Calculs de prêts bancaires

1 Problème

Le client dispose d'un capital C. Il veut acheter un produit valant C. A-t-il intérêt :
1- à payer cash où :
2- à emprunter la somme C à un taux d'emprunt t_e, et dans le même temps à placer son capital remunéré au taux de placement t_p ?

Montrons qu'il y a perte d'argent dès que $t_e > t_p$ (et gain sinon), et calculons cette perte au bout de n ans. (C'est effectivement une perte si $t_e \geq t_p$ ce qui est la règle générale, une banque gagnant de l'argent.)

Remarque 1 Cas d'un taux mensuel versus un taux annuel. Si le capital C est rémunéré tous les mois au taux τ, alors au bout de 1 mois le capital est $C_1 = C(1+\tau)$. Ce nouveau capital est rémunéré au même taux, et donc au bout du 2ième mois le capital est $C_2 = C_1(1+\tau) = C(1+\tau)^2$...

Au bout de 12 mois, le capital est $C(1+\tau)^{12}$ et vaut également $C(1+t)$ si t est le taux de rémunération annuel. D'où :

$$(1+\tau)^{12} = 1+t \qquad \text{soit} \qquad \tau = (1+t)^{\frac{1}{12}} - 1 \tag{1}$$

Par exemple, si $t = 0.06 = 6\%$ (taux annuel), alors $\tau = 0.00487 = 0.487\%$ (taux mensuel). ▪

2 Cadre : emprunt et placement

2.1 Fructification du capital placé

Le client dispose du capital C qu'il place au taux annuel t_p. À la fin de la 1ère année, son capital devient :

$$C_{p,1} = C(1+t_p).$$

À la fin de la 2ème année, son capital devient :

$$C_{p,2} = C_{p,1}(1+t_p) = C(1+t_p)^2.$$

Au bout de n ans, son capital est :

$$\boxed{C_{p,n} = C(1+t_p)^n.} \tag{2}$$

C'est donc la somme dont il disposera après n ans.

Exemple. Placement au taux annuel $t_p = 5\%$ pendant 10 ans,

$$C_{p,10} = C(1+t_p)^{10} = C(1,05)^{10} \simeq C \times 1,6289 \tag{3}$$

i.e., son capital au bout de 10 ans aura augmenté de $\simeq 62.89\%$. ▪

2.2 Emprunt : calcul du montant du remboursement

Remarque 2 La somme empruntée sera intégralement remboursée au bout de n ans. Le calcul qui suit sert, outre à calculer le revenu du banquier, à calculer les montants des remboursements annuels, montants qui serviront à calculer le capital accumulé lors du paiement cash, voir paragraphe suivant. ▪

Pour faire son achat, le client emprunte C au banquier. À la fin de la 1ère année, il lui doit la somme $C(1+t_e)$ (pour un taux d'emprunt annuel t_e) et il lui rembourse R; il lui restera à rembourser (au début de la 2ème année) :

$$D_1 = C(1+t_e) - R. \tag{4}$$

À la fin de la 2ème année, il lui doit la somme $D_1(1+t_e)$ et il lui rembourse R ; il lui restera à rembourser (au début de la 3ème année) :

$$D_2 = D_1(1+t_e) - R = C(1+t_e)^2 - R(1+(1+t_e)). \tag{5}$$

Puis à la fin de la k-ème année, il lui restera à rembourser (au début de la k+1-ème année) :

$$\begin{aligned} D_k &= D_{k-1}(1+t_e) - R = C(1+t_e)^k - R(1+(1+t_e)+...+(1+t_e)^{k-1}) \\ &= C(1+t_e)^k - R\frac{(1+t_e)^k-1}{t_e}. \end{aligned} \tag{6}$$

Au début de la n+1-ième année, il devra lui aura tout remboursé. Donc $0 = D_n$, d'où :

$$\boxed{R = C\,\frac{t_e\,(1+t_e)^n}{(1+t_e)^n-1}} \tag{7}$$

est le montant des annuités de remboursement.

Exemple. Pour un emprunt au taux (annuel) $t_e = 5\%$ sur 10 ans :

$$R = C\,\frac{0,05(1,05)^{10}}{(1,05)^{10}-1} \simeq 0.1295 \times C \simeq 12.95\% \times C, \tag{8}$$

qui est bien sûr supérieur à $10\% \times C$ (au dixième de C pour 10 ans) dans le cas où les taux d'intérêt sont nuls. C'est donc, pour un emprunt de 10 ans, la somme remboursée au banquier chaque année dans le cas irréaliste $t_e = t_p$ (cf. l'exemple précédent). ▟

Exemple. Dans un cas plus réaliste, on a $t_e = 6\%$ sur 10 ans. Dans ce cas :

$$R = C\,\frac{0,06(1,06)^{10}}{(1,06)^{10}-1} \simeq .1359 \times C \simeq 13.59\% \times C, \tag{9}$$

qui est bien sûr supérieur à $10\% \times C$ (au dixième de C pour 10 ans) dans le cas où les taux d'intérêt sont nuls. ▟

Remarque 3 Au total, il aura payé au banquier $nR = nC\,\frac{t_e\,(1+t_e)^n}{(1+t_e)^n-1}$, soit relativement à l'exemple précédent $10R \simeq 1.36C$, mais cette somme ne présente pas d'intérêt pratique pour le client : c'est le revenu du banquier. ▟

2.3 Remarque : rente à vie

C'est le cas où le banquier touche indéfiniment le remboursement R. (Dans ce cas, on ne peut pas avoir $0 = D_n$, quel que soit n.)

Il suffit que $D_1 = C$, i.e. que :

$$C(1+t_e) - R = C.$$

On aura alors $D_2 = D_1 = C$, et $D_n = C$ pour tout n : le client aura tous les ans la même somme à rembourser. On obtient le montant du remboursement annuel :

$$R = Ct_e.$$

Dans ce cas, on voit que (7) ne peut être satisfait, et que $R = Ct_e$ est la limite asymptotique de (7) quand $n \to \infty$ (pour $t_e > 0$).

3 Cadre : paiement cash

Le client paie cash et n'a donc plus de capital initial. Mais au lieu de rembourser la somme R tous les ans au banquier, le client le met sur son compte pour se faire son capital.

Pendant la première année, le capital est 0, et à la fin de la première année, il dépose R francs. Son capital est alors, à la fin de la 1ère année :

$$C_{c,1} = R. \tag{10}$$

Pendant la deuxième année, le capital $C_{c,1}$ va fructifier au taux t_p pour donner $C_{c,1}(1+t_p)$. À la fin de la deuxième année, il dépose R, et son capital est alors :

$$C_{c,2} = R + C_{c,1}(1+t_p) = R + R(1+t_p) = R(1+(1+t_p)). \tag{11}$$

A la fin de la 3-ième année, son capital est :

$$C_{c,3} = R + C_{c,2}(1+t_p) = R(1+(1+t_p)+(1+t_p)^2). \tag{12}$$

A la fin de la n-ième année, son capital est :

$$C_{c,n} = R + C_{c,n-1}(1+t_p) = R(1+(1+t_p)+...+(1+t_p)^{n-1}). \tag{13}$$

D'où le capital constitué au bout de n années, avec (7) :

$$\boxed{C_{c,n} = R\frac{(1+t_p)^n-1}{t_p} = C\,\frac{t_e\,(1+t_e)^n}{(1+t_e)^n-1}\,\frac{(1+t_p)^n-1}{t_p}.} \tag{14}$$

C'est donc la somme dont il disposera après n ans.

Exemple. Pour une somme R donnée par (7), on obtient, avec $t_e = t_p$:

$$C_{c,n} = C\,\frac{t_e\,(1+t_e)^n}{(1+t_e)^n-1}\,\frac{(1+t_p)^n-1}{t_p} = C\,(1+t_p)^n. \tag{15}$$

C'est bien la somme qu'il aurait obtenue s'il avait placé tout le capital C au début : ici on est dans le cas irréaliste $t_e = t_p$. Si $t_e = t_p = 5\%$ on obtient $C_{c,n} = 1.63 \times C$. ∴

Exemple. Dans le cas plus réaliste $t_e = 6\%$ sur 10 ans, on obtient :

$$C_{c,n} = C\,(1+t_e)^n\frac{t_e}{t_p}\frac{(1+t_p)^n-1}{(1+t_e)^n-1} = C\,(1.06)^{10}\frac{.06}{.05}\frac{(1.05)^9-1}{(1.06)^9-1} = 1.7184C, \tag{16}$$

i.e. le capital a augmenté de 71.84%.

Dans ce cas, la différence d'augmentation de capital au bout de 10 ans entre le paiement cash et le paiment par emprunt est $(71.84-62.89)\% \times C = 8.95\% \times C$ en faveur du paiment cash. ∴

4 Bilan

Montrons que si $t_e \geq t_p (\geq 0)$, alors on a $C_c \geq C_p$, i.e., que si le client paie cash, au bout de m mois il est plus riche que s'il a emprunté. On veut donc montrer dans ce cas que :

$$C_p \leq C_c, \quad \text{i.e.} \quad (1+t_p)^n \leq \frac{t_e}{t_p}\,(1+t_e)^n\,\frac{(1+t_p)^n-1}{(1+t_e)^n-1}, \tag{17}$$

soit, avec $x = 1+t_e$ et $y = 1+t_p$ et $(1 \leq)\ x \leq y$:

$$\frac{y^n(y-1)}{y^n-1} \leq \frac{x^n(x-1)}{x^n-1}. \tag{18}$$

Il suffit de montrer que la fonction $f(x) = \frac{x^n(x-1)}{x^n-1}$ est croissante pour $x \geq 1$, ce qui est le cas, sa dérivée valant $\frac{(x^n-1)(n-(n+1)x+x^{n+1})}{(x^n-1)^2} \geq 0$ pour $x \geq 1$ (car alors $x^{n+1} \geq x$).