec{C} = \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{6.4}$$

On a alors :

$$K_{n+m}(\vec{X}) = (\vec{C}, \vec{X})_{\mathbb{R}^{n+m}} \qquad (= J_n(\vec{x})), \tag{6.5}$$

notre fonction coût. Et le problème (6.1) se réécrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{X} \in Q \text{ t.q. :} \\ K_{n+m}(\vec{X}) = \inf_{\vec{Y} \in Q} K_{n+m}(\vec{Y}), \end{cases} \tag{6.6}$$

i.e. le problème (6.1) a été réécrit sous la forme contraintes égalité (1.6).

Comme $K_n(\vec{X}) = J_n(\vec{x})$ est indépendant de $\vec{w}$ pour tout $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{w}) \in Q$, la nouvelle variable $\vec{w}$ n'intervient pas dans le calcul de $\vec{x}$:

Proposition 6.7 *Les problèmes (6.1) et (6.6) sont équivalents, au sens où si on connaît les $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ solutions de (6.1), alors on connaît les $\vec{X} \in \mathbb{R}^{n+m}$ solutions de (6.6), et réciproquement.*

Preuve. $\Rightarrow$. Soit $\vec{x} \in P \subset \mathbb{R}^n$ une solution de (6.1). Posons $\vec{w} = A.\vec{x} - \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{w}) \in Q$. Soit $\vec{Y} = (\vec{y}, \vec{v}) \in Q$, avec donc $\vec{y} \in P$. On a $J_n(\vec{y}) \geq J_n(\vec{x})$ car $\vec{x}$ réalise un minimum de J_n sur P. Comme $K_{n+m}(\vec{Y}) = J_n(\vec{y})$ pour tout $\vec{Y} \in Q$, on a $K_{n+m}(\vec{Y}) \geq K_{n+m}(\vec{X})$. Donc $\vec{X}$ solution de (6.6).

$\Leftarrow$. Réciproquement. Supposons que $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{w}) \in Q$ est solution de (6.6), i.e. pour tout $\vec{Y} = (\vec{y}, \vec{v}) \in Q$ on a $K_{n+m}(\vec{Y}) \geq K_{n+m}(\vec{X})$. Donc on a $J_n(\vec{y}) \geq J_n(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in P$. Donc $\vec{x}$ est solution de (6.1). ∎

6.3 Résolution par la méthode du simplexe

C'est (6.6) qu'on résout. On calcule donc une variable supplémentaire non demandée, la variable $\vec{w}$, qui permet de mettre le problème sous forme "contraintes égalités" (et qui permet de savoir lesquelles des m contraintes sont actives (cas $w_i = 0$) ou non).

Références

[1] Ciarlet P.G. : *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation.* Masson, 1990.

[2] Duhamel Christophe : *Cours de programmation linéaire de l'ISIMA.*

[3] Lascaux P., Théodor R. : *Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.* Masson, 2e éd., 1994

[4] Strang G. : *Linear Algebra and its applications.* Harcourt Brace, 3rd edition, 1988.

[5] Strang G. : *Introduction to Applied Mathematics.* Wellesley-Cambridge Press, 1986.