Notes de cours de l'ISIMA, troisième année, http://www.isima.fr/leborgne

Problèmes d'évolution de type parabolique et hyperbolique, théorie spectrale, éléments finis, et condition inf-sup.

Gilles Leborgne

28 novembre 2024

Table des matières

Les notations $y := x$ et $y \stackrel{\text{déf}}{=} x$ signifient : la quantité y est définie par $y = x$.

Première partie
Théorie spectrale des problèmes aux limites

Le cours d'éléments finis était orienté vers la recherche de solutions de problèmes stationnaires. On s'intéresse ici aux problèmes instationnaires.

1 Introduction et rappels

1.1 Équation de la chaleur, introduction formelle

1.1.1 Équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière (C^1 par morceaux), et un intervalle de temps $[0,T]$, $T>0$. Par exemple Ω est l'espace occupé par un solide, et $[0,T]$ est l'intervalle de temps sur lequel on s'intéresse à la température u du solide. On suppose que Ω ne dépend pas du temps et on pose :

$$\begin{aligned} &Q_T =]0,T[\times\Omega && \text{domaine d'étude dans l'espace-temps,}\\ &\Sigma_T =]0,T[\times\Gamma && \text{bord du solide à chaque instant,}\\ &Q_0 = \{0\}\times\Omega && \text{domaine } \Omega \text{ considéré à l'instant initial.} \end{aligned} \tag{1.1}$$

But : calculer la température u : $u(t,x) \in \overline{Q_T} \to u(t,\vec{x})$ (on veut u à tout t en tout $\vec{x}$).

On aura besoin de connaître :

• la source de chaleur volumique" $f : (t,x) \in \overline{Q_T} \to f(t,\vec{x})$,

• les C.L. (conditions aux limites), i.e. $u_\ell := u_{|\Sigma_T} : (t,x) \in \Sigma_T \to u_\ell(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}$ (i.e. u à tout t en tout $\vec{x} \in \Gamma$ = la température extérieure au bord)),

• les C.I. (conditions initiales), i.e. $u_0 := u_{|Q_0} : x \in \Omega \to u_0(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ (i.e. à $t = 0$ en tout $\vec{x} \in \Omega$ = la température initiale).

Supposant le milieu homogène et isotrope dans Ω, l'équation de la chaleur s'écrit : trouver u t.q.

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\vec{x}) - \Delta u(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x}), & \forall(t,\vec{x}) \in Q_T,\\ u_{|\Sigma_T}(t,\vec{x}) = u_\ell(t,\vec{x}), & \forall(t,\vec{x}) \in \Sigma_T \quad \text{(C.L.)},\\ u(0,\vec{x}) = u_0(\vec{x}), & \forall\vec{x} \in \Omega \quad \text{(C.I.)}. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Rem : En 1-D (en espace), i.e. pour $\Omega =]a,b[\subset \mathbb{R}$: trouver u t.q.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \ \text{ dans }]0,T[\times]a,b[,\\ u(t,a) \ \text{ et } \ u(t,b) \ \text{ connus à tout } t \in]0,T[\ \text{(C.L.)},\\ u(0,x) \ \text{ connu en tout } x \in]a,b[\ \text{(C.I.)}. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Rem : Si Ω dépend du temps, on pose $Q_T = \bigcup_{t\in]0,T[}(\{t\}\times\Omega_t)$ où Ω_t est l'espace occupé par le solide à t.

1.1.2 Résolution directe par éléments finis

Typiquement on approxime la dérivée en temps comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\vec{x}) \simeq \frac{u(t_{n+1},\vec{x}) - u(t_n,\vec{x})}{t_{n+1}-t_n}, \tag{1.4}$$

et on utilise un schéma comme le schéma d'Euler implicite :

$$\frac{u(t_{n+1},\vec{x}) - u(t_n,\vec{x})}{t_{n+1}-t_n} - \Delta u(t_{n+1},\vec{x}) = f(t_{n+1},\vec{x}). \tag{1.5}$$

On obtient le schéma élément finis usuel (voir cours d'éléments finis) :

$$-\Delta u_{n+1}(\vec{x}) + a_{n+1}u_{n+1}(\vec{x}) = g_{n+1}(\vec{x}), \tag{1.6}$$

en l'inconnue la fonction u_{n+1} approximant u au temps t_{n+1}, où on a posé :

$$a_{n+1} = \frac{1}{t_{n+1}-t_n} \quad \text{et} \quad g_{n+1}(\vec{x}) = f(t_{n+1},\vec{x}) + a_{n+1}u(t_n,\vec{x}). \tag{1.7}$$

On ne considèrera par cette approche. On veut commencer par trouver les valeurs propres du laplacien (la fréquence fondamentale et les harmoniques) et des fonctions propres associées, fonctions qui formeront une b.o.n. de $L^2(\Omega)$. On utilisera cette b.o.n., et on se ramènera à la résolution d'un système diagonale : on travaillera comme dans $\mathbb{R}^n$, ici avec n "très grand", pour résoudre $A.\vec{x} = \vec{b}$ en diagonalisant A.

1.1.3 Séparation des variables

On peut essayer de résoudre le problème (1.2) par la méthode de séparation des variables : on cherche $u(t,\vec{x})$ sous la forme :

$$u(t,\vec{x}) = \varphi(t)\psi(\vec{x}). \tag{1.8}$$

Regardons le cas $f=0$, $u_\ell = 0$ et $u_0 \neq 0$. Donc formellement :

$$\varphi'(t)\psi(\vec{x}) - \varphi(t)\Delta\psi(\vec{x}) = 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\Delta\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})}, \tag{1.9}$$

avec les conditions aux limites sur ψ et initiale sur φ. Donc, t et $\vec{x}$ étant des variables indépendantes, $\exists c$ t.q. $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = c = \frac{\Delta\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})}$, pour tout t,x. Par commodité pour la suite on note $c = -\lambda$, donc

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\lambda = \frac{\Delta\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})}. \tag{1.10}$$

1.1.4 Problème spectral associé

Il reste à trouver φ, ψ et λ tels que (1.10) soit possible. S'ils existent, on a immédiatement :

$$\varphi(t) = \varphi(0)\,e^{-\lambda t} \tag{1.11}$$

et

$$-\Delta\psi(\vec{x}) = \lambda\psi(\vec{x}) \ \text{ avec C.I.}, \tag{1.12}$$

i.e. λ est valeur propre associé au vecteur propre ψ pour l'opérateur $A = -\Delta$. On verra que ce problème spectral admet 'peu' (un nombre dénombrable) de valeurs propres λ associées à des vecteurs propres formant une base hilbertienne (base orthonormée de type Fourier) d'un s.e.v. de $H^1(\Omega)$. C'est en particulier l'objet de ce cours.

1.1.5 Solution

Supposons qu'il existe une fonction u est solution de (1.2). À t fixé notons $u_t(\vec{x}) := u(t,\vec{x})$, et supposons $u_t \in V$ s.e.v. de $H^1(\Omega)$.

Et supposons connus des couples "valeurs propres – vecteurs propres" $(\lambda_k,\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ solution du problème spectral (1.12) où $(\psi_k : \Omega \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans V. Alors la fonction u_t s'exprime sur la base (ψ_k) :

$$u_t = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} d_{t,k}\psi_k, \quad \text{i.e.} \quad u_t(\vec{x}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} d_{t,k}\psi_k(\vec{x}), \tag{1.13}$$

i.e. :

$$u(t,\vec{x}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} d_k(t)\psi_k(\vec{x}), \quad \text{i.e.} \quad u = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} d_k \otimes \psi_k, \tag{1.14}$$

Ainsi u est une somme de fonctions à variables séparées.

1.1.6 Résolution numérique

On doit résoudre le problème spectral (1.12) (en les inconnues les (λ,ψ)). Par exemple regardons le problème aux C.L. de Dirichlet, i.e. $u_{|\Gamma}=0$ à tout t, i.e. $u_t\in V=H_0^1(\Omega)$ à tout t. Formulation faible :

$$\int_\Omega \vec{\text{grad}}\psi.\vec{\text{grad}}v\,d\Omega=\lambda\int_\Omega \psi\,v\,d\Omega,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{1.15}$$

i.e.

$$\forall v\in H_0^1(\Omega),\ a(\psi,v)=\lambda(\psi,v)_{L^2(\Omega)}\quad \text{où}\quad a(\psi,v)=\int_\Omega \vec{\text{grad}}\psi.\vec{\text{grad}}v\,d\Omega. \tag{1.16}$$

On approximera ce problème à l'aide de la méthode des éléments finis avec une base $(\psi_i)_{i=1,\dots,n}$ finie : on obtiendra un problème matriciel $n*n$ de recherche de valeurs propres de la matrice $[a_{ij}]=[a(\psi_j,\psi_i)]$ associée à $a(\cdot,\cdot)$ (cf. le paragraphe 10 et le cours d'éléments finis).

Remarque 1.1 Sans source de chaleur (cas $f=0$, $u_\ell=0$) et avec une température initiale $u_0>0$ on sait que la température décroit : donc on doit avoir $\lambda>0$ cf. (1.11).

D'ailleurs pour avoir une solution de (1.12) avec ψ non nul, il faut effectivement $\lambda>0$, car seul ce cas pourra donner : la forme bilinéaire $b(\psi,v)=a(\psi,v)-\lambda(\psi,v)_{L^2}$ n'est pas coercitive, et donc le problème (1.16), à savoir $b(\psi,v)=0$ pour tout v, n'admet pas que la solution $\psi=0$ (théorème de Lax–Milgram). ▟

1.2 Équation des ondes, introduction formelle

L'équation de la chaleur était un problème instationnaire de degré 1 en temps. L'équation des ondes est le problème instationnaire de degré 2 en temps de type : trouver $u(t,\vec{x})$ pour $(t,\vec{x})\in Q_T$ t.q.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}(t,\vec{x})-\Delta u(t,\vec{x})=f(t,\vec{x}), & \forall(t,\vec{x})\in Q_T\\ u_{|\Sigma_T}(t,\vec{x})=u_\ell(t,\vec{x}), & \forall(t,\vec{x})\in\Sigma_T\quad\text{(condition aux limites)},\\ u(0,\vec{x})=u_0(\vec{x})\quad\text{et}\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\vec{x})=u_1(\vec{x}) & \forall\vec{x}\in\Omega\quad\text{(conditions initiales)}.\end{cases} \tag{1.17}$$

De même que précédemment, on essaie de trouver une solution sous la forme variables séparées : $u(t,\vec{x})$ sous la forme $u(t,\vec{x})=\varphi(t)\psi(\vec{x})$.

Regardons le cas homogène $f=0$ et $u_\ell=0$. Alors formellement :

$$\varphi''(t)\psi(\vec{x})-\varphi(t)\Delta\psi(\vec{x})=0,\quad\forall(t,\vec{x})\in Q_T, \tag{1.18}$$

et donc, toujours formellement :

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}=\frac{\Delta\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})},\quad\forall(t,\vec{x})\in Q_T. \tag{1.19}$$

On déduit :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}=\frac{\Delta\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})}=-\lambda. \tag{1.20}$$

Si φ, ψ et λ existent, on obtient immédiatement :

$$\varphi(t)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}t)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}t), \tag{1.21}$$

avec les $c_i\in\mathbb{R}$, et où (λ,ψ) solution du problème spectral :

$$\begin{cases} -\Delta\psi(\vec{x})=\lambda\psi(\vec{x}),\\ \psi_{|\Gamma}=0.\end{cases} \tag{1.22}$$

On est ainsi, comme pour le problème parabolique, amené à résoudre le problème spectral (1.12).

Solution : Si on connaît les couples "valeurs propres – vecteurs propres" $(\lambda_k,\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ solution du problème spectral (1.12), alors toute solution $u(t,\vec{x})$ de (1.2) sera de la forme :

$$u(t,\vec{x})=\sum_k d_k(t)\psi_k(\vec{x}), \tag{1.23}$$

comme précédemment, cf. (1.14). Et pour λ_k donné, la solution de $\varphi''(t)=-\lambda_k\varphi(t)$ est de la forme $a\cos\omega_kt+b\sin\omega_kt$ où $\omega_k=\sqrt{\lambda_k}$. Donc la solution générale est :

$$u(t,\vec{x})=\sum_k(a_k\cos\omega_kt+b_k\sin\omega_kt)\psi_k(\vec{x}). \tag{1.24}$$

Et les C.I. (position et vitesse initiales) supposées connues permettent de calculer les a_k et b_k. (Ici la solution n'est pas amortie en temps : les ondes se propagent donc en conservant leur amplitude = leur énergie).

1.3 Exemple de la corde élastique

1.3.1 Oscillateur harmonique 1-D libre non amorti et conditions initiales

Problème en temps (dynamique) classique 1-D de l'équation des ondes avec conditions initiales = résolution du problème : trouver la fonction $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}(t) + \omega_0^2 \varphi(t) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(0) = \varphi_1 \quad \text{(conditions initiales)}, \end{cases} \tag{1.25}$$

avec φ_0 et φ_1 deux réels donnés (position et vitesse initiales).

Ce problème homogène a pour solution générale $\varphi(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$, a et b étant donnés de manière unique par les conditions initiales. On obtient :

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\varphi_1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{1.26}$$

Par définition, ω_0 est la pulsation, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ la période du mouvement et $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ la fréquence.

Remarque 1.2 Ici, il y a toujours existence et unicité de la solution (problème de conditions initiales). Ce n'est plus le cas au paragraphe suivant (problème de conditions aux limites). ∴

Exemple 1.3 φ est l'allongement d'un ressort élastique de raideur k attaché à une masse m quand $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, i.e. et $\varphi(t) = x(t)$ la position de la masse m au temps t. Effectivement, l'équation fondamentale "somme des forces = m$\vec{\gamma}$" s'écrit $-k\varphi(t) = m\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t)$ où φ est la position cherchée.

Pour un pendule de masse m, de longueur l soumis à des mouvements de petite amplitude, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\varphi(t)$ est l'angle (petit) avec la verticale. Pour un circuit électrique avec une self L et une capacité C, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $\varphi(t) = i(t)$ est l'intensité du courant... ∴

1.3.2 Oscillateur harmonique libre et conditions aux limites

Problème en espace (statique) du Laplacien (ici en 1-D) avec conditions aux limites (problème elliptique aux limites) : trouver la fonction $\psi : [0,L] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{dx^2}(x) + \lambda\psi(x) = 0, \\ \psi(0) = \psi(L) = 0 \quad \text{(conditions aux limites)}, \end{cases} \tag{1.27}$$

avec $\psi(0)$ et $\psi(L)$ positions imposées aux extrémités.

Si $\lambda \leq 0$, par passage à la formulation variationnelle, à savoir $(\psi', v')_{L^2} + (-\lambda)(\psi, v)_{L^2} = 0$, le théorème de Lax–Milgram donne l'existence et l'unicité de la solution dans $H_0^1(]0,L[)$, et l'unique solution est $\psi \equiv 0$. Ce cas ne nous intéresse pas.

Si $\lambda > 0$ le problème (1.27) a pour solution homogène générale

$$\psi(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x), \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\lambda}, \tag{1.28}$$

et les C.L. donnent

$$a = 0, \quad \sin(\omega L) = 0. \tag{1.29}$$

Et $(1.29)_2$ montre que deux cas se présentent :

$$\begin{cases} (1) \quad \nexists k \in \mathbb{N}^* : \omega = \dfrac{k\pi}{L} \text{ et seule } \psi \equiv 0 \text{ est l'unique solution (sans intérêt)}, \\ (2) \quad \exists k \in \mathbb{N}^* : \omega = \dfrac{k\pi}{L} \text{ et toute fonction de type } \psi(x) = b\sin(\dfrac{k\pi}{L}x) \text{ est solution.} \end{cases} \tag{1.30}$$

Mieux, la famille $(\psi_k(x) := \sin(\frac{k\pi}{L}x))_{k\in\mathbb{Z}^*}$ est une base de Fourier des fonctions C^0 qui valent 0 en x=0 et en x=L. Ce sont les vecteurs propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ associées aux valeurs propres $\lambda_k = \omega_k^2$: on a $-\frac{d^2}{dx^2}\psi_k = \omega_k^2\psi_k$.

Donc contrairement au cas du problème des C.I. (conditions initiales) où il existe toujours une unique solution (théorème de Cauchy), pour le problème avec C.L. (conditions aux limites) il peut exister ou non des solutions ; en particulier pour les conditions aux limites nulles :

1- si $\lambda = (\frac{k\pi}{L})^2$ pour un $k \in \mathbb{N}$ donné, il y a une infinité de solutions, les $f(x) = c\sin(\frac{k\pi}{L}x)$ pour tout c (les éléments de l'espace engendré par les $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$),

2- sinon il n'y a pas de solution.

En particulier il n'y a jamais "existence et unicité" d'une solution dans ces cas.

1.3.3 Equation des ondes : corde élastique libre

Le paragraphe (1.3.1) s'intéressait au mouvement d'un seul point de la corde au cours du temps.

Le paragraphe (1.3.2) s'intéressait à "une photo" de la corde à un instant t, i.e. aux positions possibles des points de la corde (les uns par rapport aux autres) à l'instant t fixé.

Ici on regarde l'équation de la corde en temps et en espace : on note $u(t,x)$ la position d'un point x de la corde à l'instant t (voir dessin). L'équation satisfaite par u est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \omega^2 u(t,x) = 0, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{conditions aux limites}, \\ u(0,x) = u_0(x), \forall x \in [0,L] \quad \text{position initiale}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \forall x \in [0,L] \quad \text{vitesse initiale}, \end{cases} \tag{1.31}$$

où les C.L $(1.31)_2$ sont ici données comme étant de type Dirichlet homogènes, et où les C.I. $(1.31)_{3,4}$ sont supposées non toutes deux nulles.

Cherchons une solution à variables séparées : on pose $u(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$. D'où en supposant $f = 0$ (mouvement libre de la corde), on obtient :

$$\frac{\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t)}{\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}, \quad \forall x, \quad \forall t.$$

D'où il doit exister $\lambda \in \mathbb{R}$ (sinon il n'y a pas de solution) tel que :

$$\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = -\lambda\varphi(t) \quad \text{et} \quad \psi''(x) = -\lambda\psi(x).$$

On a vu pour l'équation en ψ, cf. problème (1.25), qu'il n'existait de solution non nulle que pour les λ du type : il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{L} = =^{\text{noté}} \omega_k$, et on a alors $\psi(x) = \sin(\omega_k x)$.

1.4 Compléments sur les espaces hilbertiens

Voir le cours d'éléments finis pour une introduction. Rappel :

Définition 1.4 Un espace vectoriel H sur un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans ce cours) est un espace pré-hilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$. Et la norme associée au produit scalaire est définie par $||\vec{x}||_H = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})_H}$.

Un espace pré-hilbertien est hilbertien (ou de Hilbert) ssi il est complet pour la norme $||.||_H$ associée au produit scalaire.

1.4.1 Cauchy–Schwarz

Théorème 1.5 *(Cauchy–Schwarz) Dans un Hilbert, le produit scalaire est inférieur au produit des normes :*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in H, \quad |(\vec{x},\vec{y})_H| \leq ||\vec{x}||_H ||\vec{y}||_H. \tag{1.32}$$

Et il y a égalité ssi $\vec{x}$ est parallèle à $\vec{y}$.

Preuve. Le polynôme de degré 2 défini par $||\vec{x}+\lambda\vec{y}||_H^2 = p(\lambda) = (\vec{x}+\lambda\vec{y}, \vec{x}+\lambda\vec{y})_H$ est positif, donc son discriminant est négatif, donc, $(2(\vec{x},\vec{y})_H)^2 - 4||\vec{x}||_H^2||\vec{y}||_H^2 \leq 0$. Egalité ssi $\vec{x}+\lambda\vec{y} = 0$ (sinon $p(\lambda) > 0$). ∎

Exemple 1.6 $\mathbb{R}^n$ usuel : base canonique $(\vec{e}_i)$ et produit scalaire canonique $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ défini par, pour $\vec{x} = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $\vec{y} = (y_i)_{i=1,\dots,n}$,

$$(\vec{x},\vec{y})_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \quad (\overset{\text{noté}}{=} \vec{x} \bullet \vec{y}).$$

Norme associée : $||\vec{x}||_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Cauchy–Schwarz : $|(\vec{x},\vec{y})_{\mathbb{R}^n}| \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}}$. ∎

Définition 1.7 Notation : dans $\mathbb{R}$, la notation $\sum_{i=1}^\infty x_i$ signifie $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^n x_i)$ = la limite de la suite $(y_n)_{\mathbb{N}^*}$ où on a posé $y_n = \sum_{i=1}^n x_i$; et $\sum_{i=1}^\infty x_i$ est appelée la série de terme x_i ; et dire que la série$\sum_{i=1}^\infty x_i$ est convergente dans $\mathbb{R}$ signifie que la suite $(y_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.8 $\ell^2 = \{\vec{x} = (x_i)_{\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ (espace des suites de carré sommable) usuel : base canonique constituée des vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0,...)$, ..., $\vec{e}_n = (0,...,0,1,0,...)$,... et produit scalaire canonique défini par, pour $\vec{x} = (x_i)_{\mathbb{N}^*}$ et $\vec{y} = (y_i)_{\mathbb{N}^*}$,

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\ell^2} = \sum_{i=1}^\infty x_i\, y_i.$$

Norme associée : $||\vec{x}||_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2}$. Cauchy–Schwarz : $|(\vec{x},\vec{y})_{\ell^2}| \le (\sum_{i=1}^\infty x_i^2)^{\frac12} (\sum_{i=1}^\infty y_i^2)^{\frac12}$.

C'est le prototype des espaces hilbertiens de dimension infinie qui sont séparables, i.e. qui admettent une base dénombrable.

L'espace ℓ^2 est la généralisation de $\mathbb{R}^n$ pour $n \to \infty$. Et $\mathbb{R}^n$ peut-être vu comme l'espace ℓ^2 tronqué (le sous-espace de ℓ^2 engendré par les n premiers vecteurs de base). ▪

Exemple 1.9 Ω domaine de $\mathbb{R}^n$, $L^2(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega v(x)^2\, dx < \infty\}$ (espace des fonctions d'énergie finie),

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\Omega.$$

Norme associée : $||u||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |u(\vec{x})|^2\, dx}$. Cauchy–Schwarz : $|\int_\Omega u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\Omega| \le \left(\int_\Omega u(x)^2\, d\Omega\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega v(x)^2\, d\Omega\right)^{\frac12}$. ▪

Exemple 1.10 Ω domaine de $\mathbb{R}^n$, $H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \vec{\text{grad}} v \in L^2(\Omega)^n\}$,

$$\begin{aligned}(u, v)_{H^1(\Omega)} = & \int_\Omega u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\Omega + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x})\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x})\, d\Omega = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)} \\ \overset{\text{noté}}{=} & \ (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\vec{\text{grad}} u, \vec{\text{grad}} v)_{L^2(\Omega)^n}.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Norme associée $||u||_{H^1(\Omega)} = \left(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\vec{\text{grad}} u||^2_{L^2(\Omega)^n}\right)^{\frac12}$.

NB : $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ n'est pas hilbertien (non complet). Voir cours éléments finis. ▪

1.4.2 Continuité

$(H, ||.||_H)$ et $(G, ||.||_G)$ Banach. Une application $f : (H, ||.||_H) \to (G, ||.||_G)$ est continue en $\vec{x}_0 \in H$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta_\varepsilon > 0, \ \ \forall \vec{x} \text{ t.q. } ||\vec{x} - \vec{x}_0||_H < \eta_\varepsilon, \text{ on a } ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)||_G < \varepsilon. \tag{1.34}$$

ce qui est également écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($= f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$: “passage à la limite sous f”), ou encore, pour toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ in H t.q. $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} x_0$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. En particulier

Proposition 1.11 *La norme $||.||_H : (H, ||.||_H) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue (par rapport à elle-même!) : pour tout $\vec{x}_0 \in H$, on a $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} ||\vec{x}||_H = ||\vec{x}_0||_H$, i.e. $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \big| ||\vec{x}||_H - ||\vec{x}_0||_H \big| = 0$, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta_\varepsilon > 0, \ \ \textit{à savoir } \eta_\varepsilon = \varepsilon, \ \ \forall \vec{x} \text{ t.q. } ||\vec{x} - \vec{x}_0||_H < \eta_\varepsilon, \ \textit{on a } \big| ||\vec{x}||_H - ||\vec{x}_0||_H \big| < \varepsilon. \tag{1.35}$$

D'où, pour $\vec{x}, \vec{y} \in H$ et $(\vec{y}_n)_{\mathbb{N}^*} \in H^{\mathbb{N}^*}$ (suite dans H),

$$\vec{y}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad ||\vec{x} - \vec{y}_n||_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ||\vec{x} - \vec{y}||_H. \tag{1.36}$$

Et quand $||.||_H$ dérive d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$, pour $\vec{x}, \vec{y}, (\vec{x}_n)_{\mathbb{N}}, (\vec{y}_n)_{\mathbb{N}} \in H$,

$$\vec{y}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{y} \ \textit{ et } \ \vec{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x} \quad \Longrightarrow \quad (\vec{x}_n, \vec{y}_n)_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\vec{x}, \vec{y})_H. \tag{1.37}$$

Preuve. $||\vec{x}||_H \le ||\vec{x}_0||_H + ||\vec{x} - \vec{x}_0||_H$ (inégalité triangulaire) et $||\vec{x}_0||_H \le ||\vec{x}||_H + ||\vec{x}_0 - \vec{x}||_H$ (idem) donnent $\big| ||\vec{x}||_H - ||\vec{x}_0||_H \big| \le ||\vec{x} - \vec{x}_0||_H$, d'où (1.35). D'où $\vec{y}_n \longrightarrow_{n\to\infty} \vec{y}$ donne $\big| ||\vec{x} - \vec{y}||_H - ||\vec{x} - \vec{y}_n||_H \big| \le ||\vec{y}_n - \vec{y}||_H \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, d'où (1.36). D'où $|(\vec{x}, \vec{y})_H - (\vec{x}_n, \vec{y}_n)_H| = |(\vec{x} - \vec{x}_n, \vec{y})_H + (\vec{x}_n, \vec{y} - \vec{y}_n)_H| \le ||\vec{x} - \vec{x}_n||_H ||\vec{y}||_H + ||\vec{x}_n||_H ||\vec{y} - \vec{y}_n||_H \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ car $(||\vec{x}_n||_H)$ est bornée, d'où (1.37). ▪

1.4.3 Projections, Bessel–Parseval, Bases hilbertiennes

Définition 1.12 Projection : si F est un sous-espace vectoriel fermé dans $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ Hilbert, alors la projection orthogonale sur F est l'opérateur $P_F : H \to F$ défini par :

$$(\vec{x}-P_F\vec{x},\vec{f})_H = 0, \quad \forall \vec{f} \in F \tag{1.38}$$

(i.e. $\vec{x}-P_F\vec{x} \perp F$, ou encore : $P_F\vec{x}$ est la solution de $(P_F\vec{x},\vec{f})_H = (\vec{x},\vec{f})_H$ pour tout $f \in F$.) (Existence et unicité : voir poly d'éléments finis.)

Rappel, Pythagore dans $\mathrm{Vect}\{\vec{x},P_F\vec{x}\}$ (de dimension ≤ 2) : $||\vec{x}||_H^2 = ||P_F\vec{x}||_H^2 + ||\vec{x}-P_F\vec{x}||_H^2$; en effet $(\vec{x}-P_F\vec{x},P_F\vec{x})_H = 0$ cf. (1.38), et $||\vec{x}||_H^2 = (P_F\vec{x}+(\vec{x}-P_F\vec{x}),P_F\vec{x}+(\vec{x}-P_F\vec{x}))_H$.

Autrement dit, si $\vec{v}_1,\vec{v}_2 \in H$ et $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ alors $||\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2||_H^2 = ||\vec{v}_1||_H^2 + ||\vec{v}_2||_H^2$.

Autrement dit, si $\vec{e}_1,\vec{e}_2 \in H$ sont unitaires orthogonaux et si $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ alors $||\vec{x}||_H^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Plus généralement, si $(\vec{f}_i)_{i=1,...,n})$ est une famille orthogonale dans H alors $||\sum_{i=1}^n \vec{f}_i||_H^2 = \sum_{i=1}^n ||\vec{f}_i||_H^2$ (récurrence avec le vecteur $\sum_{i=1}^{n-1} \vec{f}_i$ qui est orthogonal à $\vec{f}_n$).

Autrement dit, si $(\vec{e}_i)_{i=1,...,n})$ est une famille orthonormée alors $||\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i||_H^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Plus généralement :

Théorème 1.13 *Soit $(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}^*})$ une famille orthonormée dans H. Inégalité de Bessel :*

$$\vec{x} \in H \ \text{et}\ x_i = (\vec{x},\vec{e}_i)_H \quad \Longrightarrow \quad \textstyle\sum_{i=1}^\infty x_i^2 \le ||\vec{x}||_H^2. \tag{1.39}$$

Soit $\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}$ *l'ensemble des combinaisons linéaires (les "sommes finies"), i.e.*

$$\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\} = \{\vec{x} \in H : \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\}. \tag{1.40}$$

On a :

$$\overline{\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}} = \{\vec{x} \in H : \exists(x_i)_{\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \vec{x} = \textstyle\sum_{i=1}^\infty x_i\vec{e}_i \ \text{ et }\ \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}, \tag{1.41}$$

et on a l'égalité de Bessel–Parseval (Pythagore généralisé) :

$$\vec{x} \in \overline{\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}} \quad \text{et} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^\infty x_i\vec{e}_i \quad \Longrightarrow \quad x_i = (\vec{x},\vec{e}_i)_H \quad \text{et} \quad ||\vec{x}||_H^2 = \sum_{i=1}^\infty x_i^2. \tag{1.42}$$

Preuve. Soit $U_n = \mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}\}$, s.e.v. fermé car de dimension finie. Soit $\vec{x} \in H$, soit $x_i := (\vec{x},\vec{e}_i)_H$ et $\vec{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$; donc $(\vec{x}-\vec{x}^{(n)},\vec{e}_i)_H = 0$ pour tout $i = 1,...,n$, donc $\vec{x}-\vec{x}^{(n)} \perp U_n$, donc $||\vec{x}||_H^2 = ||\vec{x}-\vec{x}^{(n)}||_H^2 + ||\vec{x}^{(n)}||_H^2$ (Pythagore dans $\mathrm{Vect}\{\vec{x}-\vec{x}^{(n)},\vec{n}\}$ de dimension 2), donc $||\vec{x}||_H^2 \ge ||\vec{x}^{(n)}||_H^2$, d'où (1.39).

Soit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}$, et soit $V = \overline{U} = \overline{\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}}$ la fermeture de U dans H. Soit $\vec{x} \in V$, soit $x_i := (\vec{x},\vec{e}_i)_H$ et $\vec{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$. la suite $(||\vec{x}^{(n)}||_H^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive croissante (trivial) et bornée par $||\vec{x}||_H$, donc converge dans $\mathbb{R}$; sa limite est notée $\sum_{i=1}^\infty x_i^2 := \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^n x_i^2) \in \mathbb{R}$ (série convergente). Donc la suite $(\vec{x}^{(n)})_{\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans V, car, avec $m \le n$, $0 \le ||\vec{x}^{(n)}-\vec{x}^{(m)}||_H^2 = ||\sum_{i=m+1}^n x_i\vec{e}_i||_H^2 = \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \le \sum_{i=m+1}^\infty x_i^2 \longrightarrow_{m,n\to\infty} 0$ (reste d'une série convergente) ; Et V fermé, donc $(\vec{x}^{(n)})_{\mathbb{N}^*}$ converge dans V ; sa limite est notée $\vec{x}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^\infty x_i\vec{e}_i := \lim_{n\to\infty}\vec{x}^{(n)}$, et on a $||\vec{x}^{(\infty)}||_H^2 = \sum_{i=1}^\infty x_i^2$ car $0 \le \Big| ||\vec{x}^{(\infty)}||_H - ||\vec{x}^{(n)}||_H \Big| \le ||\vec{x}^{(\infty)}-\vec{x}^{(n)}||_H \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ donne $||\vec{x}^{(n)}||_H \longrightarrow_{n\to\infty} ||\vec{x}^{(\infty)}||_H$.

On a $(\vec{x}-\vec{x}^{(\infty)},\vec{e}_i)_H = (\vec{x},\vec{e}_i)_H - (\vec{x}^{(\infty)},\vec{e}_i)_H = x_i - x_i = 0$ pour tout i, donc $\vec{x}-\vec{x}^{(\infty)} \perp U$, donc $\vec{x}-\vec{x}^{(\infty)} \perp V$ car U dense dans V, avec $\vec{x}-\vec{x}^{(\infty)} \in V$ car $\vec{x},\vec{x}^{(\infty)} \in V$, donc $\vec{x}-\vec{x}^{(\infty)} = 0$, donc $\vec{x} = \vec{x}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^\infty x_i\vec{e}_i$. ∎

(1.42) étant en particulier vrai si $\overline{\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}} = H$:

Définition 1.14 Une base hilbertienne (base orthonormale) dans un Hilbert $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ est une suite orthonormale $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ qui est totale dans H, i.e. t.q. $\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\}$ est dense dans H (i.e. $\overline{\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}\}} = H$).

Autrement dit : si le seul vecteur orthogonal à $\mathrm{Vect}\{(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\}$ est le vecteur nul.

Exemple 1.15 La famille $\{\varphi_n : x \to \frac{e^{inx}}{||e^{inx}||_{L^2}},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne dans $(L^2(]0,2\pi[;\mathbb{C}),(\cdot,\cdot)_{L^2})$ (base de Fourier). Mais la famille $\{\psi_n : x \to \frac{e^{inx}}{||e^{inx}||_{H^1}},\ n \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas une base hilbertienne dans $(H^1(]0,2\pi[;\mathbb{C}),(\cdot,\cdot)_{H^1})$: elle est libre mais non génératrice, voir annexe D. ∎

Remarque 1.16 On rappelle que si A est un sous-ensemble de H, $A \subset H$, alors l'espace vectoriel engendré par A noté $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de H contenant A : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires (sommes finies) d'éléments de A :

$$\mathrm{Vect}(A) = \{g \in H : \exists n \in \mathbb{N},\ \exists(\alpha_i) \in \mathbb{R}^n,\ \exists(a_i) \in A^n,\ g = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\} \tag{1.43}$$

Exemple : l'ensemble $P[x]$ des polynômes est engendré par la famille des monômes $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$: on a $P[x] = \mathrm{Vect}\{(x^n)_{\mathbb{N}^*}\} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N},\ \exists(\alpha_i) \in \mathbb{R}^n,\ g = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i$ (polynôme de degré n)$\}$. Et théorème de

Stone–Weierstrass : toute fonction continue définie sur un segment $[a,b]$ peut être approchée uniformément par des fonctions polynômes : l'adhérence $\overline{P[x]}$ dans le Banach $(C^0([a,b]),||.||_\infty)$ est $C^0([a,b])$ tout entier. ▪

1.4.4 Sous-espace vectoriel fermé ou non

Rappel : soit V un espace vectoriel de dimension finie. Après choix d'une norme dans V (toutes les normes sont équivalentes en dimension finie), tout sous-espace vectoriel de V est fermé. (Il suffit de prendre une base et de considérer les composantes...)

C'est faux en dimension finie. Exemple : soit $V = \ell^2 = \{\vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$ muni de sa norme usuelle $||\vec{x}||_{\ell^2} = (\sum_{n=1}^\infty x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Soit $S = \{\vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^\infty n^2 x_n^2 < \infty\}$; c'est trivialement un s.e.v. de ℓ^2. On a $S \subsetneq \ell^2$ et S dense dans ℓ^2 : en effet,

1- $\vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ est t.q. $\vec{x} \notin S$, donc $S \subsetneq \ell^2$,

2- pour $\vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$, soit $N \in \mathbb{N}^*$, soit $\vec{x}^{(N)} = (x_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite tronquée définie par $x_n^{(N)} = x_n$ si $n \le N$ et $x_n^{(N)} = 0$ si $n > N$; trivialement $\vec{x}^{(N)} \in S$ (car $\sum_{n=1}^N n^2 x_n^2 < \infty$) ; Et la suite $(x^{(N)})_{N\in\mathbb{N}^*} \in S^{\mathbb{N}^*}$ converge vers $\vec{x}$ dans ℓ^2 car $||\vec{x}^{(N)} - \vec{x}||_{\ell^2}^2 = \sum_{n=N+1}^\infty x_n^2 = \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n^2} \longrightarrow_{N\to\infty} 0$; donc tout $\vec{x} \in \ell^2$ peut être approché aussi près que souhaité par un vecteur de S, i.e. S est dense dans ℓ^2.

3- Donc (adhérence) $\overline{S} = \ell^2$, avec $S \subsetneq \ell^2$, donc $S \subsetneq \overline{S}$, donc S n'est pas fermé.

1.4.5 Espace séparable

Définition 1.17 Un espace de Hilbert est séparable s'il contient une suite dénombrable totale : il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que (u_n) soit génératrice, i.e, $\forall x \in H$, $\exists(\alpha_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $x = \sum_{\mathbb{N}} \alpha_n u_n$.

Théorème 1.18 *Tout espace hilbertien séparable admet une base hilbertienne. Et une telle base est au plus dénombrable, isomorphe à $\mathbb{R}^n$ si de dimension finie, et isomorphe à ℓ^2 si de dimension infinie. De plus, toutes les bases hilbertiennes de H ont même cardinal appelé dimension hilbertienne de H. (La considération de ℓ^2 est donc fondamentale.)*

Preuve. On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt : à partir d'une suite dénombrable totale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on prend le premier élément non nul, soit g_1 qu'on norme à 1 en posant $f_1 = \frac{g_1}{||g_1||_H}$, et on considère l'espace F_1 qu'il engendre. Puis on prend le premier élément indépendant de f_1, soit g_2, et on considère $g_2 - P_{F_1} g_2$ qu'on norme à 1 et qu'on baptise f_2. Et f_2 est bien orthogonal à f_1. On considère $F_2 = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$ et on prend le premier élément non dans F_2, soit g_3, et on considère $g_3 - P_{F_2} g_3$ qu'on norme à 1 et qu'on baptise f_3...

On procède par récurrence, et la suite (f_n) ainsi obtenue est orthonormale et totale.

Et si $x \in H$ est décomposée sur la base (f_n), i.e. $x = \sum_{\mathbb{N}^*} x_i f_i$ où $x_i = (x, f_i)_H$, alors l'application $f : H \to \ell^2$ définie par $f(x) = (x_i)_{\mathbb{N}^*}$ est un isomorphisme (vérification immédiate).

On rappelle qu'en dimension finie, la dimension d'un espace vectoriel est le cardinal d'une base quelconque et ne dépend pas du choix de la base (on a d'ailleurs les formules de changement de base). Montrons-le en dimension infinie dans le cas séparable : soit donc $(g_j)_{j\in J}$ une autre base orthonormale de H où J est un ensemble quelconque. Il s'agit de démontrer que J est dénombrable, et plus simplement que $\mathrm{card}J \le \aleph_0$ (prononcer "alef 0") où $\aleph_0 = \mathrm{card}\mathbb{N} = \mathrm{card}\mathbb{Q}$. Par définition d'une base, et ayant $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $F = \{$combinaisons linéaires des f_i à coefficients rationnels$\}$ est dense dans H. Et de plus F est dénombrable (de dimension $\aleph_0$) car $\mathbb{Q}$ est dénombrable ainsi que $\mathbb{N}$.

Et les boules $B(g_j, \frac{1}{2})$ de centre g_j et de rayon $\frac{1}{2}$ sont disjointes 2 à 2 et contiennent chacune un élément de F (car F est dense dans H), et donc F a plus d'éléments que $\{g_j : j \in J\}$, donc $\mathrm{card}J \le \mathrm{card}F \le \aleph_0$. ▪

1.4.6 Isomorphismes d'espaces hilbertiens

Définition 1.19 Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective qui conserve les normes.

Définition 1.20 Si H et G sont deux espaces hilbertiens sur le même corps K, on appelle isomorphisme d'espaces hilbertiens de H sur G toute application $\mathcal{J}$ bijective de H sur G qui conserve le produit scalaire :

$$(\mathcal{J}(x), \mathcal{J}(y))_G = (x,y)_H, \quad \forall x, y \in H.$$

(En particulier $\mathcal{J}$ conserve la norme : $||\mathcal{J}(x)||_G = ||x||_H$ pour tout $x \in H$).

2 Opérateurs bornés, autoadjoints, positifs, inversibles

2.1 Introduction

2.1.1 Généralités et exemple du Laplacien

Le but est de généraliser à la dimension infinie la théorie des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (endomorphismes), représentées par des matrices carrées une fois des bases de $\mathbb{R}^n$ choisies. On rappelle qu'un endomorphisme symétrique dans $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire est diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres. Voir poly "Matrices".

Question : est-ce encore vrai en dimension infinie ?

Réponse : Non en général. Oui dans le cas 'simple' d'un espace de Hilbert séparable et des endomorphismes continus symétriques et compacts.

L'exemple fondamental sera donné par l'application linéaire T inverse du Laplacien. Par exemple problème de Dirichlet homogène : pour Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$:

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q. } -\Delta u = f. \quad \text{Solution notée} \quad u = Tf. \tag{2.1}$$

(Le signe "$-$" n'est là que pour simplifier la suite : les fréquences de résonance sont positives.) Le théorème de Lax–Milgram donne : (2.1) est bien posé, i.e. existence, unicité de la solution u, et u dépend linéairement et continûment de f, i.e. la fonction T donnant la solution de (2.1) est linéaire (immédiat) et vérifie :

$$T = (-\Delta)^{-1} : \left\{ \begin{array}{rl} L^2(\Omega) & \to H_0^1(\Omega) \\ f & \to u = Tf \end{array} \right\}, \text{ et, } \exists c > 0, \ \forall f \in L^2(\Omega), \ ||Tf||_{H_0^1} \le c||f||_{L^2} \ \ (T \text{ est continu}), \tag{2.2}$$

voir cours d'éléments finis (on a noté $T(f) =^{\text{noté}} Tf$ car T est linéaire).

T n'est pas un endomorphisme ($L^2(\Omega) \neq H_0^1(\Omega)$). Pour trouver "les" valeurs propres de T on considèrera alors l'endomorphisme $T_r : \left\{ \begin{array}{rl} (H_0^1(\Omega), ||.||_{H_0^1}) & \to (H_0^1(\Omega), ||.||_{H_0^1}) \\ f & \to T_r(f) = T(f) \end{array} \right\}$. C'est une restriction "sévère" de T à $H_0^1(\Omega)$, "sévère" au sens : non seulement on a réduit l'ensemble de départ à $H_0^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$), mais qu'on a également changé la norme de l'ensemble de départ : de $||.||_{L^2}$ on est passé à $||.||_{H_0^1}$. Grâce à l'inégalité de Poincaré :

$$\exists c_\Omega > 0, \ \forall f \in H_0^1(\Omega), \ ||f||_{L^2} \le c_\Omega ||\vec{\text{grad}} f||_{L^2},$$

voir cours d'éléments finis, (2.2) donne $||T_r f||_{H_0^1} \le c\, c_\Omega ||f||_{H_0^1}$ pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$, donc $T_r : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ est un endomorphisme continu.

On montrera que de plus cet opérateur T_r est autoadjoint dans $H_0^1(\Omega)$ (= symétrique relativement au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$, facile voir exercice 2.27), et positif (facile avec Lax–Milgram), et compact (difficile, c'est l'objet essentiel de ce cours). On aura alors les résultats généralisant le cas connus des matrices symétrique réelles : on aura un nombre dénombrable de valeur propres ("fréquences de résonance") toutes de multiplicité finie, et associée à une b.o.n. (base hilbertienne) de vecteurs propres dans $H_0^1(\Omega)$.

2.1.2 La compacité en dimension infinie

La compacité est un outil essentiel pour les théorèmes d'existence, et ici elle permettra de démontrer l'existence des valeurs propres du Laplacien, et qu'elles sont en nombre dénombrable et de multiplicité finie.

Rappel : en dimension finie un compact est un fermé borné.

Ce n'est jamais le cas en dimension infinie dans un espace de Hilbert H. En effet, prenons la boule unité fermé $\bar{B}(0,1) = \{x \in H : ||x||_H \le 1\}$: elle contient une famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Or cette suite d'éléments de $\bar{B}(0,1)$ ne contient aucune sous-suite convergente car aucune sous-suite n'est de Cauchy : ayant $e_n \perp e_m$ pour $n \neq m$, Pythagore donne :

$$||e_n - e_m||_H = \sqrt{||e_n||_H^2 + ||e_m||_H^2} = \sqrt{2} = \text{constante} \underset{n,m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

$\bar{B}(0,1)$ contient donc une suite qui n'a aucune sous-suite convergente : $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compact. De même aucune boule $\bar{B}(a,\eta)$ (centrée en a et de rayon $\eta > 0$) n'est compacte. On dit que les compacts dans un Hilbert de dimension infinie n'ont pas "d'épaisseur" (car ne contiennent aucune boule $\bar{B}(a,\eta)$ aussi petite soit-elle (les compacts en dimension infinie sont "plats"). Il n'y a donc que 'très peu' de compacts en dimension infinie.

Mais il y en a suffisamment pour que l'opérateur $T_r = \Delta^{-1}$ du paragraphe précédent soit compact, i.e. pour que l'image $T_r(B_{H_0^1})$ de la boule unité de $H_0^1(\Omega)$ par T_r soit d'adhérence compacte dans $H_0^1(\Omega)$. C'est l'objet principal de ce cours que de démontrer cette propriété.

2.2 L'espace ℓ^2

Soit ℓ^2 l'ensemble des suites de carrés sommables :

$$\ell^2 = \{\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}. \tag{2.3}$$

C'est un espace de Hilbert de produit scalaire et norme associée, avec les notations usuelles :

$$(\vec{x},\vec{y})_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \qquad ||x||_{\ell^2} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Et ℓ^2 est de dimension infinie dénombrable, une base orthonormée étant donnée par la base canonique $(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, $\vec{e}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots)$, le 1 étant à la i-ème place. ℓ^2 est "l'espace de Hilbert", prototype des espaces de Hilbert de dimension infinie dénombrable.

Exercice 2.1 Montrer que ℓ^2 est complet.

Réponse. Soit $(\vec{x}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2. Donc, $||\vec{x}^k - \vec{x}^\ell||_{\ell^2} \longrightarrow_{k,\ell\to\infty} 0$, i.e., $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^k - x_n^\ell)^2 \longrightarrow_{k,\ell\to\infty} 0$ où $\vec{x}^k =^{\text{noté}} (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2$. Donc à n fixé on a $(x_n^k - x_n^\ell)^2 \longrightarrow_{k,\ell\to\infty} 0$, donc la suite de réels $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente ($\mathbb{R}$ est complet) : notons $x_n = \lim_{k\to\infty} x_n^k$. Montrons que $\vec{x}^k \longrightarrow_{k\to\infty} \vec{x}$ dans ℓ^2. Pour $m \in \mathbb{N}$, on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n^k - x_n|^2 = \sum_{n=1}^{m} \lim_{\ell\to\infty} |x_n^k - x_n^\ell|^2 = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |x_n^k - x_n^\ell|^2, \quad \text{donc} \quad \leq \lim_{\ell\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n^\ell|^2 = \lim_{\ell\to\infty} ||\vec{x}^k - \vec{x}^\ell||_{\ell^2}^2.$$

Et $(\vec{x}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, $\exists N_\varepsilon > 0$, $\forall k,\ell \geq N_\varepsilon$, $||\vec{x}^k - \vec{x}^\ell||_{\ell^2}^2 < \varepsilon^2$, donc, dès que $k \geq N_\varepsilon$, $\sum_{n=1}^{m} |x_n^k - x_n|^2 \leq \varepsilon^2$, vrai pour tout m, donc $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n|^2 \leq \varepsilon^2$, donc $(\vec{x}^k - \vec{x}) \in \ell^2$, donc $\vec{x} \in \ell^2$ car $\vec{x}^k \in \ell^2$. Donc la suite $(\vec{x}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers $\vec{x}$ dans ℓ^2. ▪

2.3 Opérateurs bornés (= applications linéaires continues)

Notation : lorsqu'une application T est linéaire, on note $T(x) = T.x = Tx$, notation d'un produit : $T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$ (distributivité), noté $T.(x+\lambda y) = T.x + \lambda T.y$, noté $T(x+\lambda y) = Tx + \lambda Ty$.

Rappel : soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue sur E. La linéarité donne : T est linéaire continue ssi elle est continue en 0, ou ssi elle est bornée sur la boule unité, ou ssi sur la sphère unité, i.e. ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in E, \quad ||Tx||_F \leq c||x||_E. \tag{2.5}$$

("Image bornée par antécédent à une constante près dans les normes disponibles".) Et alors $c \geq \sup\limits_{0\neq x\in E} \dfrac{||Tx||_F}{||x||_E}$.
On note $||T||_{L(E,F)}$ la plus petite constante c, donc, ayant $\frac{||Tx||_F}{||x||_E} = ||T(\frac{x}{||x||_E})||_F$:

$$||T||_{L(E,F)} = \sup_{0\neq x\in E} \frac{||Tx||_F}{||x||_E} = \sup_{||x||_E=1} ||Tx||_F = \sup_{||x||_E\leq 1} ||Tx||_F \overset{\text{noté}}{=} ||T||, \tag{2.6}$$

la dernière notation $||T||$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. Et on note :

$$L(E,F) = \{T : E \to F \text{ linéaire } \textbf{et} \text{ continue}\}, \tag{2.7}$$

et si $E = F$ on note simplement $L(E)$ l'espace $L(E,E)$ des endomorphismes continus.

Remarque 2.2 On emploie aussi la notation $L(E,F) =^{\text{noté}} L_{\text{cont}}(E;F)$ pour insister sur le fait qu'on ne considère que les applications linéaires qui sont continues. ▪

Proposition 2.3 *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- T *n'est pas continu.* (2.8)
- $\exists (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n||_E = 1$ *et* $||Tx_n||_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. (2.9)
- $\exists (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$, $||x_n||_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||Tx_n||_F = 1$. (2.10)

Preuve. T n'est pas continu ssi $\forall c \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in E$ t.q. $||Tx||_F > c||x||_E$, négation de (2.5), donc

(2.8) $\Rightarrow$ (2.9). Hypothèse "T n'est pas continu" : en prenant $c{=}n$ et x_n t.q. $||Tx_n||_F > n||x_n||_E$ on a $||T(\frac{x_n}{||x_n||_E})||_F > n$ donc (2.9).

(2.9) $\Rightarrow$ (2.8). Hypothèse (2.9) : soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans E t.q. $||x_n||_E = 1$ et $||Tx_n||_F \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$: donc si $c \in \mathbb{R}$ alors on peut choisir un x_n t.q. $||Tx_n||_F > c = c||x_n||_E$, d'où T n'est pas continu. Donc (2.9)$\Leftrightarrow$(2.8).

(2.9) $\Rightarrow$ (2.10). Hypothèse (2.9) : soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans E t.q. $||x_n||_E = 1$ et $||Tx_n||_F \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$: on pose $z_n = \frac{x_n}{||Tx_n||_F}$, donc $||z_n||_E \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $||Tz_n||_F = \frac{||Tx_n||_F}{||Tx_n||_F} = 1$, donc (2.10).

(2.10) $\Rightarrow$ (2.9). Hypothèse (2.10) : soit $(z_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans E t.q. $||z_n||_E \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $||Tz_n||_F = 1$: on pose $x_n = \frac{z_n}{||z_n||_E}$, donc $||x_n||_E = 1$ et $||Tx_n||_F = \frac{||Tz_n||_F}{||z_n||_E} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$, donc (2.9). Donc (2.9)$\Leftrightarrow$(2.10). ∎

L'usage fait qu'on donne aussi un autre nom aux applications linéaires continues dans le cadre des problèmes spectraux qui nous préoccuperons :

Définition 2.4 1- Un opérateur $T : E \to F$ est une application linéaire $E \to F$.

2- Un opérateur borné $T : E \to F$ est une application linéaire continue : $T \in L(E, F)$. ("Borné" sous entend "borné sur la boule unité", cf. (2.6).)

(3- Un opérateur non borné est une application linéaire $T : E \to F$ telle que le domaine de définition de T est un sous-ensemble dense de E. NB : Attention à ce vocabulaire maladroit ! Ainsi un opérateur borné est un cas particulier d'un opérateur non borné..., et dire qu'un opérateur T n'est pas borné (= n'est pas continu) ne veut pas dire que T est non borné... Et tant qu'un mathématicien renommé ne mettra pas un peu de cohérence dans le vocabulaire, on subira ce vocabulaire.)

Exemple 2.5 $T = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, cf. (2.2), est borné.

(Et $\Delta : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est non borné car son domaine de définition $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.)

(Remarque : si $T : E \to F$ est borné (= continu) alors son domaine de définition est l'espace E tout entier. Et si $T : E \to F$ est non borné de domaine dense $\subsetneq E$, alors T n'est pas continu) ∎

Théorème 2.6 *(i)- $(L(E, F), +, .)$ est un espace vectoriel, s.e.v. de $(\mathcal{F}(E, F), +, .)$.*

(ii)- La fonction :

$$||.||_{L(E,F)} \overset{\text{noté}}{=} ||.|| : \begin{cases} L(E, F) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad T & \longrightarrow ||T||_{L(E,F)} \overset{\text{noté}}{=} ||T|| \end{cases} \tag{2.11}$$

définit une norme sur $L(E, F)$.

(iii)- Si $(F, ||.||_F)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) alors $(L(E, F), ||.||_{L(E,F)})$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

Preuve. (i) $L(E, F)$ s.e.v. : immédiat.

(ii) Norme : (avec (2.6)) 1- positivité $||T|| \geq 0$ pour tout $T \in L(E, F)$: immédiat, 2- $||T|| = 0 \Rightarrow T = 0$ (opérateur identiquement nul) : immédiat, 3- pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $||\lambda T|| = |\lambda|\,||T||$: puisque pour tout $x \in E$, $||\lambda Tx||_F = |\lambda|\,||Tx||_F$ et $||.||_F$ est une norme, 4- inégalité triangulaire ($||T + S|| \leq ||T|| + ||S||$ pour tout $T, S \in L(E, F)$) : immédiat car $||.||_F$ est une norme.

(iii) Montrons que $(L(E, F), ||.||_{L(E,F)})$ est complet (conséquence de F Banach) : Soit une suite (T_n) de Cauchy dans $L(E, F)$: $||T_n - T_m|| \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$. Montrons que cette suite converge vers un $T \in L(E, F)$. Construction : pour $x \in E$, la suite $(y_n) = (T_n x)$ est de Cauchy puisque :

$$||y_n - y_m||_F = ||T_n x - T_m x||_F \leq ||T_n - T_m||\,||x||_E \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.12}$$

car (T_n) est de Cauchy. Donc $(y_n) = (T_n x)$ converge dans F Banach vers un $y = \lim_{n\to\infty} T_n x =^{\text{noté}} Tx$. On a ainsi défini l'application $T : \left\{\begin{array}{l} E \ \to F \\ x \ \to y = Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x \end{array}\right\}$.

1- T est linéaire : en effet, T_n étant linéaire pour tout n, on a, pour tout $x_1, x_2 \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(x_1 + \lambda x_2) &= \lim_{n\to\infty} (T_n(x_1 + \lambda x_2)) = \lim_{n\to\infty} (T_n(x_1) + \lambda T_n(x_2)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (T_n(x_1)) + \lambda \lim_{n\to\infty} (T_n(x_2)) = T(x_1) + \lambda T(x_2). \end{aligned}$$

2- T est borné : $(M_n)_{\mathbb{N}^*} = (||T_n||)_{\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ car $\Big|||T_n|| - ||T_m||\Big| \leq ||T_n - T_m|| \longrightarrow_{n,m\to\infty}$. Donc $(M_n) = (||T_n||)$ converge vers un $M \in \mathbb{R}$ (complet). Et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ donne $||y||_F = \lim_{n\to\infty} ||y_n||_F$ (continuité de la norme), donc $||Tx||_F = \lim_{n\to\infty} ||T_n x||_F \leq \lim_{n\to\infty} ||T_n||\,||x||_E = M||x||_E$: T est borné.

3- T_n converge vers T : pour $x \in E$ t.q. $||x||_E \le 1$, on a (continuité de la norme) :

$$||T_n x - Tx||_F = \lim_{m\to\infty} ||T_n x - T_m x||_F \le \lim_{m\to\infty} ||T_n - T_m||\,||x||_E \le \lim_{m\to\infty} ||T_n - T_m||, \tag{2.13}$$

d'où $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T|| = 0$ car (T_n) est de Cauchy. Donc la suite (T_n) est convergente (vers T) dans $L(E,F)$. Toute suite de Cauchy étant convergente, $L(E,F)$ est complet. ∎

Proposition 2.7 *Si E, F et G sont trois Banach, et si $T \in L(E,F)$ et $S \in L(F,G)$ alors $S\circ T$ est dans $L(E,G)$ (est également linéaire et borné). Et :*

$$||S\circ T||_{L(E,G)} \le ||T||_{L(E,F)} ||S||_{L(F,G)} \tag{2.14}$$

Preuve. $||(S\circ T)(x)||_G = ||S(T(x))||_G \le ||S||\,||T(x)||_F \le ||S||\,||T||\,||x||_E$. ∎

Pour les applications linéaires, on utilise aussi la notation :

$$S\circ T \overset{\text{noté}}{=} S.T \overset{\text{noté}}{=} ST. \tag{2.15}$$

Proposition 2.8 *$L(E)$ est une algèbre (non commutative) pour la composition $S\circ T$ et on a $||S\circ T||_{L(E)} \le ||S||_{L(E)}\,||T||_{L(E)}$, aussi noté $||ST|| \le ||S||\,||T||$.*

Preuve. Immédiat (exercice). ∎

Proposition 2.9 *Soit H et G deux Hilbert. Pour $T \in L(H,G)$ on a :*

$$||T||_{L(H,G)} = \sup_{||x||_H\le 1, ||y||_G\le 1} |(Tx,y)_G| = \sup_{||x||_H=1, ||y||_G=1} |(Tx,y)_G|. \tag{2.16}$$

Preuve. On a $||T|| = \sup_{||x||_H\le 1} ||Tx||_G$ et $||Tx||_G = \sup\limits_{||y||_G\le 1} |(Tx,y)_G|$, le sup étant atteint pour $y = \frac{Tx}{||Tx||_G}$ (Cauchy–Schwarz), d'où (2.16). ∎

2.4 Exemples fondamentaux d'opérateurs bornés ou non

Exercice 2.10 Soit E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que si $T : E \to F$ est linéaire (opérateur) alors T est continu (borné).

Réponse. Soit $(\cdot,\cdot)_E$ et $(\cdot,\cdot)_F$ des produits scalaires sur E et F, soit $(\vec{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ des b.o.n. associées (donc $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)_E = \delta_{ij}$ et $(\vec{f}_i,\vec{f}_j)_F = \delta_{ij}$ pour tout i,j). Soit T_{ij} les composantes de T dans ces bases, i.e. $T\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n T_{ij}\vec{f}_i$ pour tout j, et soit $[T] = [T_{ij}]$ la matrice de T dans ces bases (les composantes de $T\vec{e}_j$ sont stockées dans la j-ème colonne de $[T]$). Si $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j$ on a $||\vec{x}||_E^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ (Pythagore) et $T\vec{x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n T_{ij}x_j\vec{f}_i$ (linéarité), donc $||T\vec{x}||_F^2 = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n T_{ij}x_j)^2$ (Pythagore) $\le \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n T_{ij})^2 (\sum_{j=1}^n x_j)^2$ (Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^n$). Donc posant $c = (\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n T_{ij})^2)^{\frac{1}{2}}$, on a : pour tout $\vec{x} \in E$, $||T\vec{x}||_F \le c||\vec{x}||_E$. Donc T est continu avec $||T|| \le c$ (ici la constante c donnée est la norme de Frobenius $||T||_2$ de T, et voir aussi plus loin les opérateurs de Hilbert–Schmidt § 4.2.7). ∎

Exercice 2.11 Soit l'endomorphisme $T : (\ell^2, ||.||_{\ell^2}) \to (\ell^2, ||.||_{\ell^2})$ de multiplication par une suite $\vec{\lambda} = (\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$, i.e. donné par $T\vec{e}_n = \lambda_n\vec{e}_n$, où $(\vec{e}_n)_{\mathbb{N}^*}$ est la base canonique de ℓ^2. Montrer :

1- T est borné ssi $\vec{\lambda} \in \ell^\infty$, i.e. ssi $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ est bornée, et alors $||T|| = ||\vec{\lambda}||_\infty \in \mathbb{R}$ (où $||\vec{\lambda}||_\infty = \sup_{\mathbb{N}^*} |\lambda_n|$),

2- T n'est pas borné ssi $||\vec{\lambda}||_\infty = \infty$.

Réponse. 1- T peut être représenté, dans la base canonique de ℓ^2, par une "'matrice généralisée diagonale infinie" ayant les λ_n comme éléments diagonaux (car $T\vec{e}_n = \lambda_n\vec{e}_n$ pour tout n) :

$$[T] = \text{diag}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots \\ 0 & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Pour $\vec{x} = \sum_{n=1}^\infty x_n\vec{e}_n =^{\text{noté}} (x_n)_{\mathbb{N}^*}$ on a $T\vec{x} = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n\vec{e}_n =^{\text{noté}} (\lambda_n x_n)_{\mathbb{N}^*}$, donc $||T\vec{x}||^2 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 x_n^2$.

$\Leftarrow$: Supposons $\vec{\lambda} = (\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ bornée, i.e., $||\vec{\lambda}||_\infty = \sup_{\mathbb{N}^*} |\lambda_n| < \infty$. Donc $||T\vec{x}||^2 = ||\vec{\lambda}||_\infty^2 \sum_{n=1}^\infty x_n^2 = ||\vec{\lambda}||_\infty^2 ||\vec{x}||_{\ell^2}^2$, donc T est borné et $||T|| \le ||\vec{\lambda}||_\infty$. Si le sup est atteint, i.e. s'il existe n t.q. $||\vec{\lambda}||_\infty = |\lambda_n|$, alors $||T\vec{e}_n||_{\ell^2} = ||\lambda_n\vec{e}_n||_{\ell^2} = |\lambda_n| = ||\vec{\lambda}||_\infty$ donne $||T|| \ge ||\vec{\lambda}||_\infty$, et donc $||T|| = ||\vec{\lambda}||_\infty$; Si le sup n'est pas atteint, alors $\exists(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ (sous-suite) t.q. $|\lambda_{n_k}| \longrightarrow_{k\to\infty} ||\vec{\lambda}||_\infty$ et $||T\vec{e}_{n_k}||_{\ell^2} = |\lambda_{n_k}| \longrightarrow_{k\to\infty} ||\vec{\lambda}||_\infty$, donc $||T|| \ge ||\vec{\lambda}||_\infty$; et donc $||T|| = ||\vec{\lambda}||_\infty$.

$\Rightarrow$: Supposons $\vec{\lambda} = (\lambda_n)$ non bornée ; alors $\exists(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ (sous-suite) t.q. $|\lambda_{n_k}| \longrightarrow_{k\to\infty} \infty$, et $||T\vec{e}_{n_k}||_{\ell^2} = |\lambda_{n_k}|\,||\vec{e}_{n_k}||_{\ell^2} = |\lambda_{n_k}| \longrightarrow_{k\to\infty} \infty$. Comme $||\vec{e}_{n_k}||_{\ell^2} = 1$ pour tout k, l'opérateur T n'est pas borné, cf. (2.9).

2- Négation de 1. ∎

Exemple 2.12 Ω ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, et $T : f \in L^2(\Omega) \to Tf = u \in H_0^1(\Omega)$ où u est la solution de $-\Delta u = f$ dans $H_0^1(\Omega)$. Alors T est un opérateur borné de $(L^2(\Omega), ||.||_{L^2(\Omega)})$ dans $(H_0^1(\Omega), ||.||_{H_0^1(\Omega)})$, cf. (2.2) (Lax–Milgram). ∴

Exercice 2.13 Ω ouvert borné. Montrer : l'opérateur $\Delta : (H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega), ||.||_{H_0^1(\Omega)}) \to (L^2(\Omega), ||.||_{L^2(\Omega)})$ n'est pas borné (munir $H_0^1(\Omega)$ de la norme $||u||_{H_0^1} = ||\vec{\text{grad}} u||_{L^2}$).

Réponse. Il suffit pour s'en convaincre de regarder le cas 1-D où $\Omega =]0, \pi[$ et où $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, et de prendre

$$u_n(x) = \sin(nx), \quad \text{donc} \quad u_n'(x) = n \cos(nx), \quad \text{donc} \quad u_n''(x) = -n^2 \sin(nx).$$

Donc $||u_n''(x)||_{L^2} = n||u_k'(x)||_{L^2}$ pour tout n, donc

$$\forall c > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \ \ (\text{prendre } n = E(c{+}1)), \quad ||u_n''||_{L^2} > c||u_n||_{H_0^1},$$

donc $\frac{d^2}{dx^2} : H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ n'est pas borné : $||\frac{d^2}{dx^2}||_{L(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} = \infty$. ∴

Remarque 2.14 (relative à l'exercice 2.13.) Pour la formulation faible du problème $-\Delta u = f$ où $u \in H_0^1(\Omega)$, voir cours d'éléments finis, bien que Δ ne soit pas continu, la forme bilinéaire associée $a(u, v) = \int_\Omega \vec{\text{grad}} u . \vec{\text{grad}} v$ est bornée : on a $|a(u, v)| \le ||u||_{H_0^1} ||v||_{H_0^1}$, et $||a|| \le 1$. N.B. : la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ ne contient que des termes de dérivation d'ordre 1, et c'est cette forme bilinéaire qui permet d'appliquer le théorème de Lax–Milgram donnant un problème bien posé dans $H_0^1(\Omega)$. ∴

Exercice 2.15 Montrer : l'opérateur diagonal $T : \ell^2 \to \ell^2$ de multiplication par la suite $(\lambda_n {=} \frac{1}{n})_{\mathbb{N}^*}$ est borné, inversible (au sens $T : \ell^2 \to \text{Im}T$ est inversible) d'inverse non borné.

Réponse. L'exercice 2.11 montre que T est borné avec $||T|| = 1$.

On a $T(x_n)_{\mathbb{N}^*} = (y_n)_{\mathbb{N}^*} = (\frac{x_n}{n})_{\mathbb{N}^*}$ avec $(x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ donc $(ny_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$. Soit $Y = \{\vec{y} = (y_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2 \text{ t.q. } \sum_{\mathbb{N}^*} n^2 y_n^2 < \infty\}$, sous-espace de ℓ^2. On a $\text{Im}T = Y$ (immédiat) et donc $T : \ell^2 \to Y$ est surjectif. Et $T : \ell^2 \to Y$ est injectif car T est linéaire et $T(x_n)_{\mathbb{N}^*} = 0$ ssi $(\frac{x_n}{n})_{\mathbb{N}^*} = 0$, ssi $\frac{x_n}{n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ssi $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $T \in L(\ell^2, Y)$ est bijectif d'inverse $T^{-1} \in L(Y, \ell^2)$.

Et l'application inverse $T^{-1} =^{\text{noté}} S : Y \to \ell^2$ est linéaire (inverse d'une application linéaire) et trivialement définie par $S\vec{e}_n = n\vec{e}_n$ pour tout n (on vérifie que $(\vec{e}_n)$ est une base de Y et que $S(T\vec{e}_n) = \vec{e}_n = T(S\vec{e}_n)$ pour tout n). Mais $S : (Y, ||.||_{\ell^2}) \to (\ell^2, ||.||_{\ell^2})$ n'est pas bornée, car $\vec{e}_n \in Y$, $||\vec{e}_n||_{\ell^2} = 1$ et $||S\vec{e}_n||_{\ell^2} = n \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$, donc $S \notin L(Y, \ell^2)$ (linéaire mais non borné).

N.B. : on peut remarquer que Y est dense et non fermé dans ℓ^2 (voir remarque suivante 2.16), et donc qu'ici $(Y, ||.||_{\ell^2})$ n'est pas un espace de Banach (n'est pas complet). ∴

Remarque 2.16 L'image $T(E) = \text{Im}T$ d'un opérateur borné $T \in L(E, F)$ (donc linéaire continu) n'est pas fermée en dimension infinie en général. Exemple de l'endomorphisme $T : \ell^2 \to \ell^2$ de l'exercice 2.15 :

1- T n'est pas surjectif sur ℓ^2, i.e. $\text{Im}(T) \subsetneq \ell^2$. En effet la suite $\vec{y} = (y_n) = (\frac{1}{n}) \in \ell^2$ n'a pas d'antécédent : si elle en avait un, ce serait nécessairement $\vec{x} = (ny_n) = (1)$ suite constante qui n'est pas dans ℓ^2.

2- $\text{Im}(T) = Y$ est dense dans ℓ^2. En effet, soit $y = (y_n) \in \ell^2$; donc, pour $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{N+1}^\infty y_n^2 < \varepsilon$. On considère alors la suite tronquée $\vec{y}^N = (y_n^N)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $(\vec{y}^N)_n = y_n$ si $n \le N$ et $(\vec{y}^N)_n = 0$ sinon. Soit $\vec{x}^N = (x_n^N)$ son antécédent, donc $x_n = ny_n$ pour $n \le N$ et $x_n = 0$ sinon. Cette suite $\vec{x}^N$ est dans ℓ^2 (somme finie de termes non nuls), et vérifie $||T\vec{x}^N - \vec{y}||^2 = ||\vec{y}^N - \vec{y}||^2 = \sum_{N+1}^\infty y_n^2 \longrightarrow_{N\to\infty} 0$. Et donc $\vec{y} \in \ell^2$ peut-être approchée "aussi près que souhaité" par un élément de $T(\ell^2)$. Vrai pour tout $\varepsilon > 0$: $\text{Im}(T)$ est dense dans ℓ^2.

3- $Y = \text{Im}(T)$ n'est pas fermé, car fermé et dense impliquerait $\text{Im}(T) = \ell^2$, ce qui est faux.

(4- Donc son inverse $T^{-1} : Y \subset \ell^2 \to \ell^2$ est un opérateur "non borné"(son domaine de définition Y est dense dans ℓ^2.) ∴

Remarque 2.17 Complément. "Théorème de l'application ouverte", voir Brézis [4] : Si $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ sont deux Banach (espaces vectoriels normés et complets pour la norme choisie), et si $T : E \to F$ est linéaire, bijectif et continue, alors $T^{-1} : F \to E$ est également continu. Ici T surjectif sur F Banach.

Dans l'exercice 2.15, $T : \ell^2 \to T(\ell^2) = Y$ est linéaire borné bijectif, mais avec $(T(\ell^2), ||.||_{\ell^2})$ qui n'est pas un Banach (n'est pas complet) : le théorème de l'application ouverte ne s'applique pas.

Idem pour l'exemple 2.12 où $\text{Im}T = H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$ non fermé dans $H_0^1(\Omega)$. ∴

Exemple 2.18 Mécanique quantique : fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (à valeurs complexes), endomorphismes $T : H \to H$ où $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ est un Hilbert complexe muni d'un produit scalaire (forme sesquilinéaire hermitienne positive) $(\cdot, \cdot)_H : (f, g) \to (f, g)_H$. (Eg., pour $H = L^2(\Omega)$, $(f, g)_H = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.)

1- Opérateur T_m de multiplication par la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \to \varphi(x) = x \end{array} \right\}$:

$$T_m = \varphi I : \left\{ \begin{array}{ll} L^2(]0,1[) & \to L^2(]0,1[) \\ f & \to T_m(f) = \varphi f, \quad \text{donc} \quad T_m f(x) = x f(x). \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Il est immédiat que T_m est borné avec $||T|| \le 1$. (Et $T_m f =^{\text{noté}} xf$.) Ici $(T_m f, g)_{L^2} = \int_{x\in\mathbb{R}} x f(x) \overline{g(x)}\, dx = (f, T_m g)_{L^2}$: l'opérateur T_m est autoadjoint.)

2- Opérateur T_d de dérivation :

$$T_d = i\,\frac{d}{dx} : \left\{ \begin{array}{ll} L^2(]0,1[) & \to L^2(]0,1[) \\ f & \to T_d(f) = i\,\dfrac{d}{dx}(f) = i\, f' \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Le domaine de définition de T_d est $D(T_d) = H^1(]0,1[)$, et $D(T_d)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, donc T_d est "non borné". Et T_d n'est pas borné, i.e., n'est pas continu (prendre $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ et calculer $||f_n||_{L^2} = O(1)$ et $||T_d f_n||_{L^2} = ||f_n'||_{L^2} = O(n)$). (Et $(T_d f, g)_{L^2} = \int_0^1 i f'(x) \overline{g(x)}\, dx = -\int_0^1 i f(x) \overline{g'(x)}\, dx + [f(x)\overline{g(x)}]_0^1$, et on a $(f, T_d g)_{L^2} = \int_0^1 -i f(x) \overline{g'(x)}\, dx$, donc $(T_d f, g)_{L^2} - (f, T_d g)_{L^2} = f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}$; en particulier si on restreint le domaine de définition de T_d à $C_0^\infty(]0,1[)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact alors T_d est autoadjoint. D'où l'introduction de l'imaginaire pur i dans $T_d = i\,\frac{d}{dx}$: donne le caractère autoadjoint.

3- Remarque : avec $L^2(\mathbb{R})$ au lieu de $L^2(]0,1[)$, la transformée de Fourier transforme T_d en T_m, et c'est une remarque fondamentale en mécanique quantique. (Dans ce cas $L^2(\mathbb{R})$, T_m est non borné, son domaine de définition étant $H^1(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.) ♣

2.5 Opérateur borné positif

On se place dans le cas $G = H$ (Hilbert).

Définition 2.19 Un opérateur $T \in L(H)$ est dit positif (resp. défini positif) si :

$$\forall x \in H, \quad (Tx, x)_H \ge 0 \qquad (\text{resp. } \forall x \ne 0, \quad (Tx, x)_H > 0). \tag{2.20}$$

2.6 Adjoint et opérateur borné autoadjoint

2.6.1 Adjoint

On se place ici dans le cas $T \in L(H; G)$ où $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ et $(G, (\cdot,\cdot)_G)$ sont des espaces de Hilbert. Pour une généralisation aux espaces de Banach et opérateurs non bornés, voir Brézis [4].

Définition 2.20 Soit $T \in L(H, G)$ (un opérateur borné de H dans G). Son adjoint T^* est l'opérateur $T^* \in L(G, H)$ défini par, relativement aux produits scalaires choisis :

$$\forall (x, y) \in H \times G, \quad (T^* y, x)_H = (Tx, y)_G. \tag{2.21}$$

(Remarque : pour une matrice $A = [A_{ij}]$ on parle de matrice transposée A^T : définie par $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ pour tout i, j ; une application linéaire T peut être représenté par une matrice après s'être donné des bases, et l'adjoint T^* est alors être représenté par une matrice, mais cette matrice ne dépend pas uniquement de T : elle dépend également du choix des produits scalaires $(\cdot,\cdot)_H$ et $(\cdot,\cdot)_G$.)

Proposition 2.21 *Il existe un unique opérateur vérifiant (2.21) qui de plus est borné et vérifie :*

$$||T^*|| = ||T||. \tag{2.22}$$

Preuve. (Application du théorème de représentation de Riesz.) Soit $y \in G$. Construisons $T^* y$. Soit la forme (immédiatement bilinéaire) $a(\cdot,\cdot) : H \times G \to \mathbb{R}$ définie par $a(x, y) = (Tx, y)_G$, et soit, pour $y \in G$ fixé, la fonction

$$a_y : \left\{ \begin{array}{ll} H & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow a_y(x) = (Tx, y)_G = \text{projection de } Tx \text{ sur } y. \end{array} \right. \tag{2.23}$$

1. a_y est linéaire (immédiat) et borné : $|a_y(x)| \le ||Tx||_G\, ||y||_G \le ||T||\, ||x||_H ||y||_G$ donne $||a_y|| \le ||T||\, ||y||_G$.

2. Comme $a_y \in L(H,\mathbb{R})$ (forme linéaire continue), le théorème de représentation de Riesz donne :

$$\exists! T_y^* \in H \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in H, \quad a_y(x) = (T_y^*, x)_H \quad \text{et} \quad ||T_y^*||_H = ||a_y||_{L(H,\mathbb{R})}. \tag{2.24}$$

On a ainsi défini l'application $T^* : \begin{cases} G \to H \\ y \mapsto T^*(y) = T_y^*. \end{cases}$

3. T^* est linéaire car $(T^*(y),x)_H = a_y(x) = (Tx,y)_H$ et $(\cdot,\cdot)_G$ est bilinéaire, et donc on peut noter $T^*(y) = T^*y$, et on a $(T^*y,x)_H = (Tx,y)_G$, i.e. (2.21).
4. $||T^*y||_H \overset{Riesz}{=} ||a_y||_{L(H;\mathbb{R})} \leq ||T||\,||y||_G$, cf. 1., donc T^* est borné avec $||T^*|| \leq ||T||$.
5. De manière immédiate $(T^*)^* = T$, donc 5. donne $||T|| = ||(T^*)^*|| \leq ||T^*||$, donc $||T^*|| = ||T||$. ∴

Exemple 2.22 Dans $L(\ell^2)$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, l'opérateur défini par $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $T(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ et $T(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ pour tout $i \geq 3$ (de matrice généralisée $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \dots & \\ 2 & 4 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$) a pour opérateur adjoint l'opérateur défini par $T^*(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $T^*(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ et $T^*(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ (de matrice généralisée la matrice transposée) : le vérifier.

Réponse. La matrice $[T]$ de T est définie par $T_{ij} = (T.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\ell^2}$. Celle de T^* par $T^*_{ij} = (T^*.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\ell^2}$. Et $T^*_{ij} = (T^*.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\ell^2} = (T.\vec{e}_i, \vec{e}_j)_{\ell^2} = T_{ji}$ pour tout i,j. Donc $[T^*] = [T]^T$. ∴

Proposition 2.23 *Pour T et S dans $L(H,G)$ et λ et μ des réels :*
(i) $(T^*)^* = T$ et on note $T^{**} = (T^*)^*$ (et T^{**} est appelé biadjoint de T),
(ii) $||T^*|| = ||T||$, i.e. l'opération * conserve la norme,
(iii) $(\lambda T + \mu S)^* = \lambda T^* + \mu S^*$, i.e. * est linéaire de $L(H,G)$ dans $L(G,H)$,
(iv) $(TS)^* = S^*T^*$, avec ici $S \in L(G,F)$ où F est un Hilbert,
(v) Si $T \in L_i(H,G)$ alors $T^* \in L_i(G,H)$ et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$,
(vi) $(\mathrm{Im}(T))^\perp = \mathrm{Ker}(T^*)$ et $(\mathrm{Ker}(T^*))^\perp = \overline{(\mathrm{Im}(T))}$.

Preuve. (i),(iii),(iv),(v) sont immédiates.
(ii) : $||T^*y||_G^2 = (T^*y, T^*y)_H = (TT^*y, y)_G \leq ||TT^*y||_G ||y||_G \leq ||T||\,||T^*y||_G ||y||_G$ donne $||T^*y||_G \leq ||T||\,||y||_G$, donc $||T^*|| \leq ||T||$. Donc $||T|| = ||(T^*)^*|| \leq ||T^*||$. Donc $||T^*|| = ||T||$.
(vi) : $(\mathrm{Im}T)^\perp = \{y \in G : (y,Tx)_G = 0,\ \forall x \in H\} = \{y \in G : (T^*y,x)_H = 0,\ \forall x \in H\} = \{y \in G : T^*y = 0\} = \mathrm{Ker}(T^*)$. On en déduit que, $\mathrm{Im}T$ étant un sous-espace vectoriel :

$$(\mathrm{Ker}(T^*))^\perp = ((\mathrm{Im}T)^\perp)^\perp = \overline{(\mathrm{Im}T)}.$$

(Un orthogonal est toujours fermé : ne pas oublier la fermeture, voir remarque 2.16.) ∴

2.6.2 Opérateur autoadjoint

Cas $G = H$ (Hilbert), et $T \in L(H) := L(H;H)$ endomorphisme (pour trouver des valeurs propres) borné.

Définition 2.24 Un opérateur $T \in L(H)$ est dit autoadjoint (ou hermitien) ssi $T = T^*$, i.e. ssi :

$$\forall x,y \in H, \quad (Tx,y)_H = (x,Ty)_H \quad (= (Ty,x)_H). \tag{2.25}$$

Et il est dit autoadjoint positif s'il est autoadjoint et positif ($(Tx,x)_H \geq 0$ pour tout x).

Exercice 2.25 Dans $L(\ell^2)$, l'opérateur défini par $T(e_1) = e_1 + 2e_2$, $T(e_2) = 2e_1 + 3e_2$ et $T(e_i) = e_i$ pour tout $i \geq 3$ (de matrice généralisée à représenter) a pour opérateur adjoint l'opérateur défini par $T^*(e_1) = e_1 + 2e_2$, $T^*(e_2) = 2e_1 + 3e_2$ et $T^*(e_i) = e_i$ pour tout $i \geq 3$ (de matrice généralisée transposée elle-même) : le vérifier. Donc $T^* = T$, i.e. T est autoadjoint. Mais T n'est pas positif. Le vérifier. (Indication : calculer ses valeurs propres).

Réponse. $[T]$ est la "matrice par blocs" $[T] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et I est la matrice identité. det $= -1 < 0$, donc une valeur propre λ de A est < 0, et pour un vecteur propre $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ associé on a $(A\vec{x}_2, \vec{x}_2)_{\ell^2} = \lambda ||\vec{x}_2||^2_{\ell^2} < 0$. Et le vecteur $\vec{x} = (\vec{x}_2, 0, 0...) \in \ell^2$ vérifie $(T\vec{x}, \vec{x})_{\ell^2} = \lambda ||\vec{x}||^2_{\ell^2} < 0$. ∴

Exercice 2.26 Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. Soit $T : \left\{ \begin{array}{ll} L^2(\Omega) & \to L^2(\Omega) \\ f & \to Tf = (-\Delta)^{-1} f \end{array} \right\}$ l'endomorphisme de $L^2(\Omega)$ donné par la solution $u = Tf = (-\Delta)^{-1}f$ du problème de Dirichlet homogène : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans Ω. Montrer que T est autoadjoint positif.

Réponse. Il s'agit de montrer que, pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$, on a $(Tf, g)_{L^2} = (f, Tg)_{L^2}$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit $u = T(f) =^{\text{noté}} Tf$ (par linéarité de T) la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de $\Delta u = f$ donnée par le théorème de Lax-Milgram. De même soit $g \in L^2(\Omega)$, et $v = Tg \in H_0^1(\Omega)$, i.e. $-\Delta v = g$. On a :

$$(Tf, g)_{L^2} = (u, -\Delta v)_{L^2} \overset{IPP}{=} (\vec{\text{grad}} u, \vec{\text{grad}} v)_{L^2} \overset{IPP}{=} (-\Delta u, v)_{L^2} = (f, Tg)_{L^2}. \tag{2.26}$$

Et on a bien $T^* = T$ en tant qu'opérateur de $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

N.B. : on vient de voir que $\Delta^{-1} = \Delta^{-1*}$, mais pas que $\Delta = \Delta^*$ qui n'a pas de sens ici. En effet l'opérateur Δ est "dérégularisant" (d'une fonction $u \in H^2(\Omega)$ on obtient $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et donc perte de deux crans de dérivabilité ou encore pour $u \in L^2(\Omega)$ la dérivée Δu est une distribution qui n'est pas, en général, une distribution régulière identifiable à une fonction $L^2(\Omega)$).

Complément : pour définir Δ^*, il faut regarder la dualité sans passer par un produit scalaire et le théorème de Riesz, voir Brézis [4], par exemple en considérant $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. ∎

Exercice 2.27 Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. Soit $T : \left\{ \begin{array}{ll} H_0^1(\Omega) & \to H_0^1(\Omega) \\ f & \to Tf = (-\Delta)^{-1} f \end{array} \right\}$ l'endomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ donné par la solution $u = Tf = (-\Delta)^{-1}f$ du problème de Dirichlet homogène : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans Ω.

1- On munit $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel : $(u, v)_{H_0^1} = (\vec{\text{grad}} u, \vec{\text{grad}} v)_{L^2}$. Montrer que T est autoadjoint positif.

2- On munit $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$: $(u, v)_{H_0^1} = (u, v)_{H^1}$. Montrer que T est autoadjoint positif.

Réponse. 1- Autoadjoint dans $(H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1})$: pour $f, g \in H_0^1(\Omega)$ il s'agit de montrer que $(Tf, g)_{H_0^1} = (f, Tg)_{H_0^1}$. Soit $u = Tf$ et $v = Tg$ (dans $H_0^1(\Omega)$), i.e. les solutions de $-\Delta u = f$ et $-\Delta v = g$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a, sachant $f, g \in H_0^1(\Omega)$:

$$(Tf, g)_{H_0^1} = (u, g)_{H_0^1} = (\vec{\text{grad}} u, \vec{\text{grad}} g)_{L^2} \overset{IPP}{=} (-\Delta u, g)_{L^2} = (f, g)_{L^2} = (f, -\Delta v)_{L^2} = ... = (f, Tg)_{H_0^1}.$$

Défini positif : on a $(-\Delta^{-1} f, f)_{H_0^1} = (f, f)_{L^2} = ||f||_{L^2}^2 > 0$ pour f non nulle dans $H_0^1(\Omega)$.

2- Autoadjoint dans $(H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^1})$: pour $f, g \in H_0^1(\Omega)$ $u = Tf$ et $v = Tg$ (dans $H_0^1(\Omega)$), i.e. les solutions de $-\Delta u = f$ et $-\Delta v = g$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a, sachant $f, g, u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}(-\Delta^{-1} f, g)_{H^1} = (u, g)_{H^1} &= (\vec{\text{grad}} u, \vec{\text{grad}} g)_{L^2} + (u, g)_{L^2} = (-\Delta u, g)_{L^2} - (u, \Delta v)_{L^2} \\ &= (f, g)_{L^2} + (\vec{\text{grad}} u, \vec{\text{grad}} v)_{L^2} = ... = (-\Delta^{-1} g, f)_{H^1}.\end{aligned}$$

Défini positif : on a $(-\Delta^{-1} f, f)_{H^1} \geq (f, f)_{L^2} = ||f||_{L^2}^2 > 0$ pour f non nulle dans $H_0^1(\Omega)$. ∎

Proposition 2.28 *Pour H Hilbert :*

(i) l'espace des opérateurs bornés autoadjoints est un sous-espace vectoriel de $L(H)$,

(ii) si T et S sont autoadjoints et si $TS = ST$ (i.e. si T et S commutent) alors TS est autoadjoint,

(iii) si $T \in L(H)$ alors T^*T est autoadjoint positif.

Preuve. Immédiat. ∎

Remarque 2.29 Rappel : même en dimension finie, si $A = A^T$ et $B = B^T$ (matrices symétriques), en général $(AB) \neq (AB)^T$ (i.e. AB n'est pas symétrique).

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donnent $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ non symétrique.

Et pour A et B symétriques on a : AB symétrique $\Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^T A^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$ (car $A = A^T$ et $B = B^T$) $\Leftrightarrow A$ et B commutent. ∎

Remarque 2.30 Pour les opérateurs $A : D \to H$ non bornés où $D \subset H$ est le domaine de définition de A on dit que A est symétrique ssi $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$ pour tout $x, y \in D$. ∎

Remarque 2.31 Même définitions pour $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ Hilbert complexe, où donc $(\cdot,\cdot)_g$ est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, où donc $(f_1+\lambda f_2,g)_H=(f_1,g)_H+\lambda(f_2,g)_H$ et $(f,g_1+\lambda g_2)_H=(f,g_1)_H+\overline{\lambda}(f,g_2)_H$ (sesquilinéarité), et $(f,g)_H=\overline{(g,f)_H}$ (hermitienne) et $(f,f)_H>0$ pour tout $f\neq 0$ (définie positive). Donc l'adjoint d'un opérateur $T:H\to H$ l'opérateur $T^*:H\to H$ défini par $(T^*g,f)_H=(g,Tf)_H$. Et T est auto-adjoint ssi $T=T^*$. Essentiel en mécanique quantique, ou de plus les opérateurs $T:H\to H$ sont "non bornés", leurs domaines de définition étant un sous-espace dense dans H..

Eg., $T_m : f\in L^2(]0,1[)\to T_m(f)=xf\in L^2(]0,1[)$ défini en (2.18) est autoadjoint, car $(T_mf,g)_{L^2}=\int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_0^1 f(x)\overline{xg(x)}\,dx=(f,T_mg)_{L^2}$.

Eg., $T_d : f\in H_0^1(]0,1[)\to T_d(f)=i\frac{df}{dx}\in L^2(]0,1[)$ défini en (2.19) est autoadjoint, car $(T_df,g)_{L^2}=i\int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}\,dx=-i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}\,dx+i[f(x)\overline{g(x)}]_0^1=\int_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}\,dx+0=(f,T_dg)_{L^2}$. ▪

2.7 Opérateurs inversibles

2.7.1 Définitions et remarques

On note $I_E:E\longrightarrow E$ l'opérateur identité $I_E(x)=x$ de E. Il est immédiat que $I_E\in L(E)$ et $||I_E||=1$. On notera $I_E=^{\text{noté}} I$ si le contexte est clair. On rappelle que $S\circ T=^{\text{noté}} ST$ quand S et T sont linéaires.

Définition 2.32 Un élément $T\in L(E,F)$ est inversible dans $L(E,F)$ ssi :

$$\exists S\in L(F,E),\qquad T\circ S=I_F\quad\text{et}\quad S\circ T=I_E, \tag{2.27}$$

noté $TS=I_F$ et $ST=I_E$, auquel cas $S=^{\text{noté}} T^{-1}$. On note :

$$L_i(E,F)=\{T:E\to F \text{ t.q. } T \text{ est linéaire inversible bicontinu}\}, \tag{2.28}$$

l'ensemble des opérateurs inversibles de $L(E,F)$ (l'ensemble des applications linéaires continues) ; et on note $L_i(E,E)=^{\text{noté}} L_i(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles bicontinus sur E.

Donc :

$$T\in L_i(E,F)\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} T \text{ est linéaire et borné } (T\in L(E,F)),\\ T^{-1} \text{ existe (et donc est linéaire)},\\ T^{-1} \text{ est borné } (T^{-1}\in L(F,E)).\end{cases} \tag{2.29}$$

Exemple 2.33 Il est immédiat que l'identité $I_E\in L_i(E)$: est inversible dans $L(E)$ d'inverse lui-même. ▪

Exercice 2.34 Si E et F ont même dimension finie, montrer : $(TS=I_F)\Rightarrow(ST=I_E)$.

Montrer que c'est faux en dimension infinie : en particulier $(TS=I_E)\not\Rightarrow(ST=I_E)$, quand $\dim E=\infty$.

Réponse. Cas dimension finie. Soit $(\vec f_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de F. Notons $\vec e_i=S(\vec f_i)$ pour $i=1,\dots,n$. Donc $T(\vec e_i)=TS(\vec f_i)=\vec f_i$ car $TS=I$, donc $T(\vec e_i)$ est libre, donc $(\vec e_i)$ est libre ($\sum_i\alpha_i\vec e_i=\vec 0\Rightarrow\sum_i\alpha_iS(\vec f_i)=\vec 0\Rightarrow T(\sum_i\alpha_iS(\vec f_i))=T(\vec 0)=\vec 0=\sum_i\alpha_iTS(\vec f_i)=\sum_i\alpha_i\vec f_i\Rightarrow\alpha_i=0$ pour tout i).

Puis $TS=I$ donne $STS(\vec f_i)=S(\vec f_i)$ pour tout i, soit $ST(\vec e_i)=\vec e_i$ pour tout i, donc $ST=I$.

[Ou encore, on représente T et S par leurs matrices $[T]$ et $[S]$ après choix de bases, et si $[T].[S]=I$ on a S inversible, car $\det[T]\det[S]=\det[I]=1$ et donc $\det[S]\neq 0$; d'où en multipliant à droite par $[S]^{-1}$ on a $[T]=[S]^{-1}$, puis en multipliant à gauche par $[S]$ on a $[S].[T]=I$.]

Cas dimension infinie. Voir remarque suivante. ▪

Remarque 2.35 En dimension infinie, il n'est pas suffisant de vérifier $TS=I_F$ pour avoir T inversible. Il faut également vérifier $ST=I_E$.

Exemple avec E=F=ℓ^2 et $T:\ell^2\longrightarrow\ell^2$ l'opérateur de décalage à gauche ("shift à gauche") :

$$\text{pour } \vec x=(x_n)_{\mathbb N^*},\quad T\vec x=T(x_1,x_2,x_3,\dots)\stackrel{\text{déf}}{=}(x_2,x_3,\dots). \tag{2.30}$$

On a perdu l'information x_1. Autrement dit $T\vec e_1=\vec 0$ et $T\vec e_{i+1}=\vec e_i$ pour tout $i\in\mathbb N^*$.

Soit $S:\ell^2\longrightarrow\ell^2$ l'opérateur de décalage à droite ("shift à droite") :

$$S\vec x=S(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,x_1,x_2,x_3,\dots). \tag{2.31}$$

Autrement dit $S\vec e_i=\vec e_{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb N^*$.

On a $TS=I$ mais $ST\neq I$ puisque $ST\vec x=(0,x_2,x_3,\dots)$ (perte de l'information x_1). Donc T n'est pas inversible, S n'est pas inversible. (Ou encore $TS\vec e_1=\vec e_1$ alors que $ST\vec e_1=\vec 0$.) Ici T est inversible à droite mais n'est pas inversible à gauche.

D'un point de vue matricielle $[T]=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots\\0&0&1&\dots\\0&0&0&\ddots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}$ et $[S]=\begin{pmatrix}0&0&0&\dots\\1&0&0&\dots\\0&1&0&\dots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}$. ▪

Remarque 2.36 En dimension infinie, on peut avoir T bijectif continu sans que T^{-1} soit continu. Et dans ce cas T n'est pas inversible dans $L(E,F)$ (car T^{-1} n'est pas borné). Voir les exemples 2.15 et 2.13. ∴

2.7.2 Propriétés (série de Neumann)

Lemme 2.37 *Pour $T \in L_i(E,F)$ on a :*

$$||T^{-1}||_{L(F,E)} \geq \frac{1}{||T||_{L(E,F)}} \tag{2.32}$$

Et si $T \in L_i(E,F)$ et $S \in L_i(F,G)$ alors $ST \in L_i(E,G)$, d'inverse $T^{-1}S^{-1} \in L_i(G,E)$.

Preuve. On a $1 = ||I_F|| = ||TT^{-1}||_{L(F)} \leq ||T||_{L(E,F)}||T^{-1}||_{L(F,E)}$, et de manière immédiate, $STT^{-1}S^{-1} = I = T^{-1}S^{-1}ST$. ∴

Remarque 2.38 En général $||T^{-1}||_{L(F,E)} \neq ||T||^{-1}_{L(E,F)}$: prendre $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'inverse $[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ où on a $||T||_{L(\mathbb{R}^2)} = 2$ et $||T^{-1}||_{L(\mathbb{R}^2)} = 1 \neq \frac{1}{2}$. On peut avoir l'égalité avec par exemple $[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. ∴

Dans le cas $E = F$ on a : si $||T|| < 1$ alors T est une 'petite' perturbation de I, 'petite' au sens où $I - T$ conserve le caractère inversible de I :

Proposition 2.39 *Pour $T \in L(E)$ avec E Banach, si $||T|| < 1$, alors $(I-T)$ est inversible et on connaît son inverse :*

$$||T|| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (I-T) \in L_i(E) \quad \text{et} \quad (I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n. \tag{2.33}$$

(Et $||T|| < 1 \Rightarrow (I+T) \in L_i(E)$ et $(I+T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n T^n$: considérer $-T$.)

Preuve. Rappel dans $\mathbb{R}$: $1-x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+...+x^n)$, et si $|x| < 1$ alors $1 = (1-x)\sum_{i=0}^{\infty} x^i = (1-x)^{-1}$, donc $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ (série géométrique convergente). D'où la démarche pour démontrer (2.33) :

Pour $T \in L(E)$ et $||T|| < 1$, on pose $S_n = I + T + T^2 + ... + T^n = \sum_{i=0}^{n} T^i$, et donc $(I-T)S_n = I - T^{n+1}$. Donc $||(I-T)S_n - I|| = ||T^{n+1}|| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, donc

$$(I-T)S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I. \tag{2.34}$$

De plus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $L(E)$, car, pour $0 < m < n$,

$$||S_n - S_m|| = ||\sum_{i=m+1}^{n} T^i|| \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||T||^i \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} ||T||^i = ||T||^{m+1}\sum_{i=0}^{\infty} ||T||^i = \frac{||T||^{m+1}}{1-||T||} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $||T|| < 1$. L'espace $L(E)$ étant complet (car E l'est, cf. thm 2.6), la suite $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge dans $L(E)$. Notons $S = \lim_{n\to\infty} S_n =^{\text{noté}} \sum_{i=0}^{\infty} T^i$ la limite dans $L(E)$. Alors $||(I-T)S - (I-T)S_n|| = ||(I-T)(S-S_n|| \leq ||I-T||\,||S-S_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(I-T)S_n \longrightarrow_{n\to\infty} (I-T)S$, donc $(I-T)S = I$ cf. (2.34). Idem $S(I-T) = \lim_{n\to\infty} S_n(I-T) = I$. Donc $I-T$ est inversible dans $L(E)$, d'inverse S. ∴

Corollaire 2.40 *L'ensemble $L_i(E,F)$ est ouvert dans $L(E,F)$. (Généralisation du résultat matriciel : l'ensemble des matrices inversibles $n * n$ est ouvert dans l'ensemble des matrices.)*

Preuve. Soit $T \in L_i(E,F)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que la boule ouverte $B(T,\eta) = \{R \in L : ||R-T|| < \eta\} = \{T+S \in L(E,F) : ||S|| < \eta\} = \{T+S \in L(E,F) : S \in B(0,\eta)\}$, de centre T et rayon $\eta > 0$, est dans $L_i(E,F)$. On a :

$$T + S = T(I_E + T^{-1}S). \tag{2.35}$$

On pose $\eta = \frac{1}{||T^{-1}||}$: on a $||T^{-1}S|| \leq ||T^{-1}||\,||S|| < 1$ pour tout $S \in B(0,\eta)$, donc $I_E + T^{-1}S \in L_i(E,F)$, donc $T + S \in L_i(E,F)$. ∴

Corollaire 2.41 *L'application inverse $f : T \to T^{-1}$ est continue de $L_i(E,F)$ dans $L_i(F,E)$ pour les normes usuelles $||.||_{L(E,F)}$ et $||.||_{L(F,E)}$.*

Preuve. Soit $T \in L_i(E,F)$ et soit $\eta = \frac{1}{||T^{-1}||}$. Pour S t.q. $||S|| < \eta$ on a $||T^{-1}S|| < 1$ et

$$\begin{aligned} f(T+S) - f(T) = (T+S)^{-1} - T^{-1} = (T(I_E + T^{-1}S))^{-1} - T^{-1} &= ((I_E + T^{-1}S)^{-1} - I_F)T^{-1} \\ &= (\sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}S)^n - I_F)T^{-1} = (\sum_{n=1}^{\infty}(-T^{-1}S)^n)T^{-1}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

D'où :

$$||f(T+S) - f(T)|| \leq ||T^{-1}|| \sum_{n=1}^{\infty} ||T^{-1}S||^n \leq ||T^{-1}||^2 ||S|| \sum_{n=0}^{\infty} ||T^{-1}S||^n = \frac{||T^{-1}||^2}{1 - ||T^{-1}|| \, ||S||} ||S|| \underset{||S|| \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.37}$$

∎

3 Ensemble résolvant, spectre et spectre ponctuel

3.1 Motivation

On regarde ici le cas où $F = E$ et $T \in L(E)$ (endomorphisme borné), ce qui permettra de considérer le cas des opérateurs $T - \lambda I \in L(E)$ (car l'identité $I \in L(E,F)$ n'a de sens que si $E = F$) et ainsi de chercher les valeurs propres de T. On commence par regarder ce que devient la notion de valeur propre dans les espaces de dimension infinie.

Un premier but sera de savoir quand le problème "$(T - \lambda I)x = b$" est bien posé, i.e. quand l'opérateur $(T - \lambda I)$ est inversible dans $L(E)$, i.e. quand $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et est borné. On aura alors $||x||_E \le C||b||_E$ avec $C = ||(T - \lambda I)^{-1}|| < \infty$, et donc une petite perturbation de b (de l'ordre de ε) n'aura qu'une petite influence (de l'ordre de $C\varepsilon$) sur le résultat $x = (T - \lambda I)^{-1}b$.

Un second but est de chercher les valeurs propres de T (résolution de $(T - \lambda I)x = 0$ où $x = 0$ n'est pas l'unique solution), et de savoir si on peut former une base hilbertienne (une b.o.n.) de E de vecteurs propres (associés aux valeurs propres = fréquence fondamentales et fréquences harmoniques) dite base de Fourier. Ce sera le cas si T est un opérateur borné autoadjoint et compact.

3.2 Ensemble résolvant

Définition 3.1 On appelle ensemble résolvant de $T \in L(E)$ l'ensemble $\rho(T)$ des réels λ tels que $T - \lambda I$ soit inversible dans $L(E)$:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) \in L_i(E)\}, \tag{3.1}$$

i.e. :

$$\lambda \in \rho(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1: \ (T - \lambda I)^{-1} \text{ existe algébriquement, et} \\ 2: \ (T - \lambda I)^{-1} \text{ est borné (continu).} \end{cases} \tag{3.2}$$

Exercice 3.2 Base canonique $(\vec{e}_i)$ de ℓ^2, et $T \in L(\ell^2)$ donné par $T.\vec{e}_n = \lambda_n \vec{e}_n$ avec $\lambda_n = \frac{1}{n}$ pour tout n, noté $[T] = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ (opérateur "diagonal" de matrice généralisé la matrice diagonale des λ_i.

Montrer que $\rho(T) = \mathbb{R} - \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

Réponse. 1- On vérifie que T est bien un endomorphisme borné : $T(\ell^2) \subset \ell^2$, T linéaire, T borné : T est linéaire par définition, et $||T\vec{x}||_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n}x_n|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = ||\vec{x}||_{\ell^2} < \infty$ puisque (λ_n) est bornée par 1. (Donc $||T|| \le 1$, et $||T|| = 1$ car $T\vec{e}_1 = \vec{e}_1$.)

2- Calcul de $\rho(T)$. 21- Supposons que l'inverse $(T - \lambda I)^{-1} =^{\text{noté}} S_\lambda$ existe et calculons-le. Dans ce cas (calcul formel) $S_\lambda(T - \lambda I)(\vec{e}_n) = \vec{e}_n$ donne $S_\lambda(\frac{1}{n}\vec{e}_n - \lambda\vec{e}_n) = \vec{e}_n$ donc $(\frac{1}{n} - \lambda)S_\lambda(\vec{e}_n) = \vec{e}_n$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_\lambda \vec{e}_n = \mu_n \vec{e}_n, \qquad \mu_n = \frac{1}{\frac{1}{n} - \lambda}, \tag{3.3}$$

i.e. S_λ est l'opérateur de multiplication par la suite $(\mu_n = \frac{1}{\frac{1}{n} - \lambda})_{\mathbb{N}^*}$ qui existe si $\lambda \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$; et on vérifie immédiatement que $S_\lambda \circ (T - \lambda I) = I = (T - \lambda I) \circ S_\lambda$.

22- Cela n'a de sens que si $\lambda \ne \frac{1}{n}$. Et si $\lambda = \frac{1}{n}$ alors $T - \lambda I$ n'est pas injectif (car $(T - \lambda I).\vec{e}_n = 0$ avec $\vec{e}_n \ne \vec{0}$), donc non inversible. Donc S_λ existe ssi $\lambda \notin \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

23- Soit $\lambda \notin \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$. A-t-on S_λ borné ?

231- Supposons $||(\mu_n)||_\infty < \infty$: alors $||S_\lambda \vec{x}||_{\ell^2} = (\sum \mu_n^2 x_n^2)^{\frac{1}{2}} \le ||(\mu_n)||_\infty ||\vec{x}||_{\ell^2}$ et donc S_λ est borné avec $||S_n|| \le ||(\mu_n)||_\infty$. C'est le cas quand la suite $(\frac{1}{\frac{1}{n} - \lambda})$ est bornée, i.e. c'est le cas quand $\lambda \ne 0$. Donc $\rho(T) \supset \mathbb{R} - \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

232- Cas $\lambda = 0$, i.e. $S_0 = T^{-1}$, donc $\mu_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$: on a $||S_0\vec{e}_n||_{\ell^2} = ||n\vec{e}_n|| = n$, donc S_0 n'est pas borné sur la sphère unité : donc S_0 n'est pas borné. Donc $0 \notin \rho(T)$. Donc $\rho(T) = \mathbb{R} - \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$. ∎

Donc pour montrer que $\lambda \in \rho(T)$, il faut montrer que $(T - \lambda I)^{-1}$ existe, ce qu'on fera en général en le calculant (calcul algébrique), puis il faut montrer $(T - \lambda I)^{-1} : E \to E$ est borné.

Et donc pour $\lambda \in \rho(T)$ donné et pour $f \in E$ donné, le problème :

$$\text{trouver } x \in E \text{ tel que } (T - \lambda I)x = f \tag{3.4}$$

est bien posé : il existe une unique solution $x = (T - \lambda I)^{-1}f$ qui dépend continûment de f : on a $||x||_E \le ||(T - \lambda I)^{-1}|| \, ||f||_E$. D'où le nom d'ensemble résolvant donné à $\rho(T)$.

Exercice 3.3 Montrer à l'aide du théorème de Lax–Milgram : si T est borné et si $\lambda > ||T||$ alors $\lambda I - T$ est inversible dans $L(E)$: ici on suppose que E est un Hilbert de produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)_E$.

Réponse. Remarque : avec (2.33) on a $||T|| < \lambda$ implique $\frac{||T||}{\lambda} < 1$, donc $I - \frac{T}{\lambda} \in L_i(E)$, donc $\lambda I - T \in L_i(E)$. Mais ici on demande d'utiliser Lax–Milgram. Problème à résoudre pour $\lambda > ||T||$: pour $f \in E$, trouver $u \in E$ t.q. $(\lambda I - T)u = f$.

Formulation faible : pour tout $v \in E$, trouver $u \in E$ t.q. $((\lambda I - T)u, v)_E = (f, v)_E$. On pose $a(u, v) = ((\lambda I - T)u, v)_E$ et $\ell(v) = (f, v)_E$. La bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$ et la linéarité de ℓ sont triviales. La continuité de $a(\cdot,\cdot)$ et la continuité de ℓ sont triviales. Coercivité de $a(\cdot,\cdot)$: On cherche λ t.q. $((\lambda I - T)v, v)_E \ge \alpha||v||_E^2$. On a $((\lambda I - T)v, v)_E = \lambda||v||_E^2 - (Tv, v)_E$, avec $|(Tv, v)_E| \le ||T||\,||v||_E^2$: en effet $|(Tv, v)_E| \le ||Tv||_E||v||_E$ (Cauchy–Schwarz) $\le ||T||\,||v||_E||v||_E$ (définition de la norme de T). Donc $((\lambda I - T)v, v)_E \ge \lambda||v||_E^2 - ||T||\,||v||_E^2 = (\lambda - ||T||)||v||_E^2$, et $\alpha = \lambda - ||T||$ convient. Conclusion : le problème est bien posé : $(\lambda I - T)^{-1}$ existe (existence et unicité de la solution) et $(\lambda I - T)^{-1}$ est continu (bien posé). ▪

Exercice 3.4 On considère l'application résolvante $R_T : \left\{ \begin{array}{ll} \rho(T) & \to L(H) \\ \lambda & \to (T - \lambda I)^{-1} \end{array} \right\}$, avec H Hilbert. Montrer (identité de la résolvante), pour tout $\lambda_0, \lambda \in \rho(T)$:

$$R_T(\lambda) - R_T(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) R_T(\lambda) R_T(\lambda_0). \tag{3.5}$$

Réponse. $(T - \lambda I)^{-1} - (T - \lambda_0 I)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}(T - \lambda_0 I)^{-1}((T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I))$ car T commute avec lui-même et avec l'identité. ▪

Remarque 3.5 Pour la mécanique quantique, avec E Hilbert complexe, pour $T : E \to E$ linéaire (T est un opérateur) de domaine $D \subset E$, le spectre est

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I : D \to E \text{ bijectif et } (A - \lambda I)^{-1} : E \to D \text{ continu } \}.$$ ▪

Exercice 3.6 Soit $T_m : L^2(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$ l'opérateur de multiplication donné en (2.18). Calculer $\rho(T)$.

(Pour la suite.) Soit $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$. Montrer que (φ_n) est une famille orthogonale dans $L^2(]0,1[)$. Calculer $||T\varphi_n||_{L^2}$ et $\lim_{n\to\infty} ||T\varphi_n||_{L^2}$ (donc T n'est pas compact).

Réponse. Ici T est borné, avec $||T|| \le 1$, car $||Tf||_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2 f(x)^2\,dx \le \int_0^1 f(x)^2\,dx = ||f||_{L^2}^2$.

Si $\lambda \in \rho(T)$ alors, ayant $(T - \lambda I)(f) = (\varphi - \lambda)f$, l'inverse de $T - \lambda I$ est l'opérateur $S_\lambda : L^2 \to L^2$ donné par $S_\lambda : g \to \frac{g}{\varphi - \lambda}$. En effet $((T - \lambda I) \circ S_\lambda)(g) = (T - \lambda I)(S_\lambda(g)) = (T - \lambda I)(\frac{g}{\varphi-\lambda}) = (\varphi - \lambda)(\frac{g}{\varphi-\lambda}) = g$ de même que $(S_\lambda \circ (T - \lambda I))(g) = S_\lambda(\varphi g - \lambda g) = \frac{\varphi g - \lambda g}{\varphi - \lambda} = g$.

Si $\lambda \notin [0,1]$ alors $||S_\lambda f||_{L^2}^2 \le (\sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{(x-\lambda)^2}) \int_0^1 f^2(x)\,dx = (\sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{(x-\lambda)^2})||f||_{L^2}^2$, donc $S_\lambda : L^2(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$ est borné, donc $\mathbb{R} - [0,1] \subset \rho(T)$.

Sinon $\lambda \in [0,1]$, mais alors S_λ n'est pas défini sur $L^2(]0,1[)$ tout entier : prendre $g = 1_{]0,1[}$ qui est bien dans L^2 mais pour laquelle $S_\lambda g$ n'est pas dans L^2 (la fonction $\frac{1}{(x-\lambda)^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de λ). Donc $\rho(T) = \mathbb{R} - [0,1]$, donc $\sigma(T) = [0,1]$.

Remarque : dans ce cas $\lambda \in [0,1]$, le domaine de définition de S_λ est $D = \{g \in L^2(]0,1[) : \frac{1}{x-\lambda} g \in L^2(]0,1[)\}$, avec D dense dans $L^2(]0,1[)$: par exemple, pour $\lambda = 0$ (plus facile à écrire), si $g \in L^2(]0,1[)$, alors $h_n = 1_{[\frac{1}{n},1]} g \in D$, et $||g - h_n||_{L^2} \to 0$ (immédiat). (Faire le parallèle avec la remarque 2.16).

(Pour la suite : on a $\sin a \sin b = \frac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}$, donc $\int_0^1 \sin^2(\pi nx)\,dx = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 \sin(\pi nx)\sin(\pi mx)\,dx = 0$ pour $n \ne m$, donc $(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$ est un famille orthonormée. Et $T\varphi_n(x) = x\sqrt{2}\sin(\pi nx)$ donne $||T\varphi_n||_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2 \sin^2(\pi nx)\,dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi n} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{1}{6} \ne 0$, et donc T n'est pas compact, voir la suite.) ▪

Exercice 3.7 Soit $T_d : u \to iu'$ l'opérateur de dérivation donné en (2.19).

1- On considère $D_1 = \{u \in H^1(]0,1[) : u(0) = 1\}$ et $T_d : D_1 \to L^2(]0,1[)$. Montrer que $\rho(T_d) = \emptyset$.

2- On considère $D_0 = \{u \in H^1(]0,1[) : u(0) = 0\}$ et $T_d : D_0 \to L^2(]0,1[)$. Montrer que $\rho(T_d) = \mathbb{R}$.

Réponse. 1- Pour $T : D_1 \to L^2(]0,1[)$, considérons le problème : trouver $u_\lambda \in D_1$ t.q. $(T_d - \lambda I)u_\lambda = 0$, i.e., trouver $u_\lambda \in H^1(]0,1[)$ t.q. $iu_\lambda' - \lambda u_\lambda = 0$ et $u_\lambda(0) = 1$, i.e., $u_\lambda'(x) = -i\lambda u_\lambda(x)$ et $u_\lambda(0) = 1$: on obtient $u_\lambda(x) = e^{-i\lambda x}$. Donc $\mathrm{Ker}(T_d - \lambda I) \supset \mathrm{Vect}\{e^{-i\lambda x}\}$, donc $T_d - \lambda I$ n'est pas injectif, donc $T_d - \lambda I$ n'est pas bijectif. (Ici tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ sont valeurs propres de T_d.)

2- Cherchons un inverse $(T_d - \lambda I)^{-1} : L^2(]0,1[) \to D_0$ de l'opérateur $T_d - \lambda I : D_0 \to L^2(]0,1[)$. Donc, pour $f \in L^2(]0,1[)$ cherchons $u \in D_0$ t.q. $iu' - \lambda u = f$. Solution homogène $u_h(x) = e^{-i\lambda x}$. Solution particulière $u_p(x) = c(x)e^{-i\lambda x}$, donc t.q. $ic'(x)e^{-i\lambda x} = f(x)$, donc $c'(x) = -if(x)e^{i\lambda x}$, donc $c(x) = -i\int_0^x f(y)e^{i\lambda y}\,dy$ (à une constante près), donc $u_p(x) = -ie^{-i\lambda x}\int_0^x f(y)e^{i\lambda y}\,dy$. Donc solution générale $u(x) = ce^{-i\lambda x} + u_p(x)$, avec $u(0) = 0$, donc $c = 0$, donc $u(x) = u_p(x)$. Donc $(T_d - \lambda I)^{-1} : L^2(]0,1[) \to D_0$ est bien défini. Montrons que $(T_d - \lambda I)^{-1}$ est borné. On a $|u_p(x)| \le \int_0^x |f(y)|\,dy \le \int_0^1 |f(y)|\,dy = (1, |f|)_{L^2} \le ||1||_{L^2}||f||_{L^2} = ||f||_{L^2}$, et $u_p'(x) = -i(-i\lambda)e^{-i\lambda x}\int_0^x f(y)e^{i\lambda y}\,dy - ie^{-i\lambda x}f(x)e^{i\lambda x} = (-i\lambda)u_p(x) - if(x)$, donc $||u_p||_{L^2} = ||f||_{L^2}$, et $||u_p'||_{L^2} \le |\lambda|\,||u_p||_{L^2} + ||f||_{L^2} \le 2||f||_{L^2}$, donc $||u_p||_{H^1}^2 = 5||f||_{L^2}^2$, donc $||(T_d - \lambda I)^{-1}(f)||_{H^1} = ||u_p||_{H^1} \le \sqrt{5}||f||_{L^2}$. Donc $(T - \lambda I)^{-1}$ est borné, donc $\rho(T) = \mathbb{R}$. ▪

3.3 Spectre et spectre ponctuel

Définition 3.8 On appelle spectre de $T \in L(E)$ l'ensemble $\sigma(T)$ des scalaires λ tels que $T - \lambda I$ ne soit pas inversible dans $L(E)$:

$$\sigma(T) = \mathbb{R} - \rho(T), \tag{3.6}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(T) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{soit } (T-\lambda I)^{-1} \text{ n'existe pas,} \\ \text{soit } (T-\lambda I)^{-1} \text{ existe mais } ||(T-\lambda I)^{-1}|| = \infty. \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad T - \lambda I \notin L_i(E) \quad \Longleftrightarrow \quad (T-\lambda I)^{-1} \text{ n'existe pas dans } L(E). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Exemple 3.9 Suit de l'exercice 3.2 : $\sigma(T) = \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = \{0\} \bigcup (\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$. ▟

Définition 3.10 On appelle spectre ponctuel de $T \in L(E)$ l'ensemble :

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists v \neq 0,\ T(v) = \lambda v\} = \{\lambda \text{ valeur propre de } T\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Donc $\lambda \in \sigma_p(T)$ ssi $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ alors λ est appelé valeur propre, $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé, et un vecteur $v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I) - \{0\}$ est un vecteur propre associée à λ (également appelé fonction propre associée si E est un espace vectoriel de fonctions).

Exemple 3.11 Suite de l'exemple 3.2 : $\sigma_p(T) = \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = (\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ (on a $T.\vec{e}_n = \lambda_n \vec{e}_n$). ▟

Remarque 3.12 Rappel : en dimension finie, on a $\sigma(T) = \sigma_p(T)$: un endomorphisme $T \in L(\mathbb{R}^n)$ est toujours borné (continu), voir exercice 2.10, et est bijectif lorsqu'il est injectif, voir exercice 2.34.

Mais c'est faux en dimension finie : suite de l'exemple 3.2 : T est borné (de matrice généralisée $\mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...)$) est inversible d'inverse T^{-1} non borné (de matrice généralisée $\mathrm{diag}(1, 2, ..., n, ...)$). ▟

Proposition 3.13 *Pour $T \in L(E)$:*
1- l'ensemble résolvant $\rho(T)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$,
2- $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$,
3- le spectre $\sigma(T)$ est compact dans $\mathbb{R}$, et $\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$.

Preuve. 1- $\rho(T)$ est ouvert est un corollaire du corollaire 2.40.

2- Et si $\lambda \in \sigma_p(T)$ alors $T - \lambda I$ n'est pas injectif car $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, donc n'est pas bijectif, donc $\lambda \notin \rho(T)$, donc $\lambda \in \sigma(T)$.

3- Et le complémentaire d'un ouvert étant un fermé, $\sigma(T)$ est fermé. De plus $\sigma(T)$ est borné, étant inclus dans $[-||T||, +||T||]$, puisque pour λ en dehors de cet intervalle, on a $||\frac{1}{\lambda}T|| < 1$, donc $I - \frac{1}{\lambda}T$ est inversible, cf. (2.33). Donc $\sigma(T)$ est borné, donc, étant fermé, est compact dans $\mathbb{R}$. ▟

Remarque 3.14 $||T||$ peut être ou non dans $\sigma(T)$, voir (3.12) et exercice 3.17. ▟

Exercice 3.15 Soit $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'opérateur (l'application linéaire) T de multiplication par une suite $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ bornée : montrer que $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$. ▟

Exercice 3.16 Soit T l'opérateur de $L^2(]0,1[)$ de multiplication par la fonction identité $\varphi : x \to \varphi(x) = x$:

$$\begin{aligned} T : L^2(]0,1[) &\longrightarrow L^2(]0,1[) \\ f &\longrightarrow Tf = f\varphi, \quad \text{noté} \quad Tf = xf, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où donc, pour tout $x \in]0,1[$, on a $(Tf)(x) = xf(x)$.

Montrer que $\sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = [0,1]$: il n'y a pas de valeurs propres alors que le spectre est un intervalle fermé non vide.

(Pour la suite.) Soit $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$. Montrer que (φ_n) est une famille orthogonale dans $L^2(]0,1[)$. Calculer $||T\varphi_n||_{L^2}$ et $\lim_{n\to\infty} ||T\varphi_n||_{L^2}$ (donc T n'est pas compact).

Réponse. Pour $f \in L^2(]0,1[)$, Tf est la fonction donnée par $Tf(x) = xf(x)$ pour presque tout $x \in]0,1[$. L'opérateur T est linéaire car $\varphi(f + \lambda g) = \varphi f + \lambda \varphi g$ pour tout $f, g \in L^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
1- T est borné, avec $||T|| \leq 1$, car $||Tf||^2_{L^2} = \int_0^1 x^2 f(x)^2\,dx \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx = ||f||^2_{L^2}$.
2- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $Tf = \lambda f$, i.e. si $\varphi f = \lambda f$, i.e. si pour tout $x \in [0,1]$ on a $x\,f(x) = \lambda f(x)$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \lambda$, donc $f = 0$ presque partout, donc $f = 0$ dans L^2 : il n'existe pas de valeur propre, i.e. $\sigma_p(T) = \emptyset$.

3- Si $\lambda \in \rho(T)$ alors, ayant $(T-\lambda I)(f) = (\varphi-\lambda)f$, l'inverse de $T-\lambda I$ est l'opérateur $S_\lambda : L^2 \to L^2$ donné par $S_\lambda : g \to \frac{g}{\varphi-\lambda}$. En effet $((T-\lambda I)\circ S_\lambda)(g) = (T-\lambda I)(S_\lambda(g)) = (T-\lambda I)(\frac{g}{\varphi-\lambda}) = (\varphi-\lambda)(\frac{g}{\varphi-\lambda}) = g$ de même que $(S_\lambda \circ (T-\lambda I))(g) = S_\lambda(\varphi g - \lambda g) = \frac{\varphi g-\lambda g}{\varphi-\lambda} = g$.

Si $\lambda \notin [0,1]$ alors cet inverse est bien défini de $L^2(]0,1[)$ à valeurs dans $L^2(]0,1[)$ car pour $f \in L^2(]0,1[)$ on a $||S_\lambda f||_{L^2}^2 \le (\sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{(x-\lambda)^2}) \int_0^1 f^2(x)\,dx = (\sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{(x-\lambda)^2})||f||_{L^2}^2$.

Sinon $\lambda \in [0,1]$, mais alors S_λ n'est pas défini sur $L^2(]0,1[)$ tout entier : prendre $g = 1_{]0,1[}$ qui est bien dans L^2 mais pour laquelle $S_\lambda g$ n'est pas dans L^2 (la fonction $\frac{1}{(x-\lambda)^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de λ). Donc $\rho(T) = \mathbb{R} - [0,1]$, donc $\sigma(T) = [0,1]$.

Puis $\sin a \sin b = \frac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}$ donne $\int_0^1 \sin^2(\pi n x)\,dx = \frac12$ et $\int_0^1 \sin(\pi n x)\sin(\pi m x)\,dx = 0$ pour $n \ne m$ donne $(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$ famille orthonormée. $T\varphi_n(x) = x\sqrt{2}\sin(\pi n x)$ donne $||T\varphi_n||_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2 \sin^2(\pi n x)\,dx = \frac16 - \frac{1}{2\pi n} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac16 \ne 0$.

Remarque : on peut se demander si, dans le cas $\lambda \in [0,1]$, l'opérateur S est borné sur son domaine de définition D : prenons le cas $\lambda = 0$ pour simplifier l'écriture (les autres cas sont laissés en exercice). Alors $D = \{g \in L^2(]0,1[) : \frac1x g \in L^2(]0,1[)\}$, et $T : D \to L^2(]0,1[)$ donné par $Tf = xf$ est bijectif d'inverse $S : L^2(]0,1[) \to D$ donné par $Sg = \frac1x g$: on a bien $TS = I$ et $ST = I$ (algébriquement).

Mais S n'est pas borné sur D. En effet prendre $g_n = 1_{[\frac1n,1]}$, faire le dessin.

On a $g_n \in D$ car $||g_n||_{L^2}^2 = \int_{\frac1n}^1 dx \le 1 < \infty$, et $||\frac{g_n}{x}||_{L^2}^2 = \int_{\frac1n}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = [-\frac1x]_{\frac1n}^1 = n-1 < \infty$.

Donc $||Sg_n||_{L^2} = ||\frac{g_n}{x}||_{L^2}^2 \to \infty$ alors que $||g_n||_{L^2}^2 \le 1$. Donc S est non borné.

Et on peut noter que D est dense dans $L^2(]0,1[)$: si $g \in L^2(]0,1[)$, alors $h_n = 1_{[\frac1n,1]}g \in D$, et $||g-h_n||_{L^2} \to 0$ (immédiat). (Faire le parallèle avec la remarque 2.16). ▪

3.4 Propriété : spectre et diagonale de T

Pour $T \in L(H)$, soit $S_H(0,1) = \{x \in H : ||x||_H = 1\} =^{\text{noté}} S$ (la sphère unité), et soit

$$m_T = \inf_{x\in S}(Tx,x)_H, \quad M_T = \sup_{x\in S}(Tx,x)_H. \tag{3.10}$$

Exercice 3.17 Dans $\mathbb{R}^2$, cas 1- $[T] = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, cas 2- $[T] = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Calculer M, m, $||T||$, $\sigma(T)$.

Réponse. 1- $m = -2$, $M = 1$, $||T|| = 2$, $\sigma(T) = \{1,2\}$, immédiat.

2- $\vec{x} = (\cos\theta, \sin\theta)$ donne $T\vec{x} = (\sin\theta, 0)$ donc $||T\vec{x}||_{\mathbb{R}^2} = |\sin\theta|$, donc $||T|| = 1$. Et $(T\vec{x},\vec{x})_{\mathbb{R}^2} = \cos\theta\sin\theta = \frac12\sin(2\theta)$, d'où $m = -\frac12$ et $M = \frac12$. Et 0 est vp double, $\sigma(T) = \{0\}$. ▪

Lemme 3.18 *$m_{-T} = -M_T$ et $M_{-T} = -m_T$. Et*

$$|m_T| \le ||T|| \quad \text{et} \quad |M_T| \le ||T||. \tag{3.11}$$

Preuve. Pour tout $x \in S$, $m_{-T} \le (-Tx,x)_H \le M_{-T}$ donne $-m_{-T} \ge (Tx,x)_H \ge -M_{-T}$; et $\exists (x_n)_{\mathbb{N}}$ dans S t.q. $m_{-T} = \lim_{n\to\infty}(-Tx_n,x_n)_H = -\lim_{n\to\infty}(Tx_n,x_n)_H$, donc t.q. $-m_{-T} = \lim_{n\to\infty}(Tx_n,x_n)_H \le M_T$, et $\exists (y_n)_{\mathbb{N}}$ dans S t.q. $M_T = \lim_{n\to\infty}(Ty_n,y_n)_H = -\lim_{n\to\infty}(-Ty_n,y_n)_H$, donc $-M_T = \lim_{n\to\infty}(-Ty_n,y_n)_H \ge m_{-T}$, donc $M_T \le -m_{-T}$; donc $m_{-T} = -M_T$; donc $m_T = -M_{-T}$ (dessin). Puis Cauchy–Schwarz : $|M_T| = \lim_{n\to\infty}|(Tx_n,x_n)_H| \le \lim_{n\to\infty}||Tx_n||_H||x_n||_H \le \lim_{n\to\infty}||T||\,||x_n||_H^2 = ||T||$, donc $|M_T| \le ||T||$; idem $|M_{-T}| \le ||T||$, donc $|m_T| \le ||T||$. ▪

Proposition 3.19 *Soit $T \in L(H)$. On a :*

$$\sigma(T) \subset [m,M], \quad \text{i.e.} \quad \rho(T) \supset \mathbb{R} - [m,M]. \tag{3.12}$$

Donc si $\lambda \notin [m,M]$ alors $\lambda I - T \in L_i(H)$, i.e. $I - \frac{T}{\lambda} \in L_i(H)$ (pour λ "assez grand" $\frac{T}{\lambda}$, est une "petite perturbation" de I au sens où le caractère inversible de I est conservé dans $L_i(H)$).

Preuve. (Application du théorème de Lax–Milgram.) Soit $\lambda > M$. Montrons $\lambda \in \rho(T)$. Construisons de $(\lambda I - T)^{-1}$. Pour $f \in H$, connaître $x = (\lambda I-T)^{-1}f$ c'est résoudre "trouver $x \in H$ t.q. $(\lambda I-T)x = f$, i.e.

$$\begin{cases} \text{trouver } x \in H \text{ t.q.}, \forall y \in H, \\ a(x,y) = (f,y)_H, \quad \text{où} \quad a(x,y) = ((\lambda I-T)x,y)_H. \end{cases} \tag{3.13}$$

$a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire (immédiat), continue avec $||a|| \le \lambda + ||T||$ (immédiat), et $((\lambda I-T)x,x)_H \ge (\lambda - M_T)||x||_H^2$, d'où $a(\cdot,\cdot)$ est α-coercitive avec $\alpha = \lambda - M_T > 0$. Et la fonction $\ell : y \in H \to \ell(y) = (f,y)_H \in \mathbb{R}$ est linéaire et continue sur H, avec $||\ell|| \le ||f||_H$ (immédiat). Donc (3.13) est bien posé (Lax–Milgram) : $\exists ! x =$

$x(f) =^{\text{noté}} (\lambda I{-}T)^{-1}(x) \in H$ (existence de l'opérateur $(\lambda I{-}T)^{-1}$) t.q. $||x(f)||_H \le \frac{1}{\alpha}||f||_H$, donc l'opérateur $(\lambda I{-}T)^{-1}$ est borné : $||(\lambda I{-}T)^{-1}|| \le \frac{1}{\alpha}$. Donc $\lambda \in \rho(T)$, donc $]M,\infty[\subset \rho(T)$.

Pour $\lambda < m$, soit $S = -T$: on a $-m_T = M_S$ cf. lemme 3.18, et le problème $((-\lambda)I - S)u = -f$ est bien posé pour $(-\lambda) > M_S = -m_T$, cf. calcul précédent, donc pour $\lambda < m_T$. ∎

Exercice 3.20 Soit $B = \{x \in H : ||x||_H \le 1\}$ boule unité. Dans la prop 3.19 que se passe-t-il si on remplace m par $\inf_B (Tx,x)_H$ et M par $\sup_B (Tx,x)_H$?

Réponse. 1- Si $T \ge 0$ alors $M \ge 0$ et $\sup_{||x||_H \le 1}(Tx,x)_H = \sup_{||x||_H=1}(Tx,x)_H = M$, rien de changé pour M. Et $\inf_{||x||_H\le 1}(Tx,x)_H = 0 \le m$, donc le résultat reste vrai mais est moins précis.

2- Idem si $T \le 0$ (considérer $-T$).

3- Sinon on a $m = \inf_{||x||_H=1}(Tx,x)_H$ et $M = \sup_{||x||_H=1}(Tx,x)_H$, donc rien de changé. ∎

3.5 Spectre d'un opérateur borné autoadjoint

On reprend (3.10) : $S = \{x \in H : ||x||_H = 1\}$, $m = \inf_S (Tx,x)_H$, et $M = \sup_S (Tx,x)_H$.

Proposition 3.21 *Si $T \in L(H)$ est autoadjoint alors :*

$$||T|| = \sup_{x\in S} |(Tx,x)_H| \quad (= \max(|m|,|M|), \tag{3.14}$$

et on dit que le sup est obtenu "sur la diagonale" (quand T est autoadjoint).

Si de plus T est positif, alors la forme (trivialement) bilinéaire $(\cdot,\cdot)_T : (x,y) \to (x,y)_T = (Tx,y)_H$ est un semi produit scalaire (c'est un produit scalaire si T autoadjoint est défini positif). Et :

$$\forall x \in H, \quad ||Tx||_H \le \sqrt{||T||}\sqrt{|(Tx,x)_H|}. \tag{3.15}$$

Preuve. On a toujours $||T|| \stackrel{(2.16)}{=} \sup\limits_{x,y\in S} |(Tx,y)_H| \ge \sup\limits_{x\in S} |(Tx,x)_H|$ (trivial). Réciproquement : on a $(T(x{+}y),x{+}y)_H - (T(x{-}y),x{-}y)_H = (Tx,x)_H + (Tx,y)_H + (Ty,x)_H + (Ty,y)_H - (Tx,x)_H + (Tx,y)_H + (Ty,x)_H - (Ty,y)_H$, d'où si $T^* = T$ alors

$$4|(Tx,y)_H| = |((T(x{+}y),x{+}y)_H - (T(x{-}y),x{-}y)_H)|$$

D'où, pour $x,y \in S$, $x{+}y \ne 0$ et $x{-}y \ne 0$ (cas $x{+}y = 0$ et $x{-}y = 0$ immédiats car alors $y = \pm x$),

$$\begin{aligned}4|(Tx,y)_H| &\le ||x{+}y||_H^2 |(T\frac{x{+}y}{||x{+}y||_H}, \frac{x{+}y}{||x{+}y||_H})| + ||x{-}y||_H^2 |(T\frac{x{-}y}{||x{-}y||_H}, \frac{x{-}y}{||x{-}y||_H})| \\ &\le c(||x{+}y||_H^2 + ||x{-}y||_H^2) = c(2||x||_H^2 + 2||y||_H^2) = 4c, \quad \text{où} \quad c = \sup_{||z||_H\le 1} |(Tz,z)_H|.\end{aligned}$$

D'où $|(Tx,y)_H| \le c = \sup_{z\in S} |(Tz,z)_H|$ pour $x,y \in S$. D'où $\sup\limits_{x,y\in S} |(Tx,y)_H| \le \sup\limits_{x\in S} |(Tx,x)_H|$, d'où (3.14).

Si $T = T^*$ et $T \ge 0$ alors la forme bilinéaire $(x,y)_T = (Tx,y)$ est symétrique positive, et on peut appliquer Cauchy–Schwarz : pour tout $x,y \in H$, on a $|(x,y)_T| \le \sqrt{(x,x)_T}\sqrt{(y,y)_T}$, donc

$$|(Tx,y)_H| \le \sqrt{(Tx,x)_H}\sqrt{(Ty,y)_H} \le \sqrt{(Tx,x)_H}\sqrt{||T||_H\,||y||_H^2}.$$

Si $Tx \ne 0$ alors $y = \frac{Tx}{||Tx||_H}$ donne $||Tx||_H \le \sqrt{(Tx,x)_H}\sqrt{||T||_H}$, inégalité encore vraie pour $Tx = 0$. ∎

Proposition 3.22 *Soit $T \in L(H)$ (opérateur borné) autoadjoint ($T = T^*$).*

1. *Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux : si $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$,*

$$\lambda_1 \ne \lambda_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(T - \lambda_1 I) \perp \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 I). \tag{3.16}$$

   De plus si T est positif, ses valeurs propres éventuelles sont positives.

2. *Si H est séparable, alors le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ est au plus dénombrable : il y a un nombre au plus dénombrable de valeurs propres. (Mais on ne peut rien dire sur le spectre continu.)*

3. *$m, M \in \sigma(T)$, et plus précisément :*

   1- Avec (3.14), si le sup $M = \sup_S(Tx,x)_H$ est atteint alors M est valeur propre, i.e. $M \in \sigma_p(T)$:

$$\text{si } \exists x_{\sup} \in S \text{ t.q. } M = (Tx_{\sup}, x_{\sup})_H \text{ alors } Tx_{\sup} = Mx_{\sup}. \tag{3.17}$$

   (En particulier si T autoadjoint est ≥ 0 alors $M = ||T||$, et si $||T||$ est atteint alors $||T||$ est valeur propre.) Idem : si l'inf $m = \inf_S(Tx,x)_H$ est atteint alors m est valeur propre.

   2- Si le sup M n'est pas atteint, alors $M \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$ (l'application linéaire $(T-MI)^{-1} : \mathrm{Im}T \to H$ existe mais n'est pas continue). Idem, si l'inf n'est pas atteint alors $m \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$.

   En particulier si $||T||$ n'est pas atteint alors $||T|| \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$.

4. *Si $\sigma(T) \subset \{0\}$ (i.e. $\sigma(T)$ est vide ou réduit à 0), alors $T = 0$.*

Preuve. On écarte le cas trivial $T = 0$.

1. T est autoadjoint donc $(Tx_1, x_2)_H = (x_1, Tx_2)_H$ pour tout $x_1, x_2 \in H$. D'où, si $Tx_1 = \lambda_1 x_1$ et $Tx_2 = \lambda_2 x_2$ alors $\lambda_1(x_1,x_2)_H = \lambda_2(x_1,x_2)_H$. D'où si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $(x_1,x_2)_H = 0$, i.e. $x_1 \perp_H x_2$. Et si T est positif alors $0 \leq (Tx_1,x_1)_H = \lambda_1 ||x_1||_H^2$ d'où $\lambda_1 \geq 0$.
2. H étant séparable est de dimension au plus dénombrable. Et les vecteurs propres étant orthogonaux (théorème précédent), quitte à les normer, on applique le théorème 1.18 : prenant un vecteur propre $\vec{v}_i$ pour chaque valeur propre λ_i, les $\vec{v}_i$ étant 2 à 2 orthogonaux forment une famille libre donc au plus dénombrable, d'où les λ_i forment une famille au plus dénombrable.
3. 1-a- Cas T positif, i.e., $(Tx,x)_H \geq 0$ pour tout $x \neq 0$. Si le sup est atteint alors (3.14) donne : $\exists x_{\sup} \in S$ t.q. $M = ||T|| = (Tx_{\sup}, x_{\sup})_H > 0$. Donc $Tx_{\sup} \neq 0$ et Cauchy–Schwarz donnent, avec $||x_{\sup}||_H = 1$:

$$\text{si} \quad Tx_{\sup} \nparallel x_{\sup} \quad \text{alors} \quad ||T|| = (Tx_{\sup}, x_{\sup})_H < ||Tx_{\sup}||_H \, ||x_{\sup}||_H \leq ||T|| \, ||x_{\sup}||_H \, ||x_{\sup}||_H = ||T||,$$

   donc $||T|| < ||T||$, absurde. Donc $Tx_{\sup} \parallel x_{\sup}$ ($\neq 0$), donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $Tx_{\sup} = \lambda x_{\sup}$, donc λ est valeur propre de T associé au vecteur propre $x_{\sup}$. Et $M = (Tx_{\sup}, x_{\sup})_H = (\lambda x_{\sup}, x_{\sup})_H = \lambda$.

   1-b- Cas général (T non nécessairement positif). On pose $U = T + ||T||I$. Trivialement U et T ont les mêmes vecteurs propres : $T\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (T + ||T||I)\vec{x} = (\lambda + ||T||)\vec{x}$. Et U est autoadjoint (car T et I le sont). Et U est positif car $(Ux,x|)_H = (Tx + ||T||x, x|)_H = (Tx,x|)_H + ||T||(x,x|)_H \geq^{(3.14)} -||T|| \, ||x||_H^2 + ||T|| \, ||x||_H^2 \geq 0$ pour tout x. Et si $||U||$ est atteint, alors $\mu = ||U||$ est valeur propre, donc $\lambda = \mu - ||T||$ est valeur propre de $T = U - ||T||I$.

   1-c- Idem pour $m = \inf(Tx,x)_H$ en considérant $-T$ au lieu de T.

   2- Cas $T \geq 0$ (autres cas en exercices). M n'est pas atteint : $\nexists x \in S$ t.q. $M = (Tx,x)_H$, mais $\exists (x_n)_{\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ t.q. $(Tx_n,x_n)_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M = M||x_n||_H^2 = M(x_n,x_n)_H = (Mx_n,x_n)_H$ (définition de M), donc

$$((MI{-}T)x_n, x_n)_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.18}$$

   Si M est valeur propre alors $\exists x \in S$ t.q. $Tx = Mx$, donc $(Tx,x)_H = M$: faux ici. Donc $M \notin \sigma_p(T)$ (n'est pas valeur propre). Supposons $M \in \rho(T)$, i.e. $MI - T$ inversible d'inverse borné : $C := ||(MI{-}T)^{-1}|| < \infty$. Comme $x_n \in S$ et $x_n = (MI{-}T)^{-1}(MI{-}T)x_n$, on a

$$\begin{aligned} 1 = ||x_n||_H &\leq ||(MI{-}T)^{-1}|| \, ||(MI{-}T)x_n||_H = C||(MI{-}T)x_n||_H \\ &\overset{(3.15)}{\leq} C\sqrt{||MI{-}T||}\sqrt{(MI{-}T)x_n,x_n)_H} \underset{n\to\infty}{\overset{(3.18)}{\longrightarrow}} 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

   Et $1 \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ est absurde. Donc $M \notin \rho(T)$. Donc $M \in \sigma(T)$.
4. Donc $\{m, M\} \subset \sigma(T)$, donc si $\sigma(T) \subset \{0\}$ alors $m = M = 0$, donc $||T|| = 0$ cf. (3.14), donc $T = 0$. ▪

Exemple 3.23 Si $T \in L(\ell^2)$ est l'opérateur diagonal de matrice $\mathrm{diag}((\lambda_n)_{\mathbb{N}^*})$, dans la base canonique, avec $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ suite positive décroissante vers 0, alors $m = 0$ appartient à $\sigma(T)$ et $m \notin \sigma_p(T)$. ▪

Exercice 3.24 Suite de l'exercice 3.16. Calculer $||T||$. Ici $||T||$ n'est pas atteint.

Réponse. $T : f \in L^2(]0,1[) \to Tf = xf \in L^2(]0,1[)$, cf. (3.9)). T est autoadjoint : $(Tf,g)_{L^2} = \int_0^1 xf(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)xg(x)\,dx = (f,Tg)_{L^2}$ donne $T = T^*$. Et $(Tf,f)_{L^2} = \int_0^1 xf(x)^2\,dx \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx \leq ||f||_{L^2}^2$, d'où $||T|| \leq 1$, cf. (3.14). Soit $f_n = \sqrt{n}1_{]1-\frac{1}{n},1[}$; on a $||f_n||_{L^2}^2 = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 n\,dx = 1$, et $||T|| \geq (Tf_n,f_n)_{L^2} = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 xn\,dx \geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-\frac{1}{n})n\,dx = (1-\frac{1}{n})n\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$; D'où $||T|| \geq 1$. D'où $||T|| = 1$. Et $||T|| = 1$ n'est pas atteint car T n'a pas de valeur propre. Vérification : $Tf = f$ donnerait $(Tf,f)_{L^2} = ||f||_{L^2}^2$ avec $(Tf,f)_{L^2} = \int_0^1 xf(x)^2\,dx$, donc $\int_0^1 (x-1)f(x)^2\,dx = 0$, donc $f = 0$ p.p., donc $f = 0$ dans $L^2(]0,1[)$, impossible pour un vecteur propre. ▪

4 Opérateurs compacts

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et $T \in L(H;H)$. On souhaite savoir s'il y a des opérateurs "simples" qui se comportent comme les opérateurs dans $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ ("diagonalisable").

On va voir que oui ... : dès que $T : H \to H$ est un opérateur borné autoadjoint compact qui n'a pas 0 pour valeur propre. Applications aux opérateurs de type Laplacien.

4.1 Compacité : rappels

Voir le cours de topologie de 3ème année pour les détails sur les compacts. On rappelle que la compacité permet d'avoir de nombreux théorèmes d'existence.

4.1.1 Rappels : topologie

Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E, et un ensemble de sous-ensembles $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$.

Définition 4.1 (Topologie) *$\mathcal{O}$ est une topologie sur E ssi :*
O_1 : $E \in \mathcal{O}$ et $\emptyset \in \mathcal{O}$.
O_2 : Stabilité par intersection ***finie*** *: pour tout J ensemble fini, pour toute famille $(U_i)_{i\in J}$ où $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in J$, on a $(\bigcap_{i\in J} U_i) \in \mathcal{O}$.*
O_3 : Stabilité par union quelconque : pour tout ensemble I (quelconque), pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ où $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$, on a $(\bigcup_{i\in I} U_i) \in \mathcal{O}$.
$(E, \mathcal{O})$ est alors un espace topologique, et les éléments de $\mathcal{O}$ sont les ouverts de E (relatifs à $\mathcal{O}$).

Exemple de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts : O_2 "intersection finie" s'impose : les intervalles $U_n =]0, 1 + \frac{1}{n}[$ sont ouverts, mais leur intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n =]0, 1]$ n'est pas ouvert.

Définition 4.2 (Topologie induite) *Si $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et si $F \subset E$, alors la topologie dans F induite par E est la topologie $\mathcal{F} = \mathcal{O} \cap F = \{U \cap F : U \in \mathcal{O}\}$.*

(On vérifie immédiatement que $\mathcal{F}$ est une topologie dans F.) (Exemple : dans $E = \mathbb{R}$ usuel, $F = [a, b] \subset \mathbb{R}$ est considéré muni de la topologie induite.)

Définition 4.3 (Topologie séparée) *Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est séparé ssi*
O_4 : si $x, y \in E$ et $x \neq y$ alors il existe deux ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Définition 4.4 (Métrique) *Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance ssi :*
M_1 : $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ (séparation),
M_2 : symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$,
M_3 : inégalité triangulaire : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in E$.
Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d(\cdot, \cdot)$ est une distance sur E. Et alors une boule (ouverte) $B(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}, \tag{4.1}$$

et boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$.

(Un espace métrique est séparé, et l'ensemble des boules ouvertes engendrent la topologie métrique.)

Eg., la distance usuelle dans $\mathbb{R}$ est donnée par $d(x, y) = |y - x|$.

Définition 4.5 (Suite convergente) *Soit $(E, d(\cdot, \cdot))$ un espace métrique. Une suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans E est convergente (dans E) ssi*

$$\exists \ell \in E,\ d(x_n, \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.2}$$

i.e. $\exists \ell \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $d(x_n, \ell) < \varepsilon$. Et ℓ est alors appelée la limite de la suite (x_n).

Définition 4.6 (Suite de Cauchy) *Soit $(E, d(\cdot, \cdot))$ un espace métrique. Une suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans E est de Cauchy ssi*

$$d(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.3}$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$, $\forall n, m \geq N_\varepsilon$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Une suite convergente est toujours de Cauchy car $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_m)$, mais une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente : Eg. dans $\mathbb{Q}$ prendre une suite de Cauchy qui "converge dans $\mathbb{R}$" vers π ($\notin \mathbb{Q}$).

Définition 4.7 Un espace métrique $(E, d(\cdot, \cdot))$ est complet ssi toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

Eg., $\mathbb{R}$ usuel est complet (et $\mathbb{Q}$ usuel n'est pas complet).

4.1.2 Compacité de Borel et Lebesgue

Définition 4.8 (Borel–Lebesgue) *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique séparé et $K\subset E$. K est compact dans E ssi quelque soit le recouvrement $\bigcup_{i\in I}U_i\supset K$ de K par des ouverts $U_i\subset E$, où I est un ensemble quelconque, il existe un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i\in J}U_i\supset K$ où $J\subset I$ est de cardinal fini.*

Exercice 4.9 Soit $\mathbb{R}$ muni de sa topologie $\mathcal{O}$ usuelle. Montrer : 1- $E=\mathbb{R}$ n'est pas compact, 2- $]0,1[$ n'est pas compact, 3- $E=[a,b]$ est compact pour tout $a,b\in\mathbb{R}$.

Réponse. 1- $\mathbb{R}\subset\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k,k{+}1[$, et il n'y a pas de sous-recouvrement fini (un recouvrement fini est borné).

2- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n},1[=]0,1[$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n},1[\supset]0,1[$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n},1[$ recouvre $]0,1[$, mais il n'existe pas de sous recouvrement fini qui recouvre $]0,1[$ (qui serait alors inclus dans un $]\frac{1}{N+1},1[$: faux).

3- Si $b<a$ alors $[a,b]=\emptyset$ est contenu dans tout ensemble. Si $a=b$ alors $[a,a]\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ implique $a\in\bigcup_{i\in I}U_i$, donc $\exists i_0\in I$ t.q. $a\in U_{i_0}$, donc $\{a\}=[a,a]\subset U_{i_0}$. Si $a<b$, soit $A\stackrel{\text{déf}}{=}\{x\in[a,b] : [a,x]$ a un recouvrement fini$\}$. A est non vide car $a\in A$. Soit $c=\sup(x\in A)$. Il s'agit de montrer que $c{=}b$. Comme $[a,b]\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ et $c\in[a,b]$, il existe $k\in I$ ouvert tel que $c\in U_k$. Comme U_k est ouvert il existe $\eta>0$ tel que $U_k\supset]c-\eta,c+\eta[$. Et $[a,c-\frac{\eta}{2}]$ a un sous recouvrement fini $\bigcup_{i\in J}U_i$ par définition de c. Donc $[a,c+\frac{\eta}{2}]\subset\Big(U_k\cup(\bigcup_{i\in J}U_i)\Big)$, et donc $[a,c+\frac{\eta}{2}]$ a un sous recouvrement fini. C'est absurde si $c<b$ par définition de c. D'où $c=b$. ▪

4.1.3 Compacité de Bolzano et Weierstrass

Définition 4.10 (Bolzano–Weierstrass) *Soit $(E,d(\cdot,\cdot))$ un espace métrique. K est compact dans E ssi :*

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in K^{\mathbb{N}^*}$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ convergente dans K, i.e. :

$$\forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in K^{\mathbb{N}^*},\ \exists x\in K,\ \exists n:\left\{\begin{array}{ll}\mathbb{N}^* & \to\mathbb{N}^*\\ k & \to n(k)\stackrel{\text{noté}}{=}n_k\end{array}\right\}\ \text{fonct. strict. croissante}\quad t.q.\quad x_{n_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}x. \tag{4.4}$$

4.1.4 Equivalence des définitions

Théorème 4.11 *Dans un espace métrique, les définitions de Borel et Lebesque et de Bolzano et Weierstrass sont équivalentes.*

(Voir poly de topologie.)

4.1.5 Caractérisation d'un compact à l'aide de boules

Dans la suite on ne considèrera que des espaces métriques $(E,d(\cdot,\cdot))$. En particulier, pour tout $\varepsilon>0$, $\bigcup_{x\in E}B_E(x,\varepsilon)$ recouvre E (est égal à E).

Théorème 4.12 *Soit $(E,d(\cdot,\cdot))$ un espace métrique complet. Un sous-ensemble $K\subset E$ est compact ssi*

$$\forall\varepsilon>0,\ \textit{du recouvrement}\ \bigcup_{x\in E}B(x,\varepsilon)\supset K,\ \textit{on peut extraire un sous-recouvrement fini,} \tag{4.5}$$

i.e., $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $\exists(x_1,...,x_N)\in E^N$, $\bigcup_{i=1}^N B(x_i,\varepsilon)\supset K$ (dans un espace métrique il suffit de considérer les recouvrements par des boules de même diamètre.

(Voir poly de topologie.)

Exemple 4.13 $a<b$. $E=[a,b]$ (topologie usuelle) est compact. Soit $\varepsilon>0$ et $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}B(x,\varepsilon)$, recouvrement de $[a,b]$. Si $\varepsilon\geq(b-a)$, alors $B(\frac{a+b}{2},\varepsilon)\cap[a,b]$ recouvre $[a,b]$. Si $\varepsilon<b-a$, soit $n=$ partie entière de $\frac{b-a}{\varepsilon}$, soit $x_k=a+k\varepsilon$ pour $k=0,..,n$ (donc $a=x_0$ et $b\leq x_n$). Alors $\bigcup_{k=0}^n B(x_k,\varepsilon)\cap[a,b]$ recouvre $[a,b]$ (dessin).

En revanche $]0,1]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n},1]$ n'est pas compact, et (4.5) ne s'applique pas. ▪

4.1.6 Vocabulaire : relative compacité

Définition 4.14 Un sous-ensemble G d'un espace métrique complet E est dit relativement compact ssi son adhérence $\overline{G}$ est compacte dans E :

$$G\ \text{relativement compact}\quad\stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}\quad\overline{G}\ \text{compact}. \tag{4.6}$$

Proposition 4.15 *1- La caractérisation de Bolzano–Weierstrass dans un Banach peut se réécrire : G est relativement compact dans un Banach ssi de toute suite de G on peut extraire une sous-suite qui est de Cauchy.*

Preuve. $\Rightarrow$: si $\overline{G}$ est compact, alors on peut extraire une sous-suite convergente, donc de Cauchy.

$\Leftarrow$: si de toute suite on peut extraire une sous-suite qui est de Cauchy, alors cette sous suite est convergente E car E est complet. Donc convergente dans $\overline{G}$ par définition de l'adhérence. Donc $\overline{G}$ est compact. ∎

4.1.7 Dimension infinie, Hilbert : la boule unité fermé n'est pas compacte

Rappel : en dimension finie, la boule unité fermé d'un Hilbert est compacte.

Théorème 4.16 *Soit $(H, ||.||_H)$ un espace de Hilbert de dimension infinie. Une boule ouverte $B(x,\varepsilon) = \{\vec{y} \in H : ||\vec{y}-\vec{x}||_H < \varepsilon\}$, où $x \in H$ et $\varepsilon > 0$, n'est jamais relativement compacte (la boule fermé $\overline{B}(x,\varepsilon)$ n'est pas compacte). Donc dans un Hilbert de dimension infinie un compact ne contient aucune boule ouverte : on dit que les compacts en dimension infinie sont "plats" ou qu'ils n'ont pas d'épaisseur (ne contiennent pas de boule ouverte aussi petite soit-elle).*

(Ce théorème reste vrai dans les Banach de dimension infinie, voir Brézis [4] p. 92).

Preuve. Soit $(\vec{e}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale (construite par exemple à l'aide de Gram–Schmidt), soit $\vec{x} \in H$, soit $\varepsilon > 0$, soit $\vec{x}_n = \vec{x} + \frac{\varepsilon}{2}\vec{e}_n$, donc $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite dans $B(x,\varepsilon)$. Et $(\vec{x}_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'admet aucune sous-suite convergente, car n'admet aucune sous-suite de Cauchy : $||\vec{x}_n - \vec{x}_m||^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{4}||\vec{e}_n + (-\vec{e}_m)||^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \dfrac{\varepsilon^2}{4}(||\vec{e}_n||^2 + ||\vec{e}_m||^2) = \dfrac{\varepsilon^2}{2} \not\longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$. ∎

Exercice 4.17 Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach où $||.||$ une norme qui ne dérive pas d'un produit scalaire, sinon cf. prop. précédente. Si $F \subset E$ et $x \in E$ alors on note $d(x,F) = \inf_{y\in F} d(y,x)$. Montrer :

1- Si E est de dimension fine, si $x \in E$ et si F est fermé non vide dans E, alors l'$\inf_{y\in F} d(y,x)$ $(= d(x,F))$ est atteint, i.e., $\exists x_F \in F$ t.q. $||x - x_F|| = d(x,F)$.

2- En déduire : si E est de dimension infinie alors $\overline{B}$ n'est pas compacte (un des théorèmes de Riesz).

Réponse. 1- Soit une suite $(y_n)_{\mathbb{N}^*} \in F$ t.q. $||x-y_n||_E \longrightarrow_{n\to\infty} d(x,F)$. Comme $||y_n|| \le ||x-y_n|| + ||x||$ et $d(x,F) < \infty$, la suite $(y_n)_{\mathbb{N}^*}$ est bornée : $y_n \in B(0,R)$ avec $R = |x|| + \max_{\mathbb{N}^*}(||x-y_n||_E)$. Donc $y_n \in F \cap \overline{B(0,R)}$ fermé borné dans un espace de dimension finie, donc compact ; donc il existe une sous-suite (y_{n_k}) convergente dans F (fermé) ; soit $x_F = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in F$ la limite : on a $||x-x_F|| = \lim_{k\to\infty} ||x-y_{n_k}|| = d(x,F)$.

2- Soit $z_1 \in E$, $z_1 \ne 0$ (existe car E est de dimension infinie donc non réduit à $\{0\}$). Soit $y_1 = \frac{z_1}{||z_1||} \in \overline{B}$ (on a $||y_1|| = 1$). Construisons $y_2 \in \overline{B}$ t.q. $||y_2 - y_1|| \ge 1$. Soit $V_1 = \mathrm{Vect}\{y_1\} = \mathbb{R}y_1$, de dimension 1 donc est fermé (une suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$). Soit $z_2 \notin V_1$; avec 1-, soit $v_1 \in V_1$ t.q. $||z_2 - v_1|| = d(z_2, V_1)$ (> 0 car V_1 est fermé et $z_2 \notin V_1$). Soit $y_2 = \frac{z_2-v_1}{||z_2-v_1||}$, donc $y_2 \in \overline{B}$ et $y_2 - y_1 = \frac{z_2-v_1}{||z_2-v_1||} - y_1 = \frac{1}{||z_2-v_1||}(z_2 - w_1)$ avec $w_1 = v_1 + ||z_2-v_1||y_1 \in V_1$, donc $||z_2 - w_1|| \ge ||z_2 - v_1||$, donc $||y_2 - y_1|| \ge 1$. Puis $V_2 := \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}$, on construit $z_3 \notin V_2$, puis $v_2 \in V_2$ t.q. $||z_3 - v_2|| = d(z_3, V_2)$, puis $y_3 = \frac{z_3-v_2}{||z_3-v_2||}$, et $||y_3 - y_i|| \ge 1$ pour $i = 1,2$. Puis récurrence : on a construit une suite normée (y_n) dans $\overline{B}$ t.q. $||y_n - y_m|| \ge 1$ pour tout n, m, donc aucune sous-suite de Cauchy, donc aucune sous suite convergente, donc $\overline{B}$ n'est pas compacte. ∎

4.2 Opérateur compact

4.2.1 Définition

Comme toute application, le domaine de définition étant donné, un opérateur T est caractérisé par ses valeurs $T(x)$. On note $B_E \overset{\text{déf}}{=} B_E(0,1)$ la boule unité de E.

Définition 4.18 E et F Banach. L'opérateur $T \in L(E,F)$ (application linéaire continue) est compact ssi $T(B_E)$ (image de B_E par T) est relativement compacte dans F :

$$\begin{aligned} T \text{ compact de } L(E,F) &\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} T(B_E) \text{ relativement compact dans } F, \\ &\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \overline{T(B_E)} \text{ compact dans } F. \end{aligned} \tag{4.7}$$

On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $L(E,F)$.

On a le lemme, qui donne d'ailleurs une définition équivalente :

Lemme 4.19 *$T \in L(E,F)$ est compact ssi tout sous-ensemble Z borné de E a son image $T(Z)$ relativement compacte dans F.*

Preuve. (i)$\Leftarrow$ En effet, si tout sous-ensemble Z borné de E a son image $T(Z)$ relativement compacte dans F, alors c'est également vrai pour la boule unité, et T est donc compact.

(ii)$\Rightarrow$ Réciproquement, soit T compact et Z un borné de E. Donc $\exists R>0$ t.q. $Z\subset B_E(0,R)$. Donc si $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de Z, alors $(\frac{x_n}{R})_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de $B_E(0,1) =^{\text{noté}} B_E$. Donc, T étant linéaire, la suite $\frac{1}{R}(Tx_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de $T(B_E)$ relativement compact, donc cette suite admet une sous-suite de Cauchy dans F. Donc $(Tx_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de $T(Z)$ qui admet une sous-suite de Cauchy dans F. Donc toute suite de $T(Z)$ admet une sous-suite de Cauchy, donc $T(Z)$ est relativement compact, cf. proposition 4.15. ∎

Exercice 4.20 Dans $L(\ell^2)$, montrer que l'opérateur T de multiplication par une suite $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ telle que $\lambda_n \not\longrightarrow_{n\to 0} 0$ n'est pas compact. En particulier l'identité $I:\ell^2\to\ell^2$ n'est pas compacte.

Réponse. Par hypothèse $T\vec{e}_n=\lambda_n\vec{e}_n$ et il existe une sous-suite extraite $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas vers 0 : $\exists\alpha>0$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $|\lambda_{n_k}|>\alpha>0$. Donc la suite orthonormale $(Te_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite de Cauchy car, pour $k\neq\ell$ on a $||Te_{n_k}-Te_{n_l}||=\lambda_{n_k}^2+\lambda_{n_l}^2>2\alpha^2>0$, donc aucune sous-suite convergente. ∎

Exercice 4.21 Dans $L(\ell^2)$, montrer que l'opérateur T de multiplication par une suite $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ telle que $\lambda_n \longrightarrow_{n\to 0} 0$ est compact. On notera $B=B_{\ell^2}(\vec{0},1)$ la boule unité de ℓ^2.

Réponse. À l'aide de "Borel–Lebesgue". Soit $\varepsilon>0$ (fixé quelconque) et $\overline{T(B)}\subset\bigcup_{\vec{y}\in\ell^2}B(\vec{y},\varepsilon)$ (recouvrement). Il s'agit d'extraire un sous recouvrement fini. Ayant $\lambda_n\longrightarrow_{n\to\infty}0$, $\exists N{=}N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n>N$, $|\lambda_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit $(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}$ la base canonique de ℓ^2. Soit $\vec{x}\in B$, $\vec{x}=\sum_{i=1}^\infty x_i\vec{e}_i$, où donc $||\vec{x}||_{\ell^2}^2=\sum_{i=1}^\infty x_i^2<1$. Par linéarité de T, $\vec{x}=\sum_{i=1}^N x_i\vec{e}_i+\sum_{i=N+1}^\infty x_i\vec{e}_i$ donne

$$T\vec{x}=\sum_{i=1}^N\lambda_ix_i\vec{e}_i+\sum_{i=N+1}^\infty\lambda_ix_i\vec{e}_i\in F_N+G_N. \tag{4.8}$$

Avec $\lambda_{max}=\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(|\lambda_n|)$ ($<\infty$ dans $\mathbb{R}$ car $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente) et avec $R^N=\text{Vect}\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_N\}$ l'ensemble des suites de ℓ^2 nulles à partir du rang n (on a $R^N\simeq\mathbb{R}^n$), on a

$$F_N=B(\vec{0},\lambda_{max})\bigcap R^N \quad\text{et}\quad G_N=B(\vec{0},\frac{\varepsilon}{2})\quad(\text{car }||\vec{x}||\le 1). \tag{4.9}$$

En particulier $\overline{F_N}$ est fermé borné dans l'espace R^N de dimension finie, donc $\overline{F_N}$ est compact dans R^N, donc dans ℓ^2, donc du recouvrement $\bigcup_{\vec{y}\in\ell^2}B(\vec{y},\frac{\varepsilon}{2})$ de $\overline{F_N}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup_{j=1}^M B(\vec{x}^j,\frac{\varepsilon}{2})\supset\overline{F_N}$. Donc $\overline{T(B)}\subset\overline{F_N}+\overline{G_N}\subset\bigcup_{j=1}^M B(\vec{x}^j,\frac{\varepsilon}{2})+B(\vec{0},\frac{\varepsilon}{2})=\bigcup_{j=1}^M B(\vec{x}^j,\varepsilon)$ (car $\vec{x}=\vec{x}^j+\vec{z}\in B(\vec{x}^j,\frac{\varepsilon}{2})+B(\vec{0},\frac{\varepsilon}{2})$ donne $||\vec{x}-\vec{x}^j||_{\ell^2}\le||\vec{y}_j-\vec{x}^j||_{\ell^2}+||\vec{z}||_{\ell^2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$). ∎

Remarque 4.22 (hors programme). Cas particulier de la définition 4.18 quand $E=F=^{\text{noté}}H$ est un Hilbert. On montre aussi dans ce cas que : $T\in L(H)$ est compact ssi $T(\overline{B_H})$ (image de la boule fermée) est compact.

Pour ce on a besoin d'utiliser la notion de topologie faible, voir Brézis [4], la boule unité étant alors faiblement compacte (i.e. compacte pour la topologie faible). Voici comment :

Si $(y_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite dans $T(\overline{B_H})$, il s'agit de montrer qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $T(\overline{B_H})$. Soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\overline{B_H}$ telle que $y_n=Tx_n$ (une telle suite existe car $y_n\in T(\overline{B_H})$ pour tout n).

Comme $\overline{B_H}$ est faiblement compacte, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement vers un $x\in\overline{B_H}$: pour tout $z\in H$, $(x_{n_k},z)_H\longrightarrow_{k\to\infty}(x,z)_H$.

Donc en particulier, pour tout $z\in H$, $(x_{n_k},T^*z)_H\longrightarrow_{k\to\infty}(x,T^*z)_H$, où T^* est l'adjoint de T.

Donc, pour tout $z\in H$, $(Tx_{n_k},z)_H\longrightarrow_{k\to\infty}(Tx,z)_H$.

Comme T est bornée, $T(\overline{B_H})$ est bornée dans H, donc $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}=(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, donc faiblement convergente dans H : il existe une sous-suite $(y_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}^*}=(Tx_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement vers un $y\in\overline{B_H}$: pour tout $z\in H$, $(Tx_{n_{k_\ell}},z)_H\longrightarrow_{\ell\to\infty}(y,z)_H$. Avec $(Tx_{n_{k_\ell}},z)_H\longrightarrow_{\ell\to\infty}(Tx,z)_H$ pour tout z, cf. ci-dessus, donc $Tx=y$, donc $y\in T(\overline{B_H})$. Donc $T(\overline{B_H})$ est compact. ∎

4.2.2 Propriété : suite orthonormale écrasée

Proposition 4.23 *Soit H et G deux Hilbert de dimensions infinies. Si $T\in K(H,G)$ (opérateur borné compact), alors :*

$$\text{si}\quad (e_n)_{\mathbb{N}^*}\text{ est suite orthonormale dans }H\quad\text{alors}\quad ||T(e_n)||_G\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{4.10}$$

(En dimension infinie, une suite orthonormale est "écrasée" par un opérateur compact.)

Preuve. Sinon, quitte à extraire une sous-suite, $\exists\alpha > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||Te_n||_G \geq \alpha$. $(e_n)_{\mathbb{N}} \in B_H(0,2)$ et $\overline{T(B_H(0,2))}$ est compact, donc, quitte à extraire une sous-suite, la suite $(Te_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers un $y \in G$: $\lim_{n\to\infty} ||Te_n - y||_G = 0$. Donc $||y||_G \geq \alpha$ (continuité de la norme). Donc (continuité du produit scalaire)

$$0 < \alpha^2 \leq (y,y)_G = \lim_{k\to\infty}(Te_n, y)_G = \lim_{k\to\infty}(e_n, T^*y)_H \overset{\text{noté}}{=} \lim_{n\to\infty}(T^*y)_n \quad \text{où} \quad (T^*y)_n := (T^*y, e_n)_H \tag{4.11}$$

est la n-ième composante de $T^*y \in H$. Et $\infty > ||T^*y||_H^2 \geq \sum_{\mathbb{N}^*} |(T^*y)_{n_k}|^2$ (inégalité de Bessel (1.39)), donc $\sum_{\mathbb{N}^*} (T^*y)_n^2 < \infty$, donc $(T^*y)_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Absurde avec $\alpha > 0$, d'où (4.10). ∎

Exemple 4.24 Soit dans $\ell^2 = H = G$ usuel et T l'opérateur de multiplication par une suite $\lambda = (\lambda_n)$ relativement à la base canonique $(\vec{e}_n)$ dans ℓ^2. Montrer à l'aide de (4.10) : si T est compact alors $\lambda_n \to 0$.

Réponse. $(\vec{e}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. dans $(\ell^2, (\cdot,\cdot)_{\ell^2})$ (l'espace ℓ^2 usuel). Donc $||T(\vec{e}_n)|| = |\lambda_n|$ doit tendre vers 0 si T est compact, cf. (4.10). ∎

Exercice 4.25 Montrer que $T : f \in L^2(]0,1[) \to xf \in L^2(]0,1[)$ n'est pas compact

Réponse. Soit $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi nx)$: la suite (e_n) est orthonormée dans $L^2(]0,1[)$. Et $Te_n(x) = \sqrt{2}\,x\sin(2\pi nx)$ donc $||Te_n||_{L^2}^2 = 2\int_0^1 x^2\sin^2(2\pi nx)\,dx = 2\int_0^1 x^2\frac{1-\cos(4\pi nx)}{2}\,dx \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{1}{3}$, donc $||Te_n||_{L^2}^2 \not\to_{n\to\infty} 0$. ∎

4.2.3 Dimension infinie : T compact n'est pas inversible d'inverse borné

Théorème 4.26 *Si H est un Hilbert de dimension infinie et si $T \in L(H)$ (opérateur borné) est compact alors T compact n'est pas "inversible d'inverse borné" (en dimension infinie), i.e.,*

$$\dim(H) = \infty \quad \textit{et} \quad T \textit{ compact} \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \sigma(T). \tag{4.12}$$

Preuve. Si $0 \in \rho(T)$, i.e. si T est inversible et T^{-1} borné, alors $T^{-1}(B_H)$ est borné, donc $B_H = T(T^{-1}(B_H))$ est relativement compact (car T compact), donc H est de dimension finie, cf. thm. 4.16. Donc si H est de dimension infinie alors T^{-1} n'est pas borné, i.e. $(T-0I)^{-1}$ n'est pas borné, donc $0 \notin \rho(T)$. ∎

4.2.4 L'ensemble fermé des opérateurs compacts

Proposition 4.27 *Soient E et F deux Banach. $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $L(E,F)$.*

Preuve. C'est un sous-espace vectoriel : immédiat. Montrons qu'il est fermé. Soit $(T_n)_{\mathbb{N}^*}$ suite dans $K(E,F)$ qui converge vers $T \in L(E;F)$, donc $||T_n - T|| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Montrons à l'aide de Borel–Lebesgue que $T \in K(E,F)$, i.e., que $T(B_E)$ est relativement compact dans F. Soit $\varepsilon > 0$ et le recouvrement $\bigcup_{y\in E} B_F(y,\varepsilon) \supset T(B_E)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $||T - T_n|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $T_n(B_E) \subset \bigcup_{y\in F} B_F(y, \frac{\varepsilon}{2})$ et T_n est compact, on peut recouvrir $T_n(B_E)$ par un nombre fini k de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \exists (y_i)_{i=1,\dots k} \in F^k \quad \text{t.q.} \quad T_n(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_F(y_i, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{4.13}$$

Donc

$$\forall x \in B_E,\ ||Tx - y_i||_F = ||Tx - T_nx + T_nx - y_i||_F \leq ||T - T_n||\,||x||_E + ||T_nx - y_i||_F \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \tag{4.14}$$

Donc $Tx \in B_F(y_i, \varepsilon)$. Donc que $T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^k B_F(y_i,\varepsilon)$ sous-recouvrement fini : $\overline{T(B_E)}$ est compact. ∎

4.2.5 Opérateur de rang fini

Définition 4.28 Si E et F sont deux espaces de Banach, $T \in L(E,F)$ est dit de rang fini ssi son image est de dimension finie (son rang est fini) :

$$T \text{ de rang fini} \quad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad \dim(\mathrm{Im}T) < \infty. \tag{4.15}$$

Lemme 4.29 *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Preuve. Ici $\exists n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathrm{Im}T) = n < \infty$, donc $\mathrm{Im}T$ est fermé (car de dimension finie), et dans un e.v. de dim finie les compacts sont les fermés bornés. En particulier $\overline{T(B_E)}$ est fermé (adhérence) dans $\mathrm{Im}T$, et borné (car T est borné) dans $\mathrm{Im}T$, donc $\overline{T(B_E)}$ est compact. ∎

Corollaire 4.30 *Si $(T_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite d'opérateurs de rang fini convergeant vers $T \in L(E,F)$, alors $T \in K(E,F)$ (est compact).*

Preuve. Puisque T_n est de rang fini, il est compact, et $K(E,F)$ est fermé dans $L(E,F)$, cf. proposition 4.27. ∎

Exercice 4.31 Montrer avec le corollaire précédent que dans $\ell^2 = H = G$, l'opérateur de multiplication par une suite $\lambda = (\lambda_n)$ est compact dès que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Réponse. On considère la suite T_N d'opérateurs de multiplication par la suite tronquée $(\lambda_n^{(N)})$, i.e. pour $n \le N$ on a posé $\lambda_n^{(N)} = \lambda_n$, et pour $n > N$ on a posé $\lambda_n^{(N)} = 0$. Autrement dit la matrice de T_N est la matrice diagonale dont tous les termes sont nuls après le N-ième.

Les T_N sont de rang fini N, car $\mathrm{Im}T_N = \mathrm{Vect}\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_N\}$, et sont donc compacts. Et la suite (T_N) est convergente dans $L(E,F)$ vers T opérateur de multiplication par la suite (λ_n) (non tronquée) : en effet, pour $\vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$, tel que $||\vec{x}||_{\ell^2} \le 1$, i.e. tel que $\sum_{i=1}^\infty x_i^2 \le 1$, on a $||(T - T_N)\vec{x}||_{\ell^2} = ||(0, \dots, 0, \lambda_{N+1}x_{N+1}, \dots)||_{\ell^2} \le \sup_{n \ge N+1} |\lambda_n|$ qui tend vers 0 quand N tend vers ∞ puisque $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $||T - T_N|| \to 0$, et T est compact car limite des opérateurs de rang fini T_N. ∎

4.2.6 Hilbert et densité des opérateurs de rang fini dans $K(E,G)$

La réciproque du corollaire 4.30 est fausse en général dans un Banach quelconque, mais vraie lorsque F est un espace de Hilbert (grâce aux projections orthogonales) :

Théorème 4.32 *Soit E Banach et G Hilbert. Tout opérateur compact de $K(E,G)$ est limite d'opérateurs de rang fini. Autrement dit, l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $K(E,G)$.*

Preuve. Avec Borel–Lebesgue. Soit $T \in K(E,G)$. Donc $T(B_E)$ est relativement compact, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, du recouvrement $\bigcup_{y \in G} B_G(y, \varepsilon)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini : $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\exists (y_i)_{i=1,\dots,N_\varepsilon} \in G^N$:

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_G(y_i, \varepsilon). \tag{4.16}$$

Soit $Z_\varepsilon = \mathrm{Vect}\{y_i, i = 1, ..., N_\varepsilon\}$ et soit l'opérateur P_{Z_ε} de projection orthogonale sur Z_ε, opérateur qui existe car Z_ε est un s.e.v. de dimension finie donc fermé.

L'opérateur $P_{Z_\varepsilon} \circ T \overset{\text{noté}}{=} P_{Z_\varepsilon} T$ est de rang fini car $\mathrm{Im}(T_\varepsilon) \subset Z_\varepsilon$. Montrons $||T - P_{Z_\varepsilon} T|| < \varepsilon$.

Pour $x \in B_E$ on a $Tx \in T(B_E)$ donc $\exists y_i \in Z_\varepsilon$ t.q. $Tx \in B_G(y_i, \varepsilon)$, i.e. $||Tx - y_i||_H < \varepsilon$. Et $Tx - P_{Z_\varepsilon} Tx = Tx - P_{Z_\varepsilon}(Tx) \in Z_\varepsilon^\perp$ (car P_{Z_ε} est la projection orthogonale sur Z_ε). Donc :

$$Tx - y_i = (Tx - P_{Z_\varepsilon}(Tx)) + (P_{Z_\varepsilon}(Tx) - y_i) \in Z_\varepsilon^\perp \oplus Z_\varepsilon,$$

donc (Pythagore)

$$||Tx - y_i||_H^2 = ||Tx - P_{Z_\varepsilon}(Tx)||_H^2 + ||P_{Z_\varepsilon}(Tx) - y_i||_H^2, \quad \text{donc} \quad ||Tx - P_{Z_\varepsilon} Tx||_H \le ||Tx - y_i||_H < \varepsilon. \tag{4.17}$$

Vrai pour tout $x \in B_E$, donc $||T - P_{Z_\varepsilon} T|| < \varepsilon$. Vrai pour tout ε. Donc l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $K(E;G)$. ∎

Corollaire 4.33 *Si H et G sont des Hilbert, si $T \in L(H,G)$ est de rang fini alors $T^* \in L(G,H)$ est de rang fini. Et si T est compact alors T^* est compact.*

Preuve. Soit $n := \dim(T(H))$. Soit $(g_i)_{i=1,\dots,n}$ une b.o.n. dans $T(H)$; donc pour $x \in H$, $Tx \in T(H)$ et on a

$$Tx = \sum_{i=1}^n (Tx, g_i)_G \, g_i = \sum_{i=1}^n (T^* g_i, x)_G \, g_i. \tag{4.18}$$

Donc, pour $x \in H$ et $y \in G$,

$$(T^* y, x)_H = (y, Tx)_G = \sum_{i=1}^n (T^* g_i, x)_G (y, g_i)_G = \sum_{i=1}^n \big((y, g_i)_G \, T^* g_i, x\big)_H.$$

Donc $T^* y = \displaystyle\sum_{i=1}^n (y, g_i)_G T^* g_i \in \mathrm{Vect}\{T^* g_1, ..., T^* g_n\}$. Donc $\dim(T^*(G)) \le n$, donc T^* est de rang fini.

D'où si T est compact alors T^* est compact : en effet, si (T_n) est une suite d'opérateurs de rang fini tels que T_n approche T, alors (T_n^*) est une suite d'opérateurs de rang fini qui approche T^*, car $||T^*-T_n^*|| = ||(T-T_n)^*|| = ||T-T_n||$, voir proposition 2.23. ∎

4.2.7 Opérateurs de Hilbert–Schmidt

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont des opérateurs qu'on rencontre très souvent en physique. D'un point de vue calcul, c'est le cas de l'extension du calcul matriciel aux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie (espaces qui admettent une b.o.n. dénombrable). On utilisera indifféremment le vocabulaire "b.o.n." et "base hilbertienne".

Cadre : $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ et $(G,(\cdot,\cdot)_G)$ deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. Soit $(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}$ une b.o.n. de H.

Définition 4.34 On dit que $T\in L(H,G)$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt ssi :

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||T\vec{e}_j||_G^2 < \infty. \tag{4.19}$$

On note

$$L_2(H,G) := \{\text{l'ensemble des opérateurs de Hilbert–Schmidt de } H \text{ dans } G\}, \tag{4.20}$$

et, pour $T\in L_2(H,G)$,

$$||T||_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} ||T\vec{e}_j||_G^2\Big)^{\frac12}. \tag{4.21}$$

Soit $(\vec{g}_i)_{\mathbb{N}^*}$ une b.o.n. de G. On note T_{ij} les composantes de $T\vec{e}_j$ sur cette b.o.n. : pour tout $j\in\mathbb{N}^*$:

$$T\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{\infty} T_{ij}\vec{g}_i, \quad \text{donc} \quad ||T\vec{e}_j||_G^2 = \sum_{i=1}^{\infty} T_{ij}^2 \quad \text{avec} \quad T_{ij} = (T\vec{e}_j,\vec{g}_i)_G. \tag{4.22}$$

Définition 4.35

$$[T] = [T_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{N}^*\\ j\in\mathbb{N}^*}} \qquad (=[T_{ij}]) \tag{4.23}$$

est appelée matrice (généralisée) de T relativement aux b.o.n. choisies dans H et G.

Donc la j-ème colonne de la matrice généralisée $[T_{ij}]$ contient les composantes du vecteur $T\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{g}_i)$, cf. (4.22). Donc $||T||_2$ est l'extension de la norme matricielle de Frobenius en dimension finie donnée par $||A||_2 = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{\frac12}$ pour les matrices $A=[a_{ij}]$.

Proposition 4.36

$$||T||_2 = (\sum_{i,j=1}^{\infty} T_{ij}^2)^{\frac12}, \quad \textit{donc} \quad T\in L_2(H,G) \quad \textit{ssi} \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} T_{ij}^2 < \infty. \tag{4.24}$$

Et si T est de Hilbert–Schmidt alors T^* est de Hilbert–Schmidt, et $||T||_2 = ||T^*||_2$.

Et $||T||_2$ ne dépend ni de la base hilbertienne $(\vec{e}_j)_{\mathbb{N}^*}$ choisie dans H, ni de la base hilbertienne $(\vec{g}_i)_{\mathbb{N}^*}$ choisie dans G : le fait "T est de Hilbert–Schmidt" ne dépend pas du choix des b.o.n..

Preuve. Fubini pour les séries de termes positifs donne $\sum_i\sum_j = \sum_j\sum_i =^{\text{noté}} \sum_{ij}$, à valeur dans $[0,\infty]$. D'où (4.21) et (4.22) donnent (4.24). Fubini pour les séries de termes positifs :

$$||T||_2 = \sum_{j=1}^{\infty} ||T\vec{e}_j||_G^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |(T\vec{e}_j,\vec{g}_i)_G|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |(\vec{e}_j,T^*\vec{g}_i)_H|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |T_{ji}^*|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} ||T^*\vec{g}_i||_H^2, \tag{4.25}$$

donc $\sum_{i=1}^{\infty} ||T^*\vec{g}_i||_H^2 < \infty$, donc T^* est de Hilbert–Schmidt avec $||T^*||_2 = ||T||_2$.

Et si $(\tilde{\vec{e}}_j)$ et $(\tilde{\vec{g}}_i)$ sont d'autres b.o.n dans H et G alors le calcul précédent montre $\sum_{j=1}^{\infty} ||T\tilde{\vec{e}}_j||_G^2 = \sum_{i=1}^{\infty} ||T^*\vec{g}_i||_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} ||T\vec{e}_j||_G^2 = \sum_{i=1}^{\infty} ||T^*\tilde{\vec{g}}_i||_H^2$: résultat indépendant du choix des b.o.n dans H et G. ∎

Proposition 4.37 *$||.||_2$ définit une norme sur $L_2(H,G)$, norme qui vérifie :*

$$||T|| \le ||T||_2, \tag{4.26}$$

Preuve. $||.||_2$ est visiblement une norme (positivité, homogénéité, inégalité triangulaire).

Pour $\vec{x} = \sum_{i=1}^\infty x_i \vec{e}_i$, on a, sachant $(\vec{g}_i)$ b.o.n. :

$$T\vec{x} = \sum_j x_j T\vec{e}_j = \sum_{ij} x_j T_{ij} \vec{g}_i, \quad \text{donc} \quad ||T\vec{x}||_G^2 = \sum_{i=1}^\infty (\sum_{j=1}^\infty x_j T_{ij})^2$$

Et Cauchy–Schwarz dans ℓ^2 (pour i fixé) donne $(\sum_{j=1}^\infty x_j T_{ij})^2 \le (\sum_{j=1}^\infty x_j^2)(\sum_{j=1}^\infty T_{ij}^2)$. D'où :

$$||T\vec{x}||_G^2 \le \sum_{i=1}^\infty \Big(||\vec{x}||_{\ell^2}^2 (\sum_{j=1}^\infty T_{ij}^2) \Big) = ||\vec{x}||_H^2 ||T||_2^2.$$

Donc $||T\vec{x}|| \le ||T||_2 ||\vec{x}||_H$, vrai pour tout $\vec{x}$, donc $||T|| \le ||T||_2$. ∎

Proposition 4.38 *Si $T \in L_2(H,G)$ (est de Hilbert–Schmidt), alors T est limite d'opérateurs de rang fini, donc $T \in K(H,G)$ (est compact).*

Preuve. Soit $(e_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. de H. Soit $T \in L_2(H,G)$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit T_ε l'opérateur T tronqué à l'ordre N, i.e. défini par $T_\varepsilon \vec{e}_j = T\vec{e}_j$ pour $j = 1, ..., N$, et $T_\varepsilon \vec{e}_j = 0$ pour $j > N$. Donc $\mathrm{Im} T_\varepsilon = \mathrm{Vect}\{Te_1, ..., Te_N\}$, donc T_ε est rang fini. (La matrice $[T_\varepsilon]$ de T_ε à toutes ses colonnes nulles à partir de la $N+1$-ième.)

Et $\sum_{i=1}^\infty ||T\vec{e}_i||_G^2 < \infty$, donc, pour $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n > N_\varepsilon$, $\sum_{i=n+1}^\infty ||T\vec{e}_i||_G^2 < \varepsilon^2$, donc

$$||T - T_n||_2^2 = \sum_{i=n+1}^\infty ||T\vec{e}_i||_G^2 < \varepsilon^2,$$

donc $||T - T_n|| < \varepsilon$, cf. (4.26). Donc T est limite d'opérateurs de rang fini : T est compact. ∎

Notations. Soit la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_2 : L_2(H,G) \times L_2(H,G) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(S,T)_2 = \sum_{j=1}^\infty (S\vec{e}_j, T\vec{e}_j)_G, \tag{4.27}$$

où $(\vec{e}_i)$ est une b.o.n. dans H. Avec $S\vec{e}_j = \sum_i S_{ij} \vec{g}_i$ et $T\vec{e}_j = \sum_k T_{kj} \vec{g}_k$ on a $(S,T)_2 = \sum_{i,j=1}^\infty S_{ij} T_{ij}$ car $(\vec{g}_i, \vec{g}_k)_G = \delta_{ik}$. Et $\sum_{i,j=1}^\infty S_{ij} T_{ij} \le ||S||_2 ||T||_2 < \infty$ (Cauchy–Schwarz dans ℓ^2), donc $(S,T)_2$ est bien défini.

Théorème 4.39 *$(\cdot,\cdot)_2$ est une produit scalaire dans $L_2(H,G)$ de norme associée $||.||_2$, et $(L_2(H,G), (\cdot,\cdot)_2)$ est un Hilbert.*

Preuve. $(\cdot,\cdot)_2$ est bilinéaire, symétrique, définie positive, de norme associée $||.||_2$: immédiat.

Soit $(T_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans $L_2(H,G)$: $||T_n - T_m||_2 \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$; donc $||T_n - T_m||_2 \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$, cf. (4.26) : c'est donc aussi une suite de Cauchy dans $L(H,G)$ complet (car G est un Hilbert donc complet), donc convergente dans $L(H,G)$. Soit $T = \lim T_n$ la limite dans $L(H,G)$. Montrons que $T \in L_2(H,G)$, i.e. $\sum_{i=1}^\infty ||T\vec{e}_i||_G^2 < \infty$, puis $||T - T_n||_2 \to 0$.

Soit $(\vec{e}_i)$ une b.o.n. dans H, soit ε fixé, soit N_ε t.q. $\forall m,n \ge N_\varepsilon$, $||T_n - T_m||_2 < \varepsilon$ (car (T_n) de Cauchy dans $L_2(H,G)$), i.e. $\sum_{i=1}^\infty ||(T_n - T_m)\vec{e}_i||_G^2 < \varepsilon$. Comme $||(T - T_n).\vec{e}_i||_G = \lim_{m\to\infty} ||(T_m - T_n).\vec{e}_i||_G$ (continuité de la norme cf. (1.36)), on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \ge N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k ||(T - T_n)\vec{e}_i||_G^2 &= \sum_{i=1}^k (\lim_{m\to\infty} ||(T_m - T_n)\vec{e}_i||_G^2) = \lim_{m\to\infty} (\sum_{i=1}^k ||(T_m - T_n)\vec{e}_i||_G^2) \text{ (somme finie)} \\ &\le \lim_{m\to\infty} (\sum_{i=1}^\infty ||(T_m - T_n)\vec{e}_i||_G^2) \le \varepsilon^2, \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^\infty ||(T - T_n)\vec{e}_i||_G^2 \le \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^\infty ||T\vec{e}_i||_G^2 = \sum_{i=1}^\infty ||(T - T_n)\vec{e}_i + T_n(\vec{e}_i)||_G^2 \le \sum_{i=1}^\infty 2||(T - T_n)\vec{e}_i||_G^2 + 2||T_n(\vec{e}_i)||_G^2 \le 2\varepsilon^2 + 2M,$$

où $M = \sup_n ||T_n|| < \infty$ car (T_n) est de Cauchy dans $L(H,G)$. Donc $\sum_{i=1}^\infty ||T\vec{e}_i||_G^2 < \infty$, donc $T \in L_2(H,G)$. Et (4.28) donne : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$, $\forall n \ge N_\varepsilon$, $||T - T_n||_2 < \varepsilon$. Donc $T_n \to T$ dans $L_2(H,G)$. ∎

Exercice 4.40 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $H = L^2(\Omega)$, et soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, et soit $T \in L(H)$ l'opérateur de noyau K, i.e. :

$$Tf(\vec{x}) = \int_{\vec{y}\in\Omega} K(\vec{x},\vec{y})f(\vec{y})\,d\Omega. \tag{4.29}$$

Montrer que T est un opérateur de Hilbert–Schmidt. Et qu'ainsi on a défini un isomorphisme entre $L_2(L^2(\Omega))$ et $L^2(\Omega\times\Omega)$ à l'aide de $(T\vec{e}_j, \vec{e}_j)_{L^2} = (K, \vec{e}_j \otimes \vec{e}_j)_{L^2(\Omega^2)}$ où $(\vec{e}_j)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (la matrice $[T_{ij}]$ de T est égale à la matrice $[K_{ij}]$ de K).

Réponse. Voir polycopié sur les opérateurs à noyaux intégraux (généralisation de la multiplication matricielle aux fonctions sur un Hilbert séparable). ∎

Exercice 4.41 Montrer : pour $T \in L_2(H,G)$, avec la notation (4.22) et $\vec{x} = \sum_j x_j\vec{e}_j \in H$ on a (échange des signes $\sum$) :

$$T\vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\,T_{ij})\,\vec{g}_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(\sum_{i=1}^{\infty} T_{ij}\,\vec{g}_i). \tag{4.30}$$

Réponse. Avec $(\vec{e}_i)$ b.o.n. de H et $(\vec{g}_i)$ b.o.n. de G, d'une part :

$$T\vec{x} = \sum_i (T\vec{x},\vec{g}_i)_G\,\vec{g}_i = \sum_i(\sum_j x_j(T\vec{e}_j,\vec{g}_i)_G)\,\vec{g}_i = \sum_i(\sum_j x_j\,T_{ij})\,\vec{g}_i,$$

et d'autre part par linéarité de T :

$$T\vec{x} = \sum_j x_j T\vec{e}_j = \sum_j x_j(\sum_i (T\vec{e}_j,\vec{g}_i)_G\,\vec{g}_i) = \sum_j x_j(\sum_i T_{ij}\,\vec{g}_i).$$

D'où le résultat. (Ce n'est pas Fubini.) ∎

4.3 Thm de Rellich : l'injection canonique $H^1(]a,b[) \to L^2(]a,b[)$ est compacte

C'est un des résultats essentiels du cours (permet d'appliquer le théorème de décomposition spectrale) : grâce à ce théorème on peut prouver que le "laplacien est diagonalisable dans une b.o.n.", et en particulier qu'il a un nombre dénombrable de valeurs propres (fréquences de résonnance).

On commence par regarder le cas des intervalles bornés de $\mathbb{R}$, les démonstrations étant élémentaires grâce aux séries de Fourier. On regardera ensuite le cas des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$.

L'identité $I : L^2(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$ n'est pas un opérateur compact puisque la boule unité est transformée en elle-même et que $L^2(]0,1[)$ n'est pas de dimension finie, voir théorème 4.16.

Par contre, en changeant les normes utilisées, Rellich a montré que l'opérateur injection canonique

$$\begin{aligned} I_{10} : (H^1(]0,1[), ||.||_{H^1}) &\to (L^2(]0,1[), ||.||_{L^2}), \\ u &\to I_{10}u = u, \end{aligned} \tag{4.31}$$

est compact (la boule unité de H^1 est vue comme étant étant un ensemble "sans épaisseur" dans L^2).

Remarque 4.42 Attention, l'opérateur I_{10} n'est pas l'opérateur identité topologique :

1- Ce n'est qu'une identité algébrique : $u \to u = I_{10}u$ (un élément n'est pas transformé).

2- Ce n'est pas du tout une identité topologique : I_{10} ne conserve pas les normes, i.e., u est regardé avec deux instruments de mesure différents, le premier $||.||_{H^1}$ qui est "précis" (prend en compte la dérivée), et le second $||.||_{L^2}$ qui est "grossier" (qui est très "myope" : qui "écrase à l'infini"). NB : la boule unité fermée de $H^1(]0,1[)$

$$B_{H^1} = \{u \in H^1(]0,1[) : ||u||_{L^2}^2 + ||u'||_{L^2}^2 < 1\} \tag{4.32}$$

n'est pas relativement compacte dans $H^1(]0,1[)$, car $(H^1(]0,1[), ||.||_{H^1})$ est un Hilbert de dimension infinie. En revanche B_{H^1} est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$ (voir théorème (4.43) suivant) : elle est "suffisamment petite" dans l'Hilbert $(L^2(\Omega), ||.||_{L^2})$ pour l'être. En particulier une b.o.n. $(e_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $H^1(\Omega)$ (donc $||\vec{e}_n||_{H^1} = 1$ pour tout n) est telle que $||I\vec{e}_n||_{L^2} = ||\vec{e}_n||_{L^2} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, cf. (4.10), dès que Ω est borné (c'est le cas de $]0,1[$). ∎

Théorème 4.43 *L'injection canonique I_{10} de $(H^1(]0,1[), ||.||_{H^1})$ dans $(L^2(]0,1[), ||.||_{L^2})$ est compacte, i.e., la boule unité de $H^1(]0,1[)$ est relativement compacte dans $L^2(]0,1[)$.*

Preuve. Voir annexe D où on montre que I_{10} est de Hilbert–Schmidt, donc compact. ∎

Corollaire 4.44 *L'injection canonique $\tilde I_{10} : u \in (H_0^1(]0,1[), ||.||_{H^1}) \to u \in (L^2(]0,1[), ||.||_{L^2})$ est compacte, i.e., la boule unité de $H_0^1(]0,1[)$ pour la norme $||.||_{H^1}$ est relativement compacte dans $L^2(]0,1[)$.*

Et avec $||v||_{H_0^1} = ||\vec{\text{grad}} v||_{L^2}$, l'injection canonique $\tilde{\tilde I}_{10} : u \in (H_0^1(]0,1[), ||.||_{H_0^1}) \to u \in (L^2(]0,1[), ||.||_{L^2})$ est compacte, i.e., la boule unité de $H_0^1(]0,1[)$ pour la norme $||.||_{H_0^1}$ est relativement compacte dans $L^2(]0,1[)$.

Preuve. La boule unité de $(H_0^1(]0,1[), ||.||_{H^1})$ est $B_{H_0^1} = \{u \in H_0^1(]0,1[) : \ ||u||_{H^1} \le 1\} = B_{H^1} \bigcap H_0^1(]0,1[) \subset B_{H^1}$. Donc une suite (u_n) de $B_{H_0^1}$ est une suite dans B_{H^1}, donc, théorème de Rellich, on peut extraire une sous-suite de Cauchy $(u_{n_k}) = (I_{10}u_{n_k}) = (\tilde I_{10}u_{n_k})$ dans $L^2(]0,1[)$. Donc $\tilde I_{10}(B_{H_0^1})$ est relativement compact : l'opérateur $\tilde I_{10}$ est compact.

Dans $H_0^1(]0,1[)$ la norme $||.||_{H_0^1}$ est équivalente à la norme $||.||_{H^1}$ grâce à l'inégalité de Poincaré, l'intervalle $]0,1[$ étant borné. Et toute suite de Cauchy dans une norme est de Cauchy dans une norme équivalente : on applique la première partie de la preuve. ∎

Remarque 4.45 Ce résultat se généralise immédiatement : l'injection naturelle de $H^1(]a,b[)$ est compacte dans $L^2(]a,b[)$ pour tout intervalle $]a,b[$ borné. ∎

Remarque 4.46 Si $]a,b[$ n'est pas borné, alors on perd la compacité. Eg., $I_{10} : u \in H^1(]0,\infty[) \to u \in L^2(]0,\infty[)$ n'est pas compacte : prendre une fonction $u_0 \in H^1(]0,\infty[)$ t.q. $\text{supp}(u_0) \in]0,1[$ et $||u_0||_{H^1} = 1$, et poser $u_n(x) = u(x-n)$ (les translatées de u_0, dessin) ; on a $||u_n||_{H^1} = ||u_0||_{H^1} = 1$ pour tout n, et, les fonctions ayant leur support disjoint, $(u_n, u_m)_{H^1} = 0$ pour tout $n \ne m$, donc $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est orthonormale dans $H^1(]0,\infty[)$; et on a $||u_n||_{L^2} = ||u_0||_{L^2} \ne 0$ pour tout n, et, les fonctions ayant leur support disjoint, $(u_n, u_m)_{L^2} = 0$ pour tout $n \ne m$; et pour $m \ne n$, $||u_n - u_m||_{L^2}^2 = ||u_n||_{L^2}^2 + ||u_m||_{L^2}^2 = 2||u_0||_{L^2} \not\longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$ (Pythagore) : la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ ne contient pas de sous suite de Cauchy dans $L^2(]0,\infty[)$, donc I_{10} n'est pas compacte. ∎

Remarque 4.47 Le théorème de Rellich de $H^1(]a,b[)$ dans $L^2(]a,b[)$, pour $]a,b[$ borné, est à la base de nombreux résultats d'existence (grâce à la compacité) pour les équations aux dérivées partielles. ∎

Remarque 4.48 Rappel : $I_{10} : (H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1}) \to (L^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{L^2})$ n'est pas une identité topologique. Ou si on préfère la bijection linéaire $I_{10} : (H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1}) \to (H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{L^2})$ n'est pas bi-continue car les normes de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée sont très différentes : elles ne sont pas équivalentes. ∎

Exercice 4.49 Caractériser l'adjoint I_{10}^* de I_{10} (l'opérateur $I_{10} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ n'est pas autoadjoint car $H^1(\Omega) \ne L^2(\Omega)$).

Réponse. L'adjoint$I_{10}^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ est caractérisé par, cf. (2.21), pour $f \in L^2(\Omega)$:

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad (I_{10}^* f, v)_{H^1} = (f, I_{10}v)_{L^2}. \tag{4.33}$$

Donc $I_{10}^* f$ vérifie $(I_{10}^* f, v)_{L^2} + ((I_{10}^* f)', v')_{L^2} = (f, v)_{L^2}$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Donc la valeur $I_{10}^* f =^{\text{noté}} u \in H^1(\Omega)$ est solution de $(u', v')_{L^2} + (u, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On a existence et unicité de cette valeur u, cf. théorème de Lax–Milgram : c'est la solution du problème $-\Delta u + u = f$ pour les conditions aux limites de Neumann homogènes (conditions aux limites naturelles). Ainsi pour $f \in L^2(\Omega)$, on a caractérisé $I_{10}^* f = u$. ∎

Exercice 4.50 Soit $\tilde I_{10} : (H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1}) \to L^2(\Omega)$, la restriction de I_{10} à $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$. Caractériser l'adjoint $\tilde I_{10}^*$.

Réponse. $u = \tilde I_{10}^* f \in H_0^1(\Omega)$ est solution de $(u', v')_{L^2} + (u, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2}$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$: c'est la solution du problème de Dirichlet homogène $-\Delta u + u = f$. ∎

Exercice 4.51 Soit $\tilde{\tilde I}_{10} : (H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H_0^1}) \to L^2(\Omega)$, l'injection naturelle où $H_0^1(\Omega)$ est muni de son produit scalaire $(u, f)_{H_0^1(\Omega)} = (u', f')_{L^2}$ (cas Ω borné). Caractériser l'adjoint $\tilde{\tilde I}_{10}^*$.

Réponse. $u = \tilde I_{10}^* f \in H_0^1(\Omega)$ est solution de $(u', v')_{L^2} = (f, v)_{L^2}$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$: c'est la solution du problème de Dirichlet homogène $-\Delta u = f$. ∎

4.4 Théorème de Rellich : injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

4.4.1 Théorème de Rellich

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Le théorème de Rellich fut aisé à établir dans $\mathbb{R}$ (en dimension 1, voir ci-dessus), mais il est plus difficile à établir dans $\mathbb{R}^n$. On l'admet ici, les 2 paragraphes optionnels suivants donnant les indications pour la démonstration.

Théorème 4.52 *On suppose Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Alors l'injection canonique :*

$$\begin{aligned} I_{10} : (H^1(\Omega), ||.||_{H^1(\Omega)}) &\to (L^2(\Omega), ||.||_{L^2(\Omega)}), \\ u &\to I_{10}u = u, \end{aligned} \tag{4.34}$$

est compacte.

I.e., la boule unité fermé $\overline{B_1} = \{v \in H^1(\Omega) : ||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\text{grad}v||^2_{L^2(\Omega)} \leq 1\}$ de $H^1(\Omega)$ est compacte pour la norme $||.||_{L^2(\Omega)}$ (elle n'est évidemment pas compacte pour la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$, puisque $\overline{B_1}$ est la boule unité pour cette norme dans un espace de dimension infinie). Donc, de toute suite (u_n) de B_1, on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) qui est convergente dans $L^2(\Omega)$, i.e. :

$$\begin{aligned} &\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad ||u_n||_{H^1(\Omega)} \leq 1 \quad \forall n\Big), \\ &\Longrightarrow \Big(\exists v \in L^2(\Omega), \quad \exists (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ sous-suite}, \quad ||u_{n_k} - v||_{L^2(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Attention : il ne faut pas oublier d'indicer les normes, sinon cette propriété n'a pas de sens.

Remarque 4.53 Attention : si Ω n'est pas borné, l'injection canonique n'est pas compacte, voir remarque 4.45. ▪

4.4.2 * Théorème d'Ascoli

On donne ici des résultats classiques d'analyse fonctionnelle sur lesquelles est basée la démonstration du théorème de Rellich.

Avant de regarder les fonctions intégrables, on regarde les fonctions continues. On se donne un compact K de $\mathbb{R}^n$, et on se place dans l'espace de Banach $C^0(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs scalaires, espace muni de sa norme uniforme : pour $f \in C^0(K)$:

$$||f||_\infty = \sup_{\vec{x}\in K} |f(\vec{x})|. \tag{4.36}$$

On considère un sous-ensemble $F \subset C^0(K)$ qui est borné, i.e., tel que :

$$\exists c > 0, \quad F \subset \{f \in C^0(K) : ||f||_\infty \leq c\}. \tag{4.37}$$

Exercice 4.54 La boule unité $B_0 = \{f \in C^0(K) : ||f||_\infty \leq 1\}$ de $C(K)$ est un tel ensemble. ▪

On souhaite savoir dans quels cas un tel ensemble F est relativement compact ($C^0(K)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, et donc la boule unité fermé B_0 n'a aucune raison d'être compact ; attention, il n'y a pas de produit scalaire associé à la norme $||.||_\infty$ et donc C^0 n'est pas un Hilbert).

Définition 4.55 On dit que l'ensemble de fonctions F est équicontinu dans $C^0(K)$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x_1, x_2 \in K,\ d(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall f \in F : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{4.38}$$

Donc dans ce cas toutes les fonctions de F sont non seulement uniforméments continues (elles sont continues sur un compact), mais vérifient des propriétés d'uniformité entre elles (le même ε et le même δ pour toutes les fonctions).

Dire que F est équicontinu dans $C^0(K)$ s'écrit aussi :

$$\sup_{\substack{f\in F \\ x_1,x_2\in K \text{ t.q. } d(x_1,x_2)<\delta}} |f(x_1) - f(x_2)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{4.39}$$

Exemple 4.56 (Contre-exemple) Soit $K = [0, 1]$. La boule unité $B_0 = \{f \in C^0(K) : ||f||_\infty \leq 1\}$ n'est pas équicontinue dans $C^0(K)$:

prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et, à δ donné quelconque, prendre $f(x) = x^n$ et $x_2 = 1$ et $x_1 = 1 - \bar{\delta}$ ou $\bar{\delta} = \min(\delta, \frac{1}{2})$, puis choisir n assez grand pour que $x_2^n - x_1^n \geq \frac{1}{2}$ ce qui est toujours loisible puisque :

$x_2^n - x_1^n = 1 - (1 - \delta)^n \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 1.$

Faire un dessin : on voit que les pentes des fonctions $f_n(x) = x^n$ ne sont pas uniformément bornées, et le développement de Taylor au premier ordre $f_n(x) - f_n(1) = (x - 1)n + o(x - 1)$ (car $f'(1) = n$) indique que $f_n(x) - f_n(1)$ n'est pas contrôlé uniformément (i.e. indépendamment de n) par $(x - 1)$. ▪

Exemple 4.57 La boule unité de $C^1([0,1])$:

$$B_1 = \{f \in C^1([0,1]) : ||f||_\infty + ||f'||_\infty \le 1\},$$

est équicontinue dans $C^0(K)$. En effet, $|f(x)-f(y)| \le |x-y|\ ||f'||_\infty$ (inégalité des accroissements finis) et à ε donné, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$. Ici B_1 ne contient pas de fonctions dont les dérivées sont aussi grandes que souhaitées en norme $||.||_\infty$: on a $||f'||_\infty \le 1$.

On admet le théorème d'Ascoli :

Théorème 4.58 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors F est relativement compact dans $C^0(K)$ ssi F est un sous-ensemble borné et équicontinu de $C^0(K)$.*

Donc en particulier, la boule unité B_1 de $C^1([0,1])$ est relativement compact dans $C^0([0,1])$.

Preuve. Voir par exemple Hirsch et Lacombe [8].

4.4.3 * Théorème de Fréchet–Kolmogorov

Le théorème d'Ascoli caractérise les compacts F de $C^0(K)$. On souhaite maintenant caractériser les compacts de $L^2(\Omega)$ (généralisation du théorème d'Ascoli).

Notation. Pour $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, on note $\tau_{\vec{h}} f$ la fonction translatée de f :

$$\tau_{\vec{h}} f(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} f(\vec{x} - \vec{h}), \quad \forall \vec{x} \in \Omega. \tag{4.40}$$

(Si f est définie sur Ω alors $\tau_{\vec{h}} f$ est définie sur $\vec{h} + \Omega$, l'ouvert translaté de $\vec{h}$.)

Définition 4.59 Dans $\mathbb{R}^n$, on dit que l'ouvert ω est fortement inclus dans Ω si $\overline{\omega}$ est un compact et si $\overline{\omega} \subset \Omega$. Et on note alors $\omega \subset\subset \Omega$.

Pour les fonctions $f \in L^2(\Omega)$, on va considérer leurs restrictions $f_{|\omega}$ pour un $\omega \subset\subset \Omega$ donné de telle sorte que $t_{\vec{h}} f$ reste dans $L^2(\Omega)$ dès que $\vec{h}$ est suffisamment petit.

Théorème 4.60 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\omega \subset\subset \Omega$. Soit G un sous-ensemble borné de $L^2(\Omega)$ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ avec } \delta < \mathrm{dist}(\omega, \mathbb{R}^n - \Omega),\ \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ |\vec{h}| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall f \in G,\ ||\tau_{\vec{h}} f - f||_{L^2(\omega)} < \varepsilon. \tag{4.41}$$

Et soit G_ω l'ensemble des fonctions de G restreintes à ω. Alors G_ω est relativement compact.

Preuve. Admis : basé sur le théorème d'Ascoli après régularisation des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ (convolution par une suite régularisante). Voir par exemple Brézis [4].

La conclusion de (4.41) s'écrit :

$$\forall f \in G, \quad \int_\omega |f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})|^2\, dx \le \varepsilon^2,$$

à comparer avec la conclusion de (4.38) (conclusion du théorème d'Ascoli).

C'est l'application du théorème de Fréchet-Kolmogorov à la boule unité de $H^1(\Omega)$, qui permet de démontrer le théorème de Rellich.

5 Alternative de Fredholm

On s'intéresse au problème aux valeurs propres : pour H Hilbert et pour $T \in L(H)$:

$$\begin{cases} \text{trouver les couples } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times H \text{ t.q. :} \\ Tx = \lambda x. \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1 Énoncé de l'alternative de Fredholm

(5.1) correspond au problème : pour $b \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, trouver x dans H tel que

$$(T - \lambda I)x = b. \tag{5.2}$$

L'alternative de Fredholm nous dit que, si T est compact et si $\lambda \neq 0$, alors 2 situations et 2 seulement peuvent se présenter : celles de la dimension finie :

Théorème 5.1 *(Alternative de Fredholm.) Soit H un Hilbert. Si l'opérateur $T : H \to H$ est borné compact et si $\lambda \neq 0$ alors, comme pour la dimension finie,*

1. *Ou bien $\lambda \in \rho(T)$, et alors le problème (5.2) est bien posé : il admet une unique solution $x = (T-\lambda I)^{-1}b \in H$ qui dépend continûment de b avec $||x||_H \le c\,||b||$, où $c = ||(T-\lambda I)^{-1}||$. (En particulier l'équation homogène $(T-\lambda I)x = 0$ n'admet que la solution nulle.)*
2. *Ou bien $\lambda \in \sigma_p(T)$ et λ est valeur propre de multiplicité finie : le noyau $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et l'équation homogène $(T-\lambda I)x = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes.*
   Et le problème (5.2) n'admet de solutions que si $b \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)$, et plus précisément : b satisfait à $n = \dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda I))$ conditions de compatibilités (car $(T-\lambda I)^{-1}b = x \in \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$). Auquel cas si x_0 est une solution de (5.2), alors tout $x \in x_0 + \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ (espace affine de dimension n) est solution de (5.2) et il n'y a pas d'autre solution.

(Donc, le cas problématique $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$ n'intervient pas quand $\lambda \neq 0$ et T compact.)

Preuve. C'est un corollaire simple du théorème de Fredholm 5.3, voir § suivant. ∎

Interprétation. Ces résultats sont intuitifs : λ étant fixé, $\lambda \neq 0$, quitte à considérer $\frac{1}{\lambda}T$ au lieu de T, on considère le cas $\lambda = 1$, et le problème (5.2) s'écrit : pour $c \in H$, trouver $x \in H$ t.q.

$$(I - T)x = c. \tag{5.3}$$

Et avec T compact, T est une "petite perturbation de l'identité à l'infini", cf (4.10) : en ce qui concerne l'inversibilité, T n'a pas d'influence par rapport à I au voisinage des "dimensions à l'infini" (où T "écrase" les vecteurs contrairement à I qui les conserve).

Remarque 5.2 En revanche, pour $\lambda = 0$ on ne sait rien :

1- avec T compact et $\lambda = 0$ on peut avoir $\dim(\mathrm{Ker}T) = \infty$ (prendre par exemple $T = 0$ où 0 est valeur propre de multiplicité infinie),

2- avec T compact et $\lambda = 0$ on peut avoir l'opérateur T borné et bijectif mais d'inverse non borné, par exemple $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'opérateur de multiplication par la suite $(\lambda_n = \frac{1}{n})_{\mathbb{N}^*}$; dans ce cas $Tx = b$ a pour unique solution $x = T^{-1}b$ mais x ne dépend pas continûment de b (la matrice généralisée $[T]$ est "mal conditionnée"),

3- avec T non compact tous les cas présents et absents dans l'alternative de Fredholm peuvent se produire. ∎

5.2 Théorème de Fredholm

Soit $T \in K(H)$ (endomorphisme borné compact). Quitte à changer T en $\frac{T}{\lambda}$, on regarde si $\lambda = 1$ est valeur propre, i.e. on cherche les $x \in H$ t.q.

$$(I - T)x = 0, \tag{5.4}$$

On cherche donc à caractériser $\mathrm{Ker}(I-T) = \{x \in H : Tx = x\}$: c'est l'espace vectoriel t.q. $T_{|\mathrm{Ker}(I-T)} = I$.

Théorème 5.3 *(Théorème de Fredholm.) Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, et soit $T \in K(H)$ (un opérateur borné compact). Alors :*

(i) $\mathrm{Ker}(I-T)$ est de dimension finie,

(ii) la restriction $S = (I-T)_{|(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp}$ de $I-T$ à $(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$ est une application bijective bicontinue de $(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$ sur $\mathrm{Im}(I-T)$ (homéomorphisme linéaire),

(iii) $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermé (et ainsi S est bicontinu entre deux Hilbert).

(iv) $\mathrm{Ker}(I-T) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(I-T) = H$ (et donc $1 \notin \sigma_p(T) \Leftrightarrow 1 \in \rho(T)$ car ici $I-T$ est bijectif bicontinu).

Preuve. (i) $\mathrm{Ker}(I-T) = (I-T)^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé (l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $I-T$). Donc $K = (\mathrm{Ker}(I-T), (\cdot,\cdot)_H)$ est un Hilbert ; sa boule unité est

$$B_K = \{x \in H,\ ||x||_H < 1,\ Tx = x\} = \{x \in B_H,\ Tx = x\}, \quad \text{donc} \quad B_K = T(B_K)$$

($x \in B_K \Rightarrow Tx = x \in T(B_K)$, $y \in T(B_K) \Rightarrow \exists x \in B_K$ t.q. $y = Tx = x \in B_K$). Et $B_K \subset B_H$ la boule unité de H, donc

$$B_K = T(B_K) \subset T(B_H), \text{ donc } B_K \text{ relativement compacte car } T \text{ compact.}$$

Donc l'Hilbert $(\mathrm{Ker}(I-T), (\cdot,\cdot)_H)$ est de dimension finie, voir théorème 4.16.

(ii) $\mathrm{Ker}(I-T) = (I-T)^{-1}\{0\}$ étant un sous-espace vectoriel fermé, $H = \mathrm{Ker}(I-T) \oplus \mathrm{Ker}(I-T)^\perp$. Donc l'opérateur (restriction)

$$S = (I-T)_{|(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp} : \begin{cases} (\mathrm{Ker}(I-T))^\perp & \to \mathrm{Im}(I-T) = \mathrm{Im}(S) \\ \qquad\qquad x & \to Sx = x - Tx \end{cases}$$

est linéaire continu (car I et T le sont), et est bijectif, car injectif par définition de $(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$ et surjectif par définition de $\mathrm{Im}S = \mathrm{Im}(I-T)$. Donc $S^{-1} : \left\{\begin{matrix} \mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(I-T) & \to (\mathrm{Ker}(I-T))^\perp \\ y & \to x = S^{-1}y, \end{matrix}\right\}$ existe. Il reste à montrer que S^{-1} est continue (bornée sur la boule unité). Sinon il existe une suite $(z_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $\mathrm{Im}(S)$ t.q. $||z_n||_H = 1$ et $||S^{-1}z_n||_H \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$, i.e. (en posant $y_n = \frac{z_n}{||z_n||_H}$),

$$\exists (y_n)_{\mathbb{N}^*} \in \mathrm{Im}(S) \quad \text{t.q.} \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad ||S^{-1}y_n||_H = 1, \ \forall n. \tag{5.5}$$

Donc, avec $y_n = Sx_n = x_n - Tx_n$ où $x_n \in (\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$:

$$x_n - Tx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad ||x_n||_H = 1, \ \forall n. \tag{5.6}$$

Et $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ est bornée car $x_n \in B_H$ la boule unité (fermé) de H, et T compact implique $\overline{T(B_H)}$ compact dans H, donc, quitte à extraire une sous-suite, la suite $(Tx_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge dans H :

$$\exists \ell \in H, \quad Tx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{donc} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \tag{5.7}$$

(car $0 \le ||x_n - \ell||_H \le ||x_n - Tx_n||_H + ||Tx_n - \ell||_H \longrightarrow_{n\to\infty} 0 + 0$), et T continu donc $Tx_n \to T\ell$ donc $\ell - T\ell = \lim x_n - \lim Tx_n = \lim(x_n - Tx_n) = 0$ (car T est continu donc), donc

$$\ell \in \mathrm{Ker}(I-T). \tag{5.8}$$

Et $x_n \in (\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$ fermé, $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$. Donc $\ell \in \mathrm{Ker}(I-T) \cap (\mathrm{Ker}(I-T))^\perp = \{0\}$, donc $\ell = 0$. Donc $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Avec $||x_n||_H = 1$ pour tout n : absurde. Donc supposer S^{-1} non borné est absurde : donc S^{-1} est borné.

(iii) $\mathrm{Im}(I-T) = S^{-1}((\mathrm{Ker}(I-T))^\perp)$ est fermé dans H, car S^{-1} est continu et $(\mathrm{Ker}(I-T))^\perp$ est fermé.

(iv)($\Rightarrow$) Supposons que $\mathrm{Ker}(I-T) = \{0\}$, i.e. $S = I-T : H \to \mathrm{Im}(I-T)$ est bijectif. Supposons de plus que $S(H) = \mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(I-T) \ne H$ et montrons : c'est absurde si T est compact.

Notons $H_0 := H$ et $H_1 = S(H_0)$. On a supposé $H_1 \subsetneq H_0$, et on a H_1 fermé cf (iii), donc si $x \in H_0 - H_1$, sa projection orthogonale x_0 sur H_1 existe et $e_0 = \frac{x-x_0}{||x-x_0||_H} \perp H_1$, avec $Se_0 \in H_1$ par définition de H_1. (Dessin.)

Soit $H_2 = S(H_1) = S(S(H_0))$: H_2 est fermé car H_1 l'est et S est bicontinu. Et $S(H_0) \subset H_0$ donne $S(S(H_0)) \subset S(H_0)$, donc $H_2 \subset H_1$. Et $H_2 \subsetneq H_1$: sinon $H_2 = H_1$ i.e., $S(S(H_0)) = S(H_0)$, donc $S(H_0) = H_0$ puisque S est bijectif, et donc $H_1 = H_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, démarche précédente, il existe $e_1 \in H_1$, $||e_1|| = 1$, $e_1 \perp H_2$ et $Se_1 \in H_2 = S(H_1)$.

Par récurrence on pose $H_n = S(H_{n-1})$: on a ainsi construit une suite $(H_n)_{\mathbb{N}}$ strictement décroissante d'espaces fermés et la suite orthonormale $(e_n)_{\mathbb{N}}$ des vecteurs $e_n \in H_n$ tels que $||e_n|| = 1$ et $e_n \in H_{n+1}^\perp$ et $Se_n \in H_{n+1}$. Et donc (Pythagore car $e_n \perp Se_n$) :

$$||Te_n|| = ||(I-S)e_n|| = ||e_n - Se_n|| = (||e_n||^2 + ||Se_n||^2)^{\frac{1}{2}} \ge ||e_n|| = 1. \tag{5.9}$$

La suite orthonormale $(e_n)_{\mathbb{N}}$ est telle que $||Te_n||$ ne converge pas vers 0 et donc T n'est pas compact : absurde puisque par hypothèse T est compact. Donc $\mathrm{Im}(I-T) = H$.

(iv)($\Leftarrow$) Supposons $H = \mathrm{Im}(I-T)$. Donc $\{0\} = (\mathrm{Im}(I-T))^\perp = \mathrm{Ker}((I-T)^*) = \mathrm{Ker}(I-T^*)$. Et T^* est compact car T l'est (corollaire 4.33), donc $\mathrm{Ker}(I-T^*) = \{0\}$ donne $\mathrm{Im}(I-T^*) = H$, cf. (iv)($\Rightarrow$). Donc $\mathrm{Im}(I-T^*)^\perp = \{0\}$, et $\mathrm{Im}(I-T^*)^\perp = \mathrm{Ker}(I-T)$, donc $\mathrm{Ker}(I-T) = \{0\}$. ∴

Corollaire 5.4 *On en déduit le théorème 5.1 (l'alternative de Fredholm).*

Preuve. Soit $\lambda \ne 0$. Si T compact alors $\frac{T}{\lambda}$ est compact (immédiat cf. lemme 4.19), et le théorème de Fredholm s'applique en considérant $I - \frac{T}{\lambda}$ au lieu de $I - T$.

1- (i) et (iv) indiquent que si $\mathrm{Ker}(I - \frac{T}{\lambda}) = \{0\}$ alors il y a existence et unicité d'une solution à (5.2) quelque soit $b \in H$ (car $(T - \lambda I)x = b$ équivaut à $(I - \frac{T}{\lambda})x = \frac{-b}{\lambda}$). De plus, $S = (I - \frac{T}{\lambda})^{-1} : H \to H$ étant continu cf. (iii), $(T-\lambda I)^{-1} = -\lambda(I-\frac{T}{\lambda}) : H \to H$ est continu, et $x = (T-\lambda I)^{-1}b$ dépend continûment de b. Donc $\lambda \in \rho(T)$. D'où le 1- de l'alternative.

2- Sinon $\mathrm{Ker}(T-\lambda I) = \mathrm{Ker}(I-\frac{T}{\lambda}) \neq \{0\}$, et donc $\lambda \in \sigma_p(T)$. Donc :

21- si $b \notin \mathrm{Im}(T-\lambda I) = \mathrm{Im}(I-\frac{T}{\lambda})$, alors il n'y a pas de solution (par définition de l'image), et

22- si $b \in \mathrm{Im}(T-\lambda I) = \mathrm{Im}(I-\frac{T}{\lambda})$, alors il y a une solution x, et tout $x' \in x+\mathrm{Ker}(T-\lambda I) = x+\mathrm{Ker}(I-\frac{T}{\lambda})$ est solution. Et avec $S : (I-\frac{T}{\lambda})^\perp \to \mathrm{Im}(I-\frac{T}{\lambda})$ bijectif, on a $S^{-1}b \in (\mathrm{Ker}(I-\frac{T}{\lambda}))^\perp$ sous-espace de codimension n dans H, et donc $S^{-1}b$ satisfait à n contraintes linéaires indépendantes caractérisées par, avec $(e_i)_{i=1,...,n}$ une base de $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$, $(S^{-1}b, e_i)_H = 0$ pour $i = 1, ..., n$. ∎

Exemple 5.5 Pour $T \in L(\ell^2)$ l'opérateur de multiplication par une suite (λ_n) t.q. $\lambda_n \longrightarrow_{n\to 0} 0$. Donc T est compact. Pour $\lambda \neq 0$, et pour $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ donné, on cherche $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ solution de :

$$(T-\lambda I)\vec{x} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda_n - \lambda)x_n = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors on a (alternative de Fredholm : $\lambda \neq 0$ et T est compact) :

1- soit il y a une seule solution $\vec{x}$ et cette solution est immédiatement donnée par $x_n = \frac{b_n}{\lambda-\lambda_n}$ pour tout n ; donc on est dans le cas $\lambda \neq \lambda_n$ pour tout n (on rappelle qu'on a supposé $\lambda \neq 0$).

Et de plus $||\vec{x}||_{\ell^2} \leq c||\vec{b}||_{\ell^2}$ avec $c = \sup_n |\frac{1}{\lambda-\lambda_n}|$ (dépendance continue de $\vec{x}$ en fonction de $\vec{b}$), car $\sum_n x_n^2 = \sum_n \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2} b_n^2 \leq c^2 \sum_n b_n^2$,

2- soit λ est valeur propre de multiplicité m, i.e. $\exists n_1, ..., n_m$ t.q. $\lambda = \lambda_{n_k}$ pour $k = 1, ..., m$ (et m est fini car $\lambda_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $\lambda \neq 0$), et alors

21- soit il y a 0 solution si $\vec{b} \notin \mathrm{Im}(T-\lambda I)$, i.e. si $b_{n_k} \neq 0$ pour tout $k = 1, ..., m$,

22- soit $\vec{b} \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)$ et il y a un nombre fini m de solutions indépendantes avec m conditions de compatibilité, à savoir $b_{n_k} = 0$ pour tout $k = 1, ..., m$.

N.B. : le cas $\lambda = 0$ n'est pas dans l'alternative. Il doit donc être traité à part (cas particulier). Exemple de la suite ($\lambda_n = \frac{1}{n}$) (on a $\lambda_n \neq 0$ pour tout n). La solution de $T\vec{x} = \vec{b}$ existe et est unique : $x_n = -\frac{b_n}{\lambda_n}$ pour tout n, mais n'est pas calculable numériquement car $\frac{1}{\lambda_n} = n \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$; ici $||T^{-1}|| = \sup_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{|\lambda_n|} = \infty$, et T^{-1} non borné, et $\vec{x}$ ne dépend pas continûment de $\vec{b}$ (problème mal posé). ∎

6 Spectre et théorèmes de Riesz–Schauder

6.1 Spectre et théorème de Riesz–Schauder 1ère partie

Théorème 6.1 *(Riesz–Schauder, 1ère partie) Soit H un Hilbert de dimension infinie. Si $T \in K(H)$ (i.e. borné compact) alors :*

$$\sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}, \tag{6.1}$$

i.e., tout élément non nul du spectre est valeur propre de T. (On rappelle que $0 \in \sigma(T)$, cf. thm 4.26).

Preuve. (Alternative de Fredholm.) Soit $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$. Si $\lambda \notin \sigma_p(T)$ alors $\mathrm{Ker}(T-\lambda I) = \{0\}$ et l'alternative de Fredholm, cf. thm 5.3-(iv)-(ii), donne $\mathrm{Im}(T-\lambda I) = H$ et $\lambda I - T : H \to H$ est bijectif bicontinu, donc $\lambda \in \rho(T)$, donc $\lambda \notin \sigma(T)$. Absurde. D'où $\lambda \in \sigma_p(T)$. Et $\sigma(T) \supset \sigma_p(T)$, cf. prop. 3.13, d'où (6.1). ∎

Exercice 6.2 Montrer que l'opérateur de l'exemple 3.16 n'est pas compact.

Réponse. $\sigma(T) = [0, 1]$ et $\sigma_p(T) = \emptyset$, donc ici $\sigma(T) - \{0\} \neq \sigma_p(T) - \{0\}$. ∎

6.2 $\lambda = 0$ seul point éventuel d'accumulation dans $\sigma(T)$

Lemme 6.3 *Si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont n valeurs propres distinctes d'un opérateur $T : H \to H$, alors n vecteurs propres associés $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ forment une famille libre. Donc si T a une infinité de valeurs propres λ_n, $n \in \mathbb{N}^*$ distinctes et associées aux vecteurs propres $\vec{e}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathrm{Vect}\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est de dimension infinie.*

Preuve. Récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n = \mathrm{Vect}\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. Supposons $\dim(E_n) = n$. C'est vrai pour n=1 : $\dim(E_1) = 1$ (un vecteur propre est non nul par définition). Montrons : $\dim(E_{n+1}) = n+1$. Sinon (généralisation de l'exercice B.11), soit $n \in \mathbb{N}^*$ le premier indice tel que $E_{n+1} = E_n$ (car $E_{n+1} \supset E_n$). Donc $\vec{e}_{n+1} \in E_n$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{n+1} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \quad \text{d'où} \quad \lambda_{n+1}\vec{e}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1}\vec{e}_i, \\ \text{et} \quad T\vec{e}_{n+1} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i T\vec{e}_i \quad \text{donc} \quad \lambda_{n+1}\vec{e}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i, \end{aligned} \tag{6.2}$$

donc, par différence,

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i)\vec{e}_i, \tag{6.3}$$

et comme les λ_i sont tous distincts et $(\vec{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ est une famille libre, on déduit que les α_i sont tous nuls. Absurde puisque $\vec{e}_{n+1} \neq 0$ (par définition d'un vecteur propre). Donc $\dim(E_{n+1}) = n+1$.

Et $\mathrm{Vect}\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}^*\} \supset E_n$ pour tout n, donc $\dim \mathrm{Vect}\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}^*\} = \infty$. ∎

Lemme 6.4 *Soit H Hilbert de dimension infinie. Si $T \in K(H)$ (opérateur borné compact) alors 0 est le seul point d'accumulation éventuel de $\sigma(T)$ et de $\sigma_p(T)$: tous les $\lambda \in \sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}$ sont isolés.*

(Résultat important pour les fréquences de résonance du laplacien : il n'y a pas de "continuum de fréquences", i.e. les fréquences de résonances sont "bien séparées" les unes des autres.)

Preuve. Par l'absurde. Soit $\lambda \in \sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}$ un point d'accumulation de $\sigma(T)$. Donc il existe une suite $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ de réels non nuls tous distincts dans $\sigma_p(T)$ qui converge vers λ, et on note $\vec{e}_n$ un vecteur propre normé associé à λ_n : $T\vec{e}_n = \lambda_n \vec{e}_n$ et $||\vec{e}_n||_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathrm{Vect}\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) engendré par ces vecteurs propres.

1. Cas simple : T autoadjoint. Alors $(\vec{e}_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une orthonormale, donc $T\vec{e}_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ car T est compact. Donc $\lambda_n \to 0$: incompatible avec $\lambda \neq 0$. Donc un $\lambda \neq 0$ n'est pas un point d'accumulation.

2. Sinon $T \neq T^*$. Quitte à changer T en $-T$, supposons $\lambda > 0$, et quitte à ne considérer la suite (λ_n) que pour n assez grand, on suppose $\lambda_n > \frac{\lambda}{2}$ pour tout n. On construit alors une b.o.n. $(\vec{f}_n)_{\mathbb{N}^*}$ de E par le procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt : on pose $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 \in E_1$, puis, pour $n \geq 2$, $\vec{f}_n = \sum_{i=1}^n c_{ni}\vec{e}_i \in E_n$ t.q. $\vec{f}_n \perp E_{n-1}^\perp$ et $||\vec{f}_n||_H = 1$. Montrons : $(T\vec{f}_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'a pas de sous-suite de Cauchy. On a $T\vec{f}_n = \sum_{i=1}^n c_{ni} T\vec{e}_i = \sum_{i=1}^n c_{ni}\lambda_i\vec{e}_i$, donc :

$$\vec{f}_n \in E_n \quad \text{et} \quad T\vec{f}_n - \lambda_n\vec{f}_n \in E_{n-1}.$$

D'où, pour $n > m$,

$$T\vec{f}_n - T\vec{f}_m = \Big((T - \lambda_n I)\vec{f}_n - T\vec{f}_m\Big) + \lambda_n\vec{f}_n \;\in E_{n-1} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\{\vec{f}_n\},$$

d'où (Pythagore)

$$||T\vec{f}_n - T\vec{f}_m||_H \geq \lambda_n ||\vec{f}_n||_H \geq \frac{\lambda}{2} > 0.$$

Donc aucune sous-suite de $(T\vec{f}_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est de Cauchy, absurde pour T compact car $\vec{f}_n \in \overline{B_H}$ borné. Donc un $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ n'est pas un point d'accumulation dans $\sigma(T)$. ∎

6.3 Spectres et théorème de Riesz–Schauder 2ème partie

Théorème 6.5 *(Riesz–Schauder, 2ème partie) Si H est un Hilbert de dimension infinie, et si T est un opérateur borné compact alors*

$\sigma(T)$ est une suite au plus dénombrable qui tend vers 0. De même pour $\sigma_p(T)$.

Preuve. Pour $n \geq 1$, notons $\Lambda_n = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\} \subset [\frac{1}{n}, ||T||]$, cf. prop. 3.13. Donc Λ_n est vide ou fini (lemme 6.4 : ne peut pas contenir de point d'accumulation). Et $\bigcup_{i=1}^\infty \Lambda_n$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. Donc $\sigma(T) - \{0\} = \bigcup_{i=1}^\infty \Lambda_n$ est au plus dénombrable. ∎

7 Décomposition spectrale des op. bornés compacts autoadjoints

On conserve le résultat de la dimension finie (matrice symétrique réelle $\Rightarrow$ diagonalisable) pour les opérateurs T à valeurs réelles qui sont bornés autoadjoints et compacts :

$$T \in \mathcal{L}(H) \text{ compact autoadjoint } \implies T \text{ est diagonalisable dans une b.o.n. } (\vec{e}_n) \text{ de } H. \tag{7.1}$$

Théorème 7.1 *(de décomposition spectrale des opérateurs bornés compacts autoadjoints dans un Hilbert.) Soit H un Hilbert séparable de dimension infinie et soit $T \in K(H)$ t.q. $T = T^*$ (opérateur borné compact autoadjoint). On a : T est diagonalisable dans une base hilbertienne (une b.o.n.) de H :*

$$\exists(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}^*}, \quad \exists(\vec{e}_n)_{\mathbb{N}^*} \textit{ b.o.n. de } H \quad \textit{t.q.} \quad \begin{cases} T\vec{e}_n = \lambda_n \vec{e}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \textit{de plus } \lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Autrement dit H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T avec de plus $\lambda_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Et

$$\textit{les } \lambda_n \textit{ non nulles sont de multiplicité finie.} \tag{7.3}$$

Preuve. On suppose $\dim H = \infty$ (le cas des endomorphismes en dimension finie est connu).

1- Cas $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre. Soit $d_i = \dim(\mathrm{Ker}(T - \lambda_i I) < \infty$ la multiplicité (finie cf. l'alternative de Fredholm) des v.p. λ_i ; on choisit une b.o.n. $(\vec{e}_{ik})_{k=1,d_i}$ dans chaque $\mathrm{Ker}(T - \lambda_i I)$. Quitte à compter les λ_i autant de fois que leur multiplicité (finie), on renumérote les valeurs et vecteurs propres, qui sont au nombre de $J \in \overline{\mathbb{N}}$ (fini ou infini). Avec $(\lambda_i)_J$ bornée car T est borné et $(\vec{e}_i)_{i=1,\dots,J}$ famille orthonormée car $T = T^*$.

Soit $F = \mathrm{Vect}\{\vec{e}_n, n \in J\}$ l'espace vectoriel qu'ils engendrent. Montrons que F est dense dans H, donc qu'on a un nombre infini de valeurs propres et que $(\vec{e}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de vecteurs propres. I.e., ayant $E = \overline{F} \oplus^\perp F^\perp$, montrons : $F^\perp = \{0\}$.

* On a F est stable par T, i.e. $T(F) \subset F$, puisque tout élément $x \in F$ s'écrit $x = \sum_i x_i \vec{e}_i$, donc $y = Tx = \sum_i (x_i \lambda_i)\vec{e}_i \in F$ (on a $y \in H$ car $(\lambda_i)_J$ est bornée).

* Et $T = T^*$ donc $F^\perp$ stable par T, i.e. $T(F^\perp) \subset F^\perp$: en effet $T(F) \subset F$ et $T = T^*$ donnent :

$$x \in F^\perp \;\Rightarrow\; \forall y \in F \;\; (\text{donc } Ty \in F), \;\; (x, Ty)_E = 0 = (Tx, y)_E \;\Rightarrow\; Tx \in F^\perp. \tag{7.4}$$

* Considérons la restriction $T_{|F^\perp} : \begin{Bmatrix} F^\perp & \to F^\perp \\ x & \to T_{|F^\perp} x = Tx \end{Bmatrix}$ de T à $F^\perp$. On a $T_{|F^\perp}$ autoadjoint et compact car T l'est. Supposons $\exists \lambda \in \sigma_p(T_{|F^\perp})$, et on note $\vec{e} \in F^\perp - \{\vec{0}\}$ un vecteur propre associé, donc $T_{|F^\perp}\vec{e} = \lambda\vec{e}$, donc $T\vec{e} = \lambda\vec{e}$, donc $\vec{e}$ est vecteur propre de T donc $e \in F$, donc $\vec{e} \in F \bigcap F^\perp$, donc $\vec{e} = 0$. Ayant suppose $e \neq 0$ c'est absurde. Donc $\sigma(T_{|F^\perp}) = \{0\}$ cf. thm 4.26, et $T_{|F^\perp}$ autoadjoint, donc $T_{|F^\perp} = 0$ cf. prop 3.22,4. Donc $F^\perp = \{0\}$ (car $F^\perp \subset \mathrm{Ker}T = \{0\}$ car 0 n'est pas valeur propre ici). Donc $H = \overline{F} \oplus F^\perp = \overline{F}$.

Et T compact, donne $T\vec{e}_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, donc $\lambda_n \vec{e}_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, donc $\lambda_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Et les λ_n sont de multiplicité car $\dim(\mathrm{Ker}(T - \lambda I) < \infty$ (alternative de Fredholm).

2- Cas $\lambda = 0$ est valeur propre : on prend une base hilbertienne dans $\mathrm{Ker}T$ qu'on complète par la base hilbertienne de vecteurs propres définissant F ci-dessus. Ayant $F \perp \mathrm{Ker}T$ (car $T = T^*$), la famille libre obtenue engendre un espace G dense dans H (comme précédemment on montre que $T_{|G^\perp} = 0$ et donc que $G^\perp = 0$) : on a une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres. ∎

8 Forme variationnelle : théorie spectrale, application au Laplacien

But : trouver les “fréquences de résonance” du Laplacien, et plus généralement des opérateurs elliptiques, et mieux, trouver une b.o.n (de Fourier) dans $L^2(\Omega)$ adaptée à notre problème.

8.1 Problèmes fort et faible, problèmes spectraux associés, opérateur T

Cadre : H et V Hilbert t.q. $V \subset H$, et $f \in H$ et $A \in \mathcal{L}(V;H)$.
• Problème fort (problème initial) : trouver $u \in V$ t.q.

$$\boxed{Au = f}, \quad \text{i.e.} \quad u = Tf \quad \text{quand} \quad T = A^{-1}. \tag{8.1}$$

Problème spectral fort associé : trouver les $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V$ (couples (valeur propre, vecteur propre)) t.q.

$$\boxed{Au = \lambda u}, \quad \text{i.e.} \quad Tu = \frac{1}{\lambda}u. \tag{8.2}$$

• Problème faible associé : avec $a(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(V,V;\mathbb{R})$ forme bilinéaire associée à A : trouver $u \in V$ t.q., pour tout $v \in V$,

$$\boxed{a(u,v) = (f,v)_H}, \quad \text{donc} \quad , \tag{8.3}$$

et on aura donc $a(Tf,v) = (f,v)_H$, i.e. $a(A^{-1}f,v) = (f,v)_H$ (très utile pour la suite).
Problème spectral faible associé : trouver les $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V$ t.q., pour tout $v \in V$

$$\boxed{a(u,v) = \lambda(u,v)_H}. \tag{8.4}$$

(C'est bien le produit scalaire dans H dans le membre de droite, comme pour $a(u,v) = (f,v)_H$ cf. (8.3).)

• Opérateur T : supposant $f \in H$ et l'injection canonique I_{10} : $\left\{\begin{array}{l} V \to H \\ v \to I_{10}u = u \end{array}\right\}$ bornée, la forme linéaire $\ell : v \in V \to \ell(v) := (f,v)_H$ est bornée, car $|\ell(v)| \le ||f||_H||v||_H \le ||f||_H||I_{10}||\,||v||_H$ donne $||\ell|| \le ||f||_H||I_{10}||$. Et donc, supposant $a(\cdot,\cdot)$ bilinéaire continue et α-coercitive sur V, les hypothèses du thm de Lax–Milgram sont satisfaites ; donc (8.3) est bien posé : la solution u de (8.3) existe, est unique, et dépend continument de f, ce qui définit

$$T : \left\{\begin{array}{ll} H \to V & \\ f \to u = Tf & \text{la solution de (8.3)} \end{array}\right\} \text{ opérateur borné : } ||Tf||_V \le \frac{||I_{10}||}{\alpha}||f||_H. \tag{8.5}$$

Exemple 8.1 $H = V = \mathbb{R}^n$ usuel, $f = \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, avec A matrice $n * n$.
Problèmes fort (problème initial) et faibles : trouver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q.

$$\begin{array}{l} \bullet\ A\vec{x} = \vec{b}, \quad \text{i.e.} \quad \vec{x} = T\vec{b} \quad \text{quand} \quad T = A^{-1}, \quad \text{et} \\ \bullet\ a(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{b},\vec{y})_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{8.6}$$

Problèmes spectraux associé : trouver les $(\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ t.q.

$$\begin{array}{l} \bullet\ A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \text{i.e.} \quad T\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}, \quad \text{et} \\ \bullet\ a(\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y})_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{8.7}$$

Et on aura $a(T\vec{b},\vec{y}) = (\vec{b},\vec{y})_{\mathbb{R}^n}$ (très utile pour la suite). ∴

Exemple 8.2 $(H,(\cdot,\cdot)_H) = (L^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{L^2})$, $(V,(\cdot,\cdot)_V) = (H_0^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_{H^1})$, $f \in L^2(\Omega)$, avec $A =^{\text{noté}} -\Delta$ l'opérateur $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ du problème “trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $(-\Delta)u = f$” (Dirichlet homogène).
Problèmes fort (problème initial) et faibles : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\begin{array}{l} \bullet\ (-\Delta)u = f, \quad \text{i.e.} \quad u = Tf \quad \text{quand} \quad T = (-\Delta)^{-1}, \quad \text{et} \\ \bullet\ a(u,v) = (f,v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \text{où} \quad a(u,v) = (\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)_{L^2}. \end{array} \tag{8.8}$$

Problèmes spectraux associé : trouver les $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\begin{array}{l} \bullet\ (-\Delta)u = \lambda u, \quad \text{i.e.} \quad Tu = \frac{1}{\lambda}u, \quad \text{et} \\ \bullet\ a(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \tag{8.9}$$

Et on aura $a(Tf,v) = (f,v)_H$ (très utile pour la suite). ∴

8.2 L'opérateur T et "petit problème"

8.2.1 L'opérateur T

Solution $u = Tf$ de (8.3) dans le cadre du § 8.3.2 :

On a $\ell : v \in V \to \ell(v) = (f,v)_H$ trivialement linéaire, et $|\ell(v)| \le ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \le ||f||_{L^2(\Omega)}||I_{10}||\,||v||_{H_0^1}$, donc ℓ est continue sur V avec $||\ell|| \le ||f||_{L^2(\Omega)}||I_{10}||$, donc, $a(\cdot,\cdot)$ étant bilinéaire continue coercitive sur V, on peut appliquer le théorème de Lax–Milgram : le problème (8.3) est bien posé dans V : $\exists! u = u(f) =^{\text{noté}} T(f) \in H_0^1(\Omega)$ qui dépend continûment de f :

$$||u||_V \le \frac{||I_{10}||}{\alpha}||f||_H, \quad \text{i.e.} \quad ||T(f)||_V \le \frac{||I_{10}||}{\alpha}||f||_H. \tag{8.10}$$

Cela définit

$$T : \left\{ \begin{array}{ll} H & \to V \\ f & \to T(f) := u \in V \end{array} \right\}, \quad \text{où donc } \boxed{a(Tf,v) = (f,v)_H}, \quad \forall v \in V, \tag{8.11}$$

où $T(f) =^{\text{noté}} Tf$ car T est linéaire (trivial car $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire), et T est borné : $||T||_{\mathcal{L}(H;V)} \le \frac{||I_{10}||}{\alpha}$.

Exemple « trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ » (laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes) :

$$T : \left\{ \begin{array}{ll} L^2(\Omega) & \to H_0^1(\Omega) \\ f & \to Tf = u \overset{\text{noté}}{=} -\Delta^{-1} f \end{array} \right\} \overset{\text{noté}}{=} -\Delta^{-1}, \quad \text{et} \quad T \text{ est linéaire borné.} \tag{8.12}$$

8.2.2 "Petit" problème pour la diagonalisation de T

Exemple « trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ » : l'opérateur $(-\Delta)$ n'est pas borné, et on ne pourra pas appliquer le théorème spectral : on ne regarde pas le problème spectral $-\Delta u = \lambda u$. Mais avec $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de $-\Delta u = f$ (Lax–Milgram), on regarde $T := (-\Delta)^{-1}$: $\left\{ \begin{array}{ll} L^2(\Omega) & \to H_0^1(\Omega) \\ f & \to u = Tf \end{array} \right\}$ qui est borné (Lax–Milgram), et le problème aux valeurs propres :

$$Tf = \mu f, \quad \text{et on aura } \lambda = \frac{1}{\mu}. \tag{8.13}$$

Mais pour "diagonaliser" T on a besoin de T endomorphisme, mais ici ($T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$). On va commencer par regarder la restriction $T_r := T_{|H_0^1(\Omega)}$: $\left\{ \begin{array}{ll} H_0^1(\Omega) & \to H_0^1(\Omega) \\ f & \to T_r f = Tf \end{array} \right\}$:

8.3 L'opérateur restreint $T_r = T \circ I_{10}$: endomorphisme borné et compact

8.3.1 Définition

$T : H \to V$ est donné par (8.5). Soit T_r l'endomorphisme "l'opérateur T restreint à V" :

$$T_r : \left\{ \begin{array}{ll} V & \to V \\ f & \mapsto T_r f := Tf \;\; (= u), \end{array} \right. \quad \text{où donc } \boxed{a(T_r f,v) = (f,v)_H}, \quad \forall v \in V, \quad \text{pour } f \in V. \tag{8.14}$$

Exemple pour (8.13) : on s'intéresse uniquement au cas des "données régulières" $f \in H_0^1(\Omega)$.

Autrement dit, avec (8.17), T_r est défini sur V par

$$\boxed{T_r = T \circ I_{10}} := \left\{ \begin{array}{l} (V, ||.||_V) \\ f \end{array} \right\} \xrightarrow{I_{10}} \left\{ \begin{array}{c} (H, ||.||_H) \\ I_{10}(f) = f \end{array} \right\} \xrightarrow{T} \left\{ \begin{array}{c} (V, ||.||_V) \\ T_r(f) \end{array} \right\}. \tag{8.15}$$

Attention aux normes, voir remarque 4.42.

8.3.2 Cadre et hypothèses

Pour pouvoir appliquer le théorème spectral on aura besoin des hypothèses :

1-
$$(V,(\cdot,\cdot)_V) \text{ et } (H,(\cdot,\cdot)_H) \text{ sont deux Hilbert,} \quad \text{t.q.} \quad V\subset H, \quad \text{et} \tag{8.16}$$
l'injection canonique $I_{10} : \left\{ \begin{array}{rl} (V,||.||_V) & \to (H,(\cdot,\cdot)_H) \\ f & \mapsto I_{10}f := f \end{array} \right\}$ (trivialement linéaire) est continue et compacte :
$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c>0,\ \forall v\in V,\ ||v||_H \le c||v||_V, \quad \text{et} \\ I_{10}(B_V) \text{ est relativement compact dans } H, \end{array} \right. \tag{8.17}$$
où $B_V = \{v\in V : ||v||_V < 1\}$ (boule unité de V). On note $||I_{10}||$ la norme de I_{10} (donc $||I_{10}|| = \sup_{v\in B_V} ||I_{10}v||_{L^2}$ = la plus petite des constantes c).

2- $a(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}(V;V;\mathbb{R})$ (forme bilinéaire sur V) est continue, coercitive **et** symétrique sur V :
$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c_a>0, \quad \forall u,v\in V, \quad |a(u,v)| \le c_a\,||u||_V||v||_V, \\ \exists \alpha>0, \quad \forall v\in V, \quad a(v,v)\ge \alpha ||v||_V^2, \\ \forall u,v\in V, \quad a(u,v)=a(v,u). \end{array} \right. \tag{8.18}$$
(En plus des hypothèses de Lax–Milgram on a besoin de $a(\cdot,\cdot)$ symétrique.)

On note $||a||$ la norme de $a(\cdot,\cdot)$ (donc $||a|| = \sup_{u,v\in B_V} |a(u,v)|$ = la plus petite des constantes c_a).

Lemme 8.3 *Avec (8.18), $a(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire qui est équivalent au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$: on note $a(u,v) =^{\text{noté}} (u,v)_a$ et $||v||_a := \sqrt{(v,v)_a}$ (norme associée), et on a*
$$\sqrt{\alpha}||v||_V \le ||v||_a \le \sqrt{||a||}\,||v||_V. \tag{8.19}$$
En particulier $(V,(\cdot,\cdot)_a)$ est un espace de Hilbert (l'espace V muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_a$).

Preuve. Immédiat avec(8.18). ∎

8.3.3 $T_r : V\to V$ est un endomorphisme borné et compact

Lemme 8.4 *Sous les hypothèses (8.16)-(8.18)-(8.17), l'endomorphisme $T_r : (V,||.||_a) \to (V,||.||_a)$ défini en (8.14) est borné, compact, autoadjoint, positif :*
$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c>0,\ \forall f\in V,\ ||T_rf||_a \le c\,||f||_a, \\ T_r(B_a(0,1)) \text{ est relativement compacte dans } (V,||.||_a), \\ (T_ru,v)_a = (T_rv,u)_a, \quad \forall u,v\in V, \\ (T_rv,v)_a > 0, \quad \forall v\in V{-}\{0\}. \end{array} \right. \tag{8.20}$$
où $B_a(0,1)$ est la boule unité de $(V,(\cdot,\cdot)_a)$. En particulier 0 n'est pas valeur propre : $0\notin\sigma_p(T_r)$.

Preuve. La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue coercitive dans $(V,(\cdot,\cdot)_V)$, et les normes $||.||_V$ et $||.||_a$ sont équivalentes, cf (8.19), donc $a(\cdot,\cdot)$ est continue coercitive dans $(V,(\cdot,\cdot)_a)$.

La forme (trivialement) linéaire $\ell : v\in V\to \ell(v) := (f,v)_H$ vérifie $|\ell(v)| \le ||f||_H||v||_H \le ||f||_H||I_{10}||\,||v||_V \le \frac{||f||_H||I_{10}||}{\sqrt{\alpha}}||v||_a$, donc ℓ est continue sur $(V,||.||_a)$.

Donc $T : (H,||.||_H)\to(V,||.||_V)$ est continu (Lax–Milgram).

Les normes $||.||_V$ et $||.||_a$ sont équivalentes, cf (8.19), donc $T : (H,||.||_H)\to(V,||.||_V)$ continue implique $T : (H,||.||_H)\to(V,||.||_a)$ continu. $I_{10} : (V,||.||_V)\to(H,||.||_H)$ continue implique $I_{10} : (V,||.||_a)\to(H,||.||_H)$ continu, $I_{10} : (V,||.||_V)\to(H,||.||_H)$ compacte implique $I_{10} : (V,||.||_a)\to(H,||.||_H)$ compacte. Donc la composée $T_r = T\circ I_{10} : (V,||.||_a)\to(V,||.||_a)$ est continu e et compacte (car I_{10} compacte et T continu).

Et $a(Tf,v) =^{(8.14)} (f,v)_H$ pour tout $f\in H$ et $v\in V$, donc $a(T_rf,v) = (f,v)_H = (v,f)_H = a(T_rv,f)$ pour tout $f,v\in V$, donc $(T_rf,v)_a = (T_rv,f)_a$ pour tout $f,v\in V$, i.e. T_r est $(\cdot,\cdot)_a$-autoadjoint (on s'est servi implicitement de $a(\cdot,\cdot)$-symétrique pour avoir $(\cdot,\cdot)_a$ produit scalaire).

$a(T_rv,v) =^{(8.14)} (v,v)_H = ||v||_H^2 > 0$ pour tout $v\in V$, donc T_r est défini positif.

Et si 0 était valeur propre on aurait un vecteur propre associé $v\neq 0$, donc t.q. $T_rv=0$, donc $(T_rv,v)_a = (0,v)_a = 0$ donc T_r ne serait pas défini positif. Donc 0 n'est pas valeur propre. ∎

Exercice 8.5 Dans $\mathbb{R}^2$ avec $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ la base canonique. Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ de matrice $A =: [L]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, i.e. t.q. $L.\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ et $L.\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1$. Soit $(\cdot,\cdot)_M$ le produit scalaire associé à la la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i.e. $(\vec{x},\vec{y})_M := [\vec{y}]^T_{|\vec{e}}.M.[\vec{x}]_{|\vec{e}} =^{\text{noté}} (M.\vec{x},\vec{y})_{\mathbb{R}^2} = x_1y_1 + 2x_2y_2$, et soit $(\cdot,\cdot)_I$ le produit scalaire canonique i.e. $(\vec{x},\vec{y})_I :=:= [\vec{y}]^T_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}} = x_1y_1 + x_2y_2$, quand $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ et $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$. Montrer :

1- L est autoadjoint pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_M$, i.e. $(L.\vec{x},\vec{y})_M = (L.\vec{y},\vec{x})_M$ pour tout $\vec{x},\vec{y}$.

2- L n'est pas autoadjoint pour le produit scalaire canonique, i.e. $(L.\vec{x},\vec{y})_{\mathbb{R}^2} \neq (L.\vec{y},\vec{x})_{\mathbb{R}^2}$ en général.

Réponse. 1- $M.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, donc $(L.\vec{e}_1,\vec{e}_2)_M = (A.\vec{e}_1,\vec{e}_2)_I = (M.A.\vec{e}_1,\vec{e}_2)_I = 2$ et $(L.\vec{e}_2,\vec{e}_1)_M = (M.A.\vec{e}_2,\vec{e}_1)_I = 2$. Donc $(L.\vec{e}_1,\vec{e}_2)_M = (L.\vec{e}_2,\vec{e}_1)_M$ (la matrice $M.A$ est symétrique), donc L est $(\cdot,\cdot)_M$-autoadjoint.

2- $\underbrace{(L.\vec{e}_1,\vec{e}_2)_{\mathbb{R}^n}}_{A_{21}=1} \neq \underbrace{(L.\vec{e}_2,\vec{e}_1)_{\mathbb{R}^n}}_{A_{12}=2}$ (la matrice A n'est pas symétrique). Donc $(L.\vec{e}_1,\vec{e}_2)_I \neq (L.\vec{e}_2,\vec{e}_1)_I$ (la matrice A n'est pas symétrique), donc L n'est pas $(\cdot,\cdot)_I$-autoadjoint. ∎

8.3.4 T_r est diagonalisable dans $(V,(\cdot,\cdot)_a)$: bases spectrales

Théorème 8.6 *Sous les hypothèses du § 8.3.2, T_r est diagonalisable dans une b.o.n. de $(V,(\cdot,\cdot)_a)$, et plus précisément : les valeurs propres μ_n sont toutes > 0 et forment une suite $(\mu_n)_{\mathbb{N}^*}$ t.q. $\mu_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, et on peut choisir des vecteurs propres v_n associés t.q. il forment une base hilbertienne $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $(V,(\cdot,\cdot)_a)$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_r v_n = \mu_n v_n, \quad \text{où} \quad \begin{cases} (v_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ b.o.n. de } (V,(\cdot,\cdot)_a), \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu_n > 0, \text{ et } \mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{8.21}$$

(Donc $(v_n,v_m)_a = \delta_{mn}$ et $(T_r v_n,v_m)_a = \mu_n\delta_{mn}$, pour tout $m,n \in \mathbb{N}^*$.)

Preuve. On applique le lemme 8.4 et le thm 7.1 de décomposition spectrale à T_r dans $(V,(\cdot,\cdot)_a)$. ∎

8.4 Théorème spectral de diagonalisation de $a(\cdot,\cdot)$

Théorème 8.7 (Théorème spectral) *Sous les hypothèses du § 8.3.2 :*

1- *Le problème spectral (8.4) est diagonalisable dans une b.o.n. de $(V,(\cdot,\cdot)_a)$: posant $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ dans (8.21),*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall v \in V,\ a(v_n,v) = \lambda_n (v_n,v)_H, \quad \text{où} \quad \begin{cases} (v_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ b.o.n. de } (V,(\cdot,\cdot)_a), \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n > 0, \text{ et } \lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{8.22}$$

(Donc $(v_n,v_m)_a = \delta_{nm}$ pour tout m,n.)

2- *$(w_n)_{\mathbb{N}^*} := (\sqrt{\lambda_n} v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de H :*

$$(w_n)_{\mathbb{N}^*} := (\sqrt{\lambda_n} v_n)_{\mathbb{N}^*} \quad \text{est t.q.} \quad (w_n,w_m)_H = \delta_{nm},\ \forall n,m \in \mathbb{N}^*. \tag{8.23}$$

3- *Si de plus V est dense dans H, alors $(w_n)_{\mathbb{N}^*} = (\sqrt{\lambda_n} v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $(H,(\cdot,\cdot)_H)$.*

Preuve. 1- On applique le théorème 8.6 : T_r est borné compact $(\cdot,\cdot)_a$-autoadjoint et positif, donc on a une $(\cdot,\cdot)_a$-b.o.n. $(\vec{v}_n)$ de diagonalisation dans V t.q. $T_r\vec{v}_n = \mu_n\vec{v}_n$ et $\mu_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mu_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$; et $a(T_r v_n,v) =^{(8.14)} (v_n,v)_H$, donc $a(\mu_n v_n,v) = (v_n,v)_H$, donc $a(v_n,v) = \frac{1}{\mu_n}(v_n,v)_H$, d'où (8.22) avec $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$.

2- $\delta_{nm} = (v_n,v_m)_a = a(v_n,v_m) =^{(8.22)} \lambda_n (v_n,v_m)_H$, donc $\delta_{nm} = (\sqrt{\lambda_n}v_n,\sqrt{\lambda_m}v_m)_H$, donc $(\sqrt{\lambda_n}v_n)_{\mathbb{N}^*} = (w_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de H : on a (8.23).

3- Soit $W = \overline{\text{Vect}\{(w_n)_{\mathbb{N}^*}\}}^H = \{w \in H : \exists (c_n)_{\mathbb{N}^*},\ w = \sum_{n=1}^\infty c_n w_n \text{ t.q. } \sum_{n=1}^\infty c_n^2 < \infty\}$, cf.Bessel–Parseval.

31- On a $V \subset W$: en effet si $v \in V$ alors $v = \sum_{n=1}^\infty d_n v_n$ où $d_n = (v,v_n)_a$ et $||v||_a^2 = \sum_{n=1}^\infty d_n^2 < \infty$ (Bessel–Parseval) car (v_n) est une b.o.n. dans V. Donc $v = \sum_{n=1}^\infty c_n w_n$ où $c_n = d_n\sqrt{\mu_n}$, cf. (8.23) ; Et $\mu_n \to 0$ implique (μ_n) borné, i.e. $||(\mu_n)||_\infty < \infty$; donc $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \leq ||\mu||_\infty \sum_{n=1}^\infty d_n^2 < \infty$, donc $v \in W$.

32- Et V dense dans H et $V \subset W$ donc W dense dans H, et W fermé donc $W = H$, donc $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $(H,(\cdot,\cdot)_H)$. ∎

8.5 Application : résolution du problème initial

Le problème initial général est (8.3) : pour $f \in H$, trouver $u \in V$ t.q., pour tout $v \in V$,

$$a(u,v) = (f,v)_H. \tag{8.24}$$

Cadre du thm spectral 8.7 avec V dense dans W : on calcule une b.o.n. de diagonalisation $(\vec{v}_i)_{\mathbb{N}^*}$ dans V associée aux valeurs propres λ_n, et ainsi $(w_n)_{\mathbb{N}^*} := (\sqrt{\lambda_n} v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. dans H, cf. (8.23).

Puis on cherche u sous la forme $u = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j v_j$, où donc $(u,v_i)_a = \alpha_i$ pour tout i avec $(u,v_i)_a = (f,v_i)_H$, donc

$$\alpha_i = (f,v_i)_H \quad \text{(facile à calculer)}, \quad \text{et} \quad u = \sum_{j=1}^\infty (f,v_j)_H v_j, \quad \text{donc} \quad u = \sum_{j=1}^\infty \frac{(f,w_j)_H}{\lambda_j} w_j. \tag{8.25}$$

Exemple 8.8 Cas du laplacien et Dirichlet homogène avec Ω ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$: pour $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$, i.e. $a(u,v) = (f,v)_H$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ où $a(u,v) = (\vec\nabla u, \vec\nabla v)_{L^2}$.

On commence par calculer une base hilbertienne $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ de diagonalisation de $a(\cdot,\cdot)$ dans $V = H_0^1(\Omega)$. Et, ayant $V = H_0^1(\Omega)$ dense dans $H = L^2(\Omega)$, on préfère en général utiliser la "b.o.n. de Fourier" $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $H = L^2(\Omega)$ donnée par $w_n = \sqrt{\lambda_n} v_n$ pour tout n. Et on cherche u sous la forme $u = \sum_j \beta_j w_j$ avec $\beta_j = \frac{(f,w_j)_{L^2}}{\lambda_j}$ (facile à calculer) : $(8.25)_2$ donne

$$u = \sum_{j=1}^\infty \frac{(f,w_j)_{L^2}}{\lambda_j} w_j, \tag{8.26}$$

i.e. $u(\vec x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{(f,w_j)_{L^2}}{\lambda_j} w_j(\vec x)$ pour (presque) tout $\vec x \in \Omega$. ♣

8.6 Quotient de Rayleigh : valeurs propres et constante de Poincaré

Cadre du théorème spectral 8.7, on ordonne les valeurs propres, i.e. $\lambda_n \le \lambda_{n+1}$ pour tout n, $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est la $(\cdot,\cdot)_a$-b.o.n spectrale dans V, et $(w_n)_{\mathbb{N}^*} = (\sqrt{\lambda_n}) v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est la $(\cdot,\cdot)_H$ b.o.n. dans H.

Définition 8.9 Soit $v \in V$, $v \neq 0$. Son quotient de Rayleigh $R(v)$ est le réel

$$R(v) = \frac{a(v,v)}{(v,v)_H} = \frac{||v||_a^2}{||v||_H^2} \qquad (= a(\frac{v}{||v||_H}, \frac{v}{||v||_H}) = ||\frac{v}{||v||_H}||_a^2). \tag{8.27}$$

Proposition 8.10 *Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $u \in V$ on a $R(cu) = R(u)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$R(v_n) = \lambda_n \overset{\text{noté}}{=} \omega_n^2 = R(w_n) \tag{8.28}$$

(= la n-ième pulsation au carré). Et pour $u \in V$ avec $u = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n v_n = \sum_{n=1}^\infty \beta_n w_n$,

$$R(u) = \frac{\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2}{\sum_{n=1}^\infty \beta_n^2} = \frac{\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \beta_n^2}{\sum_{n=1}^\infty \beta_n^2} = \frac{\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2}{\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n}}. \tag{8.29}$$

En particulier

$$\min_{u\in V} R(u) = R(v_1) = \lambda_1 = \text{ la plus petite des valeurs propres.} \tag{8.30}$$

Preuve. (8.27) donne : $\forall c \in \mathbb{R}$ et $\forall u \in V$, on a $R(u) = R(cu)$ car $(\cdot,\cdot)_a$ et $(\cdot,\cdot)_H$ sont bilinéaires (ou encore car $||.||_a$ et $||.||_V$ sont des normes donc sont homogènes). En particulier $R(w_n) = R(v_n)$ pour tout n.

Et $R(v_n) = \frac{a(v_n,v_n)}{(v_n,v_n)_H} = \frac{\lambda_n (v_n,v_n)_H}{(v_n,v_n)_H} = \lambda_n$, d'où (8.28).

Et $u = \sum_n \alpha_n v_n = \sum_n \beta_n w_n = \sum_n \beta_n \sqrt{\lambda_n} v_n$, donc $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}\,\beta_n$, avec $||u||_V^2 = \sum_n \alpha_n^2$ et $||u||_H^2 = \sum_n \beta_n^2$. Donc $R(u) = \frac{||u||_a^2}{||u||_H^2} = \frac{\sum_n \alpha_n^2}{\sum_n \beta_n^2} = \frac{\sum_n \lambda_n \beta_n^2}{\sum_n \beta_n^2} = \frac{\sum_n \alpha_n^2}{\sum_n \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n}}$, d'où (8.29).

Et les λ_n sont > 0, donc $R(u) = \frac{\sum_n \lambda_n \beta_n^2}{\sum_n \beta_n^2} \ge \frac{\sum_n \min_n(\lambda_n) \beta_n^2}{\sum_n \beta_n^2} \ge \lambda_1$, avec $R(v_1) = \lambda_1$, d'où (8.30). ♣

Application : Ω borné, $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = (\vec\nabla u, \vec\nabla v)_{L^2}$ (correspond au problème de Dirichlet homogène $-\Delta u = f$) ; on dispose de l'inégalité de Poincaré (voir cours d'éléments finis) : $\exists c_\Omega > 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $||v||_{L^2} \le c_\Omega ||\vec\nabla v||_{L^2}$. Donc c_Ω vérifie

$$c_\Omega^2 \ge \max_{u\in H_0^1(\Omega)} \Big(\frac{||u||_{L^2}^2}{||\vec\nabla u||_{L^2}^2} \Big) = \max_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\min_{u\in V} R(u)} = \frac{1}{R(v_1)} = \frac{1}{\lambda_1}. \tag{8.31}$$

Donc, notant $c_{\Omega\min}$ la plus petite des constantes de Poincaré admissible, on a pour Ω borné :

$$c_{\Omega\min} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \text{l'inverse de la pulsation fondamentale du laplacien dans } H_0^1(\Omega). \tag{8.32}$$

Exercice 8.11 Calculer la constante de Poincaré en 1-D pour $\Omega =]0,\pi[$.

Réponse. Pb : $-u'' = \lambda u$ dans $H_0^1(\Omega)$, i.e. $u''+\lambda u = 0$ avec $u(0)=u(\pi)=0$: les fonctions propres sont, à une constante multiplicative près, les $w_n(x) = \sin(nx)$ associées aux valeurs propres $\lambda_n = n^2$. Donc $\sqrt{\lambda_1} = 1$. Forme faible $a(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2}$ dans $H_0^1(\Omega)$, où $a(\cdot,\cdot) = (u',v')_{L^2}$ et $c_{\Omega\min} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 1$. ▪

On note V_k le sous-espace vectoriel de V engendré par le k premiers vecteurs propres :

$$V_k = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}. \tag{8.33}$$

Donc

$$V_k^{\perp_a} = \overline{\mathrm{Vect}\{v_{k+1}, v_{k+2}, ...\}} = \text{ l'orthogonal dans } (V, (\cdot,\cdot)_a). \tag{8.34}$$

Proposition 8.12

$$\lambda_k = \max_{v\in V_k - \{0\}} R(v) = \min_{v\in V_{k-1}^{\perp_a} - \{0\}} R(v) \quad (= R(v_k) = R(w_k)), \tag{8.35}$$

Preuve. $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \beta_i w_i \Rightarrow R(v) = \dfrac{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \beta_i^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^k \lambda_i\beta_i^2}{\sum_{i=1}^k \beta_i^2} \le \max_{i=1,\dots,k} \lambda_i \dfrac{\sum_{i=1}^k \beta_i^2}{\sum_{i=1}^k \beta_i^2} = \lambda_k$.

$v = \sum_{i=k}^\infty \alpha_i v_i = \sum_{i=k}^\infty \beta_i w_i \Rightarrow R(v) = \dfrac{\sum_{i=k}^\infty \alpha_i^2}{\sum_{i=k}^\infty \beta_i^2} = \dfrac{\sum_{i=k}^\infty \lambda_i\beta_i^2}{\sum_{i=k}^\infty \beta_i^2} \ge \min_{i\ge k} \lambda_i \dfrac{\sum_{i=1}^k \beta_i^2}{\sum_{i=1}^k \beta_i^2} = \lambda_k$. ▪

Théorème 8.13 *(Principe du min-max)*

Soit $\mathcal{V}_m = \{$les s.e.v. de V de dimension $m\}$, i.e. $E_m \in \mathcal{V}_m$ ssi E_m s.e.v. de V et $\dim E_m = m$.

Sous les hypothèses du théorème 8.7, on a :

$$\forall E_m \in \mathcal{V}_m, \quad \lambda_m \le \underbrace{\max_{v\in E_m} R(v)}_{\textit{valeur par excès}}, \quad \text{et} \quad \lambda_m = \min_{E_m\in\mathcal{V}_m} \max_{v\in E_m} R(v). \tag{8.36}$$

Interprétation : permet de calculer une valeur $\max_{v\in E_m} R(v)$ de λ_m par excès, si on ne connaît pas explicitement V_m, en prenant des E_m connus, voir § 11.1.1.

Preuve. Soit $E_m \in \mathcal{V}_m$. Comme $\dim E_m = m$ et $\dim V_{m-1} = m-1$, il existe $v \in E_m \cap V_{m-1}^{\perp_a}$, $v \ne 0$ (voir exercice 8.14), donc $R(v) \ge \lambda_m$ (car $v \in V_{m-1}^{\perp_a}$), cf. (8.35), donc $\max_{w\in E_m} R(w) \ge \lambda_m$ (car $v\in E_m$). Vrai pour tout E_m. Donc $\lambda_m \le \min_{E_m\in\mathcal{V}_m} \max_{v\in E_m} R(v)$.

Et si $E_m = V_m$ alors (8.35) donne $\lambda_m = \max_{v\in V_m} R(v) = R(v_m)$, d'où $\lambda_m \ge \min_{\mathcal{V}_m}(\max_{E_m} R(v))$. ▪

Exercice 8.14 Soit $(V, (\cdot,\cdot)_a)$ un Hilbert, V_{m-1} et E_m deux s.e.v. dans V t.q. $\dim V_{m-1} = m-1$ et $\dim E_m = m$. Montrer

$$E_m \cap {V_{m-1}}^{\perp_a} \ne \{0\}, \quad \text{i.e.} \quad \exists e \ne 0 \quad \text{t.q.} \quad e \in E_m \quad \text{et} \quad e \perp_a V_{m-1}. \tag{8.37}$$

Commencer par démontrer ce résultat lorsque $V = \mathbb{R}^3$ usuel et m=2. Dessin.

Réponse. Cas $V = \mathbb{R}^3$ et m=2. $E_m = E_2$ est un plan : d'équation de type $ax+by+cz = 0$, de vecteur normal $\vec{n}_E = (a,b,c)$. Et $V_{m-1} = V_1$ est une droite : $\exists \vec{n}_V = (\alpha,\beta,\gamma) \ne \vec{0}$ tel que $V_1 = \mathrm{Vect}\{\vec{n}_V\}$, donc $V_{m-1}^\perp$ est le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z = 0$. Donc un vecteur $\vec{x} = (x,y,z)$ dans $E_2 \bigcap V_1^\perp$ vérifie $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz = 0 = \vec{n}_E\cdot\vec{x}, \\ \alpha x+\beta y+\gamma z = 0 = \vec{n}_V\cdot\vec{x}. \end{array}\right\}$. Donc si $(a,b,c)//(\alpha,\beta,\gamma)$ (les deux plans sont identiques) alors tout vecteur $\vec{e}$ orthogonal à (a,b,c) convient, et sinon $\vec{e} = (a,b,c)\wedge(\alpha,\beta,\gamma)$ convient.

Cas général. V_{m-1} est de dimension finie donc fermé. Soit ψ : $\left\{\begin{array}{l} V \to V_{m-1} \\ v \to \psi(v) = v_{m-1} \end{array}\right\}$ l'opérateur de projection orthogonale sur V_{m-1}, où donc v_{m-1} est défini par $(v_{m-1}, w_{m-1})_V = (v, w_{m-1})_V$ pour tout $w_{m-1} \in V_{m-1}$. Donc $\mathrm{Ker}\psi = {V_{m-1}}^{\perp_a}$. Soit $\psi_{|E_m}$: $\left\{\begin{array}{l} E_m \to V_{m-1} \\ v \to \psi_{|E_m}(v) := \psi(v) \end{array}\right\}$ la restriction de ψ à E_m. $\psi_{|E_m}$ est linéaire (car ψ l'est) mais n'est pas injective car la dimension $m-1$ de l'espace d'arrivée est strictement inférieure à la dimension m de l'espace de départ. Donc $\exists e \in E_m$, $e \ne 0$, t.q. $\psi_{|E_m}(e) = 0 = \psi(e)$, donc $e \in \mathrm{Ker}\psi \bigcap E_m = {V_{m-1}}^{\perp_a} \bigcap E_m$. Cet e convient. ▪

9 Exemples de résolutions

On note abusivement $\sin(kx)$ la fonction $\sin(k\cdot) : x \to \sin(kx)$ (le nom de la variable utilisée est x). Rappel :

$$\Big(1_{[0,1]}, \sqrt{2}\cos(2k\pi x), \sqrt{2}\sin(2k\pi x)\Big)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une b.o.n. classique (de Fourier) de } L^2(]0,1[). \tag{9.1}$$

9.1 Base de Fourier $(\sin(k\pi x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans $L^2(]0,1[)$

On a $\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Et $\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(\ell\pi x)\,dx = 0$ si $\ell \neq k$. Donc

$$(\sqrt{2}\sin(k\pi x))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille orthonormée dans } L^2(]0,1[). \tag{9.2}$$

On va montrer qu'elle est génératrice, donc c'est une b.o.n. dans $L^2(]0,1[)$, à comparer avec (9.1).

(Plus généralement, $(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{k\pi}{L}x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. dans $L^2(]0,L[.)$

9.1.1 Problème fort et faible à résoudre, et application du théorème spectral

Problème spectral fort : trouver les couples $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{F}(]0,1[;\mathbb{R})$ t.q. $u \neq 0$ et

$$\begin{cases} -v'' = \lambda u \quad \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \quad \text{(CL de Dirichlet homogène).} \end{cases} \tag{9.3}$$

Problème spectral faible : relativement aux notations du thm 8.7 on pose $H = L^2(\Omega)$ muni de son produit scalaire classique, et $H_0^1(]0,1[)$ muni de son produit scalaire usuel $(u,v)_{H_0^1} = (u',v')_{L^2}$ (produit scalaire car $[0,1]$ est borné). Ainsi $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont deux Hilbert séparables. (9.3) donne : trouver les $(\lambda,u) \in \mathbb{R}\times H_0^1(]0,1[)$ t.q.

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad a(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2}, \quad \text{où} \quad a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

Donc ici $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{H_0^1}$.

On a $H_0^1(]0,1[) \subset L^2(]0,1[)$, $H_0^1(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, et l'injection canonique $I_{10} : H_0^1(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$ est continue (Poincaré) et compacte (Rellich).

Et $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{H_0^1}$ est le produit scalaire de $H^1(]0,1[)$, donc $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire, symétrique, continue et coercitive dans $(H_0^1(]0,1[), ||.||_{H_0^1})$.

Donc on peut appliquer le théorème spectral : il existe une base hilbertienne $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $(H_0^1(]0,1[), a(\cdot,\cdot))$ où les v_n sont des fonctions propres associées à des valeurs propres λ_n qui tendent vers $+\infty$:

$a(v_n,v) = \lambda_n(v_n,v)_{L^2}$ pour tout $(n,v) \in \mathbb{N}^*\times H^1(]0,1[)$ avec $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ $(\cdot,\cdot)_a$-b.o.n. dans $H_0^1(]0,1[)$.

9.1.2 Résolution classique

Les seules (λ,u) solutions de (9.3), à un facteur multiplicatif près pour u, sont données par : $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\lambda = \lambda_k = (k\pi)^2 \quad \text{et} \quad u(x) = v_k(x) = \sin(k\pi x), \tag{9.4}$$

voir résolution de (1.27). Avec $||\sin(k\pi\cdot)||_a = ||\sin(k\pi\cdot)||_{H_0^1} = ||k\pi\sin(k\pi\cdot)||_{L^2} = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\text{la famille } (v_k)_{\mathbb{N}^*} = (\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\sin(k\pi\cdot))_{\mathbb{N}^*} \text{ est orthonormée dans } (H_0^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_a). \tag{9.5}$$

9.1.3 Base de Fourier trouvée

Comme on n'a pas d'autre solution $(\cdot,\cdot)_a$-normées (au signe près) que les v_k donné en (9.5), et que le thm spectral donne l'existence d'une b.o.n. dans $(H_0^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_a)$ cf. § 9.1.1, on en déduit :

$$(v_k)_{\mathbb{N}^*} = (\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\sin(k\pi\cdot))_{\mathbb{N}^*} \text{ est une b.o.n de diagonalisation dans } (H^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_a), \tag{9.6}$$

les valeurs propres associées étant les $\lambda_k = (k\pi)^2$; vérification : $-v_k''(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{k\pi}(k\pi)^2\sin(k\pi x) = (k\pi)^2 v_k(x)$.

Mais on préfère avoir une b.o.n. de Fourier dans $L^2(]0,1[)$. Comme $H_0^1(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, le théorème spectral indique aussi que $(\frac{v_k}{||v_k||_{L^2}})_{\mathbb{N}^*} = (\sqrt{\lambda_k}||v_k||_{L^2})_{\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. de Fourier dans $L^2(]0,1[)$.

Donc, avec $||v_k||_{L^2} = \frac{\sqrt{2}}{k\pi}||\sin(k\pi\cdot)||_{L^2} = \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$, posant $w_k = \frac{v_k}{||v_k||_{L^2}} = \sqrt{\lambda_k}w_k = \sqrt{2}\sin(k\pi\cdot)$,

$$(w_k)_{\mathbb{N}^*} = (\sqrt{2}\sin(k\pi.))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une b.o.n. (de diagonalisation de } \tfrac{d^2}{dx^2}) \text{ dans } L^2(]0,1[). \tag{9.7}$$

C'est une base hilbertienne dans $L^2(]0,1[)$ de type Fourier.

Exercice 9.1 Montrer que la fonction $1_{[0,1]}$ sur la b.o.n. $(\sqrt{2}\sin(k\pi x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ a toutes ses composantes paires nulles. Calculer les impaires. En déduire $\displaystyle\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (voir aussi exe. D.1).

Réponse. $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty c_k(\sqrt{2}\sin(k\pi x))$ où les c_k sont les composantes de $1_{[0,1]}$ sur la b.o.n. $(\sqrt{2}\sin(k\pi x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(]0,1[)$. Donc

$$c_k = (1_{[0,1]}, \sqrt{2}\sin(k\pi\cdot))_{L^2} = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx = \sqrt{2}\Big[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big]_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair,} \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{k\pi} & \text{si } k \text{ impair.}\end{cases}$$

Comme $||1_{[0,1]}||^2_{L^2} = \displaystyle\int_0^1 dx = 1$, et $||1_{[0,1]}||^2_{L^2} = \displaystyle\sum_{\mathbb{N}^*} c_k^2$, on a $\displaystyle\sum_{m=1}^\infty \frac{8}{(2m-1)^2\pi^2} = 1$.

Puis $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^\infty \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{n=1\\n \text{ impair}}}^\infty (\frac{1}{n})^2 = \frac{\pi^2}{8}$. ∎

Exercice 9.2 On considère le problème spectral : trouver les couples $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times L^2(]0,1[)$ t.q. :

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \quad \text{dans }]0,1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \quad \text{(CL de Dirichlet homogène).}\end{cases} \tag{9.8}$$

En déduire que $(1_{]0,1[}, (\sqrt{2}\cos(k\pi.))_{k\in\mathbb{N}^*})$ est une b.o.n. dans $L^2(]0,1[)$.

Réponse. 1- Les solutions non nulles de $u'' + \lambda u = 0$ sont du type $u(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ où $\omega = \sqrt{\lambda}$ pour $\lambda > 0$. Donc $u'(x) = \omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x))$. Et $0 = u'(0) = \omega b$ donne $b = 0$, donc il reste $u(x) = a\cos(\omega x)$, solution non nulle si $a \neq 0$. Donc $u'(x) = -\omega a\sin(\omega x)$, et $0 = u'(1) = -\omega a \sin(\omega)$ donne

11- soit $\omega \neq 0$ et alors $\omega = k\pi$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ donne les solutions $a\cos(k\pi x)$ pour $a \in \mathbb{R}^*$,

12- soit $\omega = 0$ auquel cas $u(x) = a$, mais un tel u vérifie $-u'' = \lambda u$ ssi $\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ est valeur propres associé aux fonctions propres “les constantes”.

13- Donc, à des constantes multiplicatives près, $1_{]0,1[}$ et les $\cos(k\pi.)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont les seules solutions non nulles.

14- Et $(\cos(m\pi.), \cos(n\pi.))_{L^2} = \int_0^1 \cos(m\pi x)\cos(n\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((m{+}n)\pi x) + \cos((m{-}n)\pi x)\,dx$, donc $= 1$ si $m{=}n{=}0$, et $= \frac{1}{2}$ si $n{=}m{\neq}0$, et $= 0$ si $m{\neq}n$. Donc $1_{]0,1[}$ et les $\sqrt{2}\cos(k\pi.)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ forment une suite orthonormale de solutions dans $L^2(]0,1[)$.

2- Pour appliquer le théorème spectral, on met (9.8) sous la forme faible : trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times H^1(]0,1[)$ t.q.

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad a_0(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2}, \quad \text{où} \quad a_0(u,v) = (\vec\nabla u, \vec\nabla v)_{L^2}, \tag{9.9}$$

avec $H^1(]0,1[)$ muni de son produit scalaire usuel $(\cdot,\cdot)_{H^1} = (\cdot,\cdot)_{L^2} + (\vec\nabla.,\vec\nabla.)_{L^2}$. Mais ici $a_0(u,v)$ n'est pas coercitive dans $(H^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_{H^1})$: prendre u la fonction constante $= 1$ qui donne $0 = a_0(u,u) = 0$ donc non $\geq \alpha||u||^2_{H^1}$ qq soit $\alpha > 0$. D'ailleurs en 12- on a vu que $\lambda = 0$ est valeur propre.

21- Première approche : modifions le problème (9.8) en le problème : trouver les couples $(\mu, u) \in \mathbb{R}\times L^2(]0,1[)$ t.q.

$$\begin{cases} -u'' + u = \mu u \quad \text{dans }]0,1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0.\end{cases} \tag{9.10}$$

Autrement dit on a posé $\lambda = \mu{-}1$ dans (9.9), et (λ, u) est solution de (9.8) ssi (μ, u) est solution de (9.10). Le problème faible associé à (9.10) est trouver $(\mu, u) \in \mathbb{R}\times H^1(]0,1[)$ t.q.

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad a(u,v) = \mu(u,v)_{L^2}, \quad \text{où} \quad a(u,v) = (\vec\nabla u, \vec\nabla v)_{L^2} + (u,v)_{L^2}. \tag{9.11}$$

Donc $(\cdot,\cdot)_a = (\cdot,\cdot)_{H^1}$ et toutes les hypothèses du thm spectral sont vérifiées : on a une b.o.n. $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $(H^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_a)$ et la b.o.n associée $w_n = \sqrt{\mu_n}v_n$ dans $(L^2(]0,1[), (\cdot,\cdot)_{L^2})$. Et 13- a donné toutes les solutions de (9.10) : les μ t.q. $\mu{-}1 = k^2$, i.e. les $\mu = \sqrt{k^2{+}1}$ pour $k \in \mathbb{N}$, et les fonctions propres associées $\cos(k\pi x)$ (en particulier $1_{]0,1[}$ pour $k = 0$). Donc, après normalisation des $\cos(k\pi x)$ dans $L^2(]0,1[)$, la famille $(1, (\sqrt{2}\cos(k\pi x))_{k\in\mathbb{N}^*})$ est une b.o.n. dans $L^2(]0,1[)$.

22- Deuxième approche : on considère le problème dans $H^1(]0,1[)/\mathbb{R}$, et alors $a_0(\cdot,\cdot)$ est coercitif, d'où $(\lambda_k\sqrt{2}\cos(k\pi.))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. dans $H^1(]0,1[)/\mathbb{R}$, d'où $(\sqrt{2}\cos(k\pi.))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une b.o.n. dans $L^2(]0,1[)/\mathbb{R}$.

Puis $H^1(]0,1[) = H^1(]0,1[)/\mathbb{R} \oplus \text{Vect}\{1_{]0,1[}\}$ donne le résultat. ∎

Exercice 9.3 Soit $g : t \in]0,1[\to g(t) = t$. Décomposer g sur la base $(1_{]0,1[}, (\sqrt{2}\cos(k\pi.))_{k\in\mathbb{N}^*})$. En déduire $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$ (calculez $||g||^2_{L^2}$).

Réponse. $c_0 = (g,1)_{L^2} = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$, et, pour $k{\neq}0$, $c_k = (g, \sqrt{2}\cos(k\pi.))_{L^2} = \sqrt{2}\int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt = -\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi t)\,dt + \frac{\sqrt{2}}{k\pi}[t\sin(k\pi t)]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{(k\pi)^2}(\cos(k\pi) - 1)$, donc $= 0$ si k pair, $= -\frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^2}$ si k impair. Bessel–Parseval : $||g||^2_{L^2} = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^\infty \frac{8}{k^4\pi^4} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^\infty \frac{8}{(2n-1)^4\pi^4} = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$. Et calcul direct : $||g||^2_{L^2} = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Donc $\frac{1}{12} = \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$, donc $\frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$ (avec $\frac{\pi^4}{96} \simeq 1,01468$). ∎

9.2 Cas 1-D : problème de Sturm–Liouville en dimension infinie

On reprend la théorie spectrale en la détaillant dans le cas $1-D$ sur l'intervalle $[0,1]$.

9.2.1 Problème de Sturm–Liouville en dimension infinie

On considère le problème elliptique de Sturm–Liouville avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(]0,1[) \text{ tel que :} \\ -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{array}\right. \tag{9.12}$$

pour $f \in L^2(]0,1[)$ et $p, q \in L^\infty(]0,1[)$, avec $p(x) \geq \alpha > 0$ et $q(x) \geq 0$ sur $[0,1]$.

(Pour le problème classique, on cherche $u \in C^2[0,1]$, quand $f \in C^0(]0,1[)$, $p \in C^1([0,1])$, $q \in C^0([0,1])$, avec $p(x) \geq \alpha > 0$ et $q(x) \geq 0$ sur $[0,1]$.)

Ce problème s'écrit de manière générique :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que :} \\ Au = f \quad \text{où} \quad Au \stackrel{\text{déf}}{=} -(pu')' + qu, \end{array}\right. \tag{9.13}$$

au sens des distributions (pour le problème classique $Au = -(pu')' + qu$ dans C^0).

But : diagonaliser l'opérateur A. On aura ainsi une base de vecteurs propres dans laquelle la solution u est immédiate à calculer. De plus les valeurs propres correspondent au carré des pulsations de résonance pouvant amener la structure à sa destruction : leur connaissance est importante.

9.2.2 Problème bien posé

Lemme 9.4 *Si $f \in L^2(]0,1[)$, si $p \in L^\infty(]0,1[)$ et $q \in L^\infty(]0,1[)$ sont des fonctions positives, et s'il existe $\alpha > 0$ t.q. $p(x) \geq \alpha > 0$ presque partout, alors le problème (9.12) admet une unique solution $u \in H_0^1(]0,1[)$ qui dépend continûment de f.*

Et notant $u = Tf$ $(= A^{-1}f)$ la solution, la fonctionnelle T ainsi définie, $T : L^2(]0,1[) \to H_0^1(]0,1[)$, est un opérateur borné de $L^2(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$.

Preuve. On applique le théorème de Lax–Milgram. Le problème (9.12) s'écrit sous forme variationnelle :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(]0,1[) : \\ a(u,v) = \ell(v), \end{array}\right. \tag{9.14}$$

où $a(\cdot,\cdot)$ et ℓ sont définies sur $H_0^1(]0,1[)$ par :

$$a(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx, \qquad \ell(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \tag{9.15}$$

On vérifie immédiatement que $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire symétrique. Elle est continue sur $H_0^1(]0,1[)$ car :

$$|a(u,v)| \leq ||p||_\infty ||u'||_{L^2}\, ||v'||_{L^2} + ||q||_\infty ||u||_{L^2}\, ||v||_{L^2} \leq (||p||_\infty + c_\Omega ||q||_\infty) ||u||_{H_0^1}\, ||v||_{H_0^1}, \tag{9.16}$$

où c_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré. Elle est coercitive sur $H_0^1(]0,1[)$ car :

$$a(v,v) \geq \alpha ||v'||_{L^2}^2 = \alpha ||v||_{H_0^1}^2. \tag{9.17}$$

ℓ est trivialement linéaire, et est continue sur $H_0^1(]0,1[)$ car :

$$|\ell(v)| \leq ||f||_{L^2} ||v||_{L^2} \leq c_\Omega ||f||_{L^2} ||v||_{H_0^1}, \tag{9.18}$$

où c_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré. Donc le problème (9.14) est bien posé (Lax–Milgram) : il existe une unique solution $u = u(f) \in H_0^1(]0,1[)$ avec $\alpha ||u||_{H_0^1}^2 \leq a(u,u) = \ell(u) \leq (c_\Omega ||f||_{L^2}) ||u||_{H_0^1}$, donc :

$$||u(f)||_{H_0^1} \leq \frac{c_\Omega}{\alpha} ||f||_{L^2} \tag{9.19}$$

Notons $u(f) = T(f)$ où donc $T : \left\{\begin{array}{rl} L^2(]0,1[) & \to H_0^1(]0,1[) \\ f & \to T(f) = u(f) \end{array}\right\}$ est l'opérateur qui à f donné fait correspondre la solution u du problème (9.14). Il est clair que T est un opérateur (i.e. linéaire), le problème (9.12) étant linéaire, et que T est borné avec $||T||_{L(L^2,H_0^1)} \leq \frac{c_\Omega}{\alpha}$. ∎

Donc pour $f \in L^2(]0,1[)$ on a :

$$a(Tf,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[), \tag{9.20}$$

puisque $u = Tf$ par définition de T.

9.2.3 Problème spectral

Problème spectral classique : trouver les couples $(\lambda,u) \in \mathbb{R} \times C^2([0,1])$ tels que $u \neq 0$ et :

$$Au = \lambda u, \tag{9.21}$$

où A est donné en (9.13).

Problème spectral sous forme variationnel : trouver les couples $(\lambda,w) \in \mathbb{R} \times H_0^1(]0,1[)$ tels que $w \neq 0$ et :

$$a(w,v) = \lambda(w,v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \tag{9.22}$$

Puisque $(w,v)_{L^2} = a(Tw,v)$ pour tout v, cf. (9.20), cette définition est bien équivalente (après changement de notation) à trouver les $(\lambda,w) \in \mathbb{R} \times H_0^1(]0,1[)$, où $w \neq 0$, tels que $a(w,v) = \lambda a(Tw,v)$ i.e. t.q. :

$$\lambda Tw = w \tag{9.23}$$

ou encore $Tw = \frac{1}{\lambda}w = \mu w$, dès qu'on se sera assuré que $\mu = 0$ n'est pas valeur propre de T. Ainsi formellement $T = A^{-1}$.

9.2.4 Le produit scalaire $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_a$

La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot) =^{\text{noté}} (\cdot,\cdot)_a$ est bilinéaire symétrique définie positive : elle définie donc un produit scalaire sur $H_0^1(]0,1[)$. Ainsi $(H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a)$ est un espace de Hilbert.

$a(\cdot,\cdot)$ est de plus continue et coercitive sur $H_0^1(]0,1[)$, et définit donc un produit scalaire équivalent au produit scalaire usuel $||v||_{H_0^1} = ||v'||_{L^2}$:

$$\alpha||v||_{H_0^1}^2 \leq a(v,v) = ||v||_a^2 \leq ||a||\,||v||_{H_0^1}^2, \quad \forall v \in H_0^1. \tag{9.24}$$

Et on notera $||.||_a$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_a$.

9.2.5 Opérateur compact

L'existence des solutions du problème spectral (les vecteurs propres de T) sera donnée grâce à :

Lemme 9.5 *On considère $(H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a)$ (l'espace $H_0^1(]0,1[)$ muni du produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$). Alors, l'opérateur $T_r : (H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a) \to (H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a)$ donné par $T_rf = Tf$ pour tout $f \in H_0^1(]0,1[)$, est un opérateur (i)borné (ii)positif (iii)autoadjoint (iv)compact (v) qui n'admet pas 0 pour valeur propre.*

Preuve. On a $T_r = T \circ I_{10}$ dans $H_0^1(]0,1[)$.

(0) Ici $I_{10} : u \in H_0^1 \to u \in L^2$ est borné car $||u||_{L^2} \leq c_\Omega||u||_{H_0^1}$ où c_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré, donc $||I_{10}|| \leq c_\Omega$.

(i) L'opérateur $T_r : (H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a) \to (H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a)$ est borné car, pour $f \in H_0^1(]0,1[)$:

$$||T_rf||_a \leq \sqrt{||a||}\,||Tf||_{H_0^1} \leq \sqrt{||a||}\,\frac{c_\Omega}{\alpha}||f||_{L^2} \leq \sqrt{||a||}\,\frac{c_\Omega^2}{\alpha}||f||_{H_0^1}, \leq \sqrt{||a||}\,\frac{c_\Omega^2}{\alpha\sqrt{\alpha}}||f||_a,$$

cf. (9.19) et (9.24).

(ii) T_r est positif dans $(H_0^1(]0,1[),(\cdot,\cdot)_a)$ car (9.20) donne $a(T_rv,v) = (v,v)_{L^2} = ||v||_{L^2}^2 > 0$ pour $v \neq 0$ dans $H_0^1(]0,1[)$.

(iii) T_r est $(\cdot,\cdot)_a$-autoadjoint dans $H_0^1(]0,1[)$ car $(\cdot,\cdot)_a$ est un produit scalaire et avec (9.20) et pour $u,v \in H_0^1(]0,1[)$:

$$a(T_ru,v) = (u,v)_{L^2} = (v,u)_{L^2} = a(T_rv,u).$$

(iv) T_r est compact de $H_0^1(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$ (muni de l'un ou l'autre des produits scalaires équivalents) car $T_r = T \circ I_{10}$ avec I_{10} compacte et T borné.

(v) Si $\mu = 0$ est valeur propre, un vecteur propre associé $e \neq 0$ vérifie $Te = 0$, donc $a(0,v) = (e,v)_{L^2}$ pour tout v, voir (9.20), et en particulier $0 = a(0,e) = (e,e)_{L^2} = ||e||_{L^2}^2 \neq 0$, absurde. Donc $\mu = 0$ n'est pas valeur propre. ∎

Remarque 9.6 1- Si $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(]0,1[)$ est une couple vp-vp, alors on a $Tu = \frac{1}{\lambda} u \in H_0^1(]0,1[)$, cf. (9.23), et donc considérer la restriction T_r de T à $H_0^1(]0,1[)$ n'est pas restrictif pour la recherche des couples vp-vp.

2- Attention à ce qui est appelé opérateur de restriction : c'est bien $T \in L(H;V)$ restreint à V mais dans des espaces où les normes ont changées, et en particulier $T_r \in L(V;V)$ n'a pas même norme que T (bien que $Tf = T_r f$ pour tout $f \in V$) : on a $||T|| = \sup_{f\in V} \frac{||Tf||_V}{||f||_H}$ (puisque V est dense dans H) alors que $||T_r|| = \sup_{f\in V} \frac{||Tf||_V}{||f||_V}$.

3- On prend le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_a$ pour avoir le caractère autoadjoint. Voir l'exemple 8.5.

4- Pour démontrer la compacité de T_r, on a utilisé la boule unité B_1 de $H_0^1(]0,1[)$. Attention, ce n'est pas la boule unité B_0 de $L^2(]0,1[)$ (lorsque ces boules sont mesurées et comparées à l'aide de la norme $||.||_{L^2}$, B_1 est 'beaucoup plus petite' que B_0). ∴

9.2.6 Base hilbertienne de vecteurs propres

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 9.7 *Sous les hypothèses du lemme 9.4, il existe une suite croissante de réels $\lambda_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ de $H_0^1([0,1])$ qui forme une base hilbertienne de $L^2([0,1])$ telle que $Aw_n = \lambda_n w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

De plus (λ_n) tend vers $+\infty$ avec n, et $(v_n = \frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}})_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans $(H_0^1([0,1]), (\cdot,\cdot)_a)$.

Preuve. L'opérateur T_r étant autoadjoint compact positif sur $(H^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_a)$, on en déduit que $H_0^1(]0,1[)$ admet une base $(\cdot,\cdot)_a$-hilbertienne $(v_n)_{\mathbb{N}}$ formée de vecteurs propres de T_r associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{\mathbb{N}}$ positives (voir théorème 7.1) : pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$:

$$T_r v_n = \mu_n v_n, \quad (v_n, v_m)_a = \delta_{nm} \quad \text{et} \quad \mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et par définition de T :

$$(v_n, v_m)_{L^2} = a(Tv_n, v_m) = \mu_n a(v_n, v_m) = \mu_n \delta_{nm},$$

donc $(\frac{v_n}{\sqrt{\mu_n}})_{\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de L^2.

Sachant $H_0^1(]0,1[)$ dense dans $L^2(]0,1[)$, c'est une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$.

Et on pose $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$, sachant que $\mu = 0$ n'est pas valeur propre. Et comme les μ_n tendent vers 0, les λ_n tendent vers $+\infty$. ∴

9.2.7 Résolution du problème de Sturm–Liouville

Il reste à calculer u solution de (9.12). Soit $(c_n)_{\mathbb{N}^*}$ les composantes de u sur la base $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ trouvée au théorème 9.7. Donc, pour presque tout x :

$$u(x) = \sum_n c_n\, w_n(x), \quad c_n \in \mathbb{R}. \tag{9.25}$$

Avec $a(u, w_m) = (f, w_m)_{L^2}$ vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\sum_n c_n a(w_n, w_m) = (f, w_m)_{L^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{9.26}$$

Comme $a(w_n, w_m) = \lambda_n \delta_{nm}$, il reste $\lambda_m c_m = (f, w_m)_{L^2}$, soit :

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}(f, w_m)_{L^2} = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f(x)\, w_m(x)\, dx. \tag{9.27}$$

Donc u :

$$u = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}(f, w_n)_{L^2} w_n$$

Exemple 9.8 Cas particulier $p \equiv 1$ et $q \equiv 0$, i.e. $-u'' = \lambda u$ avec $u(0) = u(1) = 0$: on retrouve la solution classique avec la "base de Fourier" donnée en (9.5). Ici :

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2, \quad w(x) = w_n(x) = \alpha_n \sin(n\pi x), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{9.28}$$

avec par exemple $\alpha_n = \sqrt{2}$ pour avoir $||w_n||_{L^2} = 1$. On obtient ainsi la solution au problème $-u'' = f$ sous la forme : $u(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sqrt{2} \sin(n\pi x)$, où $c_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 f(x)\sqrt{2}\, \sin(n\pi x)\, dx$. ∴

9.3 Cas n-D : Pb ellipique avec conditions aux limites de Dirichlet

On regarde le problème spectral, pour Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et A matrice $n*n$ elliptique symétrique :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{trouver les } (\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega),\ u\neq 0, \text{ t.q.}\\ -\operatorname{div}(A.\vec{\nabla}u)=\lambda u.\end{array}\right. \tag{9.29}$$

avec $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$ donné par $(u,v)_{H_0^1}=(\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)_{L^2}$. Forme variationnelle :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{trouver les } (\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega),\ u\neq 0, \text{ t.q.}\\ \forall v\in H_0^1(\Omega),\quad a(u,v)=\lambda(u,v)_{L^2},\quad \text{où}\quad a(u,v)=(A.\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)_{L^2}.\end{array}\right. \tag{9.30}$$

A étant elliptique symétrique, $a(\cdot,\cdot)=^{\text{noté}}(\cdot,\cdot)_a$ est un produit scalaire équivalent au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$. Et $(L^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{L^2})$ et $(H_0^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_{H_0^1})$ sont deux Hilbert t.q. $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et l'injection canonique $I_{10}:H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ étant continue (Poincaré) et compact (Rellich). Donc on peut appliquer le théorème spectral : Le problème (9.30) admet une infinité de solutions $(\lambda_n,v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega)$ t.q. :

- $a(v_n,v)=\lambda_n(v_n,v)_{L^2}$ pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$,
- $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans $(H_0^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_a)$,
- $\lambda_n>0$ pour tout n et $\lambda_n\longrightarrow_{n\to\infty}\infty$, et on dit que les λ_n sont les valeurs propres de $-\operatorname{div}(A.\vec{\nabla}\cdot)$ avec conditions aux limites de Dirichlet, et que les v_n sont des fonctions propres associées formant une b.o.n. dans $H_0^1(\Omega)$, et les w_n sont les fonctions propres v_n normalisées dans $L^2(\Omega)$ formant une b.o.n. dans $L^2(\Omega)$. (En particulier les $-\lambda_n$ sont les vp du laplacien Δ en prenant $A=I$, et $\sqrt{\lambda_1}$ est appelée la pulsation fondamentale, et les $\sqrt{\lambda_n}$ les pulsations harmoniques.)
- $(w_n)=(\sqrt{\lambda_n}v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans $L^2(\Omega)$ (dite base de type Fourier),
- la base $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ est adaptée à la résolution du problème : pour $f\in L^2(\Omega)$, trouver $u\in H_0^1(\Omega)$ t.q. $a(u,v)=(f,v)_{L^2}$. En effet, $u=\sum_n c_nw_n$ les c_n sont données par $c_n=\frac{(f,w_n)_{L^2}}{\lambda_n}$, car $a(\sum_n c_nw_n,w_m)=(f,w_m)_{L^2}$ donne $\sum_n c_na(w_n,w_m)=(f,w_m)_{L^2}$ donc $\lambda_nc_n=(f,w_m)_{L^2}$.

Remarque 9.9 On peut également montrer à l'aide de résultats de régularité que les fonctions v_n sont en fait C^∞. L'idée est que $-\operatorname{div}(A.\vec{\nabla}v_n)e_n=\lambda_nv_n$, donc que $\operatorname{div}(A.\vec{\nabla}v_n)$ à même régularité que v_n. ▪

9.4 Le laplacien avec conditions aux limites de Neumann

Exercice 9.10 Soit A matrice $n*n$ symétrique elliptique et $c\in\mathbb{R}$. Résoudre le problème

$$-\operatorname{div}(A.\vec{\nabla}u)+cu=\lambda u\ \text{ dans } \Omega,\quad \text{avec}\quad (A.\vec{\nabla}u)\bullet\vec{n}=0\ \text{ sur } \Gamma \tag{9.31}$$

conditions aux limites de Neumann).

Réponse. Cas $c=1$. On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire usuel $(\cdot,\cdot)_{H^1}$ donné par $(u,v)_{H^1}=(u,v)_{L^2}+(\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)_{L^2}$ qui en fait un Hilbert. Forme variationnelle : trouver les $(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H^1(\Omega)$, $u\neq 0$, t.q.

$$\forall v\in H^1(\Omega),\quad a(u,v)=\lambda(u,v)_{L^2},\quad \text{où}\quad a(u,v)=(A.\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)_{L^2}+(u,v)_{L^2}. \tag{9.32}$$

A est elliptique symétrique, donc $a(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire équivalent au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1}$, et $(L^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{L^2})$ et $(H^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_{H^1})$ sont deux Hilbert t.q. $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et l'injection canonique $I_{10}:H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ est continue (car $||u||_{L^2}\leq||u||_{H^1}$ pour tout $u\in H^1(\Omega)$) et compact (Rellich). Donc on peut appliquer le théorème spectral : Le problème (9.32) admet une infinité de solutions $(\lambda_n,v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}\times H^1(\Omega)$ t.q. :

- $a(v_n,v)=\lambda_n(v_n,v)_{L^2}$ pour tout $v\in H^1(\Omega)$,
- $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans $(H^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_a)$,
- $\lambda_n>0$ pour tout n et $\lambda_n\longrightarrow_{n\to\infty}\infty$,
- $(w_n)=(\sqrt{\lambda_n}v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans $L^2(\Omega)$,
- la base $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ est adaptée à la résolution du problème : pour $f\in L^2(\Omega)$, trouver $u\in H_0^1(\Omega)$ t.q. $a(u,v)=(f,v)_{L^2}$. En effet, $u=\sum_n\beta_nw_n$ les β_n sont données par $\beta_n=\frac{(f,w_n)_{L^2}}{\lambda_n}$, car $a(\sum_n\beta_nw_n,w_m)=(f,w_m)_{L^2}$ donne $\sum_n\beta_na(w_n,w_m)=(f,w_m)_{L^2}$ donc $\lambda_n\beta_n=(f,w_m)_{L^2}$.

Cas général $c\in\mathbb{R}$. Problème variationnel : trouver les $(\mu,u)\in\mathbb{R}\times H^1(\Omega)$, $u\neq 0$, t.q. $b(u,v)=\mu(u,v)_{L^2}$ pour tout $v\in H^1(\Omega)$ où $b(u,v)=(A.\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)_{L^2}+c(u,v)_{L^2}$. On réécrit ce problème en le problème (9.32) en posant $\mu=\lambda{+}c{-}1$. Donc on a une b.o.n. $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ de vecteurs propres de $a(\cdot,\cdot)$ dans $(H^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_a)$ associée aux valeurs propres λ_n, et donc $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est aussi une b.o.n. de vecteurs propres de $b(\cdot,\cdot)$ dans $(H^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_a)$ associée aux valeurs propres $\mu_n=\lambda_n{+}c{-}1$.

En revanche pour résoudre le problème associé « pour $f\in L^2(\Omega)$, trouver $u\in H_0^1(\Omega)$ t.q. $b(u,v)=(f,v)_{L^2}$ », il faut que ce problème soit bien posé, vrai quand $c>0$. (Pour $c=0$ on a encore le résultat : le problème est bien posé dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, i.e. solution donnée à une constante près.)

▪

10 Approximation variationnelle des problèmes spectraux

10.1 Problème approché, et matrices de masse et de rigidité

Point de départ = le problème aux valeurs propres :

$$\text{trouver les couples } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (V-\{0\}) \text{ t.q., } \forall v \in V,\ a(u,v) = \lambda(u,v)_H. \tag{10.1}$$

Problème approché (problème discrétisé) : avec $V_h \subset V$ (approximation conforme), $\dim V_h = n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{trouver les couples } (\lambda_h, u_h) \in \mathbb{R} \times (V_h-\{0\}) \text{ t.q., } \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h)_H. \tag{10.2}$$

Calcul de solutions de (10.2) : on choisit une base $(\varphi_i)_{i=1,...,n}$ dans V_h (eg. la base usuelle des fonctions chapeau P_1 en éléments finis). On cherche les u_h solutions de (10.2) sous la forme

$$u_h = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \in V_h, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{u}_h]_{|\varphi} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \vec{\alpha} \in \mathcal{M}_{n1}, \tag{10.3}$$

où donc $\vec{\alpha}$ est la matrice colonne des composantes de u_h dans la base (φ_i). Avec $v_h = \varphi_i$ dans (10.2) on obtient

$$\forall i = 1, ..., n, \quad \sum_j \alpha_j \underbrace{a(\varphi_j, \varphi_i)}_{=R_{ij}} = \lambda_h \alpha_j \underbrace{(\varphi_i, \varphi_j)_H}_{=M_{ij}}, \tag{10.4}$$

donc

$$\boxed{R.\vec{\alpha} = \lambda M.\vec{\alpha}}, \quad \text{où} \quad R = [R_{ij}] := [a(\varphi_j, \varphi_i)] \quad \text{et} \quad M = [M_{ij}] := [(\varphi_j, \varphi_i)_H]. \tag{10.5}$$

C'est un “problème spectral généralisé” ou “problème de valeurs propres généralisé”.

Définition 10.1 $R = [R_{ij}] := [a(\varphi_j, \varphi_i)]$ est la matrice de rigidité (matrice $n * n$).
$M = [M_{ij}] := [(\varphi_j, \varphi_i)_H]$ est la matrice de masse (matrice $n * n$).

10.2 Eléments finis et “diagonalisation du laplacien”

10.2.1 Passage et résolution dans $\mathcal{M}_{n1}$

Le problème spectral approché (10.2) dans V_h a été transformé en le problème matriciel (10.5). On note $(\vec{m}_i)$ la base canonique dans $\mathcal{M}_{n1}$.

$(\cdot,\cdot)_H$ est un produit scalaire, $(\varphi_i)_{i=1,...,n}$ est une base, donc $M = [(\varphi_j, \varphi_i)_H] \in \mathcal{M}_{nn}$ est symétrique définie positive : donc $(\cdot,\cdot)_M : (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{M}_{n1}^2 \to (\vec{x}, \vec{y})_M := \vec{x}^T.M.\vec{y} \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire dans $\mathcal{M}_{n1}$.

$(\cdot,\cdot)_a$ étant symétrique, la matrice $R = [R_{ij}] := [a(\varphi_j, \varphi_i)] \in \mathcal{M}_{nn}$ est symétrique.

On dispose donc du théorème spectral généralisé B.23 : la matrice R est M-diagonalisable, i.e. il existe n réels λ_{hj} et une $(\cdot,\cdot)_M$ b.o.n. de vecteurs propres associés $\vec{z}_j \in \mathcal{M}_{n1}$ cf. (B.28)-(B.29), i.e. pour tout $i, j = 1, ..., n$,

$$R.\vec{z}_j = \lambda_{hj} M.\vec{z}_j \quad \text{et} \quad (\vec{z}_i, \vec{z}_j)_M = \delta_{ij} \quad (\text{i.e. } \vec{z}_i^{\,T}.M.\vec{z}_j = \delta_{ij}), \tag{10.6}$$

soit

$$\boxed{R.P = M.P.D} \quad \text{et} \quad \boxed{P^T.M.P = I}, \tag{10.7}$$

avec les matrices diagonale des valeurs propres et de passage de la base canonique $(\vec{m}_i)$ à la base $(\vec{z}_i)$ dans $\mathcal{M}_{n1}$:

$$D = \text{diag}(\lambda_{hi}) \in \mathcal{M}_{nn} \quad \text{et} \quad P = (\, [\vec{z}_1]_{|\vec{m}} \quad \dots \quad [\vec{z}_n]_{|\vec{m}} \,) \in \mathcal{M}_{nn}. \tag{10.8}$$

(Si $M = I$ on a le théorème classique $R.P = P.D$, i.e. $D = P^{-1}.R.P$, avec $P^T.P = I$.)

10.2.2 Retour dans V_h et b.o.n. de diagonalisation dans V_h

Dans V_h, avec P cf. (10.8), et avec la base (φ_i) de V_h cf. (10.3), on définit les vecteurs $w_{hj} \in V_h$ par

$$w_{hj} := \sum_{i=1}^n P_{ij}\, \varphi_i. \tag{10.9}$$

Donc, par définition des w_{hj}, P est aussi la matrice de passage de la base (φ_i) vers la base (w_{hi}).

Proposition 10.2 *(w_{hi}) est un b.o.n. dans $(V_h, (\cdot,\cdot)_H)$. De plus, $a(\cdot,\cdot)$ étant symétrique coercitive, R est définie positive et $(v_{hi}) := (\frac{w_{hi}}{\sqrt{\lambda_{hi}}})$ est une b.o.n. dans $(V_h, (\cdot,\cdot)_a)$.*

Preuve. $(\vec{w}_{hi},\vec{w}_{hj})_H=\sum_{k\ell}P_{ki}P_{\ell j}(\varphi_k,\varphi_\ell)_H=\sum_{k\ell}P_{ki}M_{k\ell}P_{\ell j}=(P^T.M.P)_{ik}=\delta_{ij}$, cf. (10.7), donc (w_{hi}) est une b.o.n. dans $(V_h,(\cdot,\cdot)_H)$. Les w_{hj} sont dans V_h car les φ_i sont dans V_h. Et $a(w_{hi},w_{hj})=^{(10.2)}\lambda_{hi}(w_{hi},w_{hj})_{L^2}=\lambda_{hi}\delta_{ij}$, avec les λ_{hi} tous >0 car $a(\cdot,\cdot)$ est coercitive ; donc $a(\frac{w_{hi}}{\sqrt{\lambda_{hi}}},\frac{w_{hj}}{\sqrt{\lambda_{hj}}})=\delta_{ij}$ pour tout i,j, donc $(\frac{w_{hi}}{\sqrt{\lambda_{hi}}})$ est une b.o.n. dans $(V_h,a(\cdot,\cdot))$. ∎

10.2.3 Solution $u_h\in V_h$ avec la base de diagonalisation

Résolution de (10.2) avec la $(\cdot,\cdot)_H$-b.o.n. (w_{hj}) donnée en (10.9) : on cherche

$$u_h=\sum_{j=1}^n c_j w_{hj}\quad\text{i.e.}\quad [u_h]_{(w_{hi})}=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n1},\tag{10.10}$$

i.e. on cherches les c_j (les inconnues sont les composantes de u_h dans la base (w_{hi})). $v_h=\varphi_i$ dans (10.2) donne

$$\forall i=1,...n,\quad \sum_{j=1}^n c_j\underbrace{a(w_{hj},w_{hi})}_{\lambda_{hj}\delta_{ij}}=(f,w_{hi})_H.\tag{10.11}$$

Donc

$$\forall i=1,...n,\quad c_i\lambda_{hi}=(f,w_{hi})_H,\quad\text{donc}\quad u_h=\sum_{j=1}^n\frac{(f,w_{hi})_H}{\lambda_{hi}}w_{hi}.\tag{10.12}$$

Et

$$u_h=\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi_i=\sum_{j=1}^n c_j\sum_{i=1}^n P_{ij}\varphi_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n P_{ij}c_j\varphi_i,\quad\text{donc}\quad \alpha_i=\sum_{j=1}^n P_{ij}c_j,\quad\text{i.e.}\quad [u_h]_{|\varphi}=P.[u_h]_{(w_{hi})},\tag{10.13}$$

formule usuelle de changement de base $[u_h]_{new}=P^{-1}.[u_h]_{old}$ quand $\vec{e}_{new,j}=\sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{e}_{old,i}$.

Exercice 10.3 Donner u_h avec la $(\cdot,\cdot)_a$-b.o.n. (v_{hi}) de la prop. 10.2.

Réponse. $u_h=\sum_j d_jv_{hj}$ donne $\sum_{j=1}^n d_ja(v_{hj},v_{hi})=(f,v_{hi})_H$, $\forall i$, donc $d_j=(f,v_{hi})_H$ et $u_h=\sum_j(f,v_{hi})_Hv_{hj}$. ∎

11 Erreurs sur les valeurs et vecteurs propres

11.1 Erreur sur les valeurs propres

On se donne un espace $V_h\subset V$ (approximation conforme) de dimension finie N.

11.1.1 Erreur systématique par excès

Le principe du min-max (théorème 8.13 équation (8.36)) donne :

$$\lambda_{hm}=\min_{E_{hm}\in\mathcal{V}_{hm}}\max_{v_h\in E_{hm}}R(v_h)\tag{11.1}$$

où $\mathcal{V}_{hm}$ est l'ensemble des sous-espaces de dimension m de V_h. On en déduit :

Corollaire 11.1 *Pour une approximation conforme ($V_h\subset V$), l'erreur sur le calcul de la m-ième valeur propre est systématique par excès :*

$$\lambda_{hm}\geq\lambda_m,\qquad\forall m=1,...,N.\tag{11.2}$$

Preuve. Il faut montrer que, cf. (8.36) :

$$\min_{E_{hm}\in\mathcal{V}_{hm}}\max_{v_h\in E_{hm}}R(v_h)\geq\min_{E_m\in\mathcal{V}_m}\max_{v\in E_m}R(v),\tag{11.3}$$

i.e. :

$$\forall E_{hm}\in\mathcal{V}_{hm}\ :\quad\max_{v_h\in E_{hm}}R(v_h)\geq\min_{E_m\in\mathcal{V}_m}\max_{v\in E_m}R(v).$$

Il suffit d'avoir :

$$\forall E_{hm}\in\mathcal{V}_{hm},\quad\exists E_m\in\mathcal{V}_m\ :\quad\max_{v_h\in E_{hm}}R(v_h)\geq\max_{v\in E_m}R(v).\tag{11.4}$$

Ayant $V_h\subset V$ (approximation conforme), il suffit de prendre $E_m=E_{hm}$. ∎

On sait donc que, calculant numériquement la m-ième valeur propre λ_{hm}, on commet une erreur systématique par excès : la valeur calculée λ_{hm} est toujours supérieure à la valeur propre λ_m cherchée.

11.1.2 * Convergence

Il reste à montrer que, lorsque h est suffisamment petit, i.e., lorsque V_h est “à la limite dense dans V”, on a bien convergence de λ_{hm} vers λ_m. On va majorer λ_{hm} sous la forme :

$$\lambda_{hm} \leq \lambda_m + \varepsilon(h), \qquad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \tag{11.5}$$

Soit $P_h : V \to V_h$ l'opérateur de projection orthogonale de V sur V_h pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$: pour $v \in V$:

$$(P_h v, w_h)_a = (v, w_h)_a, \quad \forall w_h \in V_h. \tag{11.6}$$

Ou encore $a(v - P_h v, w_h) = 0$ pour tout $w_h \in V_h$.

(L'opérateur est bien défini car V_h étant de dimension finie est un espace vectoriel fermé).

Et soit :

$$V_m = \text{Vect}\{w_1, ..., w_m\} \tag{11.7}$$

le sous-espace engendré par les m premiers vecteurs propres du problème spectral continu (8.4).

Lemme 11.2 *Posons :*

$$\sigma_{hm} = \inf_{\substack{v\in V_m\\ v\neq 0}} \frac{||P_h v||_H}{||v||_H} = \inf_{v\in V_m,\ ||v||_H=1} ||P_h v||_H, \tag{11.8}$$

le min sur la sphère unité de $(V_m, (\cdot,\cdot)_H)$. *Alors, on a :*

$$\begin{cases} \sigma_{hm} \leq 1, \\ \lambda_{hm} \leq \dfrac{\lambda_m}{\sigma_{hm}^2}, \ \textit{si } \sigma_{hm} \neq 0. \end{cases} \tag{11.9}$$

Preuve. Le corollaire 11.1 indique que $\lambda_{hm} \geq \lambda_m$. Donc si on montre que $\sigma_{hm}^2 \lambda_{hm} \leq \lambda_m$, on aura a fortiori $\sigma_{hm} \leq 1$. Montrons donc que $\sigma_{hm}^2 \lambda_{hm} \leq \lambda_m$.

On écarte le cas trivial $\sigma_{hm} = 0$, i.e. supposons $\sigma_{hm} > 0$. Cela implique $\dim(P_h V_m) = m$: sinon on aurait $\dim(P_h V_m) \leq m - 1$ et il existerait un vecteur $v_0 \in V_m$ tel que $P_h v_0 = 0$. Ce qui contredit $\sigma_{hm} > 0$.

Puisque $\dim(P_h V_m) = m$, le principe du min-max théorème 8.13 et l'équation 11.1 donnent :

$$\lambda_{hm} \leq \max_{0\neq v_h \in P_h V_m} R(v_h) \tag{11.10}$$

et donc, avec le fait que P_h est $(\cdot,\cdot)_a$ orthogonal (et donc $a(P_h v, P_h v) \leq a(v,v)$ pour tout v dans V) :

$$\lambda_{hm} \leq \max_{0\neq v_h\in P_h V_m} \frac{a(v_h, v_h)}{||v_h||_H^2} = \max_{0\neq v\in V_m} \frac{a(P_h v, P_h v)}{||P_h v||_H^2} \leq \max_{0\neq v\in V_m} \frac{a(v,v)}{||P_h v||_H^2} \tag{11.11}$$

D'où avec $\lambda_m = \max\limits_{0\neq v\in V_m} \dfrac{a(v,v)}{||v||_H^2}$ (cf (8.35)) :

$$\lambda_{hm} \leq \lambda_m \max_{v\in V_m,\ ||v||_H=1} \frac{1}{||P_h v||_H^2} \tag{11.12}$$

ce qui est le résultat annoncé. ∎

Il reste à montrer que $\sigma_{hm} \to 1$ quand $h \to 0$ (cas V_h dense à la limite dans V).

Lemme 11.3 *On a, si* $m \geq 1$ *et* $\dim V_h \geq m$, *posant* $c = \dfrac{2||a||\sqrt{m}}{\lambda_1}$:

$$\sigma_{hm}^2 \geq 1 - c \sup_{\substack{v\in V_m\\ ||v||_H=1}} ||v - P_h v||_V^2. \tag{11.13}$$

Preuve. Étant donnés 2 vecteurs x et y, on a $||y-x||^2 = ||y||^2 + ||x||^2 - 2(x,y)$, d'où :

$$||y||^2 = ||x||^2 + ||y-x||^2 - 2(x-y,x).$$

D'où, pour $v \in V_m$ et $||v||_H = 1$:

$$||P_h v||_H^2 = 1 + ||P_h v - v||_H^2 - 2(v - P_h v, v)_H \geq 1 - 2(v - P_h v, v)_H. \tag{11.14}$$

Il reste à majorer $-2(v-P_hv,v)_H$ pour $v \in V_m$. Pour w_i un vecteur propre de V_m avec $||w_i||_H = 1$, il vient :

$$(v - P_h v, w_i)_H = \frac{1}{\lambda_i} a(v - P_h v, w_i) = \frac{1}{\lambda_i} a(v - P_h v, w_i - P_h w_i),$$

avec la définition de P_h puisque $P_h w_i \in V_h$. Et la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ dans V donne :

$$(v - P_h v, w_i)_H \leq \frac{||a||}{\lambda_i} ||v - P_h v||_V ||w_i - P_h w_i||_V.$$

Donc, si $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \in V_m$:

$$(v - P_h v, \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i)_H \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i (v - P_h v, w_i)_H \leq |\sum_{i=1}^m \alpha_i| \frac{||a||}{\lambda_1} ||v - P_h v||_V \sup_{\substack{w \in V_m \\ ||w_m||_H = 1}} ||w - P_h w||_V$$

Prenant de plus $||v||_H = 1 = \sum \alpha_i^2$ qui donne $|\sum \alpha_i| = |\sum 1.\alpha_i| \leq \sqrt{m}$ (Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^m$) il vient avec :

$$(v - P_h v, v)_H \leq \frac{||a||\sqrt{m}}{\lambda_1} ||v - P_h v||_V \sup_{\substack{w \in V_m \\ ||w_m||_H = 1}} ||w - P_h w||_V$$

D'où, pour $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$, $||v||_H = 1$ et ayant $||v - P_h v||_V \leq \sup_{\substack{w \in V_m \\ ||w_m||_H = 1}} ||w - P_h w||_V$:

$$(v - P_h v, v)_H \leq \frac{||a||\sqrt{m}}{\lambda_1} \sup_{\substack{w \in V_m \\ ||w_m||_H = 1}} ||w - P_h w||_V^2 \tag{11.15}$$

ce qui avec (11.14) donne le résultat souhaité. ∎

Définition 11.4 Soit $I \subset [0,1]$ t.q. $0 \in I$ et 0 non isolé, et soit $(V_h)_{h \in I}$ une suite dans V de sous-espaces de dimension finie t.q. $\dim(V_h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \infty$. On dit que $(V_h)_{h \in I}$ est dense à la limite dans V si tout élément de u de V peut-être approché aussi près que souhaité par un élément de V_h quitte à prendre h assez petit :

$$\forall u \in V, \quad \lim_{h \to 0} (\inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V) = 0 \tag{11.16}$$

Ou encore : $\forall u \in V$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_{u,\varepsilon} > 0$ t.q. : $\dim(V_h) > N_{u,\varepsilon} \Rightarrow \exists v_h \in V_h$, $||u - v_h||_V < \varepsilon$.

Remarque 11.5 h représente un pas de discrétisation, comme par exemple le diamètre maximal d'une maille K_i lorsque $\Omega = \bigcup_i K_i$ est partitionné en mailles (sous domaines) K_i. ∎

On a alors le théorème d'approximation :

Théorème 11.6 *On suppose qu'on dispose d'une suite de sous-espaces V_h dense à la limite dans V. Alors, pour tout m entier ≥ 1 (pour la m-ième valeur propre), il existe une constante $C > 0$, il existe $h_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $h < h_0$ on ait :*

$$0 \leq \lambda_{hm} - \lambda_m \leq C \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v_m||_H = 1}} ||v - P_h v||_V^2,$$

ou encore :

$$0 \leq \lambda_{hm} - \lambda_m \leq C \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v_m||_H = 1}} \inf_{v_h \in V_h} ||v - v_h||_V^2 \tag{11.17}$$

avec $C = \sqrt{m} \dfrac{\lambda_m}{\lambda_1} \dfrac{4||a||^2}{\alpha}$ (où α est constante de coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.).

Et en particulier $\lambda_{hm} \to \lambda_m$ quand $h \to 0$.

Preuve. Avec la conformité $V_h \subset V$ on a (11.6) et donc :

$$||v - P_h v||_V \leq \frac{||a||}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||v - v_h||_V.$$

L'hypothèse d'approximation (11.16) donne donc :

$$\forall v \in V, \quad \lim_{h \to 0} ||v - P_h v||_V = 0.$$

On se fixe $m \in \mathbb{N}$. Alors, V_m étant de dimension finie :

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v_m||_H = 1}} ||v - P_h v||_V = 0.$$

On choisit alors h_0 tel que pour tout $h \leq h_0$ on ait $\sigma_{hm}^2 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est possible grâce à (11.13) et (11.16). Il vient :

$$\lambda_{hm} - \lambda_m \leq \frac{1 - \sigma_{hm}^2}{\sigma_{hm}^2} \lambda_m \leq 2c\lambda_m \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v||_H = 1}} ||v - P_h v||_V^2. \tag{11.18}$$

D'où :

$$\lambda_{hm} - \lambda_m \leq 2\lambda_m \frac{2||a||\sqrt{m}}{\lambda_1} \frac{||a||}{\alpha} \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v_m||_H = 1}} \inf_{v_h \in V_h} ||v - v_h||_V^2.$$

∎

On en déduit le

Corollaire 11.7 *On suppose qu'il existe un sous-espace dense $\mathcal{V}$ de V et une application Π_h de $\mathcal{V}$ dans V_h telle que :*

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \lim_{h \to 0} ||v - \Pi_h v||_V = 0 \tag{11.19}$$

Alors, pour tout entier $m \geq 1$ on a :

$$\lim_{h \to 0} \lambda_{hm} = \lambda_m \tag{11.20}$$

Exemple 11.8 Application aux éléments finis : on prend $\mathcal{V} = C^0(\Omega)$ qui est dense dans $H^1(\Omega)$ et on prend Π_h l'opérateur d'interpolation de $\mathcal{V} = C^0(\Omega)$ dans P_1-continus. Et on a un résultat de convergence pour le problème spectral elliptique approché. ∎

Remarque 11.9 Ne pas confondre α constante de coercivité et λ_1 la plus petite valeur propre : les normes ne sont pas les mêmes : pour α on considère $a(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2$, alors que pour λ_1 on considère le problème spectral $a(v,v) \geq \lambda_1 ||v||_H^2$. ∎

11.2 * Erreur sur les vecteurs propres

On donne le résultat sans démonstration (technique, voir par exemple Raviart–Thomas [11]).

Théorème 11.10 *Sous les hypothèses précédentes, et si λ_m est une valeur propre simple, alors pour h_0 assez petit, λ_{hm} est une valeur propre simple et il existe une constante $C > 0$ indépendante de $h \leq h_0$ telle que :*

$$||w_{hm} - w_m||_V \leq C \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v||_H = 1}} ||v - P_h v||_V \tag{11.21}$$

et :

$$||w_{hm} - w_m||_H \leq C ||w_m - P_h w_m||_H \tag{11.22}$$

Remarque 11.11 Le premier résultat s'écrit de manière plus générale :

$$||w_{hm} - w_m||_V \leq C \sup_{\substack{v \in V_m \\ ||v||_H = 1}} \left(\inf_{v_h \in V_h} ||v - v_h||_V \right)$$

∎

Corollaire 11.12 *L'hypothèse d'approximation V_h dense à la limite dans V donne :*

$$\lim_{h \to 0} ||w_{hm} - w_m||_V = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} ||w_{hm} - w_m||_H = 0 \tag{11.23}$$

11.3 Application aux problèmes elliptiques du second ordre

On donne le résultat sans démonstration (technique, voir par exemple Raviart–Thomas [11]).

Théorème 11.13 *Pour une approximation par des éléments finis P_k, si $V_m \subset H^{k+1}$, alors :*

$$|\lambda_{hm} - \lambda_m| \leq Ch^{2k} \tag{11.24}$$

Et si λ_m est une valeur propre simple, on a :

$$||w_{hm} - w_m||_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \tag{11.25}$$

et

$$||w_{hm} - w_m||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \tag{11.26}$$

Ce résultat vient des inégalités d'interpolation pour la partie vecteurs propres, voir cours d'éléments finis, et de (11.17) pour les valeurs propres : d'où, dans $H^1(\Omega)$, la convergence d'ordre $2k$ sur les valeurs propres lorsqu'on a une convergence d'ordre k sur les vecteurs propres (les fonctions propres ici).

Exemple 11.14 Par exemple pour le problème de recherche des valeurs propres et vecteurs propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0 \text{ tels que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v \, d\Omega = \lambda \int_\Omega u \, v \, d\Omega, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{11.27}$$

l'utilisation d'éléments finis P_1-continus permet d'approcher les valeurs propres à un ordre h^2 près (donc convergence quadratique des valeurs propres approchées vers les valeurs propres réelles), et les vecteurs propres à un ordre h près en norme $H_0^1(\Omega)$ (convergence linéaire). ♣

Deuxième partie
Problèmes paraboliques et hyperboliques

12 Problèmes paraboliques

12.1 Introduction

L'exemple type des problèmes paraboliques est l'équation de la chaleur donnée § 1 : soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière, soit $]0,T[$ un intervalle de temps ($T>0$), soit

$$\Gamma=\partial\Omega,\quad Q_T=]0,T[\times\Omega,\quad \Sigma_T=]0,T[\times\Gamma, \tag{12.1}$$

soit $u^0:\Omega\to\mathbb{R}$ (condition initiale), soit $f:Q_T\to\mathbb{R}$ (source de chaleur), soit $u:Q_T\to\mathbb{R}$ l'inconnue du problème (la température). Et les opérateurs Δ, $\vec\nabla$ et div seront toujours considérés comme des opérateurs en espace, donc, une base $(\vec e_i)_{i=1,...,n}$ étant une base cartésienne dans $\mathbb{R}^n$, donc $\vec\nabla u(t,\vec x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\vec x)\vec e_i$, i.e. $[\vec\nabla u(t,\vec x)]_{|\vec e}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,\vec x)\\ \vdots\\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(t,\vec x)\end{pmatrix}$, $\Delta u(t,\vec x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}$, $\mathrm{div}(\vec X(t,\vec x)=\sum_n\frac{\partial X_i}{\partial x_i}(t,\vec x)$ quand $\vec X(t,\vec x)=\sum_{i=1}^n X_i(t,\vec x)\vec e_i$.

Problème : trouver u t.q.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\vec x)-\Delta u(t,\vec x)=f(t,\vec x)\ \text{ dans } Q_T,\\ \text{CL sur } \Sigma,\\ \text{CI : } u(0,\vec x)=u^0(\vec x)\ \text{ dans } \Omega.\end{cases} \tag{12.2}$$

Eg. CL de Dirichlet : $u(t,\vec x)$ donnée pour tout $t\in[0,T]$ et tout $\vec x\in\Gamma$.
Eg. CL de Neumann : $\vec\nabla u(t,\vec x).\vec n(\vec x)=g(t,\vec x)$ donnée pour tout $t\in[0,T]$ et tout $\vec x\in\Gamma$.)

Formellement, on fait la formulation variationnelle "en espace", i.e. on "multiplie par une fonction $v:\Omega\to\mathbb{R}$ (indépendante de t) :

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega-\int_\Omega\Delta u(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega=\int_\Omega f(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega. \tag{12.3}$$

Toutes les intégrales dépendent du paramètre t. Avec formellement :

$$\begin{cases}\bullet\ \displaystyle\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega=\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega,\\ \bullet\ \displaystyle-\int_\Omega\Delta u(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega=\int_\Omega\vec\nabla u(t,\vec x)\bullet\vec\nabla v(\vec x)\,d\Omega-\int_\Gamma(\vec\nabla u(t,\vec x)\bullet\vec n(\vec x))v(\vec x)\,d\Gamma.\end{cases} \tag{12.4}$$

D'où : pour tout $v:\Omega\to\mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega+\int_\Omega\vec\nabla u(t,\vec x)\bullet\vec\nabla v(\vec x)\,d\Omega=\int_\Omega f(t,\vec x)\,v(\vec x)\,d\Omega+\text{terme éventuel de CL.} \tag{12.5}$$

Eg. CL de Dirichlet homogènes, on ne peut prendre que les fonctions v t.q. $v_{|\Gamma}=0$: pas de "terme éventuel".
Eg. CL de Neumann le "terme éventuel" est $\int_\Gamma g(t,\vec x)v(\vec x)\,d\Gamma$.

Notation : Pour $u:(t,\vec x)\to u(t,\vec x)$ une fonction de deux variables, on note, pour tout $t\in[0,T]$,

$$u_t=u(t):\begin{cases}\Omega\ \to\mathbb{R},\\ \vec x\ \to u_t(\vec x)=u(t)(\vec x)\overset{\text{déf}}{=}u(t,\vec x).\end{cases} \tag{12.6}$$

Donc, eg. pour les CL de Dirichlet homogène : (12.5) devient rigoureusement : $\forall v\in H_0^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2}+a(u(t),v)=(f(t),v)_{L^2},\quad\text{où}\quad a(v,w)=(\vec\nabla v,\vec\nabla w)_{L^2}, \tag{12.7}$$

avec $u(0)=u^0$ dans Ω, cf. $(12.2)_3$ (CI).

12.2 Rappels et notations

Soit E et F deux espaces de Banach, et K_E un compact de E. On note $C^0(K_E, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur K_E. On rappelle que la continuité en t d'une fonction $f \in C^0(K_E, F)$ s'énonce :

$$\forall t \in K_E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_{t,\varepsilon}, \quad \forall s \in K_E : ||s-t||_E \le \eta_{t,\varepsilon} \Rightarrow ||f(s) - f(t)||_F \le \varepsilon. \tag{12.8}$$

Et une fonction est uniformément continue sur K_E si $\eta_{t,\varepsilon}$ ne dépend pas de t :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon, \quad \forall t \in K_E, \quad \forall s \in K_E : ||s-t||_E \le \eta_\varepsilon \Rightarrow ||f(s) - f(t)||_F \le \varepsilon. \tag{12.9}$$

Et on sait que lorsque que K_E est compact, la continuité est équivalente à l'uniforme continuité. On munit dès lors $C^0(K_E, F)$ de la norme :

$$||f||_{C^0(K_E,F)} = \sup_{t \in K_E} ||f(t)||_F. \tag{12.10}$$

De même, on note $C^1(K_E, F)$ l'ensemble des fonctions continues et dérivables sur K_E, de dérivée continue sur K_E. Et on munit cet espace de la norme :

$$||f||_{C^1(K_E,F)} = \max(\sup_{t \in K_E} ||f(t)||_F, \sup_{t \in K_E} ||\frac{df}{dt}(t)||_F). \tag{12.11}$$

En particulier, pour $K_E = [0, T]$ et $F = \mathbb{R}$, on a les fonctions réelles usuelles C^0 et C^1 sur le compact $[0, T]$. Et on s'intéressera ici aux cas $F = L^2(\Omega)$, $F = H_0^1(\Omega)$ et $F = H^1(\Omega)$.

Par exemple, pour $F = L^2(\Omega)$, on s'intéressera aux fonctions u de $C^0([0, T], L^2(\Omega))$, i.e., les fonctions continues sur $[0, T]$ telles que pour chaque $t \in [0, T]$ on a $u(t) = u_t \in L^2(\Omega)$ (i.e. telles que $\int_\Omega |u(t, \vec{x})|^2 \, d\Omega < \infty$ où $u(t, \vec{x}) =^{\text{déf}} u(t)(\vec{x})$), espace normé à l'aide de :

$$||v||_{C^0([0,T],L^2(\Omega))} = \sup_{t \in [0,T]} ||v(t)||_{L^2} \quad (= \sup_{t \in [0,T]} (\int_\Omega |v(t, \vec{x})|^2 \, d\Omega)^{\frac{1}{2}}). \tag{12.12}$$

Et on s'intéressera également aux fonctions u de $C^1([0, T], L^2(\Omega))$, de $C^0([0, T], H_0^1(\Omega))$ et de $C^1([0, T], H_0^1(\Omega))$.

Pour la formulation abstraite, les espaces de fonctions qui interviendront seront entre autres $C^0([0, T], H)$, $C^1([0, T], H)$, $C^0([0, T], V)$ et $C^1([0, T], V)$.

On utilisera également l'espace de fonction $L^2([0, T], H)$ des fonctions f telles que $f(t)$ soit de carré intégrable : $\int_0^T ||f(t)||_H^2 \, dt < \infty$ (le carré est pris au sens de la norme de H).

Dans le cas $H = L^2(\Omega)$, pour $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$ on a :

$$\infty > \int_0^T ||f(t)||_H^2 \, dt = \int_0^T \int_\Omega |f(t)(\vec{x})|^2 \, d\Omega \, dt = \int_\Omega \int_0^T |f(t)(\vec{x})|^2 \, dt \, d\Omega, \tag{12.13}$$

car la première égalité indique que $f^2 \in L^1([0, T] \times \Omega)$, et on peut donc appliquer le théorème de Fubini. Cela prouve que $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ peut être identifier à $L^2([0, T] \times \Omega) = L^2(Q_T)$:

$$L^2([0, T], L^2(\Omega)) \simeq L^2([0, T] \times \Omega).$$

De plus, pour H espace de Hilbert, l'espace $L^2([0, T], H)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_0^T (f(t), g(t))_H \, dt. \tag{12.14}$$

Et pour la fonction $u(t, \vec{x})$, on aura besoin d'espaces de type $L^2([0, T], H^1(\Omega))$, i.e., espaces de fonctions $u : [0, T] \to H^1(\Omega)$ telles que $\int_0^T ||u(t)||_{H^1}^2 \, dt < \infty$.

12.3 Le problème parabolique abstrait

On se donne deux espaces de Hilbert H et V t.q.

$$\begin{aligned} &V \text{ dense dans } H, \\ &V \subset H \text{ avec injection continue et compacte,} \end{aligned} \tag{12.15}$$

ainsi qu'une forme :

$$a(\cdot, \cdot) \text{ bilinéaire symétrique continue coercive sur } V. \tag{12.16}$$

Le problème parabolique abstrait est, étant donnée une fonction $u^0 \in H$ (condition initiale) et une fonction $f \in L^2([0, T], H)$ (source) : trouver $u \in L^2([0, T], V) \bigcap C^0([0, T], H)$ t.q.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v)_H + a(u(t),v) = (f(t),v)_H, \quad \forall v \in V, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[), \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{12.17}$$

Eg. (12.7). Et il s'agira de trouver une solution au sens des distributions (régularité très faible en temps), i.e. t.q. pour toute fonction $v \in V$ et pour toute fonction à valeurs réelles $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$:

$$-\langle\ (u(t),v)_H\ ,\ \frac{d}{dt}\varphi(t)\ \rangle + \langle\ a(u(t),v)\ ,\ \varphi(t)\ \rangle = \langle\ (f(t),v)_H, \varphi(t)\ \rangle. \tag{12.18}$$

En fait, sous des conditions de régularité suffisantes pour u^0 et f, on peut montrer que $u \in C^1([0,T],H)$, et donc qu'il suffit de considérer l'équation (12.17) au sens classique (voir par exemple Brézis [4] et chapitre sur le théorème de Hille–Yosida). Dans le cadre présent (celui des fonctions intégrables), on n'obtiendra pas cette régularité C^1.

12.4 Décomposition sur la base de vecteurs propres (orthogonale)

Avec (12.15)-(12.16), le problème spectral (8.4) : trouver les couples $(\lambda, w) \in \mathbb{R} \times V$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad a(w,v) = \lambda(w,v)_H \tag{12.19}$$

permet d'avoir une suite $(\lambda_n, w_n)_{\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R} \times V)^{\mathbb{N}^*}$ de couples “valeurs propres–vecteurs propres”, les w_n formant une base hilbertienne de H, et les λ_n étant positifs.

Analyse du problème (12.17) : s'il existe une solution u, alors $u(t) \in H$, donc

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) w_j, \quad \text{où} \quad \alpha_j(t) = (u(t), w_j)_H \tag{12.20}$$

car (w_j) b.o.n. dans H. (Les $\alpha_j(t)$ sont les composantes de $u(t)$ sur la b.o.n. (w_j).) Donc avec $v = w_i$ dans (12.17) :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \sum_j (w_j, w_i)_H \frac{d\alpha_j}{dt}(t) + \sum_j \alpha_j(t) a(w_j, w_i) = (f(t), w_i)_H, \\ \sum_j (w_j, w_i)_H \alpha_j(0) = (u^0, w_i)_H, \end{cases}$$

avec $(w_j, w_i)_H = \delta_{ij}$ et $a(w_j, w_i) = \lambda_i \delta_{ij}$. Donc, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, les $\alpha_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfont l'EDO

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_i}{dt}(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = f_i(t) \quad \text{où} \quad f_i(t) = (f(t), w_i)_H \\ \alpha_i(0) = u_i^0 \quad \text{où} \quad u_i^0 = (u^0, w_i)_H \end{cases} \tag{12.21}$$

Lemme 12.1

$$\alpha_i(t) = e^{-\lambda_i t}\Big((u^0, w_i)_H + \int_0^t (f(s), w_i)_H e^{\lambda_i s}\, ds\Big) \tag{12.22}$$

(En particulier, $u(t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) w_i(\vec{x})$ est sous la forme d'une somme de fonctions à variables séparées.)

Preuve. EDO générique. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt}(t) + \lambda\alpha(t) = g(t),\ t \in [0,T] \\ \alpha(0) = \alpha_0 \end{array} \right\}$. Solution homogène (i.e. pour $g = 0$) avec CI α_0 :

$$\alpha_h(t) = \alpha_0 e^{-\lambda t}. \tag{12.23}$$

Solution particulière α_p avec CI nulle ($\alpha_p(0) = 0$) et second membre g (méthode de variation de la constante : $\alpha_p(t) = c(t)e^{-\lambda t}$ donne $c'(t)e^{-\lambda t} = g(t)$ donc) :

$$\alpha_p(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t g(s)\, e^{\lambda s}\, ds. \tag{12.24}$$

Et solution : $\alpha = \alpha_h + \alpha_p$. ∎

Il reste à prouver que le problème (12.17) admet une solution.

Théorème 12.2 *Sous les hypothèses (12.15) et (12.16), le problème (12.17) admet l'unique solution :*

$$\forall t \in [0,T], \quad u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) w_i, \tag{12.25}$$

au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Preuve. Il suffit pour cela d'établir que la série (12.25) est convergente pour $u^0 \in H$ et $f \in L^2([0,T],H)$, voir dans Raviart–Thomas [11]. On donne uniquement les étapes de la démonstration ici.

1- On regarde le problème approché dans $V_m = \text{Vect}\{w_1, ...w_m\}$ (en dimension finie donc). On obtient immédiatement que la solution u_m cherchée dans $L^2([0,T],V_m)$ n'est autre que la série (12.25) tronquée :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) w_i \tag{12.26}$$

2- On montre que la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à la fois dans l'espace $L^2([0,T],V)$ muni de sa norme et dans l'espace $C^0([0,T],H)$ muni de sa norme.

3- Les espaces $L^2([0,T],V)$ et $C^0([0,T],H)$ étant complets, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans chacun des espaces vers des limites respectives u^l et u^c.

4- L'injection $V \subset H$ est continue, donc l'injection de $L^2([0,T],V)$ dans $L^2([0,T],H)$ est continue. Et l'injection de $C^0([0,T],H)$ dans $L^2([0,T],H)$ est également continue. On en déduit que $u^l = u^c =^{\text{noté}} u$. Donc

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \in L^2([0,T],V) \bigcap C^0([0,T],H) \tag{12.27}$$

5- Il reste à vérifier (12.18). ∎

Il reste à montrer : le problème (12.17) est bien posé, i.e., u dépend continûment de $||u^0||_H$ et $||f(t)||_H$:

Théorème 12.3 *Sous les hypothèses (12.15) et (12.16), le problème (12.17) admet une unique solution t.q.,*

$$\forall t \in [0,T], \quad ||u(t)||_H \le e^{-\lambda_1 t}\big(||u^0||_H + \int_0^t ||f(s)||_H e^{\lambda_1 s}\, ds\big), \tag{12.28}$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre.

Preuve. Le développement en série (12.25) avec (12.22) donne :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{\infty}\Big(e^{-\lambda_i t}(u^0,w_i)_H + e^{-\lambda_i t}\int_{s=0}^t (f(s),w_i)_H e^{\lambda_i s}\, ds\,\Big) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}(u^0,w_i)_H w_i + \int_{s=0}^t e^{-\lambda_i t}\sum_{i=1}^{\infty}(f(s),w_i)_H e^{\lambda_i s} w_i\, ds. \end{aligned} \tag{12.29}$$

En effet :

1- $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}(u^0,w_i)_H w_i \in H$ car (w_i) étant une b.o.n. de H :

$$||\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}(u^0,w_i)_H w_i||_H = (\sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}(u^0,w_i)_H^2)^{\frac{1}{2}} \le e^{-\lambda_1 t}(\sum_{i=1}^{\infty}(u^0,w_i)_H^2)^{\frac{1}{2}} = e^{-\lambda_1 t}||u^0||_H.$$

Donc le dernier terme $D = \sum_{i=1}^{\infty}\big(e^{-\lambda_i t}\int_{s=0}^t (f(s),w_i)_H e^{\lambda_i s}\, ds\,\big)w_i$ dans $(12.29)_1$ est également dans H.

2- Inversion $\sum\int = \int\sum$ dans $(12.29)_2$: notons $g_i(s) = (f(s),w_i)_H e^{-\lambda_i(t-s)}$. Comme (w_i) est une base de H, il suffit de vérifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$(\sum_{i=1}^{\infty}(\int_0^t g_i(s)\, ds) w_i, w_j)_H = (\int_0^t (\sum_{i=1}^{\infty} g_i(s) w_i)\, ds, w_j)_H,$$

i.e., par continuité du produit scalaire :

$$\sum_{i=1}^{\infty}((\int_0^t g_i(s)\, ds) w_i, w_j)_H = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} g_i(s)(w_i,w_j)_H\, ds,$$

i.e. (on a $(w_i,w_j)_H = \delta_{ij}$) :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t g_i(s)\, ds\, \underbrace{(w_i,w_j)_H}_{\delta_{ij}} = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} g_i(s)\delta_{ij}\, ds, \quad \text{i.e.} \quad \int_0^t g_j(s)\, ds = \int_0^t g_j(s)\, ds,$$

OK !

3- $\sum_{i=1}^{\infty}(f(s),w_i)_H e^{-\lambda_i(t-s)}w_i \in H$ pour $s<t$, car $0<\lambda_1\leq\lambda_i$, $(w_i)_{\mathbb{N}^*}$ b.o.n. dans H, et Pythagore donnent

$$||\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i(t-s)}(f(s),w_i)_H w_i||_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\lambda_i(t-s)}(f(s),w_i)_H^2 \leq e^{-2\lambda_1(t-s)}||f(s)||_H^2. \tag{12.30}$$

4- D'où (12.29) donne :

$$||u(t)||_H \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}(u^0,w_i)_H w_i||_H + \int_0^t ||\sum_{i=1}^{\infty}(f(s),w_i)_H w_i e^{-\lambda_i(t-s)}||_H \, ds.$$

D'où le résultat, car $\lambda_i \geq \lambda_1$ pour tout i et $u^0(t)=\sum_{i=1}^{\infty}(u^0,w_i)_H w_i$ donnent $||u^0(t)||_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(u^0,w_i)_H^2$. ∎

12.5 Solution approchée par troncature

On tronquer la solution (12.25) :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) w_i, \tag{12.31}$$

le théorème précédent indiquant que : quand $m\to\infty$, alors $u_m \to u$ dans le bon espace. L'approximation sera d'autant meilleur que m est grand.

Problème de cette troncature : il faut connaître la base de $L^2(\Omega)$ orthogonale formée des vecteurs propres de $a(\cdot,\cdot)$. Dans la pratique, c'est rarement possible.

12.6 Résolution (approchée) par éléments finis

On se donne un sous-espace $V_h \subset V$ de dimension finie $m=\dim V_h$, on choisit une base $(\varphi_i)_{i=1,...,m}$ dans V_h. Et on regarde le problème approché de (12.17) : trouver $u_h \in \mathcal{F}([0,T];V_h)$ t.q.

$$\begin{cases} \text{EDP}_h : & \dfrac{d}{dt}(u_h(t),v_h)_H + a(u_h(t),v_h) = \ell(t,v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ \text{CI}_h : & u_h(0) \text{ donnée par } (u_h(0),v_h)_H = (u^0,v_h)_H, \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{12.32}$$

(projection orthogonale de $u(0)$ dans $(V_h,(\cdot,\cdot)_H)$), avec

$$u_h(t) = \sum_{j=1,...,m} \alpha_{jh}(t)\,\varphi_j \ \ (\in V_h). \tag{12.33}$$

(Les composantes $\alpha_{jh}(t)$ sont les inconnues.) On aura alors la solution approchée, pour tout $t\in[0,T]$ et $\vec{x}\in\Omega$:

$$u_h(t,\vec{x}) = \sum_{j=1,...,m} \alpha_{jh}(t)\,\varphi_j(\vec{x}) \ \ (\in \mathbb{R}). \tag{12.34}$$

Comme $(\varphi_i)_{i=1,...,m}$ est une base dans V_h, (12.32) équivaut à : trouver les fonctions $\alpha_{jh} \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ t.q.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j,\varphi_i)_H \frac{d\alpha_{jh}}{dt}(t) + \sum_{j=1}^{m} a(\varphi_j,\varphi_i)\alpha_{jh}, = \ell(t,\varphi_i), \quad \forall i=1,...,m, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j,\varphi_i)_H \alpha_{jh}(0) = (u^0,\varphi_i)_H, \quad \forall i=1,...,m, \end{cases} \tag{12.35}$$

i.e. t.q.

$$\begin{cases} M.\dfrac{d\vec{\alpha}_h}{dt}(t) + R.\vec{\alpha}_h(t) = \vec{f}(t), \\ M.\vec{\alpha}_h(0) = \vec{\alpha}^0, \end{cases} \tag{12.36}$$

où (matrices carrées et matrices colonnes)

$$M = [(\varphi_j,\varphi_i)_H], \ R=[a(\varphi_j,\varphi_i)], \ \vec{\alpha}_h(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1h}(t) \\ \vdots \\ \alpha_{mh}(t) \end{pmatrix}, \ \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \ell(t,\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(t,\varphi_m) \end{pmatrix}, \ \vec{u}^0 = \begin{pmatrix} (u^0,\varphi_1)_H \\ \vdots \\ (u^0,\varphi_m)_H \end{pmatrix}. \tag{12.37}$$

M est la matrice de masse et R est la matrice de rigidité

(12.36) est un système différentiel linéaire du premier ordre classique. Notez que si on choisit des éléments finis P_1 pour V_h, la matrice de masse M peut-être rendue diagonale (par "mass lumping"), sans perte de précision, et l'inverse de M est alors immédiat. Méthodes de résolutions : voir § B.8.4.

12.7 Discrétisation en temps

On souhaite résoudre (12.36) de manière approché en temps (et non de manière exacte comme au § B.8.4).

On donne ici l'exemple de la discrétisation de type Euler explicite : on se sert du développement limité de $\vec{u}_h$ au premier ordre, pour écrire, notant $k = \Delta t$ un "petit pas de temps" :

$$\frac{d\vec{u}_h}{dt}(t) = \frac{\vec{u}_h(t+k) - \vec{u}_h(t)}{k} + o(1),$$

puis à partir de (12.36), notant $t^n = nk$, on cherche une valeur approchée $\vec{u}_h^n$ de $\vec{u}_h(nk)$ telle que :

$$M.\frac{\vec{u}_h^{n+1} - \vec{u}_h^n}{k} + R.\vec{u}_h(t^n) = \vec{f}(t^n).$$

Connaissant la valeur $\vec{u}_h(0)$, on pose $\vec{u}_h^0 = \vec{u}_h(0)$, et $\vec{u}_h^1$ est déterminé à l'aide de :

$$M.\vec{u}_h^1 = M.\vec{u}_h^0 + k(-R.\vec{u}_h^0 + \vec{f}^0), \tag{12.38}$$

où on a noté $\vec{f}^n = \vec{f}(t^n)$ pour tout $n \geq 0$.

Noter qu'en général on n'inverse pas la matrice M, mais qu'on utilise une méthode de type LU pour résoudre le système (12.38). Une fois connu $\vec{u}_h^1$, on peut calculer $\vec{u}_h^2$ puis tous les $\vec{u}_h^n$, la décomposition LU de M étant faite une seule fois :

$$M.\vec{u}_h^{n+1} = M.\vec{u}_h^n + k(-R.\vec{u}_h^n + \vec{f}^n).$$

On renvoie au cours sur la résolution d'équations différentielles pour les différentes méthodes de discrétisation en temps (Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicholson, Runge–Kutta...).

13 problèmes hyperboliques : à rédiger

Troisième partie

Annexes

A Oscillateur harmonique 1-D et conditions initiales

On traite ici le cas le problème classique de l'équations de ondes avec conditions initiales, i.e., on s'intéresse à la résolution de $\varphi''(t) = -\lambda\varphi(t)$, avec $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ donnés.

A.1 Oscillateur harmonique libre non amorti

Le problème est de trouver une fonction $\varphi(t)$ telle que dans l'intervalle $[0, T]$:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \ \dot{\varphi}(0) = \varphi_1, \end{cases} \tag{A.1}$$

avec $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$ les dérivées premières et secondes en temps. Voici 3 exemples parmi d'autres. Pour un problème de ressort élastique de raideur k attaché à une masse m, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\varphi = x$ est l'allongement du ressort au temps t ; Pour un pendule de masse m, de longueur l soumis à des mouvements de petite amplitude, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et φ est l'angle (petit) avec la verticale. Pour un circuit électrique avec une self L et une capacité C, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $\varphi = i$ est l'intensité du courant.

Ce problème homogène a pour solution générale :

$$\varphi(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t), \tag{A.2}$$

a et b étant donnés de manière unique par les conditions initiales. Ici on a $\varphi_0 = a$ et $\varphi_1 = \omega_0 b$, donc $\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\varphi_1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$. Par définition, ω_0 est la pulsation, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ la période du mouvement et $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ la fréquence.

A.2 Oscillateur harmonique forcé non amorti

Le problème est de trouver une fonction $\varphi(t)$ telle que :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = \alpha\sin(\omega_1 t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \ \dot{\varphi}(0) = \varphi_1. \end{cases} \tag{A.3}$$

A.2.1 Cas $\omega_1 \neq \omega_0$ et battements

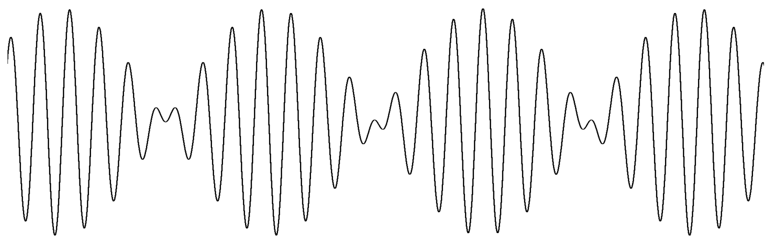

FIGURE A.1 – Représentation de $\varphi = \cos(t) + \sin((1.15) * t)$

On cherche une solution particulière de $(\text{A.3})_1$ de la forme :

$$\varphi_p(t) = \beta\sin(\omega_1 t) + \gamma\cos(\omega_1 t). \tag{A.4}$$

On doit donc avoir $-\omega_1^2(\beta\sin(\omega_1 t) + \gamma\cos(\omega_1 t)) + \omega_0^2(\beta\sin(\omega_1 t) + \gamma\cos(\omega_1 t)) = \alpha\sin(\omega_1 t)$ pour tout t. Et donc $(\omega_0^2 - \omega_1^2)\beta = \alpha$ et $(\omega_0^2 - \omega_1^2)\gamma = 0$.

Sachant $\omega_1 \neq \omega_0$, on obtient $\gamma = 0$ et $\beta = \frac{\alpha}{\omega_0^2-\omega_1^2}$, d'où une solution particulière :

$$\varphi_p(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\sin(\omega_1 t). \tag{A.5}$$

D'où la solution générale :

$$\varphi(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\sin(\omega_1 t). \tag{A.6}$$

Les conditions initiales donnent $a = \varphi_0$ et $b = \dfrac{\alpha\frac{w_1}{\omega_0}}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$.

Lorsque ω_1 est proche de ω_0 on a une superposition de deux fonctions périodiques de période proche, ce qui donne lieu à un phénomène de battement, voir figure A.1.

A.2.2 Cas $\omega_1 = \omega_0$: résonance

On résout :

$$\begin{cases} \ddot\varphi + \omega_0^2\varphi = \alpha\sin(\omega_0 t), \\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot\varphi(0) = \varphi_1. \end{cases} \tag{A.7}$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\varphi_p(t) = \beta t\sin(\omega_0 t) + \gamma t\cos(\omega_0 t), \tag{A.8}$$

ce qui donne :

$$\varphi_p(t) = -\frac{\alpha}{2\omega_0} t\cos(\omega_0 t). \tag{A.9}$$

(Calculs simplifiés : on cherche φ_p de la forme $\varphi_p(t) = \gamma t\cos(\omega_0 t)$, d'où $\varphi_p'(t) = \gamma\cos(\omega_0 t) - \omega_0\gamma t\sin(\omega_0 t)$, d'où $\varphi_p''(t) = -\omega_0\gamma\sin(\omega_0 t) - \omega_0\gamma\sin(\omega_0 t) - \omega_0^2\gamma t\cos(\omega_0 t)$, d'où $-\omega_0\gamma\sin(\omega_0 t) - \omega_0\gamma\sin(\omega_0 t) = \alpha\sin(\omega_0 t)$, d'où $-\omega_0\gamma - \omega_0\gamma = \alpha$.)

La solution générale est donc :

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) - \frac{\alpha}{2\omega_0} t\cos(\omega_0 t). \tag{A.10}$$

Et la solution explose, i.e., $\varphi(t)$ non borné quand $t \to \infty$, même si α est très petit (énergie apportée très petite). Quand ce phénomène se produit (fréquence apportée égale à la fréquence de vibration propre), il y a rupture du matériau dont le mouvement est décrit par l'équation.

Exercice A.1 Résoudre, pour f intégrable et $\omega_0 > 0$:

$$\begin{cases} \ddot\varphi(t) + \omega_0^2\varphi(t) = f(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot\varphi(0) = \varphi_1. \end{cases} \tag{A.11}$$

Retrouver les résultats (A.3) et (A.10).

Réponse. La solution homogène est donnée par (A.2). On cherche une solution particulière $\varphi_p(t) = a(t)\cos(\omega_0 t) + b(t)\sin(\omega_0 t)$. Donc, supposant (première équation) $a'(t)\cos(\omega_0 t) + b'(t)\sin(\omega_0 t) = 0$ on obtient $\varphi_p'(t) = \omega_0(-a(t)\sin(\omega_0 t) + b(t)\cos(\omega_0 t))$, d'où $\varphi_p''(t) = -\omega_0^2(a(t)\cos(\omega_0 t) + b(t)\sin(\omega_0 t)) + \omega_0(-a'(t)\sin(\omega_0 t) + b'(t)\cos(\omega_0 t))$. Donc φ_p vérifie $\omega_0(-a'(t)\sin(\omega_0 t) + b'(t)\cos(\omega_0 t)) = f(t)$ (deuxième équation), avec $a'(t)\cos(\omega_0 t) + b'(t)\sin(\omega_0 t) = 0$ (première équation). D'où $b'(t) = \frac{f(t)}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)$ et $a'(t) = -\frac{f(t)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$. Par exemple $a(t) = -\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(\tau)\sin(\omega_0\tau)\,d\tau$ et $b(t) = \frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau$.

Solution générale $\varphi(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + \varphi_p(t)$. Puis $\varphi(0) = a = \varphi_0$, et $\varphi'(0) = \omega_0 b = \varphi_1$.

Exercice A.2 Résoudre, pour $f \in L^2(]0,T[)$ et $k > 0$, l'ED aux limites sur $[0,L]$ (avec $L > 0$) :

$$\begin{cases} -\varphi''(x) + k\varphi(x) = f(x), \\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi(L) = \varphi_L. \end{cases} \tag{A.12}$$

Poser $\omega = \sqrt{k}$. Traiter le cas particulier $f(x) = \alpha\sinh(\omega x)$ où, et avec $\alpha = 2\omega\varphi_0 \neq 0$ (si $\alpha = 0$ alors $\varphi = 0$ est la solution).

Réponse. Lax–Milgram donne l'existence et l'unicité de la solution (et problème bien posé). Solution homogène générique $\varphi_h(x) = a\cosh(\omega x) + b\sinh(\omega x)$. On cherche une solution particulière $\varphi_p(t) = a(t)\cosh(\omega t) + b(t)\sinh(\omega t)$. Donc, supposant (première équation) $a'(t)\cosh(\omega t) + b'(t)\sinh(\omega t) = 0$ on obtient $\varphi_p'(t) = \omega(a(t)\sinh(\omega t) + b(t)\cosh(\omega t))$, d'où $\varphi_p''(t) =$

$\omega^2(a(t)\cosh(\omega t)+b(t)\sinh(\omega t))+\omega(a'(t)\sinh(\omega t)+b'(t)\cosh(\omega t))$. Donc φ_p vérifie $\omega(a'(t)\sinh(\omega t)+b'(t)\cosh(\omega t)) = f(t)$ (deuxième équation), avec $a'(t)\cosh(\omega t) + b'(t)\sinh(\omega t) = 0$ (première équation). Et $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$. D'où $b'(x) = \frac{f(x)}{\omega}\cosh(\omega x)$ et $a'(x) = -\frac{f(x)}{\omega}\sinh(\omega x)$. Par exemple $a(x) = -\frac{1}{\omega}\int_0^x f(\tau)\sinh(\omega\tau)\,d\tau$ et $b(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x f(\tau)\cosh(\omega\tau)\,d\tau$. Solution générale $\varphi(x) = a\cosh(\sqrt{k}x) + b\sinh(\sqrt{k}x) + \varphi_p(x)$, avec Puis C.L..

Cas particulier $f(x) = \alpha\sinh(\omega x)$. Au lieu d'appliquer le résultat précédent il est aussi rapide de chercher une solution particulière $\varphi_p(x) = \gamma x\cosh(\omega x)$ (comme $-f'' + kf = 0$, on ne peut pas avoir une solution particulière de la forme $\varphi_p(x) = \gamma\sinh(\omega x)$ par plus que de la forme $\varphi_p(x) = \gamma\cosh(\omega x)$). Donc $\varphi_p(x) = \gamma x\cosh(\omega x)$ donne $\varphi_p'(x) = \gamma\cosh(\omega x)+\omega\gamma x\sinh(\omega x)$. Donc $\varphi_p''(x) = \gamma\omega\sinh(\omega x)+\omega\gamma\sinh(\omega x)+\omega^2\gamma x\cosh(\omega x)$. Donc $-\gamma\omega\sinh(\omega x)-\omega\gamma\sinh(\omega x) = \alpha\sinh(\omega x)$, donc $\gamma = -\frac{\alpha}{2\omega}$. Donc $\varphi(x) = a\cosh(\sqrt{k}x) + b\sinh(\sqrt{k}x) - \frac{\alpha}{2\omega}x\cosh(\omega x)$. Et $\varphi(0) = a = \varphi_0$, et $\varphi(L) = \varphi_0\cosh(\sqrt{k}L) + b\sinh(\sqrt{k}L) - \frac{\alpha}{2\omega}L\cosh(\omega L) = \varphi_L$, d'où b. Si $\alpha = 2\omega\varphi_0$ alors $b = \frac{\varphi_L}{\sinh(\sqrt{k}L)}$. ▪

A.3 Oscillateur harmonique libre amorti faiblement

Un système mécanique réel est toujours amorti. On supposera ici l'amortissement faible. Le problème est de trouver une fonction $\varphi(t)$ telle que :

$$\begin{cases} \ddot\varphi + r\dot\varphi + \omega_0^2\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot\varphi(0) = \varphi_1, \end{cases} \tag{A.13}$$

où $r \in \mathbb{R}$ et $r\dot\varphi$ représente une force de frottement visqueuse (i.e. frottement proportionnel à la 'vitesse' $\dot\varphi$).

On cherche une solution de la forme $\varphi(t) = e^{pt}$ avec $p \in \mathbb{C}$: p est solution du polynôme caractéristique :

$$p^2 + rp + \omega_0^2 = 0. \tag{A.14}$$

On obtient $p = \frac{1}{2}(-r \pm \sqrt{r^2 - 4\omega_0^2})$.

Par définition un amortissement faible vérifie $r^2 < 4\omega_0^2$ (discriminant imaginaire), donc $p = \frac{1}{2}(-r \pm i\sqrt{4\omega_0^2 - r^2})$, et on obtient la solution réelle générale :

$$\varphi(t) = e^{-\frac{rt}{2}}(a\cos(\omega_r t) + b\sin(\omega_r t)), \qquad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4}}, \tag{A.15}$$

où a et b sont fixés à l'aide des conditions aux limites. Et le mouvement est oscillant de pulsation plus faible $\omega_r < \omega_0$ (ou de période plus grande) que dans le cas non amorti, d'amplitude exponentiellement décroissante.

A.4 Oscillateur harmonique forcé amorti faiblement

Le problème est de trouver une fonction $\varphi(t)$ telle que :

$$\begin{cases} \ddot\varphi + r\dot\varphi + \omega_0^2\varphi = \alpha\sin(\omega_1 t), \\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot\varphi(0) = \varphi_1. \end{cases} \tag{A.16}$$

Une solution particulière, cherchée de fréquence ω_1 est donnée par :

$$\varphi_p = \frac{-\alpha r\omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + r^2\omega_1^2}\cos(\omega_1 t) + \frac{-\alpha(\omega_0^2 - \omega_1^2)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + r^2\omega_1^2}\sin(\omega_1 t). \tag{A.17}$$

Et la solution est donnée par la solution particulière additionnée à la solution homogène et la prise en compte des conditions aux limites.

Grâce à l'amortissement, l'amplitude n'explose pas. Cependant, lorsque $\omega_1 = \omega_0$ et $r << \frac{\alpha}{\omega_1}$, l'amplitude est très grande, et on retombe sur le cas limite d'un oscillateur non amorti résonnant.

B Valeurs propres généralisées

B.1 Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n1}$ et $\mathcal{M}_{nn}$

Soit $\mathcal{M}_{n1}$ l'ensemble des matrices colonnes réelles $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ (où donc $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$). On munit $\mathcal{M}_{n1}$ de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels en identifiant $\mathcal{M}_{n1}$ avec $\mathbb{R} \times ...\mathbb{R} =^{\text{noté}} \mathbb{R}^n$ (produit cartésien n-fois). On note $(\vec{E}_i)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}$, donc $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{E}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (où 1 et 0 sont les éléments neutre de la multiplication et de l'addition du corps $\mathbb{R}$). Un élément $\vec{x}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n1}$ est caractérisé à l'aide de ses composantes sur la base $(\vec{E}_i)$, soit, si on note x_i ses composantes,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{E}_i, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{x}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

où $[\vec{x}]_{|\vec{E}}$ est la matrice représentant le vecteur $\vec{x}$ relativement à la base $(\vec{E}_i)$; et si $(\vec{a}_i)$ est une autre base dans $\mathcal{M}_{n1}$ alors $[\vec{x}]_{|\vec{a}} = P^{-1}.[\vec{x}]_{|\vec{E}}$ où $P = [P_{ij}]$ est la matrice de passage de $(\vec{E}_i)$ à $(\vec{a}_i)$, i.e. où $\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \vec{E}_i$ pour tout j. Si on ***n'***utilise ***que*** la base $(\vec{E}_i)$ alors on note également $[\vec{x}]_{|\vec{E}} = \vec{x}$.

On note $(\cdot,\cdot)_I$ le produit scalaire canonique associé à la base canonique $(\vec{E}_i)$, i.e. la forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n1}$ définie par $(\vec{E}_i, \vec{E}_j)_I = \delta_{ij}$ pour tout i, j. Donc, pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{M}_{n1}$, si $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{E}_i$ et $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{E}_j$ alors

$$(\vec{x}, \vec{y})_I = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [\vec{x}]_{\vec{E}}^T.[\vec{y}]_{\vec{E}}. \tag{B.2}$$

Et si M est une matrice $n * n$ symétrique définie positive, on note

$$(\vec{x}, \vec{y})_M = \sum_{i=1}^{n} x_i M_{ij} y_i = [\vec{x}]_{\vec{E}}^T.M.[\vec{y}]_{\vec{E}}, \tag{B.3}$$

qui définit un produit scalaire dans $\mathcal{M}_{n1}$ (on retrouve $(\cdot,\cdot)_I$ pour $M = I$ matrice identité).

Soit $\mathcal{M}_{mn}$ l'ensemble des matrices $m * n$ réelles qu'on munit de sa structure usuelle d'espace vectoriel (somme interne et multiplication externe par un réel). Pour $A \in \mathcal{M}_{mn}$ on note $A = [A_{ij}]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}} =^{\text{noté}} [A_{ij}]$, où le premier indice est l'indice de ligne (i ici), et où le second indice est l'indice de colonne (j ici).

Et $\mathcal{M}_{nn}$ sera muni de son produit matriciel usuel, qui fait de $\mathcal{M}_{nn}$ une algèbre (non commutative).

Définition B.1 • Soit $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$. Sa transposée est $A^T = [(A^T)_{ij}]_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}} =^{\text{noté}} [(A^T)_{ij}] \in \mathcal{M}_{nm}$ définie par $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ pour tout i, j.

• $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{nn}$ est symétrique ssi $A^T = A$, i.e. ssi $A_{ij} = A_{ji}$ pour tout i, j.

• $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est définie positive ssi $[\vec{y}]_{|\vec{E}}^T.A.[\vec{y}]_{|\vec{E}} > 0$ pour tout $\vec{y} \in \mathcal{M}_{n1} - \{\vec{0}\}$ (noté $\vec{y}^T.A.\vec{y} > 0$ si $(\vec{E}_i)$ est implicite).

• $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est symétrique définie positive ssi elle est symétrique et définie positive.

B.2 Problème spectral

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$. Le problème spectral pour A est :

$$\text{trouver les couples } (\lambda, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n1} - \{\vec{0}\} \text{ t.q. } A.\vec{z} = \lambda \vec{z}. \tag{B.4}$$

Souvent énoncé, avec $\mathcal{M}_{n1}$ identifié à $\mathbb{R}^n$,

$$\text{trouver les couples } (\lambda, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \text{ t.q. } A.\vec{z} = \lambda \vec{z}. \tag{B.5}$$

Attention, A n'est pas une fonction mais une matrice (une collection de réels). D'où rigoureusement :

Définition B.2 Soit E espace vectoriel de dimension finie n, soit $L \in \mathcal{L}(E; E)$ (endomorphisme dans E). Le problème spectral pour L est :

$$\text{trouver les couples trouver } (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times E - \{\vec{0}\} \text{ t.q. } L.\vec{x} = \lambda \vec{x}. \tag{B.6}$$

Mise sous forme matricielle de (B.6) : soit $(\vec{e}_i)$ une base de E, soit $[L]_{|\vec{e}} = [L_{ij}]$ la matrice de L dans E, où donc les L_{ij} sont les composantes des $L.\vec{e}_j)$ i.e. sont définis par $L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i$ pour tout j. Alors (B.6) donne

$$[L]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}} = \lambda[\vec{x}]_{|\vec{e}}, \tag{B.7}$$

ce qui ramène à (B.4) avec $A = [L]_{|\vec{e}}$ et $\vec{z} = [\vec{x}]_{|\vec{e}}$.

Et (B.4)-(B.5) est généralement interprété implicitement avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Définition B.3 Un couple $(\lambda, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times E$ solution de (B.6) est un couple “valeur propre–vecteur propre” de L, dit couple vp-vp de L, et $\vec{z}$ est un vecteur propre associé à λ associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de L est appelé le spectre de L.

Définition B.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme (de degré n)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I). \tag{B.8}$$

Et λ est une valeur propre de multiplicité k ssi λ est racine de multiplicité k du polynôme caractéristique p. En particulier si $k = 1$ alors on dit que λ est valeur propres simple.

Donc pour (B.6) on a donc : λ est valeur propre de $L \Leftrightarrow \exists \vec{z} \neq \vec{0}$ t.q. $L.\vec{z} - \lambda\vec{z} = \vec{0}$ (vecteur nul) $\Leftrightarrow \exists \vec{z} \neq \vec{0}$ t.q. $[L]_{|\vec{e}}.[\vec{z}]_{|\vec{e}} - \lambda[\vec{z}]_{|\vec{e}} = \vec{0}$ (matrice nulle) $\Leftrightarrow \det([L]_{|\vec{e}} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ est racine du polynôme caractéristique de la matrice $[L]_{|\vec{e}}$.

Remarque : le calcul des valeurs propres se fait dans $\mathbb{C}$ en général, car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : un polynôme complexe de degré n a n racines complexes. Puis on regarde si les racines sont réelles ou non.

B.3 Matrice et endomorphisme diagonalisable

Définition B.5 Une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est diagonalisable ssi il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_{nn}$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_{nn}$ t.q.

$$A.P = P.D, \quad \text{i.e.} \quad D = P^{-1}.A.P. \tag{B.9}$$

Définition B.6 Un endomorphisme $L \in \mathcal{L}(E;E)$ est diagonalisable ssi il existe n couples $(\lambda_i, \vec{v}_i) \in \mathbb{R} \times E - \{\vec{0}\}$ t.q.

$$\forall j = 1, ..., n, \quad L.\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j, \quad \text{et} \quad (\vec{v}_i)_{i=1,...,n} \text{ est une base de } E. \tag{B.10}$$

Auquel cas les $(\lambda_i, \vec{v}_i)$ sont des couples vp-vp de L.

Proposition B.7 *Soit $(\vec{e}_i)$ une base de E espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Un endomorphisme $L \in \mathcal{L}(E;E)$ est diagonalisable ssi la matrice $A := [L]_{|\vec{e}}$ est diagonalisable.*

Et avec les notations de (B.9) et (B.10) les valeurs propres λ_j de L donnent $D = \mathrm{diag}(\lambda_n, ..., \lambda_n)$ et des vecteurs propres $\vec{v}_j$ de L associés aux λ_i donnent $P = [P_{ij}]$ où $\vec{v}_j := \sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{e}_j$ pour tout j, i.e. $[\vec{v}_j]_{|\vec{e}} := \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de P (matrice de passage de $(\vec{e}_i)$ à $(\vec{v}_i)$) :

$$[L]_{|\vec{e}}.P = P.D, \quad \text{i.e.} \quad D = P^{-1}.[L]_{|\vec{e}}.P. \tag{B.11}$$

Et $[L]_{|\vec{v}} = D$ (formule de changement de base pour les endomorphismes).

Preuve. Supposons (B.10). Donc $[L.\vec{v}_j]_{|\vec{e}} = [\lambda_j\vec{v}_j]_{|\vec{e}}$, i.e. $[L]_{|\vec{e}}.[\vec{v}_j]_{|\vec{e}} = \lambda_j[\vec{v}_j]_{|\vec{e}}$, donc $[L]_{|\vec{e}}.P = P.D$ où $P = \begin{pmatrix} [\vec{v}_1]_{|\vec{e}} & \dots & [\vec{v}_n]_{|\vec{e}} \end{pmatrix}$. Et $(\vec{v}_i)$ est une base de E, donc $\det(P) \neq 0$, donc P est inversible car c'est une matrice de changement de base : matrice de passage de la base $(\vec{e}_i)$ à la base $(\vec{v}_i)$. Donc on a (B.9) : la matrice $[L]_{|\vec{e}} \in \mathcal{M}_{nn}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{n1}$.

Réciproque : soit $A = [L]_{|\vec{e}}$ et supposons (B.9), donc $[L]_{|\vec{e}}.P = P.D$. Notons λ_i les réels donnés par $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Notons $\vec{v}_j \in E$ les vecteurs donnés par $[\vec{v}_i]_{|\vec{e}} =$ la j-ème colonne de P, i.e. $\vec{v}_j := \sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{e}_j$ quand $P = [P_{ij}]$. Alors $[L]_{|\vec{e}}.P = P.D$ se lit colonne par colonne : $[L]_{|\vec{e}}.[\vec{v}_j]_{|\vec{e}} = \lambda_j[\vec{v}_j]_{|\vec{e}}$, donc $[L.\vec{v}_j]_{|\vec{e}} = [\lambda_j\vec{v}_j]_{|\vec{e}}$, donc $L.\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$, vrai pour tout j ; donc les $\vec{v}_j$ sont vecteurs propres associés aux λ_j. De plus P est inversible, donc $(\vec{v}_i)$ est une base de E.

Et $B := [L]_{|\vec{v}} = [B_{ij}]$ vérifie $\lambda_j\vec{v}_j = L.\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}\vec{v}_i$, donc $B_{ij} = \lambda_j\delta_{ij}$, donc $B = D$. ∎

B.4 Théorème spectral

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $(\cdot,\cdot)_g$ un produit scalaire dans E, et soit $(\vec{e}_i)$ une $(\cdot,\cdot)_g$-b.o.n. dans E, donc t.q. $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)_g = \delta_{ij}$ pour tout i,j. (Voir § B.5.1 par exemple.)

Soit $L \in \mathcal{L}(E;E)$ (un endomorphisme dans E). On rappelle que L est $(\cdot,\cdot)_g$-symétrique ssi $(L.\vec{x},\vec{y})_g = (L.\vec{y},\vec{x})_g$ pour tout $\vec{x},\vec{y} \in E$.

Théorème B.8 *Si L est $(\cdot,\cdot)_g$-symétrique alors L est diagonalisable dans une $(\cdot,\cdot)_g$-b.o.n. de E, i.e. : il existe n réels $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$ (les valeurs propres) et il existe n vecteurs $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ (les vecteurs propres associés) t.q., pour tout $i,j = 1,...,n$,*

$$L.\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j \quad \text{et} \quad (\vec{v}_i,\vec{v}_j)_g = \delta_{ij}. \tag{B.12}$$

I.e., avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ et $P = (\,[\vec{v}_1]_{|\vec{e}},...,[\vec{v}_n]_{|\vec{e}}\,)$ (la matrice de passage de la base $(\vec{e}_i)$ à la base $(\vec{v}_i)$),

$$[L]_{|\vec{e}}.P = P.D \quad \text{et} \quad P^T.P = I, \tag{B.13}$$

i.e. $D = P^{-1}.[L]_{|\vec{e}}.P$ et $P^{-1} = P^T$.

Preuve. Le théorème est connu pour les matrices symétriques, voir poly valeurs propres, le théorème s'énonçant sous la forme usuelle : "une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une b.o.n.".

On s'y ramène : soit $[L]_{|\vec{e}} = [A_{ij}]$ où donc $L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\vec{e}_i$ pour tout j. $[L]_{|\vec{e}}$ est symétrique car L est $(\cdot,\cdot)_g$-symétrique : $(L.\vec{e}_j,\vec{e}_k)_g = \sum_{i=1}^n A_{ij}(\vec{e}_i,\vec{e}_k)_g = \sum_{i=1}^n A_{ij}\delta_{ij} = A_{kj}$ car $(\vec{e}_i)$ est une $(\cdot,\cdot)_g$-b.o.n., et $(L.\vec{e}_j,\vec{e}_k)_g = (L.\vec{e}_k,\vec{e}_j)_g = A_{jk}$ (même calcul), donc $A_{jk} = A_{kj}$, pour tout k,j. Donc $[L]_{|\vec{e}}.P = P.D$ avec $P^T.P = I$, donc les $\vec{v}_j \in E$ définis par $[\vec{v}_j]_{\vec{e}} =$ la j-colonne de P vérifient $[L]_{|\vec{e}}.[\vec{v}_j]_{|\vec{e}} = \lambda_j[\vec{v}_j]_{|\vec{e}}$, donc $[L.\vec{v}_j]_{|\vec{e}} = [\lambda_j\vec{v}_j]_{|\vec{e}}$, donc $L.\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$, et $P^T.P = I$ donne $(\vec{v}_i,\vec{v}_j)_g = \sum_{k\ell} P_{ki}P_{\ell j}(\vec{e}_k,\vec{e}_\ell)_g = \sum_{k\ell} P_{ki}P_{\ell j}\delta_{k\ell} = \sum_k (P^T)_{ik}P_{kj} = (P^T.P)_{ij} = \delta_{ij}$. ▪

B.5 Calcul d'une b.o.n. dans E par diagonalisation

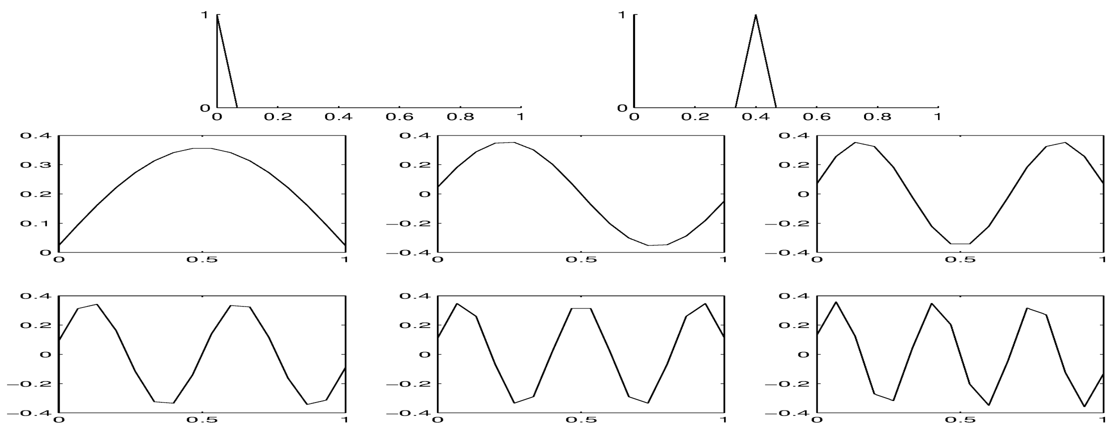

FIGURE B.1 – Sur $[a,b] = [0,1] = \bigcup_{i=1}^{15}[\frac{i}{15},\frac{i+1}{15}]$, fonctions chapeau φ_{x_1} et φ_{x_7} de la base de P_1 des éléments finis, et (à une constante multiplicative près) les 6 premières fonctions propres $\psi_1,...,\psi_6$ associées aux 6 premières valeurs propres $\lambda_1,...,\lambda_6$ ordonnées t.q. $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ pour tout i. La base $(\psi_i)_{i=1,...,15}$ est une "base de Fourier approchée" (b.o.n. dans $(P_1,(\cdot,\cdot)_{L^2})$).

B.5.1 Le calcul

E est muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_g$ et $(\vec{a}_i)$ est une base de E.

Soit $M := [g]_{|\vec{a}} = [(\vec{a}_i,\vec{a}_j)_g]$, donc M est symétrique, donc $M = P.D.P^{-1}$ avec D diagonale et $P^T.P = I$.

On pose $\vec{b}_j := \sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{a}_i \in E$, i.e. $[\vec{b}_j]_{|\vec{a}}$ est donnée par la j-ème colonne de P. On a $(\vec{b}_i,\vec{b}_j)_g = \sum_{k,\ell=1}^n P_{ki}P_{\ell j}(\vec{a}_k,\vec{a}_\ell)_g = \sum_{k,\ell=1}^n P_{ki}P_{\ell j}M_{k\ell} = (P^T.M.P)_{ij} = (P^{-1}.M.P)_{ij} = (D)_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$. On pose

$$\vec{e}_j := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\vec{b}_j, \quad \text{i.e.} \quad \vec{e}_j := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{a}_i. \tag{B.14}$$

On a $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)_g = (\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\vec{b}_i, \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\vec{b}_j)_g = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}(\vec{b}_i,\vec{b}_j)_g = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\lambda_i\delta_{ij} = \delta_{ij}$. Donc $(\vec{e}_i)$ est une $(\cdot,\cdot)_g$-b.o.n..

B.5.2 Exemple de P_1 : base de Fourier approchée

Méthode des éléments finis : soit (φ_i) la base des fonctions chapeaux dans P_1 (base non $(\cdot,\cdot)_{L^2}$-orthonormée), On veut trouver une $(\cdot,\cdot)_{L^2}$-b.o.n.. On calcule et diagonalise la matrice de masse $M = [M_{ij}] = [(\varphi_i, \varphi_j)_{L^2}]$: $D = P^{-1}.M.P$. On pose $\psi_j =^{(B.14)} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sum_{i=1}^n P_{ij}\varphi_i$. On a : (ψ_i) est une $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ b.o.n., cf. (B.14) (base de Fourier approchée). Voir figure B.1.

B.6 Résolution du SDO $\vec{u}' + A.\vec{u} = \vec{b}$, méthode spectrale

Soit $\vec{f} : t \in \mathbb{R} \to \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}$ continue, et $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ \vdots \\ u_{0n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}$ (condition initiale). Soit $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{nn}$ une matrice diagonalisable, $A = P.D.P^{-1}$. Soit le système différentiel ordinaire (SDO) :

$$\text{trouver } \vec{u} : t \in [0,T] \to \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1} \text{ t.q. } \begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}(t) + A.\vec{u}(t) = \vec{f}(t), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \end{cases} \tag{B.15}$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(t) + A_{11}u_1(t) + A_{12}u_2(t) + ... = f_1(t), \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t}(t) + A_{n1}u_1(t) + A_{n2}u_2(t) + ... = f_n(t), \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(0) = u_{01}, \\ \vdots \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{array} \right\} \tag{B.16}$$

Utilisons la méthode spectral pour le résoudre (pour le transformer en un système découplé) :

1. Soit les $\vec{p}_j \in \mathbb{R}^n$ définis par $[\vec{p}_j]_{|\vec{E}} =$ la j-ème colonne de P, et soit les λ_j donnés par $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (donc les $(\lambda_j, \vec{p}_j)$ sont couples vp-vp).
2. Changement de base : avec $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{E}_i$ (B.15) s'écrit $\frac{d[\vec{u}]_{|\vec{E}}}{dt}(t) + A.[\vec{u}]_{|\vec{E}}(t) = [\vec{f}]_{|\vec{E}}(t)$, avec $[\vec{u}]_{|\vec{E}}(0) = [\vec{u}_0]_{|\vec{E}}$, où on a noté $[\vec{u}]_{|\vec{E}}(t) := [\vec{u}(t)]_{|\vec{E}}$. Notons v_i les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{p}_i)$, i.e. $\vec{u} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{p}_i$, i.e. $[\vec{u}]_{|\vec{p}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$; donc $[\vec{u}(t)]_{|\vec{E}} = P.[\vec{u}(t)]_{|\vec{p}}$. Idem $[\vec{f}]_{|\vec{p}} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$ et $[\vec{f}(t)]_{|\vec{E}} = P.[\vec{f}(t)]_{|\vec{p}}$. Donc (B.15) donne

$$\frac{dP.[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt}(t) + A.P.[\vec{u}]_{|\vec{p}}(t) = P.[\vec{f}]_{|\vec{p}}(t), \quad \text{avec} \quad [\vec{u}]_{|\vec{p}}(0) = P^{-1}.[\vec{u}_0]_{|\vec{E}}. \tag{B.17}$$

Et P est une matrice constante donc $\frac{dP.[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt} = P.\frac{d[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt}$. On multiplie par P^{-1} à gauche, d'où

$$\frac{d[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt}(t) + D.[\vec{u}]_{|\vec{p}}(t) = [\vec{f}]_{|\vec{p}}(t), \quad \text{avec} \quad [\vec{u}]_{|\vec{p}}(0) = P^{-1}.[\vec{u}_0]_{|\vec{E}}. \tag{B.18}$$

On a obtenu le système de n EDO indépendantes immédiates à résoudre (on a "découplé" le SDO) :

$$\forall i = 1, ..., n, \quad v_i'(t) + \lambda_i v_i(t) = g_i(t) \quad \text{avec} \quad v_i(0) = (P^{-1}.[\vec{u}_0]_{|\vec{E}})_i \overset{\text{noté}}{=} v_{0i}. \tag{B.19}$$

Résolution immédiate (méthode de variation de la constante) : $v_i(t) = v_{i0}e^{-\lambda_i t} + \int_0^t g_i(\tau)e^{-\lambda_i(t-\tau)}\,d\tau$.
3. D'où $[\vec{u}]_{|\vec{E}} = P.[\vec{u}]_{|\vec{p}}$: on a résolu (B.15).

Remarque B.9 On peut aussi résoudre (B.15) à l'aide d'une décomposition de Cholesky de A : méthode de descente–remontée. ∴

B.7 Exercices matriciels pour rappels

Exercice B.10 Montrer : si A est inversible alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} =^{\text{noté}} A^{-T}$. Et si de plus A est symétrique alors A^{-1} est symétrique.

Réponse. 1. A est inversible, donc $\exists! B$ t.q. $A.B = I$, et $B =^{\text{noté}} A^{-1}$, et B est inversible avec $B^{-1} = A$. Donc $B^T.A^T = I$, donc A^T et B^T sont inversibles, et $(A^T)^{-1} = B^T = (A^{-1})^T$: noté A^{-T}

2. Donc si $A^T = A$ (symétrique), alors $(A^T)^{-1} = A^{-1}$ avec $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, cf. 1., donc A^{-1} est symétrique. ∴

Exercice B.11 Montrer : si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes alors leurs vecteurs propres associés sont indépendants.

Réponse. $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ vecteurs propres associés : $A.\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$, $A.\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$. Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont dépendants, i.e. si $\vec{v}_2 = \alpha\vec{v}_1$ alors $A.\vec{v}_2 = \alpha A.\vec{v}_1$, donc $\lambda_2\vec{v}_2 = \alpha\lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_1\alpha\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_2$, donc $\lambda_1 = \lambda_2$ car $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ (c'est un vecteur propre). Donc si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont indépendants.

Exercice B.12 Soit A diagonalisable, $A.P = P.D$ avec P inversible, cf. (B.9). Si A est non symétrique, montrer $P^T.P \neq I$ (il n'existe pas de base de vecteurs propres qui soit orthonormée).

Réponse. Si $P^{-1} = P^T$ alors $A = P.D.P^{-1} = P.D.P^T = (P.D.P^T)^T$, donc A est symétrique.

Exercice B.13 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$ (premier bloc de Jordan quand c=1). Calculer ses valeurs propres, leur multiplicité, et les vecteurs propres associés. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

Réponse. $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & c \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2$. Donc $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre, de multiplicité 2.

Un vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$ associé vérifie $\vec{0} = (A-\lambda I).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $cy = 0$, donc $y = 0$ (car $c \neq 0$) et x quelconque : seuls les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $x \neq 0$, sont des vecteurs propres. Donc l'ensemble des vecteurs propres est $\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\{\vec{E}_1\}$ de dimension $1 < 2 = \dim(\mathcal{M}_{21})$. Donc A n'est pas diagonalisable : dans $\mathcal{M}_{21}$ il n'existe pas de base constituée de vecteurs propres.

Exercice B.14 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de rotation de $\frac{\pi}{2}$). Calculer ses valeurs propres, leur multiplicité, et les vecteurs propres associés.

Réponse. $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+1$. Il n'y a pas de racines réelles. Il faut se plonger dans l'espace des matrices complexes pour diagonaliser : $\lambda = \pm i$, $\mathrm{Ker}(A-iI) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\}$ et $\mathrm{Ker}(A+iI) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$.

Exercice B.15 Montrer qu'une matrice triangulaire T a ses valeurs propres sur la diagonale.

Réponse. $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)...(\lambda-\lambda_n)$ où les λ_i sont les éléments diagonaux de T.

Exercice B.16 Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse. $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)$, les deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1$ sont distinctes, donc A est diagonalisable, cf. exercice B.11. Et $(A-I).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ donne $y = 0$ et $\vec{v}_1 = (1,0)$ est vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$. Et $(A-2I).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ donne $-x+y = 0$, et $\vec{v}_2 = (1,1)$ est vecteur propre, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage. On vérifie que $P^{-1}.A.P = \mathrm{diag}(1,2)$ ($= D$ matrice diagonale), et $P^T.P \neq I$ (car A n'est pas symétrique).

Exercice B.17 Soit $(\vec{a}_i)$ et $(\vec{b}_i)$ deux bases dans E et $P = [P_{ij}]$ la matrice de passage de la base $(\vec{a}_i)$ à la base $(\vec{b}_i)$, i.e. $\vec{b}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{a}_i$. Montrer : 1. Si $\vec{v} \in E$ alors

$$[\vec{v}]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[\vec{v}]_{|\vec{e}} \quad \text{(formule de changement de base pour les vecteurs).} \tag{B.20}$$

2. Si $z(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire $E \times E \to \mathbb{R}$ alors

$$[z(\cdot,\cdot)]_{|\vec{b}} = P^T.[z(\cdot,\cdot)]_{|\vec{a}}.P \quad \text{(formule de changement de base pour les formes bilinéaires).} \tag{B.21}$$

3. Si $(\cdot,\cdot)_g$ est un produit scalaire alors les réel $(\vec{v},\vec{w})_g$ sont indépendants du choix de la base.
4. si $L \in \mathcal{L}(E;E)$ alors (formule de changement de base pour les endomorphismes)

$$[L]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[L]_{|\vec{a}}.P \quad \text{(formule de changement de base pour les endomorphismes).} \tag{B.22}$$

Réponse. 1. Notons $\vec{v} = \sum_i x_i\vec{a}_i = \sum_j y_j\vec{b}_j$, donc $= \sum_{ij} y_jP_{ij}\vec{a}_i$, donc $x_i = \sum_j P_{ij}y_j$ pour tout i, i.e. $[\vec{v}]_{|\vec{a}} = P.[\vec{v}]_{|\vec{b}}$.

2. $z(\vec{b}_i,\vec{b}_j) = \sum_{k\ell} P_{ki}P_{\ell j}z(\vec{a}_k,\vec{a}_\ell) = \sum_{k\ell}(P^T)_{ik}z(\vec{a}_k,\vec{a}_\ell)P_{\ell j} = (P^T.[z]_{|\vec{a}}.P)_{ij}$, donc (B.21).

3. $(\vec{v},\vec{w})_g = [\vec{v}]_{|\vec{b}}^T.[g]_{|\vec{b}}.[\vec{w}]_{|\vec{b}} = (P^{-1}.[\vec{v}]_{|\vec{a}})^T.(P^T.[g]_{|\vec{a}}.P).(P^{-1}.[\vec{w}]_{|\vec{a}}) = [\vec{v}]_{|\vec{a}}^T.[g]_{|\vec{a}}.[\vec{w}]_{|\vec{a}} = (\vec{v},\vec{w})_g$.

4. Notons $P^{-1} = Q = [Q_{ij}]$, $[L]_{|\vec{a}} = A = [A_{ij}]$, $[L]_{|\vec{b}} = B = [B_{ij}]$. Donc $\sum_i B_{ij}\vec{b}_i = L.\vec{b}_j = L.(\sum_k P_{kj}\vec{a}_k) = \sum_k P_{kj}L.\vec{a}_k = \sum_{k\ell} P_{kj}A_{\ell k}\vec{a}_\ell = \sum_{k\ell i} P_{kj}A_{\ell k}Q_{i\ell}\vec{b}_i = \sum_i (Q.A.P)_{ij}\vec{b}_i$, donc $B_{ij} = (Q.A.P)_{ij}$, d'où (B.22).

Exercice B.18 Soit $(\vec{a}_i)$ une base dans E. Montrer :

1- soit $(\cdot,\cdot)_g$ un produit scalaire dans E. Soit $M = [M_{ij}] := (\vec{a}_i, \vec{a}_j)_g$ sa matrice relativement à $(\vec{a}_i)$. Montrer que M est définie positive, i.e. $\vec{z}^T.M.\vec{z} > 0$ pour toute matrice colonne $\vec{z} \in \mathcal{M}_{n1} - \{\vec{0}\}$.

2- (réciproque) : si $M = [M_{ij}]$ est une matrice symétrique définie positive alors la forme bilinéaire $g(\cdot,\cdot)$ définie par $g(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = M_{ij}$, pour tout i,j, est un produit scalaire.

Réponse. Un produit scalaire est symétrique, donc $(\vec{a}_i, \vec{a}_j)_g = (\vec{a}_j, \vec{a}_i)_g$ pour tout i,j, donc M est symétrique. Un produit scalaire est défini > 0, donc $[\vec{v}]_{|\vec{a}}{}^T.M.[\vec{v}]_{|\vec{a}} = (\vec{v}, \vec{v})_g > 0$ pour tout $\vec{v} \neq \vec{0}$ donc M est définie > 0.

Réciproque : définissons la forme bilinéaire $g : E \times E \to \mathbb{R}$ par $g(\vec{a}_i, \vec{a}_j) := M_{ij}$ pour tout i,j. Donc g est symétrique car M l'est, et, avec $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{a}_i \neq \vec{0}$, $g(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{ij} v_i M_{ij} v_j = [\vec{v}]_{|\vec{a}}{}^T.M.[\vec{v}]_{|\vec{a}} > 0$ car M est définie positive, donc $g(\cdot,\cdot)$ est définie positive. ∎

Exercice B.19 Soit $L \in \mathcal{L}(E;E)$, soit $(\cdot,\cdot)_g$ un produit scalaire dans E, soit $(\vec{e}_i)$ une base de E, soit $M = [(\vec{e}_i, \vec{e}_j)_g]$. Montrer : 1- L est $(\cdot,\cdot)_g$-symétrique ssi $M.A$ est symétrique, i.e. ssi

$$M.A = (M.A)^T \quad (= A^T.M). \tag{B.23}$$

2- L est $(\cdot,\cdot)_g$-symétrique n'implique pas $A := [L]_{|\vec{e}}$ est symétrique (ça dépend du produit scalaire).

Réponse. 1- L $(\cdot,\cdot)_g$ symétrique $\Leftrightarrow$ pour tout i,j, $(L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_g = (L.\vec{e}_i, \vec{e}_j)_g$, i.e. $(\sum_k A_{kj}\vec{e}_k, \vec{e}_i)_g = (\sum_k A_{ki}\vec{e}_k, \vec{e}_j)_g$, i.e. $\sum_k A_{kj}(\vec{e}_k, \vec{e}_i)_g = \sum_k A_{ki}(\vec{e}_k, \vec{e}_j)_g$, i.e. $\sum_k M_{ik}A_{kj} = \sum_k A_{ki}M_{kj}$ (car M est symétrique), i.e. $(M.A)_{ij} = (A^T.M)_{ij}$, i.e. $M.A = A^T.M = (M.A)^T$ (car M est symétrique) : on a (B.23).

2- Dans $\mathbb{R}^2$ soit $(\cdot,\cdot)_g$ défini par $[g]_{|\vec{e}} = [(\vec{e}_i, \vec{e}_j)_g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =^{\text{noté}} M = [M_{ij}]$. Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ définie par $[L]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =^{\text{noté}} A = [A_{ij}]$ (non symétrique), i.e. $L.\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ et $L.\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1$. On a $M.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (symétrique), donc l'endomorphisme L est $(\cdot,\cdot)_g$-symétrique, cf. 1-. NB : ici $(\vec{e}_i)$ n'est pas une $(\cdot,\cdot)_g$-b.o.n. : $M \neq I$. Exemple : aviation où l'unité verticale = le foot et l'unité horizontale= le mile nautique. Ou exemple : éléments finis : la base usuelle des fonctions chapeaux n'est pas $(\cdot,\cdot)_{L^2}$-orthonormée. ∎

Exercice B.20 (La "symétrie" d'un endomorphisme dépend d'un produit scalaire.)

Dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique. Soit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ et $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$.

Soit $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ le produit scalaire canonique : $(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^2} = x_1y_1 + x_2y_2$, i.e. $[(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}]_{|\vec{e}} = [(\vec{e}_i, \vec{e}_j)_{\mathbb{R}^2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Soit $(\cdot,\cdot)_g$ le produit scalaire défini par $(\vec{x}, \vec{y})_g := x_1y_1 + 2x_2y_2$, i.e. $[(\cdot,\cdot)_g]_{|\vec{e}} = [(\vec{e}_i, \vec{e}_j)_g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =^{\text{noté}} M$.

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme défini par $L.\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ et $L.\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1$, i.e. $[L]_{|\vec{e}} = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer : 1- L n'est pas autoadjoint pour le produit $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$, i.e. $(L.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^2} \neq (L.\vec{y}, \vec{x})_{\mathbb{R}^2}$ en général.

2- L est autoadjoint pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_g$, i.e. $(L.\vec{x}, \vec{y})_g = (L.\vec{y}, \vec{x})_g$ pour tout $\vec{x}, \vec{y}$.

Réponse. 1- $\underbrace{(L.\vec{e}_1, \vec{e}_2)_{\mathbb{R}^n}}_{A_{21}=1} \neq \underbrace{(L.\vec{e}_2, \vec{e}_1)_{\mathbb{R}^n}}_{A_{12}=2}$ (la matrice A n'est pas symétrique).

2- $(L.\vec{e}_1, \vec{e}_2)_g = (\vec{e}_2, \vec{e}_2)_g = 2$, et $(L.\vec{e}_2, \vec{e}_1)_g = (2\vec{e}_1, \vec{e}_i)_g = 2(\vec{e}_1, \vec{e}_i)_g = 2$, donc $(L.\vec{e}_i, \vec{e}_j)_g = (L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_g$.

(Ou encore $M.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, donc $(L.\vec{e}_1, \vec{e}_2)_g = (M.[L.\vec{e}_1]_{|\vec{e}}, [\vec{e}_2]_{|\vec{e}})_I = (M.[L]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_1]_{|\vec{e}}, [\vec{e}_2]_{|\vec{e}})_I = (M.A.[\vec{e}_1]_{|\vec{e}}, [\vec{e}_2]_{|\vec{e}})_I = ([\vec{e}_1]_{|\vec{e}}, M.A.[\vec{e}_2]_{|\vec{e}})_I = ([\vec{e}_1]_{|\vec{e}}, M.A.[\vec{e}_2]_{|\vec{e}})_I = ([\vec{e}_1]_{|\vec{e}}, M.[L.\vec{e}_2]_{|\vec{e}})_I = (\vec{e}_1, L.\vec{e}_2)_g$). ∎

B.8 Théorème de diagonalisation généralisé

B.8.1 Le problème

Problème spectral généralisé : pour $M, R \in \mathcal{M}_{nn}$,

$$\text{trouver les couples } (\lambda, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \text{ t.q. } \boxed{R.\vec{z} = \lambda M.\vec{z}}, \tag{B.24}$$

écriture abusive de $\mathcal{R}.[\vec{z}]_{|\vec{E}} = \lambda \mathcal{M}.[\vec{z}]_{|\vec{E}}$ où $(\vec{E}_i)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}$ les endomorphismes dans $\mathbb{R}^n$ de matrices R et M dans la base canonique $(\vec{E}_i)$. Plus généralement : $\mathcal{R}, \mathcal{M} \in \mathcal{L}(E;E)$, $(\vec{e}_i)$ base de E, $R = [\mathcal{R}]_{|\vec{e}}$, $M = [\mathcal{M}]_{|\vec{e}}$.

Définition B.21 Si $(\lambda, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ est solution alors λ est une valeur propre généralisée de R relative à M, $\vec{z}$ est un vecteur propre généralisé associé à λ, et $(\lambda, \vec{z})$ est un couple vp-vp généralisé = couple valeur propre–vecteur propre généralisé. ($M = I$ redonne le problème spectral classique.)

λ est une valeur propre généralisée ssi $R-\lambda M$ n'est pas inversible (immédiat), i.e. ssi elle racine du polynôme caractéristique généralisé
$$p(\lambda) = \det(R-\lambda M). \tag{B.25}$$

Définition B.22 $R \in \mathcal{M}_{nn}$ est M-diagonalisable (plus précisément $\mathcal{R}$ est $\mathcal{M}$ diagonalisable) ssi il existe n couples $(\lambda_i, \vec{z}_i) \in K \times \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ t.q.
$$\forall j = 1, ..., n, \quad R.\vec{z}_j = \lambda_j M.\vec{z}_j, \quad \text{et} \quad (\vec{z}_i)_{i=1,...,n} \text{ est une base dans } \mathbb{R}^n. \tag{B.26}$$
(Au sens $R.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}} = \lambda_j M.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}}$.)

On note alors $D = \text{diag}(\lambda_i) \in \mathcal{M}_{nn}$ la matrice diagonale des λ_i, on note P_{ij} les composantes des $\vec{z}_j$ dans la base $(\vec{E}_i)$, i.e. $\vec{z}_j = \sum_{j=1}^n P_{ij}\vec{E}_i$, on note $P = [P_{ij}]$ (matrice de passage de la base $(\vec{E}_i)$ à la base $(\vec{z}_i)$). Et (B.26) s'écrit
$$\boxed{R.P = M.P.D} \quad \text{avec} \quad \boxed{P \text{ inversible}}. \tag{B.27}$$
Vérification : la j-ème colonne de $R.P$ est $R.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}}$, et la j-ème colonne de $M.P.D$ est $M.P.(\lambda_j[\vec{E}_j]_{|\vec{E}}) = \lambda_j M.P.[\vec{E}_j]_{|\vec{E}} = \lambda_j M.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}}$. Vrai pour tout j : on a bien l'égalité donnée.

B.8.2 Théorème

Théorème B.23 *Si R et $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ sont symétriques (réelles) et si M est définie positive, alors R est M-diagonalisable dans une $(\cdot,\cdot)_M$-b.o.n., i.e. il existe n couples $(\lambda_i, \vec{z}_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., n$, t.q., pour tout $i, j = 1, ..., n$; noté*
$$R.\vec{z}_i = \lambda_i M.\vec{z}_i \quad \text{et} \quad (\vec{z}_i, \vec{z}_j)_M = \delta_{ij}. \tag{B.28}$$
(An sens $R.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}} = \lambda_j M.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}}$ et $[\vec{z}_i]_{|\vec{E}}^T.M.[\vec{z}_j]_{|\vec{E}} = \delta_{ij}$.) I.e.
$$\boxed{R.P = M.P.D} \ \text{ et } \ \boxed{P^T.M.P = I}, \quad \text{i.e.} \quad (M.P)^{-1} = P^T \ \text{ et } \ D = P^T.R.P. \tag{B.29}$$
Cas R symétrique définie positive : alors $\lambda_i > 0$ pour tout i, et $(\vec{z}_i)$ est une base $(\cdot,\cdot)_R$-orthogonale : $(\vec{z}_i, \vec{z}_j)_R = \lambda_i\delta_{ij}$ ($= 0$ si $i \neq j$), pour tout i, j. Et $(\frac{\vec{z}_i}{\sqrt{\lambda_i}})$ est une $(\cdot,\cdot)_R$-b.o.n..

Et donc $(\vec{z}_i)$ est une base orthogonale commune aux produits scalaires $(\cdot,\cdot)_R$ et $(\cdot,\cdot)_M$.

Preuve. M étant symétrique, soit $M = L.L^T$ sa décomposition de Cholesky (avec L matrice triangulaire inférieure). L est inversible car M l'est (on a $0 \neq \det(M) = \det(L)^2$).

(B.24) s'écrit $R.\vec{z} = \lambda L.L^T.\vec{z} \in \mathcal{M}_{n1}$, donc posant $\vec{y} = L^T.\vec{z} \in \mathcal{M}_{n1}$ on a $L^{-1}.R.L^{-T}.\vec{y} = \lambda\vec{y} \in \mathcal{M}_{n1}$. Et $(L^{-1}.R.L^{-T})^T = L^{-1}.R.L^{-T}$ donc $L^{-1}.R.L^{-T}$ est symétrique, donc : il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\vec{y}_1, ..., \vec{y}_n \in \mathcal{M}_{n1}$ t.q. $(L^{-1}.R.L^{-T}).\vec{y}_i = \lambda_i\vec{y}_i$ avec $\vec{y}_i^T.\vec{y}_j = \delta_{ij}$ pour tout i, j. On remonte les calculs : on pose $\vec{z}_i = L^{-T}\vec{y}_i \in \mathcal{M}_{n1}$, et donc $L^{-1}.R.\vec{z}_i = \lambda_i L^T\vec{z}_i$, donc $R.\vec{z}_i = \lambda_i M.\vec{z}_i$ avec $\delta_{ij} = \vec{y}_i^T.\vec{y}_j = \vec{z}_i^T.M.\vec{z}_j$ pour tout i, j.

Et $(\frac{\vec{z}_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{\vec{z}_j}{\sqrt{\lambda_j}})_R = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}(\vec{z}_i, \vec{z}_j)_R = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\vec{z}_i^T.R.\vec{z}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\lambda_j\vec{z}_i^T.M.\vec{z}_j = \delta_{ij}$ pour tout i, j. ∎

B.8.3 Exemples

Exercice B.24 $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres généralisés. Vérifier que les vecteurs propres sont M-orthogonaux et R-orthogonaux, et qu'ils ne sont pas $(\cdot,\cdot)_I$-orthogonaux (on ne peut pas espérer qu'une même base soit orthogonale relativement à trois produits scalaires différents).

Réponse. On a $R-\lambda M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-2\lambda \end{pmatrix}$. On cherche λ t.q. $\det(R-\lambda M) = 0$, donc t.q. $2\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$. D'où $\lambda_1 = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{41})$ et $\lambda_2 = \frac{1}{4}(7 + \sqrt{41})$ sont les valeurs propres généralisées. D'où les deux vecteurs propres généralisés $\vec{z}_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \end{pmatrix}$ (non nul) donnés par $(1-\lambda_j)p_{1j} + 2p_{2j} = 0$. Donc $\vec{z}_j = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\lambda_j \end{pmatrix}$.

$(M.\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2(1-\lambda_1) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ (1-\lambda_2) \end{pmatrix} = 4 + 2\frac{-3+\sqrt{41}}{4}\frac{-3-\sqrt{41}}{4} = 4 - \frac{41-9}{8} = 0$, et donc $(R\vec{z}_1, \vec{z}_2)_{\mathbb{R}^n} = \lambda_1(M\vec{z}_1, \vec{z}_2)_{\mathbb{R}^n} = 0$. Mais $(\vec{z}_1, \vec{z}_2)_{\mathbb{R}^n} = \frac{7}{2} \neq 0$. ∎

Exercice B.25 Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que R est M-diagonalisable (alors que R n'est pas diagonalisable classiquement, cf exercice B.13). Donner P et D t.q. (B.29).

Montrer que $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas M-diagonalisable.

Réponse. $R - \lambda M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-2\lambda \end{pmatrix}$, donc $p(\lambda) = \det(R - \lambda M) = 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (2\lambda - 1)(\lambda - 1)$, donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ sont racines, i.e. sont valeurs propres généralisées de R. Pour $\lambda = 1$, $(R - M).\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ pour $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple, et pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $(R - \frac{1}{2}M).\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ pour $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple, et $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ici $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, \frac{1}{2})$. On vérifie que $R.P = M.P.D$ $(= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$.

Remarque : autre calcul : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donne $M^{-1}.R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Et on retrouve les valeurs propres et vecteurs propres ci-dessus.

Et $M^{-1}.S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ premier bloc de Jordan : non diagonalisable : S n'est pas M-diagonalisable.

Exercice B.26 $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vp-vp généralisées ? Retrouver le résultat avec $A = M^{-1}.R$.

Réponse. vp double $\lambda = -1$, $\text{Ker}(R - \lambda M) = \text{Ker}(R + M) = \text{Vect}\{(1, -1)^T\}$ de dim 1 : pb non diagonalisable.

Exercice B.27 Soit $(\lambda_1, \vec{v}_1)$ et $(\lambda_2, \vec{v}_2)$ deux couples vp-vp généralisés. Montrer : si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une famille libre.

Réponse. On a $R.\vec{v}_1 = \lambda_1 M.\vec{v}_1$ et $R.\vec{v}_2 = \lambda_2 M.\vec{v}_2$. Si $\vec{v}_2 = a\vec{v}_1$ $(\neq \vec{0})$, alors $R.\vec{v}_2 = aR.\vec{v}_1$, d'où $\lambda_2 M.\vec{v}_2 = a\lambda_1 M.\vec{v}_1 = \lambda_1 M.\vec{v}_2$, donc $\lambda_1 = \lambda_2$ (car M est inversible et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$). Donc si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $\vec{v}_2$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}_1$.

Exercice B.28 Montrer : si R est symétrique et M est symétrique définie positive alors $M^{-1}.R$ est diagonalisable : dans quelle type de base ?

Réponse. $R.\vec{z}_i = \lambda_i M.\vec{z}_i$ donne $M^{-1}.R.\vec{z}_i = \lambda_i \vec{z}_i$ pour tout i avec $(\vec{z}_i)$ base. Avec $(\vec{z}_i)$ une $(\cdot,\cdot)_M$-b.o.n., cf. (B.28).

Exercice B.29 Démontrer le théorème B.23 à partir d'une diagonalisation de M.

Réponse. M est symétrique définie positive donc diagonalisable dans une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ avec toutes ses valeurs propres > 0. Donc $D = P^{-1}.M.P = P^T.M.P$ où $D = \text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres et P la matrice orthonormale stockant les vecteurs propres associés concernés.

$R.\vec{v} = \lambda M.\vec{v}$ donne $R.\vec{v} = \lambda P.D.P^{-1}.\vec{v} = \lambda(P.\sqrt{D}).(\sqrt{D}.P^{-1}).\vec{v}$, où $\sqrt{D} = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_n})$., donc $\sqrt{D}^{-1}.P^{-1}.R.\vec{v} = \lambda(\sqrt{D}.P^{-1}).\vec{v}$.

On pose $\vec{z} = \sqrt{D}.P^{-1}.\vec{v}$, et on obtient $(\sqrt{D})^{-1}.P^{-1}.R.P.(\sqrt{D})^{-1}.\vec{z} = \lambda\vec{z}$, soit $A.\vec{z} = \lambda\vec{z}$ où $A = (\sqrt{D})^{-1}.P^T.R.P.(\sqrt{D})^{-1}$ car $P^{-1} = P^T$.

La matrice A est trivialement symétrique (car R et $\sqrt{D}$ sont symétriques), donc est diagonalisable. Soit $(\vec{z}_1, ..., \vec{z}_n)$ une b.o.n. de vecteurs propres de A dans $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n})$ associés aux valeurs propres λ_j.

On pose $\vec{v}_j = P.(\sqrt{D})^{-1}.\vec{z}_j$, donc $R.\vec{v}_j = \lambda_j M.\vec{v}_j$, et $\delta_{ij} = (\vec{z}_i, \vec{z}_j)_{\mathbb{R}^n} = (\sqrt{D}.P^T.\vec{v}_i, \sqrt{D}.P^T.\vec{v}_j)_{\mathbb{R}^n} = (M.\vec{v}_i, \vec{v}_j)_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice B.30 Appliquer le théorème spectral 7.1 dans le cas R et M matrices symétriques définies positives pour démontrer le théorème B.23.

Réponse. On pose $(u,v)_H = (u,v)_M = (Mu,v)_{\mathbb{R}^n}$ et $a(u,v) = (u,v)_R = (Ru,v)_{\mathbb{R}^n}$. Comme M et R sont symétriques définies positives, $(\cdot,\cdot)_M$ et $(\cdot,\cdot)_R$ sont des produits scalaires. On pose $H = (\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_M)$ et $V = (\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_R)$ qui sont des Hilbert : on est en dimension finie et toutes les normes sont équivalentes et les espaces sont fermés. Et V est dense dans H (car $V = H$) et l'injection $\vec{x} \in V \to \vec{x} \in H$ est trivialement continue et compacte (les normes sont équivalentes en dimension finie). La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est trivialement continue dans $(V, (\cdot,\cdot)_R)$, de constante de continuité 1 et coercitive de coefficient de coercivité 1, puisque $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_R$ est le produit scalaire choisi dans V. On peut donc appliquer le théorème spectral : on a n valeurs propres λ_i, qu'on peut ordonner de manière croissante, associés à n vecteurs propres $\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n$ qu'on peut choisir orthonormés relativement à $(\cdot,\cdot)_H$, i.e. $(\vec{w}_i)$ b.o.n. dans $H = (\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_M)$, avec dans ce cas $(\frac{\vec{w}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{\vec{w}_n}{\sqrt{\lambda_n}})$ b.o.n. dans $V = (\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_R)$.

B.8.4 Résolution du système différentiel $M.\vec{u}\,' + R.\vec{u} = \vec{b}$

On veut résoudre le système différentiel de Cauchy à l'aide de la méthode spectral : trouver $\vec{u} : t \in [0,T] \to \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ t.q. :

$$M.\frac{d\vec{u}}{dt}(t) + R.\vec{u}(t) = \vec{f}(t), \quad \text{avec} \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \tag{B.30}$$

pour R et M sont symétriques réelles, et M est définie positive, donc R est M-diagonalisable, avec $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ (on a noté abusivement $\mathbb{R}^n$ au lieu de $\mathcal{M}_{n1}$).

1. R est M-diagonalisable, donc il existe n valeurs propres λ_i et une b.o.n. de diagonalisation $(\vec{p}_i)$ dans $\mathbb{R}^n$. Avec la base canonique $(\vec{E}_i)$ on note $P = \begin{pmatrix} [\vec{p}_1]_{|\vec{E}} & \cdots & [\vec{p}_n]_{|\vec{E}} \end{pmatrix} = [P_{ij}]$, et on note $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, donc $R.P = M.P.D$ avec $P^T.M.P = I$, donc $(M.P)^{-1} = P^T$, donc $P^T.R.P = D$.

2. Changement de base : avec $[\vec{u}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $[\vec{f}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, (B.30) s'écrit $M.\frac{d[\vec{u}]_{|\vec{E}}}{dt} + R.[\vec{u}]_{|\vec{E}} = [\vec{f}]_{|\vec{E}}$, avec $[\vec{u}]_{|\vec{E}}(0) = [\vec{u}_0]_{|\vec{E}}$. Avec $[\vec{u}]_{|\vec{p}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $[\vec{f}]_{|\vec{p}} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$, on a $[\vec{u}(t)]_{|\vec{p}} = P^{-1}.[\vec{u}(t)]_{|\vec{E}}$ et $[\vec{f}(t)]_{|\vec{p}} = P^{-1}.[\vec{f}(t)]_{|\vec{E}}$ (formules de changement de base). Donc $M.\frac{dP.[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt} + R.P.[\vec{u}]_{|\vec{p}} = [\vec{f}]_{|\vec{E}}$, donc $P^T.M.P.\frac{d[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt}(t) + P^T.R.P.[\vec{u}]_{|\vec{p}}(t) = P^T.[\vec{f}]_{|\vec{E}}$, donc

$$\frac{d[\vec{u}]_{|\vec{p}}}{dt}(t) + D.[\vec{u}]_{|\vec{p}}(t) = P^T.[\vec{f}]_{|\vec{E}}, \quad \text{avec} \quad [\vec{u}]_{|\vec{p}}(0) = P^{-1}.[\vec{u}]_{|\vec{E}}(0) \ \ (= P^T.M.[\vec{u}]_{|\vec{E}}(0)). \tag{B.31}$$

Le système différentiel initial (B.30) a été découplé en n EDO : pour tout i, avec $g_i = (P^T.[\vec{f}]_{|\vec{E}})_i$,

$$v_i'(t) + \lambda_i v_i(t) = g_i(t), \quad \text{avec} \quad v_i(0) = v_{0i}. \tag{B.32}$$

Résolutions immédiates. D'où les v_i, d'où les u_i (avec $[\vec{u}]_{|\vec{E}} = P.[\vec{u}]_{|\vec{p}}$) : on a résolu (B.15).

Deuxième méthode (à éviter) : résoudre $\frac{d\vec{u}}{dt}(t) + M^{-1}.R.\vec{u}(t) = M^{-1}.\vec{f}(t)$, cf. (B.15) (SDO) : à éviter car $M^{-1}.R$ n'est pas symétrique en général (bien que M^{-1} et R le soit), et de plus le calcul de M^{-1} est couteux.

Troisième méthode : on utilise une décomposition de Cholesky $M = L.L^T$: avec $\vec{\alpha} = [\vec{u}]_{|\vec{E}}$ on pose

$$\vec{\gamma} = L^T.\vec{\alpha}, \quad \text{donc} \quad \vec{\alpha} = L^{-T}.\vec{\gamma},$$

et (B.30) donne

$$M.L^{-T}.\vec{\gamma}\,' + R.L^{-T}.\vec{\gamma} = [\vec{f}]_{|\vec{E}}, \quad \vec{\gamma}(0) = L^T.\vec{\alpha}_0.$$

D'où en multipliant par L^{-1} (avec $L^{-1}.M.L^{-T} = L^{-1}.L.L^T.L^{-T} = I$) :

$$\vec{\gamma}\,' + L^{-1}.R.L^{-T}.\vec{\gamma} = L^{-1}[\vec{f}]_{|\vec{E}}, \quad \vec{\gamma}(0) = L^T.\vec{\alpha}_0. \tag{B.33}$$

On s'est ramené à un SDO à résoudre cf. § B.6 (avec $A = L^{-1}.R.L^{-T}$ symétrique), d'où $\vec{\gamma}$, d'où $\vec{\alpha} = L^{-T}.\vec{\gamma}$.

C Rappels de topologie

Pour un panorama complet, on renvoie à Choquet [5], et pour un "résumé", cf. cours de troisième année "Rappels (et plus) de topologie".

Définition C.1 Un espace topologique est un couple $(E, \mathcal{O})$ où E est un ensemble et $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ est un ensemble de parties de E dont les éléments appelés ouverts satisfont à :
O_1 : Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert (stabilité par union),
O_2 : Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert (stabilité par intersection finie),
O_3 : $E \in \mathcal{O}$ et $\emptyset \in \mathcal{O}$ (i.e. E et $\emptyset$ sont ouverts).
On dit alors que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur E. Et un sous-ensemble F de E est dit fermé si son complémentaire $E - F$ est ouvert.

Définition C.2 Voisinage, base de voisinages d'un point. On appelle voisinage d'un point $x \in E$ tout sous-ensemble $V \subset E$ contenant un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}(x)$ constitue une base de voisinages de $\mathcal{V}(x)$ si tout $V \in \mathcal{V}(x)$ contient un élément $W \in \mathcal{B}(x)$.

Définition C.3 Convergence et limite. Une suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ de points de E converge vers un point $x \in E$ si pour tout voisinage V de x il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $x_n \in V$:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad x_n \in V.$$

Et x est appelé limite de la suite (x_n).

Définition C.4 Valeur d'adhérence. Un point x est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si pour tout voisinage V de x il existe des indices n arbitrairement grands tels que $x_n \in V$:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad x_n \in V.$$

Proposition C.5 *Un ensemble est fermé s'il contient ses valeurs d'adhérences.*

Définition C.6 Continuité. Une application $f : X \to Y$ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est continue au point $x_0 \in X$ si l'image réciproque de tout ouvert de Y contenant $f(x_0)$ est un ouvert de X :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(x_0)), \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(V) \subset W.$$

(Ou encore si l'image réciproque de tout fermé est un fermé.) Et l'application f est continue sur X (ou dans X) si elle est continue en tout point $x \in E$.

Définition C.7 Homéomorphie. Deux espaces topologiques X et Y sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : X \to Y$ qui soit bicontinue (i.e. continue d'inverse continue), i.e. s'il existe une bijection qui échange leurs ouverts.

(Isomorphie : deux espaces vectoriels sont isomorphes s'il existe une application linéaire bijective de l'un dans l'autre, cf. paragraphe 1.4.6. Une telle bijection conserve les propriétés algébriques. Alors qu'un homéomorphisme est une bijection, non linéaire en général, qui conserve les propriétés topologiques.)

La définition de la continuité donne :

Proposition C.8 *Une fonction continue $f : X \to Y$ transforme une suite convergente (x_n) en une suite convergente $(f(x_n))$.*

En effet, si $x_n \to x_\infty$, alors, notant $y_n = f(x_n)$ et $y_\infty = f(x_\infty)$, si W est un voisinage (quelconque) de y_∞, il existe V voisinage de x_∞ tel que $f(V) \subset W$ par continuité de f. D'où immédiatement $f(x_n) = y_n \in f(V) \subset W$ pour n assez grand par convergence de (x_n), donc (y_n) converge vers y_∞.

Définition C.9 Convergence simple. Une suite de fonctions (f_n) d'un ensemble X dans un espace topologique Y converge simplement vers f si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Définition C.10 Espace topologique séparé. E est dit séparé lorsque deux points distincts quelconques de E possèdent deux voisinages distincts.

Attention : ne pas confondre séparé défini ici, et séparable définit en 1.17 qui s'applique à des espaces vectoriels.

Définition C.11 Compact (Borel–Lebesgue). Un espace topologique E est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Définition C.12 Espace métrique. Un espace métrique est un couple (E, d) constitué d'un ensemble E et d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que :
M_1 : $(x = y) \Leftrightarrow (d(x, y) = 0)$,
M_2 : $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
M_3 : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).
La fonction d s'appelle distance (c'est une semi-distance lorsque M_1 n'est pas vérifiée).

Définition C.13 Pour E espace métrique, on appelle boule ouverte $B(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\{y \in E : d(x, y) < r\}$, et boule fermée sa fermeture $\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$.

Proposition C.14 *Topologie des espaces métriques. Dans E espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes engendre une topologie appelée topologie de l'espace métrique, et cette topologie est séparée. Et tout point x d'un espace métrique a une base dénombrable de voisinages, à savoir les boules $B(x, q)$ pour $q \in \mathbb{Q}$. Et l'ensemble des $\{B(x, q) : x \in E,\ q \in \mathbb{Q}\}$ constitue une base de voisinage de x pour la topologie de l'espace métrique.*

Définition C.15 Séparabilité (ne pas confondre avec séparé). Un espace métrique (E, d) est séparable s'il contient une sous-suite dénombrable dense : il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Proposition C.16 *Toute espace métrique compact est séparable. Et tout espace compact est borné.*

En effet, il peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(x_i, \varepsilon)$. Donc un compact est fermé et borné. La réciproque est fausse en dimension infinie.

Proposition C.17 *(Bolzano–Weierstrass) Cadre : espace topologique $(E, \mathcal{O})$ qui est métrique, i.e. on dispose d'une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, et la topologie est l'ensemble engendré par les boules (ouvertes) $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$.*

Un espace métrique est compact ssi toute suite (x_n) possède une valeur d'adhérence (de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente) :

$$\exists x \in K, \quad \exists n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ k & \to n_k = n(k) \end{array} \right\} \text{ application croissante stricte, tels que } d(x_{n_k}, x) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Et si la valeur d'adhérence est unique alors la suite converge vers cette valeur.

La compacité est un outil essentiel pour prouver de nombreux théorèmes d'existence.

Définition C.18 Un sous-ensemble F d'un espace topologique E est dit relativement compact si sa fermeture $\overline{F}$ est compacte.

Proposition C.19 *Si E est compact et si F est fermé dans E, alors F est compact.*

En effet, de toute suite de F, donc de E, on peut extraire une sous suite convergente dans le compact E, donc convergente dans F car F est fermé.

Proposition C.20 *Si $f : E \to F$ est continue de E compact dans F séparé, alors $f(E)$ est compact dans F. Et si $G \subset E$ est relativement compact alors $f(G)$ est relativement compact dans F. Et si $F = \mathbb{R}$, i.e. f est une fonction numérique, alors f atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Démonstration immédiate.

Définition C.21 Suite de Cauchy. Dans un espace métrique (E, d) une suite (x_n) est de Cauchy si $d(x_n, x_m) \to 0$ quand n et m tendent vers ∞ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq N, \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Définition C.22 Espace complet. (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.

Proposition C.23 *Si K est un compact de E alors K est un fermé borné. Et la réciproque est fausse en dimension infinie.*

La réciproque ('un fermé borné est compact') est vraie dans les Hilbert uniquement en dimension finie. En dimension infinie : prendre la boule unité fermé de ℓ^2 qui est un fermé borné. Elle n'est pas compacte puisque la suite formée de vecteurs de base (orthonormaux) n'admet pas de sous-suite qui soit de Cauchy : on a toujours $||e_n - e_m||^2 = ||e_n||^2 + ||e_m||^2 = 2$ par Pythagore, pour $n \neq m$, et donc aucune sous-suite ne vérifie "$||e_{n_k} - e_{n_l}|| \to 0$", donc aucune sous-suite n'est de Cauchy, donc il n'y a pas de valeurs d'adhérence pour cette suite (e_n).

Définition C.24 Semi-norme, norme, espace normé et espace de Banach. On se place dans le cadre d'un espace vectoriel E sur un corps K. Une norme est une application $p : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :
(i) : $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
(ii) : $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$, pour tout $(\lambda, x) \in K \times E$,
(iii) : $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, pour tout $(x, y) \in E^2$.
C'est une semi-norme si (i) n'est pas vérifiée.

Un espace normé est un espace vectoriel muni d'une norme. Et un espace de Banach est un espace normé complet.

Remarque C.25 À toute norme p est associée la distance $d(x,y) = p(x-y)$. Par contre il existe des distances qui ne dérivent pas de norme, comme par exemple $d(x,y) = \inf(1, p(x-y))$ qui est toujours ≤ 1 et q caractérisé par : $q(x-y) = d(x,y)$, ne saurait vérifier (ii).

La continuité s'énonce immédiatement dans les espaces métriques par :

Proposition C.26 *Une application $f : E \to F$ d'un espace métrique (E, d_E) dans d'un espace métrique (F, d_F) est continue (ponctuellement) en $x \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in E, \quad d_E(x,y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Définition C.27 Uniforme continuité. Une application $f : E \to F$ d'un espace métrique (E, d_E) dans d'un espace métrique (F, d_F) est dite uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in E, \quad d_E(x,y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

L'uniforme continuité n'est pas une notion ponctuelle contrairement à la continuité simple dans E. Par exemple, la fonction $x \to \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est continue dans $]0,1[$ sans être uniformément continue dans $]0,1[$: en effet, $\exists \varepsilon > 0$, on prend $\varepsilon = 1$, tel que $\forall \eta > 0$, $\exists x > 0$ et $\exists y > 0$, on prend $x = \min(\eta, 1)$ et $y = \frac{1}{2}x$, on ait $|x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{x} = \max(\frac{1}{\eta}, 1) \geq \varepsilon$.

Par contre lorsque E est compact :

Proposition C.28 *Une fonction continue $f : E \to F$ de E compact dans F métrique est uniformément continue.*

Définition C.29 Uniforme convergence de fonctions. Une suite de fonctions (f_n) d'un ensemble X dans un espace métrique (F, d) converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geq N, \quad \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

D Série de Fourier et théorème de Rellich dans $[a,b]$

Soit $H^1(]0,T[) = H^1(]0,T[;\mathbb{C})$ de son produit scalaire usuel (forme sesquilinéaire hermitienne définie positive) et de sa norme associée :

$$(f,g)_{H^1} = (f,g)_{L^2} + (f',g')_{L^2}, \quad ||f||_{H^1} = \sqrt{||f||_{L^2}^2 + ||f'||_{L^2}^2}. \tag{D.1}$$

On va montrer le théorème de Rellich : l'injection canonique $I_{10} : \left\{ \begin{array}{rl} H^1(]0,T[) & \to L^2(]0,T[) \\ u & \to I_{10}(u) = u \end{array} \right\}$ est compacte.

Pour ce on va montrer avec Fourier que I_{10} est de Hilbert–Schmidt : avec Fourier, on va construire une b.o.n. $(e_k)_{\mathbb{Z}}$ dans $H^1(]0,T[)$ (donc en particulier $||e_k||_{H^1} = 1$) t.q. $\sum_{\mathbb{N}} ||I_{10}e_n||_{L^2}^2 < \infty$, i.e. $\sum_{\mathbb{N}} ||e_n||_{L^2}^2 < \infty$.

D.1 Rappel : base de Fourier dans $L^2(]0,T[)$

On munit $L^2(]0,T[) = L^2(]0,T[;\mathbb{C})$ de son produit scalaire usuel $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ (forme sesquilinéaire hermitienne définie positive) et de sa norme associée $||.||_{L^2}$:

$$(f,g)_{L^2} = \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \ \in \mathbb{C}, \quad \text{et} \quad ||f||_{L^2} = (\int_0^T |f(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}} \ \in \mathbb{R}. \tag{D.2}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2ik\pi}{T}t}, \quad \text{où donc} \quad \overline{\varphi_k(t)} = \varphi_{-k}(t) = \varphi_k(-t). \tag{D.3}$$

$(\varphi_k)_{\mathbb{Z}}$ est une b.o.n. dans $(L^2(]0,T[),||.||_{L^2})$. En effet $(\varphi_k)_{\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans $(L^2(]0,T[),||.||_{L^2})$ (calcul immédiat) donc libre dans $(L^2(]0,T[),||.||_{L^2})$, et génératrice dans $(C^0([0,T]),||.||_\infty)$ (théorème de Stone–Weierstrass), donc génératrice dans $L^2(]0,T[)$ (car $C^0([0,T])$ est dense dans $L^2(]0,T[) = L^2([0,T])$ voir cours d'intégration).

$\nu = \frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ est la pulsation fondamentale, et, pour $k \geq 2$, $\nu_k = \frac{k}{T}$ et $\omega_k = \frac{2k\pi}{T} = 2\pi\nu_k$ sont les fréquences et pulsations harmoniques .

Donc, pour $f \in L^2(]0,T[)$, $\exists (c_k)_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (les c_k sont les composantes de f sur $(\varphi_k)_{\mathbb{Z}}$) t.q.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi_k(t) \ \text{ p.p.}, \quad c_k = (f,\varphi_k)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t)e^{-\frac{2ik\pi}{T}t}\,dt, \quad ||f||_{L^2}^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |c_k|^2, \tag{D.4}$$

avec p.p=presque partout, et avec l'identité de Bessel–Parseval (= Pythagore généralisé) cf. (1.42).

Exercice D.1 On prend $T=1$, donc $\varphi_k(t) = e^{i2k\pi t}$. Calculer les coefficients de Fourier c_k de l'identité

$$g : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ t & \to g(t) = t \end{array} \right\}. \tag{D.5}$$

Calculer $||g||_{L^2}$ et en déduire $\sum_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Réponse. $g \in L^2(]0,1[)$ car $||g||_{L^2}^2 = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3} < \infty$. Donc $g = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k$, où $c_k = (g,\varphi_k)_{L^2} = \int_0^1 te^{-i2k\pi t}\,dt$, donc

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et pour } k \neq 0, \quad c_k = [t\,\frac{e^{-i2k\pi t}}{-2ik\pi}]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-i2k\pi t}}{-2ik\pi}\,dt = \frac{1}{-2ik\pi} - 0 = \frac{1}{-2ik\pi}. \tag{D.6}$$

D'où

$$(g(t) =) \quad t = \frac{1}{2}\varphi_0(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{i}{2k\pi}\varphi_k(t), \quad \text{et} \quad ||g||_{L^2}^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{1}{4\pi^2k^2}. \tag{D.7}$$

Et $\frac{1}{3} = ||g||_{L^2}^2 = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{4} + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{1}{4\pi^2k^2}$, d'où $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$, d'où $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ▪

Remarque D.2 Dans $L^2([0,T];\mathbb{R})$, la base usuelle de Fourier est $(1, (\cos(\frac{2k\pi}{T}t))_{k\in\mathbb{N}^*}, (\sin(\frac{2k\pi}{T}t))_{k\in\mathbb{N}^*})$. Donc pour $f \in L^2([0,T];\mathbb{R})$ (à valeurs réelles), $\exists (a_k)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\exists (b_k)_{\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\exists (c_k)_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ t.q.

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\frac{2\pi}{T}t)(c_k + c_{-k}) + i\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\frac{2\pi}{T}t)(c_k - c_{-k}) \ \ (\in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $a_0 = c_0$ et, pour $k \neq 0$, $\left\{ \begin{array}{l} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{array} \right\}$, soit $\left\{ \begin{array}{l} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \overline{c_k} \end{array} \right\}$. ▪

Exercice D.3 Donner la b.o.n. $(\zeta_k)_{\mathbb{Z}}$ de Fourier dans $[a,b]$.

Réponse. $\zeta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\varphi_k(\frac{t-a}{b-a})$, car $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{b-a}}\varphi_k(\frac{t-a}{b-a})\frac{1}{\sqrt{b-a}}\overline{\varphi_\ell(\frac{t-a}{b-a})}\,dt = \int_0^T \varphi_k(y)\overline{\varphi_\ell(y)}\,dy = \delta_{k\ell}$ avec $y = \frac{t-a}{b-a}$.

D.2 Remarque

Quitte à prolonger les fonctions par périodicité sur $\mathbb{R}$, les φ_k sont continues et périodiques de période T (on a $\varphi_k(0) = \varphi_k(T)$ pour tout k), et $(\varphi_k)_{\mathbb{Z}}$ soit une b.o.n. de $L^2(]0,T[)$; alors que $g : t \to g(t) = t$ n'est pas continue périodique (au sens où $0 = g(0+) \neq g(T-) = 1$), et pourtant g s'exprime sur la base $(\varphi_k)_{\mathbb{Z}}$ dans $L^2(]0,T[)$ (ce qui veut dire $\lim_{n\to\infty} ||g - \sum_{k=-n}^{n} c_k\varphi_k||_{L^2} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.)

Interprétation : la norme $||.||_{L^2}$ n'est pas "précise" (valeur moyenne "grossière"), et d'ailleurs on a le phénomène de Gibbs : la fonction $g_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k\varphi_k$ "oscille de plus en plus quand $n \to \infty$" au voisinage de 0 et 1.

D.3 Base de Fourier de $L^2(]0,T[)$ normée dans $H^1(]0,T[)$: incomplète dans $H^1(]0,T[)$

On a $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}$ et $\varphi_0' = 0$, et pour $k \neq 0$

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad \varphi_0' = 0, \quad \text{et, pour } k \neq 0, \quad \varphi_k'(t) = \frac{2ik\pi}{T}\varphi_k(t) \quad \text{et} \quad ||\varphi_k'(t)||_{L^2} = |\frac{2k\pi}{T}|. \tag{D.8}$$

Donc, cf. (D.1),

$$||\varphi_0||_{H^1}^2 = 1, \quad \text{et, pour } k \neq 0, \quad ||\varphi_k||_{H^1}^2 = 1 + \frac{4k^2\pi^2}{T^2}. \tag{D.9}$$

On normalise dans H^1, i.e. on pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\psi_k = \frac{\varphi_k}{||\varphi_k||_{H^1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4\pi^2}{T^2}k^2 + 1}}\,\varphi_k, \tag{D.10}$$

où donc $||\psi_k||_{H^1} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (en particulier $\psi_0 = \varphi_0$).

Proposition D.4 *$(\psi_k)_{\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans $H^1(]0,T[)$, donc famille libre, mais elle n'est pas génératrice (ce n'est pas une base de $H^1(]0,T[)$), i.e., $\overline{\mathrm{Vect}\{(\psi_k)_{\mathbb{Z}}\}} \subsetneq H^1(]0,T[)$.*

Preuve. Avec (D.8) on a $(\varphi_k,\varphi_\ell)_{H^1} = (\varphi_k,\varphi_\ell)_{L^2} + (\varphi_k',\varphi_\ell')_{L^2} = \delta_{k\ell} + \frac{2ik\pi}{T}\frac{-2i\ell\pi}{T}\delta_{k\ell} = 0$ si $k \neq \ell$, et $||\varphi_k||_{H^1}^2 = 1 + \frac{4k^2\pi^2}{T^2}$, donc $(\psi_k,\psi_\ell)_{H^1} = (\frac{\varphi_k}{||\varphi_k||_{H^1}}, \frac{\varphi_\ell}{||\varphi_\ell||_{H^1}})_{H^1} = 0$ si $k \neq \ell$, et $||\psi_k||_{H^1}^2 = ||\frac{\varphi_k}{||\varphi_k||_{H^1}}||_{H^1}^2 = \frac{||\varphi_k||_{H^1}^2}{||\varphi_k||_{H^1}^2} = 1$, donc $(\psi_k)_{\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée ; mais elle n'est pas totale dans $H^1(]0,T[)$, voir exercice suivant.

Exercice D.5 Cas $T = 1$ pour simplifier l'écriture. Soit $g(t) = t$ cf. (D.5).

1- Montrer que g ne s'exprime pas sur la famille $(\cdot,\cdot)_{H^1}$-orthonormée $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, et donc que $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ n'est pas génératrice dans $H^1(]0,1[)$.

2- Montrer : si $f = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k \in H^1(]0,T[)$, alors $f' \neq \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k'$ en général : on ne peut pas dériver sous les signe $\sum$ en général. Indication : prendre $f(t) = g(t) = t$, cf. (D.5) et (D.6) ; est-ce que la série $\sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k'$ a un sens dans L^2 ? Interprétation : la série de Fourier partielle de g fait apparaître le "phénomène de Gibbs" avec ses "pentes très grandes", et on s'attend à un problème pour le calcul de g' si on utilise les $\varphi_k' = \frac{2ik\pi}{T}\varphi_k$.

Réponse. 1- On a $g \in H^1(]0,1[)$ puisque $||g||_{H^1}^2 = ||g||_{L^2}^2 + ||g'||_{L^2}^2 = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 1\,dt = \frac{4}{3} < \infty$. On a $g \in L^2(]0,1[)$ donc $\exists (c_k)_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ t.q. $g = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k$, et on a (D.6). Supposons $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ génératrice dans $H^1(]0,1[)$. Donc $\exists (d_k)_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ t.q.

$$g = \sum_{\mathbb{Z}} d_k\psi_k = \sum_{\mathbb{Z}} d_k\frac{\varphi_k}{||\varphi_k||_{H^1}}, \quad \text{avec} \quad ||g||_{H^1}^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |d_k|^2 \quad \text{et} \quad d_k = c_k||\varphi_k||_{H^1} \tag{D.11}$$

(Bessel–Parseval). Donc $d_0 = c_0||\varphi_0||_{H^1} =^{(D.6)} \frac{1}{2}$ et $d_k =^{(D.6)} \frac{1}{-2ik\pi}(1+4k^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}$, donc $|d_k| \geq 1$, pour $k\neq 0$. Donc $||g||_{H^1}^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |d_k|^2 \geq \sum_{\mathbb{Z}^*} 1 = \infty$: absurde puisque $||g||_{H^1}^2 = \frac{4}{3}$. Donc $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ n'est pas génératrice dans $H^1(]0,1[)$.

2- On a $g'(t) = 1$, donc $g' = \varphi_0 \in L^2(]0,T[)$. Et $\sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' = \sum_{\mathbb{Z}} 2ik\pi c_k\varphi_k = \sum_{\mathbb{Z}}(-1)\varphi_k$ cf. (D.6) ; Et $\sum_{\mathbb{Z}}(-1)\varphi_k \notin L^2(]0,1[)$ car $\sum_{\mathbb{Z}}(-1)^2 = \infty$; donc $\sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' \notin L^2(]0,T[)$; donc $g' \neq \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k'$.

D.4 L'espace V adhérence de $\mathrm{Vect}\{(\psi_k)_\mathbb{Z}\}$ dans $H^1(]0,T[)$

Soit U le sous-espace vectoriel de $H^1(]0,T[)$ engendré par la famille orthonormée $(\psi)_k)_\mathbb{Z}$:

$$U = \mathrm{Vect}\{(\psi_k)_\mathbb{Z}\} = \{f :]0,T[\to \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N},\ \exists(\alpha_k)_{k\in[-n,n]_\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{2n+1},\ f = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\psi_k\}. \tag{D.12}$$

Les ψ_k étant proportionnels aux φ_k, $U = \mathrm{Vect}\{(\varphi_k)_\mathbb{Z}\}$ (on ne prend que les sommes finies), donc U est l'ensemble des polynômes trigonométriques. On a $U \subset H^1(]0,T[)$ (immédiat car somme finie).

Rappel : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 := \lim_{k\to\infty}(\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2)$.

Rappel (Stone–Weierstrass) : l'adhérence $\overline{U}^{L^2}$ (de U dans $L^2(]0,T[)$) est $L^2(]0,T[)$:

$$\forall f \in L^2(\Omega),\ \exists(c_k)_{k\in\mathbb{Z}},\ ||f - \sum_{k=-n}^{n} c_k\varphi_k||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{et} \quad f \overset{\text{noté}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi_k \quad \text{avec} \quad \sum_\mathbb{Z} |c_k|^2 < \infty, \tag{D.13}$$

cf. (1.42) (Bessel–Parseval = Pythagore généralisé).

Notons $V = \overline{U}^{H^1}$ l'adhérence de $\mathrm{Vect}\{(\psi_k)_\mathbb{Z}\}$ dans $H^1(]0,T[)$, i.e. le sous-espace fermé dans $H^1(]0,T[)$ dont une base hilbertienne (une b.o.n.) est donc $(\psi_k)_\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} V = \overline{U}^{H^1} = \overline{\mathrm{Vect}\{(\psi_k)_\mathbb{Z}\}}^{H^1} &= \{f \in H^1(]0,T[) : \exists(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}},\ ||f - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\psi_k||_{H^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \\ &= \{f \in H^1(]0,T[) : \exists(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}},\ f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\psi_k,\ ||f||_{H^1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty\} \end{aligned} \tag{D.14}$$

(Bessel–Parseval).

D.5 L'injection canonique $(V, (\cdot,\cdot)_{H^1}) \to (L^2(]0,T[), (\cdot,\cdot)_{L^2})$ est compacte

$(V, (\cdot,\cdot)_{H^1})$ est un Hilbert car V est un s.e.v. fermé dans l'Hilbert $(H^1(]0,T[), (\cdot,\cdot)_{H^1})$.

Théorème D.6 *L'injection canonique* $J : \left\{\begin{array}{rl} (V, (\cdot,\cdot)_{H^1}) & \to (L^2(]0,T[), (\cdot,\cdot)_{L^2}) \\ u & \to J(u) = u \end{array}\right\}$ *est compacte.*

Preuve. J est borné (avec $||J|| \le 1$) car $||J(u)||_{L^2} \le c||u||_{H^1}$, i.e. $||u||_{L^2} \le c||u||_{H^1}$ est vraie avec $c = 1$.

Montrons que J est un opérateur de Hilbert–Schmidt, cf. (4.19). On a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} ||J(\psi_k)||^2_{L^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ||\psi_k||^2_{L^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{4k^2\pi^2}{T^2}} ||\varphi_k||^2_{L^2} = \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{T^2}{4\pi^2}+k^2} < \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, avec $(\psi_k)_\mathbb{Z}$ b.o.n., donc J est de Hilbert–Schmidt. Donc J est compact, cf. prop. 4.38. ∎

On va montrer que V est de codimension 1 dans $H^1(]0,T[)$, d'où I_{10} compact (thm de Rellich en 1-D).

D.6 $\mathrm{codim}V \ge 1$ dans H^1

Rappel : la codimension est la dimension d'un supplémentaire. Soit $g : t \to g(t) = t$.

Proposition D.7 $\mathrm{codim}V \ge 1$ *dans* $H^1(]0,T[)$, *car la fonction g n'est pas dans V (qui est fermé).*

Preuve. Cf. exe. D.5 avec $T = 1$: $g \in H^1(]0,1[)$ et $g \notin V$, et $V = \overline{V}$ (fermé dans $H^1(]0,1[)$), donc et $g \notin \overline{V}$, donc $V \oplus \mathrm{Vect}\{g\} \subset H^1(]0,1[)$, et $\dim(\mathrm{Vect}\{g\}) = 1$, donc $\mathrm{codim}V \ge 1$. Cas $T \ne 1$: exercice. ∎

Notant $g_\parallel$ la $(\cdot,\cdot)_{H^1}$-projection orthogonale de g sur V, puis $g_\perp := g - g_\parallel \in V^{\perp_{H^1}}$, on a donc

$$V \oplus^{\perp_{H^1}} \mathrm{Vect}\{g_\perp\} \subset H^1(]0,T[). \tag{D.15}$$

Exercice D.8 Avec $T=1$, calculer $g_\perp$.

Réponse. $g_\parallel \in V$ est défini par $(g_\parallel, v)_{H^1} = (g,v)_{H^1}$ pour tout $v\in V$. Et $(\psi_k)_{\mathbb{Z}}$ b.o.n. dans $(V,(\cdot,\cdot)_{H^1})$ donc $(g_\parallel,\psi_k)_{H^1} = (g,\psi_k)_{H^1}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, avec $g_\parallel = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\psi_k \in V$ et $\alpha_k = (g_\parallel,\psi_k)_{H^1}$ (car (ψ_k) b.o.n. dans V). donc $\alpha_k = (g,\psi_k)_{H^1} = (g,\psi_k)_{L^2} + (g',\psi_k')_{L^2}$, pour tout k.

Et $g = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k \in L^2$, et $g' = 1_{]0,1]} = \varphi_0 = \psi_0$, et $\varphi_k' = (2ik\pi)\varphi_k$, et $\psi_k = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}\varphi_k$, donc $\psi_k' = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}\varphi_k'$; donc $\alpha_0 = (g,\psi_0)_{L^2} + 0 = (g,\varphi_0)_{L^2} = c_0$, et, pour $k\neq 0$,

$$\alpha_k = (g,\psi_k)_{L^2} + (g',\psi_k')_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}(\underbrace{(g,\varphi_k)_{L^2}}_{=c_k} + \underbrace{(\varphi_0,(2ik\pi)\varphi_k)_{L^2}}_{=0}) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}c_k. \tag{D.16}$$

Donc

$$g_\parallel = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}c_k\psi_k \overset{(D.6)}{=} \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}\frac{1}{-2i\pi k}\psi_k \ \in V. \tag{D.17}$$

Donc

$$g_\perp(t) = t - \frac12 - \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(-2i\pi k)(1+4k^2\pi^2)}\varphi_k(t) \ \perp \ V \ \ (\text{dans } H^1(]0,1[)). \tag{D.18}$$

D.7 L'espace $H^1_{per}(]0,T[)$

D.7.1 Définition

Les fonctions dans $H^1(]0,T[)$ sont continues et t.q. $f(0+) := \lim_{h\to 0, h>0} f(0+h)$ et $f(T-) := \lim_{h\to 0, h>0} f(T-h)$ existent dans $\mathbb{R}$ (voir cours d'éléments finis). (C'est faux pour $H^1(\Omega)$ avec Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$). Donc on peut prolonger $f\in H^1(]0,T[)$ par continuité en 0 et T : on pose $f(0) := f(0+)$ et $f(T) := f(T-)$, et on note

$$H^1_{per}(]0,T[) := \{f\in H^1(]0,T[) : f(0) = f(T)\in\mathbb{R}\}, \tag{D.19}$$

appelé l'ensemble des fonctions $H^1(]0,T[)$ "continues périodiques de période T", expression signifiant : si f est prolongée par périodicité à tout $\mathbb{R}$ alors f est continue et périodique de période T.

On munit $H^1_{per}(]0,T[)$ du produit scalaire de $H^1(]0,T[)$. Ainsi $(H^1_{per}(]0,T[),(\cdot,\cdot)_{H^1})$ est un espace pré-hilbertien. (Et il est complet, voir § D.10, donc c'est un Hilbert.)

D.7.2 codim$(H^1_{per}(]0,T[)) = 1$

Proposition D.9 *L'espace $H^1_{per}(]0,T[)$ est de codimension 1 dans $H^1(]0,T[)$.*

Preuve. Soit $f\in H^1(]0,T[)$. Soit $g(t)=t$; on a $g\in H^1(]0,T[)$ et $g\notin H^1_{per}(]0,T[)$ puisque $g(0)=0\neq 1 = g(1)$. Soit

$$f_p(t) := f(t) - \frac{f(T)-f(0)}{T}g(t), \quad \text{donc} \quad f_p(0) = f_p(T). \tag{D.20}$$

Donc $f = f_p + \frac{f(T)-f(0)}{T}g \in H^1_{per}(]0,T[)\oplus \text{Vect}\{g\}$, donc codim$(H^1_{per}(]0,T[) = \dim(\text{Vect}\{g\}) = 1$.

D.7.3 Caractérisation de $H^1_{per}(]0,T[)$

Théorème D.10 *Soit $f\in H^1(]0,T[)$, soit c_k ses coefficients de Fourier dans $L^2(]0,T[)$: $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k$ avec $c_k = (f,\varphi_k)_{L^2}$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2<\infty$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{aligned} &(1)\ \ f\in H^1_{per}(]0,T[),\\ &(2)\ \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2<\infty \quad (\textit{les } c_k \textit{ décroissent "très vite"}),\\ &(3)\ \ f' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' \in L^2(]0,T[) \quad (\textit{on peut dériver sous le signe } \textstyle\sum). \end{aligned} \tag{D.21}$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) et (3) : Soit $f\in H^1_{per}(]0,T[)$. Donc $f'\in L^2(]0,T[)$ et $f' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\varphi_k$, avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|d_k|^2<\infty$ et

$$\begin{aligned} d_k &= (f',\varphi_k)_{L^2} = \int_0^T f'(t)\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{T}t}}{\sqrt{T}}\,dt = [f(t)\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{T}t}}{\sqrt{T}}]_0^T - \int_0^T f(t)\frac{-2ik\pi}{T}\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{T}t}}{\sqrt{T}}\,dt \\ &\underset{\text{périodiques}}{\overset{f \text{ et } \varphi_k}{=}} 0 + \frac{2ik\pi}{T}(f,\varphi_k)_{L^2} = \frac{2ik\pi}{T}c_k. \end{aligned} \tag{D.22}$$

Et $\infty > \sum_{k\in\mathbb{Z}}|d_k|^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2$ donc (2), et $f' = \sum_{\mathbb{Z}} d_k\varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2ik\pi}{T}c_k\varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k'$ donc (3).

(2) $\Rightarrow$ (1) et (3) : Supposons $\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$. Soit $h := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k'$; donc $h = \sum_{\mathbb{Z}} d_k\varphi_k$ où $d_k = \frac{2ik\pi}{T}c_k$; et $\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$, donc $\sum_{\mathbb{Z}} |d_k|^2 < \infty$, donc $h \in L^2(]0,T[)$. Montrons $h = f'$: soit $H(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$ (primitive) ; avec $\alpha_0 = 0$, on a

$$H(t) = (h,1)_{L^2(]0,t[)} = (\sum_{\mathbb{Z}^*} d_k\varphi_k, 1)_{L^2(]0,t[)} \overset{(1.37)}{=} \sum_{\mathbb{Z}^*} d_k(\varphi_k,1)_{L^2(]0,t[)}, \quad \text{en particulier } H(T) = 0, \tag{D.23}$$

avec

$$(\varphi_k,1)_{L^2(]0,t[)} = \int_0^t \varphi_k(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{T}{2ik\pi}\varphi_k'(\tau)\,d\tau = \frac{T}{2ik\pi}(\varphi_k(t)-\varphi_k(0)). \tag{D.24}$$

Donc

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} d_k\frac{T}{2ik\pi}(\varphi_k(t)-\varphi_k(0)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k(\varphi_k(t)-\varphi_k(0)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi_k(t)-\varphi_k(0)) \quad (\text{car } \varphi_0(t)-\varphi_0(0) = 1-1 = 0) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k(t) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k(0) = f(t)-f(0). \end{aligned}$$

Donc $f(t) = H(t)+f(0)$, donc f dérivable et $f' = H' = h = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{2ik\pi}{T}c_k\varphi_k = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' \in L^2(]0,T[)$, d'où (3), et $H(T) = 0$ donc $f(T) = f(0)$, d'où (1).

(3) $\Rightarrow$ (2) et (1) : Supposons $f' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' \in L^2(]0,T[)$ et montrons $\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$ et (donc) $f \in H^1_{per}(]0,T[)$ (cf. 2-). On a $f' = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\frac{2ik\pi}{T}\varphi_k(t) \in L^2(]0,T[)$, donc $\sum_{\mathbb{Z}} \frac{4k^2\pi^2}{T^2}|c_k|^2 < \infty$, donc $\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$. ∎

Remarque D.11 Interprétation de (D.21) :

• si $f \in H^1(]0,T[)$ est telle que $f(0) = f(T)$, alors ses coefficients de Fourier c_k décroissent suffisamment vite pour avoir $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$.

Contre-exemple avec $g(t) = t$ où $g = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k$ et $|c_k| = \frac{1}{2k\pi}$ cf. (D.6). Exemple avec $g_\parallel = \sum_{\mathbb{Z}} d_k\varphi_k$ où $d_0 = \frac12$ et $d_k = \frac{1}{(-2i\pi k)(1+4k^2\pi^2)}$ pour $k \neq 0$ cf. (D.17), qui donne $\sum_k k^2|d_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{k^2}{4\pi^2k^2(1+4k^2\pi^2)^2} < \infty$.

• si $\Big(f = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k \in L^2(]0,T[)$ et $\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty\Big)$ alors

$$f \in H^1(]0,T[), \quad f(0) = f(T), \quad f' = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k' \in L^2(]0,T[) \tag{D.25}$$

(f est "périodique et continue sur $\mathbb{R}$" et on peut dériver sous Σ). Exemple avec $g_\parallel$. ∎

Exercice D.12 Dans (D.23) avec $t > 0$, au lieu d'utiliser la continuité du produit scalaire, peut-on appliquer le théorème de Fubini ou de Tonelli ? (Voir polycopié intégrale de Lebesgue.)

Réponse. Non. En effet, à t fixé, soit $d(k) := d_k$ et $\varphi(k,\tau) =: \varphi_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{2ik\pi t}{T}}$; soit $h(k,\tau) = d(k)\varphi(k,\tau)$ $(= d_k\varphi_k(\tau))$, et on munit l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$ la mesure $dm\otimes d\tau$; on veut voir si $h \in \mathbb{R}^2$.

Montrons qu'on ne peut pas appliquer Tonelli (donc on ne peut pas appliquer Fubini).

1- k étant fixé, on a $\int_{\tau=0}^t |d_k\varphi_k(\tau)|\,d\tau = \int_{\tau=0}^t |d_k|\,d\tau = \frac{|d_k|}{\sqrt{T}}t < \infty$, comme voulu.

2- Mais $\sum_k(\int_{\tau=0}^t |d_k\varphi_k(\tau)|\,d\tau) = \frac{t}{\sqrt{T}}\sum_k |d_k| \; < \infty$ est faux en général sous les seules hypothèses $\sum_k |d_k|^2 < \infty$ et $\sum_k k^2|d_k|^2 < \infty$: prendre $d_k = \frac{1}{k^{\frac32+\frac14}}$, donc $d_k^2 = \frac{1}{k^{3+\frac12}}$, $k^2d_k^2 = \frac{1}{|k|^{1+\frac12}}$, et $|kd_k| = \frac{1}{|k|^{\frac12+\frac14}}$. Tonelli ne s'applique pas. ∎

D.8 $V = H^1_{per}(]0,T[)$ et codim$V = 1$

Proposition D.13 $H^1_{per}(]0,T[) \subset V$, *donc* codim$V = 1$ *dans* $H^1(]0,T[)$, *et*

$$H^1(]0,T[) = V \oplus^\perp \text{Vect}\{g_\perp\} = \overline{H^1_{per}(]0,T[)} \oplus^\perp \text{Vect}\{g_\perp\}, \tag{D.26}$$

cf. (D.18). Donc

$$(\frac{g_\perp}{||g_\perp||_{H^1}}, (\psi_k)_{\mathbb{Z}}) \text{ est une b.o.n. de } H^1(]0,T[). \tag{D.27}$$

Et $V = H^1_{per}(]0,T[)$.

Preuve. Si $f \in H^1_{per}(]0,T[)$ alors $f = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\varphi_k = \sum_{\mathbb{Z}} c_k\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2}k^2+1}\psi_k \in V$ car $\sum_{\mathbb{Z}} |c_k\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2}k^2+1}|^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |c_k|^2(\frac{4\pi^2}{T^2}k^2+1) = \sum_{\mathbb{Z}} |c_k|^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}\sum_{\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$, cf. (D.21). Donc $H^1_{per}(]0,T[) \subset V$. Et codim$H^1_{per}(]0,T[) = 1$, donc codim$V = 1$, avec codim$V \geq 1$, donc codim$V = 1$. Donc $\overline{H^1_{per}(]0,T[)} = V$. Et $H^1_{per}(]0,T[)$ est fermé, voir § D.10, donc $V = H^1_{per}(]0,T[)$. ∎

D.9 Théorème de Rellich en 1-D

Théorème D.14 *(Théorème de Rellich dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$.) Soit $a,b \in \mathbb{R}$ t.q $a < b$. L'injection canonique :*

$$I_{10} : \begin{cases} H^1(]a,b[) & \to L^2(]a,b[) \\ f & \mapsto I_{10}f = f \end{cases} \tag{D.28}$$

est un opérateur de Hilbert–Schmidt : I_{10} est donc un opérateur borné et compact.

Preuve. Quitte à utiliser l'exercice D.3, regardons le cas $]a,b[=]0,T[$. I_{10} est linéaire (trivial) et borné car $||I_{10}f||_{L^2} = ||f||_{L^2} \le ||f||_{H^1}$ (donc $||I_{10}|| \le 1$). Et $(\frac{g_\perp}{||g_\perp||_{H^1}}, (\psi_k)_\mathbb{Z})$ est une b.o.n. de $(H^1(]0,T[),(\cdot,\cdot)_{H^1})$ cf. (D.27), et $||\frac{I_{10}g_\perp}{||I_{10}g_\perp||_{H^1}}||_{L^2} + \sum_\mathbb{Z} ||I_{10}\psi_k||^2_{L^2} = ||\frac{g_\perp}{||g_\perp||_{H^1}}||_{L^2} + \sum_\mathbb{Z} ||\psi_k||^2_{L^2} =^{(D.10)} ||\frac{g_\perp}{||g_\perp||_{H^1}}||_{L^2} + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{T^2}{4\pi^2k^2+T^2} < \frac{||g_\perp||_{L^2}}{||g_\perp||_{H^1}} + \frac{T^2}{4\pi^2}\sum_{\mathbb{Z}^*}\frac{1}{k^2} < \infty$. ∎

D.10 * $H^1_{per}(]0,T[)$ est fermé dans $H^1(]0,T[)$

D.10.1 Convergences absolue et uniforme dans $H^1_{per}(]0,T[)$

Proposition D.15 *Soit $f \in H^1_{per}(]0,T[)$ et $\sum_\mathbb{Z} c_k\varphi_k$ sa série de Fourier dans $L^2(]0,T[)$ (donc $c_k = (f,\varphi_k)_{L^2}$).*
1- La série $\sum_\mathbb{Z} c_k$ converge absolument, i.e. $\sum_\mathbb{Z} |c_k| < \infty$, et
2- la série $\sum_\mathbb{Z} c_k\varphi_k$ converge uniformément vers f, i.e. $||f - \sum_{k=-N}^N c_k\varphi_k||_\infty \longrightarrow_{N\to\infty} 0$.

Preuve. 1- Convergence absolue. On a, grâce à Cauchy–Schwarz dans ℓ^2 et à $f \in H^1_{per}$, cf. (D.21) :

$$\sum_{\mathbb{Z}^*} |c_k| \le \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|}|kc_k| \le (\sum_{\mathbb{Z}^*}\frac{1}{k^2})^{\frac12}(\sum_{\mathbb{Z}^*}|kc_k|^2)^{\frac12} < \infty. \tag{D.29}$$

2- Convergence uniforme. $f \in H^1(]0,T[)$ donc $f \in C^0([0,T])$ et $||f - \sum_{k=-N}^N c_k\varphi_k||_\infty = ||\sum_{k\notin[-N,N]_\mathbb{N}} c_k\varphi_k||_\infty \le \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{k\notin[-N,N]_\mathbb{N}} |c_k| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente, cf. 1-). ∎

D.10.2 Majoration $||f||_\infty \le C||f||_{H^1}$ dans $H^1(]0,T[)$

Proposition D.16 *Pour $T > 0$ on a :*

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in H^1(]0,T[), \quad ||f||_\infty \le C||f||_{H^1}. \tag{D.30}$$

Preuve. Soit $f \in H^1(]0,T[)$. En particulier pour tout $t,\tau \in]0,T[$ on a $f(t) = f(\tau) + \int_\tau^t f'(s)\,ds = f(\tau) + (1,f')_{L^2(]\tau,t[)}$, et donc avec l'inégalité triangulaire puis Cauchy–Schwarz dans $L^2(]\tau,t[)$:

$$|f(t)| \le |f(\tau)| + ||1||_{L^2(]\tau,t[)}||f'||_{L^2(]\tau,t[)} \le |f(\tau)| + \sqrt{T}||f'||_{L^2(]0,T[)}.$$

D'où, pour tout $\tau \in]0,T[$, on a $||f||_\infty \le |f(\tau)| + \sqrt{T}||f'||_{L^2(]0,T[)}$.

Donc $||f||^2_\infty \le |f(\tau)|^2 + 2\sqrt{T}|f(\tau)|\,||f'||_{L^2(]0,T[)} + T||f'||^2_{L^2(]0,T[)}$, d'où :

$$\int_{\tau=0}^T ||f||^2_\infty\,d\tau \le \int_{\tau=0}^T |f(\tau)|^2\,d\tau + 2\sqrt{T}||f'||_{L^2}\int_{\tau=0}^T 1\,|f(\tau)|\,d\tau + \int_{\tau=0}^T T\,||f'||^2_{L^2}\,d\tau,$$

d'où, avec Cauchy–Schwarz :

$$T||f||^2_\infty \le ||f||^2_{L^2} + 2\sqrt{T}||f'||_{L^2}\sqrt{T}||f||_{L^2} + T^2||f'||^2_{L^2} = (||f||_{L^2} + T||f'||_{L^2})^2,$$

d'où $C = \max(\frac{1}{\sqrt{T}},\sqrt{T})$ convient dans (D.30). ∎

D.10.3 $H^1_{per}(]0,T[)$ est fermé dans $H^1(]0,T[)$

Corollaire D.17 *L'espace $H^1_{per}(]0,T[)$ est fermé dans $H^1(]0,T[)$. D'où $H^1_{per}(]0,T[) = V$.*

Preuve. Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite dans $H^1_{per}(]0,T[)$ convergente dans $H^1(]0,T[)$ vers une fonction $f \in H^1(]0,T[)$. Donc $||f - f_n||_{H^1} \to 0$. Il s'agit de montrer $f \in H^1_{per}(]0,T[)$, i.e. $f(0) = f(T)$.

Avec (D.30) on a $||f - f_n||_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, avec f et les f_n dans C^0 (on est en 1-D : $H^1 \subset C^0$). Donc (f_n) est convergente vers f dans $(C^0, ||.||_\infty)$. En particulier $|f_n(0) - f(0)| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $|f_n(T) - f(T)| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Comme $f_n \in H^1_{per}(]0,T[)$ on a $f_n(T) = f_n(0)$, donc $f(T) = f(0)$. ∎

E * Condition inf-sup pour la divergence

E.1 Lemme de Baire

On note $\mathrm{Int}(X)$ l'intérieur d'un ensemble X et $\overline{X}$ sa fermeture.

Lemme E.1 *Soit E un espace de Banach (ou plus généralement un espace métrique complet).*

(i) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (dénombrable) de fermés de E d'intérieur vide alors l'intérieur de l'union est vide :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad F_n \text{ fermé} \quad \text{et} \quad \mathrm{Int}(F_n)=\emptyset \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)=\emptyset. \tag{E.1}$$

De manière équivalente,

(ii) Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (dénombrable) d'ouverts de E d'intérieur dense alors l'intersection des U_n est dense :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad U_n \text{ ouvert} \quad \text{et} \quad \overline{U_n}=E \quad\Longrightarrow\quad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}=E. \tag{E.2}$$

Et on en déduit :

(iii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (dénombrable) de fermés t.q. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n=E$, alors au moins l'un des fermés F_n est d'intérieur non vide :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad F_n \text{ fermé,} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n=E \quad\Longrightarrow\quad \exists n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Int}(F_n)\neq\emptyset. \tag{E.3}$$

(Le théorème de Baire est souvent utilisé avec (iii)).

Preuve. Montrons (ii). Soit $B(x,r)$ une boule ouverte qcq dans E et il s'agit de montrer que $B(x,r)\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n)\neq\emptyset$.

Comme U_0 est ouvert et dense, $U_0\cap B(x,r)$ est un ouvert non vide : donc il existe $x_0\in U_0\cap B(x,r)$ et $r_0>0$ tels que $\overline{B(x_0,r_0)}\subset U_0\cap B(x,r)$. Puis de même $\exists x_1\in U_1\cap(U_0\cap B(x,r))$ et $\exists r_1>0$, $r_1<\frac{r_0}{2}$ tels que $\overline{B(x_1,r_1)}\subset U_1\cap U_0\cap B(x,r)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_\mathbb{N}$ qui est de Cauchy, donc convergente dans E (car E est complet) vers un $y\in\overline{B(x_n,r_n)}$ pour tout n. Et $\overline{B(x_n,r_n)}\subset B(x_{n-1},r_{n-1})\subset B(x,r)$ pour tout n, Donc $y\in B(x,r)$ et par construction $y\in U_n$ pour tout n.

Montrons (ii)$\Rightarrow$(i) (passage au complémentaire). Soit donc $(F_n)_\mathbb{N}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Posant $U_n=E-F_n$, on a $\overline{U_n}=\overline{E-F_n}=E-\mathrm{Int}F_n=E-\emptyset=E$: tous les $(U_n)_\mathbb{N}$ sont denses dans E. Donc $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}=E$ d'après (ii). Et $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}=\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E-F_n}=\overline{E-\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}=E-\mathrm{Int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$, donc $\mathrm{Int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)=\emptyset$, donc (i).

Montrons (i)$\Rightarrow$(ii) (passage au complémentaire). Exercice.

Montrons (iii). Hypothèse : $\forall n$, F_n est fermé et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n=E$. Si de plus : $\forall n$, $\mathrm{Int}(F_n)=\emptyset$, alors d'après (i) : $\mathrm{Int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)=\emptyset$, donc $\mathrm{Int}(E)=\emptyset$. Absurde. Donc $\exists n$, $\mathrm{Int}(F_n)\neq\emptyset$, i.e. (iii). ∴

Exemple E.2 Dans $\mathbb{R}^2$ si F_n est la droite "$y=nx$", alors $\mathrm{Int}(F_n)=\emptyset$ et l'union $\bigcup_\mathbb{N} F_n$ est d'intérieur vide (union dénombrable). ∴

E.2 Théorème de l'application ouverte et condition inf-sup

Soit $(E,||.||_E)$ et $(F,||.||_F)$ deux espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets).

Théorème E.3 *(Théorème de l'application ouverte.) Soit $A\in L(E;F)$ (application linéaire continue). On suppose A injective. Alors :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}A \text{ est fermé dans } F \quad&\Longleftrightarrow\quad \exists\alpha>0,\ \forall x\in E\ :\ \alpha||x||_E\leq||Ax||_F,\\ &\Longleftrightarrow\quad A^{-1}:(\mathrm{Im}A,||.||_F)\to(E,||.||_E) \text{ est continu.}\end{aligned} \tag{E.4}$$

(Si A n'est pas injectif et E est un Hilbert, on considère sa restriction à $(\mathrm{Ker}A)^\perp$.)

En particulier si $A:E\to F$ linéaire bijectif continu satisfait à (E.4) alors A est bijectif bicontinu (lorsque E et F sont des Banach).

En particulier si A est surjectif alors l'image directe $A(B_E(0,1))$ de la boule unité ouverte de E est un ouvert de F :

$$A \text{ surjectif} \quad\Longrightarrow\quad A(B_E(0,1)) \text{ ouvert dans } F, \tag{E.5}$$

et, par linéarité de T, l'image directe de toute boule ouverte de E est un ouvert de F, d'où le nom du théorème.

La démonstration s'appuie sur les lemmes suivants :

Lemme E.4 *Si $T : E \to F$ est linéaire surjectif (avec F Banach), alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F(0,r)$.*

Preuve. On applique le théorème de Baire dans F Banach : on prend $F_n = \overline{(T(B(0,n))}$, on a $\bigcup F_n = F$ car T est surjectif, d'où $\exists n$ t.q. $\mathrm{Int}(\overline{T(B_E(0,n))} \neq \emptyset$, d'où $\mathrm{Int}(\overline{T(B_E(0,1))} \neq \emptyset$ car T linéaire, d'où $\exists y \in F$ et $\exists \varepsilon > 0$ tels que $B_F(y,\varepsilon) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$, d'où $B_F(-y,\varepsilon) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$ car T linéaire, d'où $B_F(0,\varepsilon) \subset \overline{T(B_E(0,1))} + \overline{T(B_E(0,1))} = \overline{T(B_E(0,2))}$ car T linéaire et $B_E(0,1)$ est convexe : d'où $r = \frac{\varepsilon}{2}$ convient. ∎

Lemme E.5 *Si $T : E \to F$ est linéaire continu (avec E Banach) est tel que il existe $r > 0$, $\overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F(0,r)$, alors $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,\frac{r}{2})$.*

Preuve. Soit $y \in B_F(0,\frac{r}{2})$. On va construire une suite (s_n) de $B_E(0,1)$ convergente vers s dans $B_E(0,1)$ telle que et $Ts_n \to y$: si une telle suite existe, alors par continuité de T on a $Ts = y$ et on a bien $y \in T(B_E(0,1))$.

Notons $y_1 = y$. Comme $y \in B_F(0,\frac{r}{2})$ et T est linéaire, l'hypothèse $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$ donne $y_1 \in B_F(0,\frac{r}{2}) \subset \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))}$, donc :

il existe $x_1 \in B_E(0,\frac{1}{2})$ tel que $||y_1 - Tx_1||_F < \frac{r}{2^3}$.

Soit $y_2 = y_1 - Tx_1$. On a $y_2 \in B_F(0,\frac{r}{2^3}) \subset \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2^3}))}$, donc :

il existe $x_2 \in B_E(0,\frac{1}{2^4})$ tel que $||y_2 - Tx_2||_F < \frac{r}{2^4}$.

Soit $y_3 = y_2 - Tx_2 = y_1 - T(x_1 + x_2)$. On a $y_3 \in B_F(0,\frac{r}{2^4})$ puis ....

On construit ainsi les suites (y_n) et (x_n) par récurrence :

$y_{n+1} = y_n - Tx_n = y_1 - T(x_1 + ... + x_n)$ où $||y_n||_F < \frac{1}{2^{n+1}}$ et $||x_n||_E < \frac{1}{2^{n+2}}$.

On pose $s_n = x_1 + ... + x_n$, et par construction la suite (s_n) est de Cauchy dans E car, pour $n > m$, $||s_n - s_m||_E \le \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^{i+2}} \longrightarrow_{m\to\infty} 0$. Donc la suite (s_n) est convergente vers un $s \in E$, car E complet, donc $T(s_n) \to T(s)$ dans F, car T est continu. Donc $y_{n+1} = y_1 - T(s_n) \to y - T(s)$, avec $y_{n+1} \to 0$. Donc $y = Ts$ avec $s \in T(B_E(0,1))$ car $||s||_E \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{3}{4} < 1$. ∎

Donc avec les lemmes E.4 et E.5 : si E et F sont des Banach, si T est linéaire surjectif continu, alors $T(B_E(0,1))$ "dense et d'intérieur vide" est impossible.

Preuve. (**Théorème E.3**.) 1- On suppose que $A : E \to F$ est linéaire, continue, injective, d'image fermée. Donc $(\mathrm{Im}A, ||.||_F)$ est un Banach et $A : E \to \mathrm{Im}A$ linéaire continue bijective (entre deux Banach). On déduit des lemmes E.4 et E.5, $A^{-1}(B_{\mathrm{Im}A}(0,\frac{r}{2})) \subset B_E(0,1)$ et donc $A^{-1}(B_{\mathrm{Im}A}(0,1)) \subset B_E(0,\alpha)$ (linéarité) où $\alpha = \frac{2}{r}$. D'où A^{-1} continue est bornée sur la sphère unité de $(\mathrm{Im}A, ||.||_F)$: on a $||y||_F = 1$ donne $||A^{-1}y||_E \le \frac{1}{\alpha}$, donc pour tout $y \neq 0$: $||A^{-1}\frac{y}{||y||_F}||_E \le \alpha$, et donc pour tout $y \in \mathrm{Im}A$: $||A^{-1}y||_E \le \alpha||y||_F$, i.e. pour tout $x \in E$: $||x||_E \le \frac{1}{\alpha}||Ax||_F$, i.e. (E.4).

2- Réciproquement, si (E.4), alors A est immédiatement injective, puis $A : E \to \mathrm{Im}A$ est inversible d'inverse continu, d'où $\mathrm{Im}(A) = (A^{-1})^{-1}(E)$ est image réciproque d'un fermé donc est fermé. ∎

Corollaire E.6 *Quand A est linéaire continu injectif avec E et F Banach, et si de plus F est un Hilbert, alors (E.4) (image fermée) est équivalente à la condition dite "condition inf-sup" :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{x\in E} \sup_{y\in F} \frac{(Ax,y)_F}{||x||_E ||y||_F} \ge \alpha, \tag{E.6}$$

et on note souvent $a(x,y) = (Ax,y)_F$.

Si F n'est pas un Hilbert (toujours avec F Banach), (E.4) (image fermée) est équivalente à la condition dite "condition inf-sup" :

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{x\in E} \sup_{\ell\in F'} \frac{\langle \ell, Ax\rangle_{F',F}}{||\ell||_{F'} ||x||_E} \ge \alpha. \tag{E.7}$$

(On a noté $F' = L(F;\mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues sur F.)

Preuve. Considérons le cas F Hilbert. Supposons (E.6) qui équivaut à :

$$\exists \alpha > 0, \ \forall x \in E, \ \sup_{y\in F} \frac{(Ax,y)_F}{||y||_F} \ge \alpha ||x||_E,$$

ou encore à :

$$\exists \alpha > 0, \ \forall x \in E, \ \exists y \in F, \ \alpha ||y||_F ||x||_E \le (Ax,y)_F.$$

Comme $(Ax,y)_F \le ||Ax||_F ||y||_F$ (Cauchy–Schwarz), on en déduit (E.4).

Réciproquement, le théorème de Cauchy–Schwarz indique que $||Ax||_F = \sup_{||y||_F=1}(Ax,y)_F$ (le sup étant atteint pour $y = \frac{Ax}{||Ax||_F}$). Donc (E.4) implique :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in E-\{0\},\ \alpha \leq \sup_{||y||_F=1} (A(\frac{x}{||x||_E}), y)_F,$$

i.e. (E.6).

Pour le cas F Banach, (E.7) équivaut à :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ \exists \ell \in F',\ \langle \ell, Ax\rangle_{F',F} \geq \alpha ||\ell||_{F'}||x||_E.$$

Et comme $\langle \ell, Ax\rangle_{F',F} \leq ||\ell||_{F'}||Ax||_F$, on en déduit (E.4).

Puis on dispose du théorème, voir Brézis [4], $||Ax||_F = \sup_{\ell\in F', ||\ell||_{F'}=1}\langle \ell, Ax\rangle$ (corollaire du théorème de Hahn–Banach de prolongement des formes linéaires). D'où on déduit (E.4). ∎

(Si F est un espace de Hilbert, on a le théorème de Riesz qui dit que chaque $\ell \in F'$ peut être représenté par un vecteur $\tau \in F$ tel que $\langle \ell, v\rangle_{F',F} = (\tau, v)_F$ pour tout $v \in F$ avec de plus $||\tau||_F = ||\ell||_{F'}$.)

Remarque E.7 Si A n'est pas injective, toujours avec E et F Banach et A linéaire continue à image fermée :

1- on remplace E par l'espace quotient $E/(\mathrm{Ker}A)$. Et si E est un espace de Hilbert on a $E/(\mathrm{Ker}A)$ isomorphe à $(\mathrm{Ker}A)^\perp$.

2- Ou bien on remplace (E.4) par :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall y \in \mathrm{Im}A,\ \exists x \in E,\ Ax = y \quad \text{t.q.} \quad \alpha ||x||_E \leq ||y||_F. \tag{E.8}$$

(Un opérateur continu est à image fermé ssi il vérifie (E.8).) ∎

E.3 Compacité et théorème de Petree–Tartar

Soit un opérateur $A \in L(E,F)$, et on cherche à résoudre : pour $b \in F$, trouver $x \in E$ tel que $Ax = b$.

$A : E \to \mathrm{Im}A$ est surjectif, mais a priori $\mathrm{Im}A$ n'est pas fermé.

En particulier, pour F Banach, supposant A injectif et $\mathrm{Im}A$ dense dans F, si $\mathrm{Im}A$ n'est pas fermé, si $b \in E - \mathrm{Im}A$, le problème $Ax = b$ n'a pas de solution. Et même si $b \in \mathrm{Im}A$, le problème est a priori mal posé : comme dans ce cas A^{-1} n'est pas continu (théorème E.3 de l'application ouverte), $x = A^{-1}b$ ne dépend pas continûment de b.

Par contre si $\mathrm{Im}A$ est fermé et si $b \in \mathrm{Im}A$, alors on a une solution x, et en plus le problème est bien posé quand A est injectif, i.e. x dépend continûment de b car A^{-1} est continue (théorème de l'application ouverte). Il est donc primordial de vérifier que $\mathrm{Im}A$ est fermé.

Vérifiez que A est fermé, i.e. vérifier (E.4) (ou la condition inf-sup (E.7) ou (E.6)), n'est pas toujours facile directement : voir plus loin le cas de l'opérateur $\vec{\nabla}$.

Il peut être plus facile de vérifier :

$$\exists \gamma > 0,\ \forall x \in E,\ \gamma ||x||_E \leq ||Ax||_F + ||Tx||_G, \tag{E.9}$$

où $T \in L(E;G)$ est un opérateur compact donné : voir plus loin le cas de l'opérateur $\vec{\nabla}$. (Un opérateur compact n'entraine qu'une "petite perturbation".)

Théorème E.8 *(Petree–Tartar.) Soient E, F, G trois espaces de Banach, $A \in L(E;F)$ injectif et $T \in K(E;G)$ (compact). Si on a (E.9) alors on a (E.4), i.e.* $\mathrm{Im}A$ *est fermé. En particulier* $(\mathrm{Im}A, ||.||_F)$ *est complet (est un Banach).*

Preuve. Supposons (E.9). Il s'agit de montrer (E.4). Supposons que (E.4) est faux. Donc il existe une suite (x_n) de E telle que $||x_n||_E = 1$ et $||Ax_n|| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Mais T est compact avec $x_n \in \bar{B}(0,1)$, et donc (Tx_n) est dans le compact $\overline{T(\bar{B}(0,1))}$, et donc admet une sous-suite convergente $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ (car G est un Banach). Donc cette sous-suite est en particulier de Cauchy, et comme :

$$\gamma ||x_{n_i} - x_{n_j}||_E \leq ||Ax_{n_i} - Ax_{n_j}||_F + ||Tx_{n_i} - Tx_{n_j}||_G,$$

on en déduit que (x_{n_k}) est de Cauchy dans E, donc convergente (car E est un Banach). Soit $x \in E$ cette limite : on a $||Ax||_F = 0$ car A est continu et $||Ax_n|| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Donc $Ax = 0$, donc $x = 0$ car A est injectif. Or $||x_n||_E = 1$ la continuité de la norme donne $||x||_E = 1$. C'est absurde, donc une telle suite (x_n) n'existe pas, donc (E.4) est valide. ∎

Cas A non injectif :

Proposition E.9 *Soient E, F, G trois espaces de Banach, $A \in L(E;F)$ (non injectif a priori) et $T \in K(E;G)$ (compact). Si on a (E.9) alors* Ker$A$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie et* ImA *est fermé.*

Preuve. Soit $\overline{B_K(0,1)}$ la boule unité fermé de Ker$A$. Montrons qu'elle est compacte. Comme une boule unité ne peut être compacte dans un Banach que si ce Banach est de dimension finie (voir Brézis [4] p. 92, ou théorème 4.16 page 31 dans le cas E Hilbert), cela prouvera que Ker$A$ est de dimension finie.

L'hypothèse (E.9) donne : dans Ker$A$ on a $\gamma||x||_E \leq ||Tx||_G$. Comme T est compact, si (x_n) est une suite de $B_K(0,1)$, alors (Tx_n) est une suite qui admet une sous-suite convergente, donc de Cauchy. Et $\gamma||x_{n_k} - x_{n_l}||_2 \leq ||Tx_{n_k} - Tx_{n_l}||$ implique alors que la sous suite (x_{n_k}) est de Cauchy dans un Banach donc convergente. Toute suite (x_n) de $\overline{B_K(0,1)}$ admettant une sous-suite convergente, on a $\overline{B_K(0,1)}$ compact. D'où Ker$A$ est de dimension finie.

D'où $A : E/\text{Ker}A \to F$ étant à image fermé (théorème E.8 de Petree–Tartar), et Ker$A$ étant de dimension finie, on a $A : E \to F$ est à image fermé. ∎

E.4 $H^{-1}(\Omega)$ et normes

On se donne Ω un ouvert borné. On disposera donc du théorème de Poincaré :

$$\exists c_\Omega \in \mathbb{R}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ ||v||_{L^2} \leq c_\Omega ||v||_{H_0^1}. \tag{E.10}$$

Et on munit $H_0^1(\Omega)$ de sa norme Hilbertienne $||v||_{H_0^1} = ||\vec{\nabla} v||_{(L^2)^n}$.

On note $H^{-1}(\Omega) = \mathcal{L}(H_0^1(\Omega);\mathbb{R})$ le dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$ (ensemble des formes linéaire continues). On le munit de sa norme :

$$||\ell||_{H^{-1}} = \sup_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\ell(w)|}{||w||_{H_0^1}}.$$

On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual $L^2(\Omega)'$ (l'ensemble des formes linéaires sur $L^2(\Omega)$) : si $v \in L^2(\Omega)$ on pose $\ell_v(w) = (v,w)_{L^2}$ pour tout $w \in L^2(\Omega)$ et on a immédiatement $||\ell_v|| = ||v||_{L^2}$ (application de Cauchy-Schwarz) ; et si $\ell \in L^2(\Omega)'$ (linéaire et continue), avec le théorème de représentation de Riesz il existe $v \in L^2(\Omega)$ tel que $\ell_v(w) = (v,w)_{L^2}$ avec $|\ell|| = ||v||_{L^2}$. Et on note $\ell_v(w) = \langle \ell, v\rangle_{L^{2\prime},L^2} = (v,w)_{L^2}$.

Une base $(\vec{e}_i)$ de $\mathbb{R}^n$ étant supposée, on note $\vec{\nabla} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \vec{e}_i$ au sens des distributions.

Proposition E.10 *Si $v \in L^2(\Omega)$ alors on a $v \in H^{-1}(\Omega)$ et $\vec{\nabla} v \in H^{-1}(\Omega)^n$. Et on a :*

$$||v||_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_\Omega ||v||_{L^2}, \tag{E.11}$$

où c_Ω est la constante de Poincaré, et :

$$||\vec{\nabla} v||_{(H^{-1})^n} \leq ||v||_{L^2}, \tag{E.12}$$

Et donc l'injection $v \in L^2(\Omega) \to v \in H^{-1}(\Omega)$ et l'opérateur $\vec{\nabla} : v \in L^2(\Omega) \to \vec{\nabla} v \in H^{-1}(\Omega)$ sont continus, et on a :

$$\exists c > 0, \ \forall v \in L^2(\Omega) \ : \ ||v||_{H^{-1}} + ||\vec{\nabla} v||_{(H^{-1})^n} \leq c||v||_{L^2(\Omega)}. \tag{E.13}$$

Preuve. Pour $v \in L^2(\Omega)$ on a $v \in L^2(\Omega)'$ (par identification de $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$). Et, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on a $w \in L^2(\Omega)$, et :

$$|v(w)| = |\langle v, w\rangle_{L^{2\prime},L^2}| \leq ||v||_{L^2}||w||_{L^2} \leq c_\Omega ||v||_{L^2}||w||_{H_0^1},$$

grâce à l'inégalité de Poincaré (E.10). D'où $||v||_{H^{-1}} \leq c_\Omega ||v||_{L^2}$.

Soit $v \in L^2(\Omega)$. Alors $\vec{\nabla} v$ est une distribution donnée par définition par, pour tout $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$:

$$\langle \vec{\nabla} v, \vec{\varphi}\rangle = -\int_\Omega v \,\text{div}\vec{\varphi} = -(v, \text{div}\vec{\varphi})_{L^2},$$

où $\text{div}\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ quand $\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \vec{e}_i$. Et :

$$|(v, \text{div}\vec{\varphi})_{L^2}| \leq ||v||_{L^2}||\text{div}\vec{\varphi}||_{L^2} \leq ||v||_{L^2}||\text{grad}\vec{\varphi}||_{(L^2)^{n^2}} \leq ||v||_{L^2}||\vec{\varphi}||_{(H_0^1)^n}.$$

Et $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $H_0^1(\Omega)$, cette l'inégalité est encore vraie pour tout $\vec{\varphi} \in H_0^1(\Omega)^n$, d'où $\vec{\nabla} v$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ de norme $||\vec{\nabla} v||_{(H^{-1})^n} \leq ||v||_{L^2}$. D'où (E.13) avec $c = 1 + c_\Omega$. ∎

Corollaire E.11 *Dans $L^2(\Omega)$ la norme $||.||_E$ définie par $||v||_E = ||v||_{H^{-1}} + ||\vec{\nabla} v||_{(H^{-1})^n}$ est une norme équivalente à la norme $||.||_{L^2}$: on a (E.13) et :*

$$\exists k > 0,\ \forall v \in L^2(\Omega) \quad : \quad ||v||_{L^2(\Omega)} \le k(||v||_{H^{-1}} + ||\vec{\nabla} v||_{(H^{-1})^n}). \tag{E.14}$$

(Et $(L^2(\Omega), ||.||_E)$ est un espace de Banach.)

Preuve. On note E l'espace $L^2(\Omega)$ muni de la norme $||v||_E = ||v||_{H^{-1}} + ||\vec{\nabla} v||_{(H^{-1})^n}$. L'application $J : v \in (L^2(\Omega), ||.||_{L^2(\Omega)}) \to J(v) = v \in (L^2(\Omega), ||.||_E)$ est l'identité algébrique, et donc est surjective. De plus elle est continue d'après (E.13). Donc elle est bicontinue d'après le théorème de l'application ouverte, i.e. J^{-1} est continue, i.e. (E.14). Et donc $(L^2(\Omega), ||.||_E)$ est un Banach. ∎

E.5 Surjectivité de div : $H_0^1(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$ et condition inf-sup

Lorsque E et F sont des Hilbert, pour $T \in L(E;F)$ on a défini l'adjoint $T^* \in L(F;E)$ de T en utilisant le théorème de Riesz. Caractérisation :

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ (T^* y, x)_E = (y, Tx)_F.$$

Dans les espaces de Banach, on ne dispose pas du théorème de Riesz (identification de F avec son dual F').

Définition E.12 Pour E et F Banach et $T \in L(E;F)$, on définit alors le dual de T comme étant l'opérateur $T^* \in L(F';E')$ vérifiant :

$$\forall (x,\ell) \in E \times F' \ : \ \langle T^*\ell, x\rangle_{E',E} = \langle \ell, Tx\rangle_{F',F}. \tag{E.15}$$

Proposition E.13 *Si E et F sont deux Banach, et si $T : E \to F$ est compact, alors $T^* : F' \to E'$ est compact.*

Preuve. On a vu la démonstration dans le cas des Hilbert (où un espace est identifiable à son dual à l'aide du théorème de Riesz). Montrons que c'est encore vrai dans le cas des Banach.

Soit $(\ell_n) \in B_{F'}$ boule unité de F' : il s'agit de montrer que la suite $(T^*\ell_n) \in T^*(B_{F'}) \subset E'$ admet une sous-suite convergente. On pose B_E = boule unité de E, $K = \overline{T(B_E)}$ compact de F par hypothèse, $\varphi_n = \ell_{n|K} : K \to \mathbb{R}$, restriction de ℓ_n à K, i.e. $\varphi_n(y) = \langle \ell_n, y\rangle_{F',F}$ sur K qui vérifie $\varphi_n \in C(K;\mathbb{R})$ (continue sur K), et on pose $A = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. En particulier $A \subset C(K,\mathbb{R})$.

A est borné dans F' (car $A \subset B_{F'}$) et équicontinu (car les ℓ_n sont linéaires continues avec $||\ell_n(y)|| \le ||\ell_n||\,||y||_F \le ||y||_F$) et on peut appliquer le théorème d'Ascoli : A est relativement compact dans $C(K;\mathbb{R})$, et donc de (φ_n) on peut extraire une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans $C(K;\mathbb{R})$, donc de Cauchy. On en déduit que, sachant $T(B_E)$ relativement compact donc borné :

$$\sup_{x \in B_E} |\langle \ell_{n_k} - \ell_{n_l}, Tx\rangle| \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $||T^*\ell_{n_k} - T^*\ell_{n_l}||_{E'} \to 0$. Comme E est un Banach, E' est un Banach, et donc $(T^*(\ell_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans E'. Donc T^* est compact. ∎

Théorème E.14 *(Rellich) L'injection canonique $T : v \in L^2(\Omega) \to v \in H^{-1}(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. On sait que $I_{10} : v \in H_0^1(\Omega) \to v \in L^2(\Omega)$ est une injection compacte, théorème de Rellich 4.52, d'où l'injection duale $I_{10}^* : v \in L^2(\Omega) \to v \in H^{-1}(\Omega)$ est compacte. ∎

Proposition E.15 *L'opérateur $\vec{\nabla} : L^2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ est à image fermée. Son noyau $\mathrm{Ker}(\vec{\nabla})$ est l'ensemble des fonctions constantes.*

Preuve. On applique le corollaire E.9 du théorème de Petree–Tartar : on a (E.14), et on a $A = \vec{\nabla} : L^2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ opérateur borné, et $T : v \in L^2(\Omega) \to v \in H^{-1}(\Omega)$ opérateur borné (voir (E.11)) injectif (identité algébrique) et compact (théorème de Rellich). D'où l'opérateur $A = \vec{\nabla} : L^2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ est à image fermée. D'où $\vec{\nabla} : L^2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ est à image fermée. ∎

Proposition E.16 *On utilise une base $(\vec{e}_i)$ dans $\mathbb{R}^n$. Le dual de l'opérateur :*

$$-\vec{\nabla} : \begin{cases} L^2(\Omega) & \to (H^{-1}(\Omega))^n, \\ v & \mapsto -\vec{\nabla} v = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \vec{e}_i, \end{cases} \tag{E.16}$$

est l'opérateur :

$$\mathrm{div} : \begin{cases} (H_0^1(\Omega))^n & \to L^2(\Omega), \\ \vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \vec{e}_i & \to \mathrm{div}\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}. \end{cases} \tag{E.17}$$

Preuve. Avec (E.15) et $T = \vec{\nabla} : E = L^2(\Omega) \to F = (H^{-1}(\Omega))^n$; on a $F' = (H_0^1(\Omega))^n$, $E = L^2(\Omega)' \simeq L^2(\Omega)$, et $T^* = \vec{\nabla}^* : (H_0^1(\Omega))^n \to L^2(\Omega)'$ est défini par :

$$\forall (\vec{\varphi}, v) \in (H_0^1(\Omega))^n \times L^2(\Omega), \quad \langle \vec{\nabla}^* \vec{\varphi}, v \rangle_{L^{2\prime}, L^2} = \langle \vec{\nabla} v, \vec{\varphi} \rangle_{(H^{-1})^n, (H_0^1)^n}.$$

Et pour $v \in L^2(\Omega)$ on a $\langle \vec{\nabla} v, \vec{\varphi} \rangle_{(H^{-1})^n, (H_0^1)^n} = -\int_\Omega v \, \mathrm{div}\vec{\varphi} = -\langle v, \mathrm{div}\vec{\varphi} \rangle_{L^2, L^2}$ pour tout $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$, donc par densité pour tout $\vec{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^n$, d'où div est le dual de $\vec{\nabla}$. ▪

Corollaire E.17 *L'opérateur* div : $(H_0^1(\Omega))^n \to L^2(\Omega)$ *est à image fermée, surjectif dans l'espace quotient :*

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \{p \in L^2(\Omega) \text{ définie à une constante près}\}, \quad ||p||_{L^2/\mathbb{R}} = \inf_{c \in \mathbb{R}} ||p + c||_{L^2}. \tag{E.18}$$

Autrement dit : div : $(H_0^1(\Omega))^n \to L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *est surjectif. Et notant :*

$$L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v \, d\Omega = 0\}, \qquad ||p||_{L_0^2(\Omega)} = ||p||_{L^2/\mathbb{R}} \tag{E.19}$$

on a $L_0^2(\Omega) \simeq L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, *et* div : $(H_0^1(\Omega))^n \to L_0^2(\Omega)$ *est surjectif.*

Preuve. C'est (au signe près) le dual du gradient. ▪

Corollaire E.18 *Les opérateurs* $\vec{\nabla}$ *et* div *étant continus et à images fermées, et* $\vec{\nabla}$ *étant injectif sur* $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, *on a la condition inf-sup :*

$$\exists k > 0, \quad \inf_{p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \sup_{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^n} \frac{(\mathrm{div}\vec{v}, p)_{L^2}}{||\vec{v}||_{(H_0^1)^n} ||p||_{L^2/\mathbb{R}}} \geq k, \tag{E.20}$$

i.e. :

$$\exists k > 0, \quad \forall p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \quad \exists \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^n, \quad (\mathrm{div}\vec{v}, p)_{L^2} \geq k ||\vec{v}||_{(H_0^1)^n} ||p||_{L^2/\mathbb{R}}. \tag{E.21}$$

On note :

$$V = \mathrm{Ker}(\mathrm{div}) = \{\vec{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^n : \mathrm{div}\vec{\varphi} = 0\}. \tag{E.22}$$

Théorème E.19 *(Théorème de De Rham.) Si* $\vec{\ell} \in (H^{-1}(\Omega))^n$ *vérifie* $\langle \vec{\ell}, \vec{\varphi} \rangle = 0$ *pour tout* $\vec{\varphi} \in V$ *(à divergence nulle), alors il existe* $p \in L^2(\Omega)$ *tel que* $\vec{\ell} = \vec{\nabla} p$.

Preuve. Si F est un Banach, et si $V \subset F$, on note $V^o = \{\ell \in F' : \langle \ell, x \rangle_{F,F'} = 0, \ \forall x \in V\}$.

(Si F est un Hilbert, on peut identifier F' à F à l'aide du théorème de Riesz et on note $V^\perp = \{z \in F : (z, x)_F = 0, \ \forall x \in V\}$ au lieu de V^o.)

Si $A : E \to F$, alors $A^* : F' \to E'$, et on a $\overline{\mathrm{Im}A} = (\mathrm{Ker}A^*)^o$. Et effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}A^* &= \{\ell \in F' : A^*\ell = 0\} = \{\ell \in F' : \langle A^*\ell, x \rangle_{E',E} = 0, \ \forall x \in E\} \\ &= \{\ell \in F' : \langle \ell, Ax \rangle_{F',F} = 0, \ \forall x \in E\} = \{\ell \in F' : \langle \ell, y \rangle_{F',F} = 0, \ \forall y \in \mathrm{Im}A\} = (\mathrm{Im}A)^o. \end{aligned}$$

(Si F est un Hilbert, on peut identifier F' à F et on a $\overline{\mathrm{Im}A} = (\mathrm{Ker}A^T)^\perp$.)

Ici $\vec{\nabla}$ est à image fermée et a pour dual $-$div, et donc $\mathrm{Im}(\vec{\nabla}) = (\mathrm{Ker}(\mathrm{div}))^o$ avec $(\mathrm{Ker}(\mathrm{div}))^o = \{\vec{\ell} \in (H^{-1}(\Omega))^n : \langle \vec{\ell}, \vec{\varphi} \rangle = 0, \ \forall \vec{\varphi} \in V\}$. Et l'hypothèse est $\vec{\ell} \in (\mathrm{Ker}(\mathrm{div}))^o$. D'où $\ell \in \mathrm{Im}(\vec{\nabla})$. ▪

Corollaire E.20 *Pour $\vec{f} \in L^2(\Omega)^n$, une fonction $\vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^n$ est solution de* $\begin{cases} -\Delta\vec{u} = \vec{f}, \\ \text{div}\vec{u} = 0, \end{cases}$ *ssi il existe $p \in L^2(\Omega)$ tel que :*

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{\nabla} p = \vec{f}, \\ \text{div}\vec{u} = 0, \end{cases}$$

où p est unique à une constante près (unique dans $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$).

Preuve. On a $\vec{\ell} = -\Delta\vec{u} - \vec{f}$ qui s'annule sur V, et on applique le théorème E.19 (De Rham). ∎

E.6 Surjectivité de div : $H^{\text{div}}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ et condition inf-sup

On note :

$$H^{\text{div}}(\Omega) = \{\vec{v} \in L^2(\Omega)^n : \text{div}\vec{v} \in L^2(\Omega)\}, \tag{E.23}$$

qu'on munit du produit scalaire :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{H^{\text{div}}} = (\vec{u}, \vec{v})_{L^2} + (\text{div}\vec{u}, \text{div}\vec{v})_{L^2}, \tag{E.24}$$

qui en fait un Hilbert. Norme associée $||\vec{v}||_{H^{\text{div}}} = ((\vec{v}, \vec{v})_{H^{\text{div}}})^{\frac{1}{2}}$.

On généralise la définition (E.17) à :

$$\text{div} : \begin{cases} H^{\text{div}}(\Omega) & \to L^2(\Omega) \\ \vec{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i & \to \text{div}\vec{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \end{cases} \tag{E.25}$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $p \in H_0^1(\Omega)$ la solution de $-\Delta p = f$ cf. Lax–Milgram. On pose $\vec{v} = \vec{\nabla} p \in L^2(\Omega)$, et on a $\text{div}\vec{v} = \Delta p = f$ donc div : $H^{\text{div}}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est surjectif. Donc à image fermé dans $L^2(\Omega)$. Et div : $H^{\text{div}}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continu : $||\text{div}\vec{v}||_{L^2} \le C||v||_{H^{\text{div}}}$ avec $C = 1$.

Donc, condition inf-sup :

$$\exists k > 0, \quad \inf_{p \in L^2(\Omega)} \sup_{\vec{v} \in H^{\text{div}}} \frac{(\text{div}\vec{v}, p)_{L^2}}{||\vec{v}||_{H^{\text{div}}} ||p||_{L^2}} \ge k, \tag{E.26}$$

Références

[1] Abramowitz M., Stegun I. : *Handbook of Mathematical Functions.* Dover 1972.

[2] Allaire G. : *Analyse numérique et optimisation.* Les éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[3] Aubin J.-P. : *Initiation à l'analyse appliquée.* Masson 1994.

[4] Brézis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson 1983.

[5] Choquet G. : Cours de topologie, Masson 1992.

[6] Fortin A. : *Analyse numérique pour ingénieurs.* Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 1995.

[7] Guichardet A. : *Intégration. Analyse hilbertienne.* Cours de l'Ecole Polytechnique, édition 1983.

[8] Hirsch F., Lacombe G. : *Éléments d'analyse fonctionnelle.* Cours et exercices. Masson, 1997.

[9] Johnson C. : *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method.* Cambridge University Press (1987)

[10] Nédélec J.C. : *Éléments finis*, cours de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

[11] Raviart P.A., Thomas J.M. : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson 1983.

[12] Riesz F., Nagy S. : *Leçons d'analyse fonctionnelle.* 3ème édition 1955, reprint, éditions Jacques Gabay.

[13] Rocard Y. : *Théorie des oscillateurs.* Éditions de la revue scientifique, 1941.

[14] Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E. : *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation.* Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson 1983.

[15] Strang G. : *Introduction to Applied Mathematics.* Wellesley–Cambridge Press, 1986.

[16] Strang G., Fix J. F. : *An Analysis of the Finite Element Method.* Prentice-Hall (Series in Automatic Computation) 1973.