Notes de cours de l'ISIMA, première année
http://www.isima.fr/~leborgne

Bases de logique, quantificateurs, limites

Gilles Leborgne

19 septembre 2016

Table des matières

1 Logique

C'est par oral ou par écrit qu'on communique : on va se servir d'un vocabulaire de base pour formuler les résultats mathématiques.

En particulier, on suppose que la conjonction de coordination "et" et les termes "définition", "vrai", "faux" sont admis par tous, ainsi que "si et seulement si" noté "ssi".

1.1 Connecteurs logiques et, ou, xor

Définition 1.1 Une forme propositionnelle est une suite cohérente de chiffres ou de lettres.

Exemple : [bonne journée], [il fait beau], [3+5=8], [3+5=7], ...

Définition 1.2 Principe de la double valeur. Une affirmation A, encore appelée assertion, est une forme propositionnelle qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs booléennes [vrai] ou [faux].

I.e. si on note ν la valeur d'une affirmation A, on a soit $\nu(A) = \text{vrai}$, soit $\nu(A) = \text{faux}$.

Si $\nu(A) = \text{vrai}$ on note $[A = \text{vrai}]$, et si $\nu(A) = \text{faux}$ on note $[A = \text{faux}]$.

Exemple : $[(3+5=8) = \text{vrai}]$, i.e. l'affirmation $(3+5=8)$ est vraie. $[(3+5=7) = \text{faux}]$, i.e. l'affirmation $(3+5=7)$ est fausse.

Définition 1.3 Une proposition est une affirmation qui est vraie.

Une proposition se démontre à l'aide d'une démonstration (une preuve).

Vocabulaire mathématique usuel : un théorème une proposition "jugée importante" (notion quelque peu floue...), un lemme est une proposition qui permet de démontrer un théorème, un corollaire est une proposition qui se déduit d'un théorème.

Définition 1.4 Soit une affirmation A. On appelle négation de A, notée non$A$ ou $\neg A$, l'affirmation contraire :

$$[\text{non}A = \text{vrai}] \quad \text{ssi} \quad [A = \text{faux}], \qquad \text{et} \qquad [\text{non}A = \text{faux}] \quad \text{ssi} \quad [A = \text{vrai}].$$

Exercice 1.5 Montrer que [non(non$A$)] ssi [A].

Réponse. Premier cas : [non(non$A$)=vrai] ssi [non$A$=faux] ssi [A=vrai].
Deuxième cas : [non(non$A$)=faux] ssi [non$A$=vrai] ssi [A=faux]. ▪

Définition 1.6 Soit deux affirmations A et B. Un connecteur logique "c.l." de ces deux affirmations est une relation entre A et B qui est une affirmation. Donc : soit [(A c.l. B)=vrai], soit [(A c.l. B)=faux].

Définition 1.7 Le connecteur logique "et" = "and" = "$\wedge$" de conjonction est défini par :

$$[(A \text{ et } B) = \text{vrai}] \quad \text{ssi} \quad [A = \text{vrai}] \text{ et } [B = \text{vrai}],$$
$$\text{ie. ssi} \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } [A = \text{faux}] \text{ et } [B = \text{faux}], \\ \text{soit } [A = \text{faux}] \text{ et } [B = \text{vrai}], \\ \text{soit } [A = \text{vrai}] \text{ et } [B = \text{faux}]. \end{array} \right\}$$

On a immédiatement [(A et B) = vrai] ssi [(B et A) = vrai], et [(A et non$A$ = faux].

Définition 1.8 Le connecteur logique "ou" = "or" = "$\vee$" de disjonction non exclusif est défini par :

$$[(A \text{ ou } B) = \text{vrai}] \quad \text{ssi} \quad \text{au moins l'une des deux affirmations } [A\text{=vrai}], [B\text{=vrai}] \text{ est vraie;}$$
$$\text{ie. ssi} \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } [A = \text{vrai}] \text{ et } [B = \text{vrai}], \\ \text{soit } [A = \text{vrai}] \text{ et } [B = \text{faux}], \\ \text{soit } [A = \text{faux}] \text{ et } [B = \text{vrai}]. \end{array} \right\}$$

On a immédiatement [(A ou B) = vrai] ssi [(B ou A) = vrai], et [(A ou non A) = vrai].

Proposition 1.9 *On peut définir [(A ou B)=vrai] par sa négation à l'aide du seul connecteur logique "et" :*

$$[(A \text{ ou } B)\text{=faux}] \quad \text{ssi} \quad [(\text{non}A \text{ et non}B)\text{=vrai}],$$

soit (négation) :

$$[(A \text{ ou } B)\text{=vrai}] \quad \text{ssi} \quad [(\text{non}A \text{ et non}B)\text{=faux}].$$

Preuve. [(A ou B)=faux] ssi on a le seul cas non traité de la définition 1.8, i.e. ssi [[A=faux] et [B=faux]], i.e. ssi [[non$A$=vrai] et [non$B$=vrai]], i.e. ssi [(non$A$ et non$B$)=vrai]. ▪

Exercice 1.10 Montrer que [(A et B)=faux] ssi [(non$A$ ou non$B$)=vrai].

Réponse. On se sert de la proposition 1.9. On a : [(non$A$ ou non$B$)=vrai] ssi [(non(non$A$) et non(non$B$))=faux], i.e. ssi [(A et B)=faux]. ▪

Exercice 1.11 Montrer que [(A et B)=vrai] ssi [(non$A$ ou non$B$))=faux].

Réponse. Négation de l'exercice précédent. ▪

Exercice 1.12 Montrer que [(A et B)=vrai] ssi [non(non$A$ ou non$B$)=vrai].

Réponse. C'est l'exercice précédent. ▪

Exercice 1.13 Montrez que
1- [(A et A)=vrai] ssi [A=vrai], et 2- [(A et A)=faux] ssi [A=faux],
3- [(A ou A)=vrai] ssi [A=vrai], et 4- [(A ou A)=faux] ssi [A=faux].

Réponse. 1- [(A et A)=vrai] ssi [A=vrai] et [A=vrai], i.e. ssi [A=vrai]. Et 2- est le contraire.
3- [(A ou A)=vrai] ssi [A=vrai] ou [A=vrai], i.e. ssi [A=vrai]. Et 4- est le contraire. ▪

Définition 1.14 (Le "ou exclusif"="xor".)
[(A xor B)=vrai] ssi une et une seule des deux affirmations A,B est vraie.

I.e. [(A xor B)=vrai] ssi on est dans l'un des deux cas suivants :
1- [[A=vrai] et [B=faux]],
2- [[A=faux] et [B=vrai]].

Exercice 1.15 Montrer que [(A xor B)=vrai] ssi [[(A ou B)=vrai] et [(non$A$ ou non$B$)=vrai]].

Réponse. [(A ou B)=vrai] exclu le cas [A=faux et B=faux], et [(non$A$ ou non$B$)=vrai]] exclu le cas [A=vrai et B=vrai]. Il reste donc bien les deux cas du xor.

Exercice 1.16 Montrer qu'on a toujours [(A xor non$A$)=vrai].

Réponse. [(A xor non$A$)=vrai] ssi on est dans l'un des ceux cas 1-[[A=vrai] et [non$A$=faux]], 2- [[A=faux] et [non$A$=vrai]], i.e. ssi on est dans l'un des ceux cas 1- [A=vrai], soit 2- [A=faux]. Et le principe de la double valeur dit qu'on est toujours dans l'un de ces deux cas.

1.2 Implications ⇒ et ⇐

Définition 1.17 (Implication ⇒.)

On dit que "A implique B" et on note $[A \Rightarrow B]$ ssi [(non$A$ ou B)=vrai] :

$$[A \Rightarrow B] \quad \text{ssi} \quad [(\text{non}A \text{ ou } B) = \text{vrai}],$$
$$\text{ie. ssi} \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } [A = \text{faux}] \text{ et } [B = \text{vrai}], \\ \text{soit } [A = \text{faux}] \text{ et } [B = \text{faux}], \\ \text{soit } [A = \text{vrai}] \text{ et } [B = \text{vrai}]. \end{array} \right\}$$

Et on dit "si A alors B".

En particulier si [A] est faux, alors l'implication est toujours vraie quelque soit B.

On écrit aussi $[B \Leftarrow A]$ (i.e. B est impliqué par A).

Exercice 1.18 Montrer que $[A \Rightarrow B]$ ssi [(A et non$B$)=faux].

Réponse. On applique la proposition 1.9 : [(A et non$B$)=faux] ssi [(non A ou B)=vrai].

Proposition 1.19 *Le contraire de $[A \Rightarrow B]$ est [A et non$B$] :*

$$\text{non}[A \Rightarrow B] \quad \text{ssi} \quad [(A \text{ et non}B)=\text{vrai}].$$

Preuve. non$[A \Rightarrow B]$ ssi [(non$A$ ou B)=faux], i.e. ssi [(A et non$B$)=vrai], cf proposition 1.9.

Exercice 1.20 Montrer que dans tous les cas : $[A \Rightarrow A]$, et que l'affirmation $[A \Rightarrow \text{non}A]$ est toujours fausse si [A=vrai], et qu'elle est toujours vraie si [A=faux].

Réponse. $[A \Rightarrow A]$ vérifie le cas 1- de la définition 1.17.

Et $[A \Rightarrow \text{non}A]$ ssi [(non$A$ ou non$A$)=vrai], i.e. ssi [non$A$=vrai], i.e. ssi [A=faux].

Exercice 1.21 Montrer que la négation de (le contraire de) $[A \Rightarrow B]$ est : [(A et non$B$)=vrai].

Réponse. "$A \Rightarrow B$" ssi [(non$A$ ou B)=vrai]. Le contraire est [(non$A$ ou B)=faux], i.e. [(A et non$B$)=vrai], cf proposition 1.9.

Exercice 1.22 (Transitivité) Montrer : si A, B et C sont trois affirmations, alors :

$$([A \Rightarrow B] \text{ et } [B \Rightarrow C]) \quad \Rightarrow \quad [A \Rightarrow C].$$

Réponse. Si [A=faux] alors A implque n'importe quoi, et si [A=vrai] alors [B=vrai], d'où [C=vrai].

Exercice 1.23 (Disjonction des cas.) Soient A, B et C des assertions. On fait les trois hypothèses suivantes : 1- [(A ou B)=vrai], 2- $[A \Rightarrow C]$ et 3- $[B \Rightarrow C]$. Montrer que [C=vrai].

Réponse. Si [A=vrai] alors $[A \Rightarrow C]$ montre que [C=vrai] (l'hypothèse sur B est inutile car si [B=vrai] alors [C=vrai] comme on le savait déjà, et si [B=faux] alors $[B \Rightarrow C]$ ne donne aucune information sur C).

Si [A=faux] alors [B=vrai] et $[B \Rightarrow C]$ implique [C=vrai] (noter que $[A \Rightarrow C]$ ne donne alors aucune information sur C).

Exemple : soient A=[($\pi+e$) est transcendant], B=[πe est transcendant]. On ne sait pas prouver que [A=vrai] ou que [B=vrai], mais on sait prouver que [(A ou B)=vrai]. Si C est telle que les deux conditions $[A \Rightarrow C]$ et $[B \Rightarrow C]$ sont réunies, alors on sait que [C=vrai].

1.3 Raisonnement par l'absurde

Soit A et B deux affirmations. On a :

Proposition 1.24

$$[A \Rightarrow B] \quad \text{ssi} \quad [\text{non}B \Rightarrow \text{non } A].$$

Preuve. $[A \Rightarrow B]$ ssi [(non$A$ ou B)=vrai], ssi [non(non$B$) ou non$A$)=vrai], ssi [non$B \Rightarrow$ non$A$].

Démonstration à l'aide de tous les cas possibles, cf. définition 1.17 : [non$B \Rightarrow$ non$A$] ssi on est dans l'un des trois cas : 1,2- [non$B$=faux] et [non$A$=quelconque], i.e. [B=vrai] et [A=qcq], 3- [non$B$=vrai] et [non$A$=vrai], i.e. [B=faux] et [A=faux]. ▪

Remarque 1.25 Autre démonstration, partant de $[A \Rightarrow B]$:

1- Si [A=vrai] alors $[A \Rightarrow B]$ impose [B=vrai], d'où [(non$B$)=faux], d'où [non$B \Rightarrow$ non$A$].

2- Si [A=faux] alors $[A \Rightarrow B]$ est toujours vrai. Si [B=vrai] alors [non$B$=faux] et on a bien [non$B \Rightarrow$ non$A$], et si [B=faux] alors [non$B$=vrai] et comme [non$A$=vrai] on a bien [non$B \Rightarrow$ non$A$].

Réciproquement, supposons [non$B \Rightarrow$ non$A$] : on vient de voir que cela impliquait [non(non$A$) $\Rightarrow$ non(non$B$)], i.e. $[A \Rightarrow B]$ ▪

Définition 1.26 But : on sait que [A=vrai] et on veut prouver [B=vrai]. On dit qu'on raisonne par l'absurde lorsque :

- on suppose [B=faux],
- et on prouve alors que nécessairement [A=faux].

On aura donc en même temps [A=vrai] et [A=faux] : c'est absurde (i.e. c'est impossible).

L'hypothèse [B=faux] est donc fausse, et donc [B=vrai].

Exercice 1.27 Montrer que le réel positif $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Réponse. Supposons : $\sqrt{2}$ est rationnel. Donc il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.q. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Donc $p^2 = 2q^2$. Et la décomposition en facteurs premiers de $p = 2^m r$ et de $q = 2^n s$, où $r, s \in \mathbb{N}$ et r, s non divisibles par 2, donne $2^{2m+1} r^2 = 2^{2n} s^2$, donc $2m + 1 = 2n$, donc un nombre impair est égal à un nombre pair : c'est impossible (on dit c'est absurde). Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. ▪

Proposition 1.28 et définition. *On a :*

$$\text{Si } [\text{non}A \Rightarrow B] \text{ et } [\text{non}A \Rightarrow \text{non}B] \quad \text{alors} \quad [A\text{=vrai}].$$

Et on dit également qu'on fait une démonstration par l'absurde.

Preuve. En effet, [non$A$=faux] est la seule possibilité pouvant satisfaire aux deux hypothèses. ▪

1.4 Equivalence $\Leftrightarrow$

Définition 1.29 (Équivalence $\Leftrightarrow$.) On dit "A équivaut à B", noté $[A \Leftrightarrow B]$, ssi $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$:

$$[A \Leftrightarrow B] \quad \text{ssi} \quad [(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)].$$

Donc "$A \Leftrightarrow B$" ssi on est dans l'un des deux cas suivants : $\left\{ \begin{array}{l} [A = \text{vrai et } B = \text{vrai}], \\ [A = \text{faux et } B = \text{faux}]. \end{array} \right\}$

Exercice 1.30 Montrer que "$A \Leftrightarrow B$" peut être défini à l'aide du "xor" :

$$\text{“}A \Leftrightarrow B\text{”} \quad \text{ssi} \quad [(A \text{ xor non}B)\text{=vrai}] \quad \text{ssi} \quad [(\text{non}A \text{ xor } B)\text{=vrai}].$$

▪

Proposition 1.31

$$[A \Leftrightarrow B] \quad \text{ssi} \quad [\text{non}A \Leftrightarrow \text{non}B].$$

Preuve. $A \Leftrightarrow B$ ssi 1- ([(A=vrai) et (B=vrai)] ou 2- [(A=faux) et (B=faux)]).
Et [non$A$]$\Leftrightarrow$[non$B$] ssi 1- ([(non$A$=vrai) et (non$B$=vrai)] ou 2- [(non$A$=faux) et (non$B$=faux)]).

(Noter qu'en termes de "xor", on a directement (non$A \Leftrightarrow$ non$B$) ssi (non$A$ xor non(non$B$)) = vrai, ssi (non$A$ xor B) = vrai, ssi $A \Leftrightarrow B$.) ▪

Remarque 1.32 On utilisera indifféremment les expressions "ssi" et "$\Leftrightarrow$". ▪

2 Ensembles et quantificateurs

2.1 Ensembles

La définition d'un ensemble est donnée d'un point de vue intuitif (sinon voir la théorie axiomatique des ensembles), dans le but d'introduire les quantificateurs.

Définition 2.1 Un ensemble E est une collection d'objets x issus de notre perception ou de notre pensée, tous déterminés et distincts (voir Atlas des Mathématiques).

Dans le dictionnaire Larousse : Ensemble = Réunion d'éléments formant un tout que l'on considère en lui-même.

Un élément x de E est noté $x \in E$, et on dit x appartient à E.
Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

Définition 2.2 Un sous-ensemble D de E, noté $D \subset E$, est un ensemble constitué d'éléments de E. (On a toujours $E \subset E$.)

Un sous-ensemble peut être caractérisé par une affirmation : $D \subset E$ ssi "propriété".

Exemple 2.3 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ donné par : $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{R}$ et $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ x = \dfrac{p}{q}]$. ▪

2.2 Quantificateur universel $\forall$

Définition 2.4 Quantificateur universel $\forall$ ("pour tout" ou "quelque soit" ou "quelques soient"). Soit E un ensemble et A une affirmation. On note :

$$\begin{aligned} (\forall x \in E,\ A(x)) \quad & \text{ssi} \quad \text{si } x \in E \ \text{ alors } \ A(x){=}\text{vrai} \\ & \text{se lit} \quad \text{“pour tout } x \in E \text{ on a } A(x)\text{”}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemple 2.5 Soit $E = \mathbb{N}$, et soit $A(x)$ l'affirmation "x est un réel". Alors, $\forall x \in \mathbb{N},\ A(x)$. ▪

2.3 Quantificateur existentiel $\exists$

La négation de (2.1) donne, cf. proposition 1.19 :

$$\begin{aligned} \text{non}(\forall x \in E,\ A(x)) \quad & \text{ssi} \quad \text{non(si } x \in E \ \text{ alors } \ \text{A(x) = vrai)} \\ & \text{se lit} \quad \text{“il existe } x \in E \ \text{ t.q. nonA(x)”} \\ & \text{s'écrit} \quad \exists x \in E, \text{nonA(x)}. \end{aligned}$$

Définition 2.6 Le quantificateur $\exists$ est défini par :

$$\begin{aligned} \exists x \in E,\ A(x) \quad & \text{ssi} \quad \text{non}(\forall x \in E,\ \text{non}A(x)) \\ & \text{se lit} \quad \text{“il existe } x \in E \text{ tel que } A(x)\text{”}, \end{aligned}$$

ou encore il existe (au moins) un point $x \in E$ tel que $A(x)$.

Exemple 2.7 $E = \mathbb{R}$ et $A(x)$ l'affirmation "x est un rationnel". On a : $\exists x \in \mathbb{R},\ A(x)$. ▪

On note (le contraire) :

$$\text{non}(\exists x \in E,\ A(x)) \quad \text{ssi} \quad \text{“}\ \nexists x \in E,\ A(x)''$$

et on dit "il n'existe pas $x \in E$ tel que $A(x)$". Donc :

$$\nexists x \in E,\ A(x) \quad \text{ssi} \quad \forall x \in E,\ \text{non}A(x)$$

Exemple 2.8 $E = \mathbb{Q}$ et $A(x)$ l'affirmation "x est un irrationnel", i.e. "$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$".

Alors on a $\nexists x \in \mathbb{Q},\ A(x)$ (il n'existe pas de rationnel x vérifiant $A(x)$), car l'affirmation "$\exists x \in \mathbb{Q},\ A(x)$" est fausse. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{Q},\ \text{non}A(x)$ ▪

Proposition 2.9 *Soit deux ensembles E et F, soit $(x,y) \in E \times F$, et soit une affirmation $A(x,y)$ qui dépend de (x,y). Alors :*

$$\mathrm{non}(\forall x,\ (\exists y,\ A(x,y))) \quad \text{ssi} \quad \exists x,\ (\forall y,\ \mathrm{non}A(x,y)),$$

soit :

$$\mathrm{non}(\exists x,\ (\forall y,\ A(x,y))) \quad \text{ssi} \quad \forall x,\ (\exists y,\ \mathrm{non}A(x,y)).$$

Preuve. Soit $B(x)$ l'affirmation $(\exists y,\ A(x,y))$. Alors non$B(x)$ est l'affirmation $(\forall y,\ \mathrm{non}A(x,y))$, cf. définition 2.6. Et le contraire de "$\forall x,\ B(x)$" est "$\exists x,\ \mathrm{non}B(x)$", cf. définition 2.6. Donc : le contraire de "$\forall x,\ (\exists y,\ A(x,y))$" est : "$\exists x,\ (\forall y,\ \mathrm{non}A(x,y))$". ▪

Notation. On note (attention à l'ordre des quantificateurs !) :

$$\text{“}\forall x,\ (\exists y,\ A(x,y))\text{” comme : “}\forall x,\ \exists y,\ A(x,y)\text{”.}$$

Et :

$$\text{“}\exists x,\ (\forall y,\ B(x,y))\text{” comme : “}\exists x,\ \forall y,\ B(x,y)\text{”.}$$

Exercice 2.10 1- Soit x fixé, et soit $B(x)$ la propriété

$$B(x) = (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y,\ A(x,y)).$$

Montrer que le contraire de la propriété $B(x)$ est :

$$\mathrm{non}B(x) = (\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists y,\ \mathrm{non}A(x,y)).$$

2- Soit E un espace métrique muni d'une distance $d_E(\cdot,\cdot)$, soit F un espace métrique muni d'une distance $d_F(\cdot,\cdot)$, et soit $f : E \to F$. Montrer que le contraire de :

$$A(x,y) = [d_E(x,y) < \eta \ \Rightarrow\ d_F(f(x),f(y)) < \varepsilon]$$

est

$$\mathrm{non}A(x,y) = [d_E(x,y) < \eta \text{ et } d_F(f(x),f(y)) \geq \varepsilon].$$

3- La propriété $f : E \to F$ continue en un point $x \in E$ s'écrivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E,\ (d_E(x,y) < \eta \ \Rightarrow\ d_F(f(x),f(y)) < \varepsilon),$$

montrer que f discontinue (i.e. non continue) en un point x s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in E,\ (d_E(x,y) < \eta \text{ et } d_F(f(x),f(y)) \geq \varepsilon).$$

Réponse. 1- $\mathrm{non}(\forall \varepsilon > 0,\ (\exists \eta > 0,\ (\forall y,\ \mathrm{non}A(x,y))))$,
ssi $\exists \varepsilon > 0,\ \mathrm{non}(\exists \eta > 0,\ (\forall y,\ \mathrm{non}A(x,y))$,
ssi $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \mathrm{non}(\forall y,\ \mathrm{non}A(x,y)$,
ssi $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists y,\ A(x,y)$.

2- C'est la proposition 1.19.

3- On applique 1- et 2-. ▪

2.4 Complémentaire, union, intersection

Soit E un ensemble.

Définition 2.11 Soit $D \subset E$ un sous-ensemble de E. L'ensemble $\{x \in E : x \notin D\}$ de E est appelé le complémentaire de D dans E, et noté D^C, ou $E - D$ ou $E \setminus D$ ou $\complement_E D$.

Définition 2.12 L'ensemble $E - E$ est noté $\emptyset$ et appelé ensemble vide.

Proposition 2.13 *L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun élément. Et donc :*

$$(\exists x \in \emptyset,\ A(x)) = \text{faux}, \qquad \textit{ou encore} \qquad (\forall x \in \emptyset,\ A(x)) = \text{vrai}.$$

De plus $\emptyset$ est unique, indépendant de l'ensemble E, et est contenu dans tout ensemble E.

Preuve. L'hypothèse $\exists x \in E - E$ veut dire il existe $x \in E$ tel que $x \notin E$, ce qui est impossible (absurde). Donc $E - E$ ne contient aucun élément. Donc "$\exists x \in E - E,\ A(x)$" est faux (impossible) quelle que soit A. Et non$A$ est une affirmation, donc "$\exists x \in E - E,\ \mathrm{non}A(x)$" est faux. Donc sa négation "$\forall x \in E - E,\ A(x)$" est vrai, cf. définition 2.6.

Puis, si E_1 et E_2 sont deux ensembles vides. L'implication "$x \in E_1 \Rightarrow x \in E_2$" est vraie car $x \in E_1$ est faux (E_1 est un ensemble vide). Donc $E_1 \subset E_2$. De même $E_2 \subset E_1$, d'où $E_1 = E_2$, d'où l'unicité de $\emptyset$. ▪

Définition 2.14 Si E et F sont deux ensembles, on appelle réunion (ou union) de E et F l'ensemble $E \cup F$ défini par :

$$E \cup F = \{x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Noter qu'on a immédiatement $E \cup F = F \cup E$, $E \cup E = E$ et $E \cup \emptyset = E$, et que si G est un troisième ensemble, alors $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ (associativité) qu'on note simplement $E \cup F \cup G$.

Définition 2.15 Si E et F sont deux ensembles, on appelle intersection de E et F l'ensemble $E \cap F$ défini par :

$$E \cap F = \{x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Noter qu'on a immédiatement $E \cap F = F \cap E$, $E \cap E = E$ et $E \cap \emptyset = \emptyset$, et que si G est un troisième ensemble, alors $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ (associativité) qu'on note simplement $E \cap F \cap G$.

Définition 2.16 Si E et F sont deux ensembles, on appelle différence de E et F (dans cet ordre) l'ensemble :

$$E - F = \{x \in E : x \notin F\}.$$

Exercice 2.17 Montrer que $(E - F = E \Leftrightarrow F - E = F \Leftrightarrow E \cap F = \emptyset)$. Faire un dessin.

Réponse. On suppose que $E - F = E$, i.e. $\{x \in E : x \notin F\} = \{x \in E\}$, d'où $x \in E \Rightarrow x \notin F$, d'où $x \in F \Rightarrow x \notin E$ (car "$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}B \Rightarrow \text{non}A)$"), d'où $\{x \in F : x \notin E\} = F = E - F$.

Réciproquement : même démarche si on suppose $F - E = F$.

Puis $E - F = E$ donne si $x \in E$ alors $x \notin F$, d'où $[x \in E$ et $x \in F]$=faux, d'où $E \cap F = \emptyset$. Et réciproquement, si $E \cap F = \emptyset$ alors $E - F = E$. ▪

Exercice 2.18 Montrer que $E \cup F \cup G = (E - F) \cup (F - G) \cup (G - E) \cup (E \cap F \cap G)$. Faire un dessin. ▪

3 Limites

3.1 Suite et limites

Soit E un ensemble.

Définition 3.1 Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N}^* & \to E \\ n & \mapsto f(n) \overset{\text{noté}}{=} f_n \end{array} \right\}$. L'ensemble image $\{f(n) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est appelé une suite dans E, et est noté $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nom de l'indice.

C'est une suite réelle si $E = \mathbb{R}$.

On appelle également suite de E l'image de toute fonction $f : \left\{ \begin{array}{ll} I & \to E \\ n & \mapsto f(n) = f_n \end{array} \right\}$ où $I \subset \mathbb{Z}$, et c'est un suite finie si I est fini.

On note souvent $x = f$ une telle fonction. Ainsi $x : n \in \mathbb{N}^* \to x(n) = x_n \in E$ donne la suite notée $(x_n)_{n \in I}$, ou plus simplement (x_n) si aucune confusion n'est possible quant à l'ensemble I.

Dans ce qui suit, on traite le cas $I = \mathbb{N}^*$ pour alléger l'écriture, et on note alors aussi $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*} = (f_n)$ la suite considérée.

Définition 3.2 Une distance sur E est une application $d(\cdot, \cdot) : E \times E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1- $\forall x \in E,\ d(x, x) = 0$,

2- si $x, y \in E$ vérifient $d(x, y) = 0$ alors $x = y$,

3- $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),

4- $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

(E, d) est alors appelé un espace métrique, simplement noté E si $d(\cdot, \cdot)$ est implicite.

Définition 3.3 Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans (E,d) ssi il existe un point $x \in E$ t.q. :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n > N, \quad d(x_n, x) < \varepsilon,$$

et x est appelé limite de la suite (x_n). Il est immédiat que, si ells existe, la limité est unique. Et on note alors :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{dans } (E,d),$$

Si aucune ambiguïté n'est possible on note simplement $x = \lim x_n$.

Remarque 3.4 En fait, cf. polycopié de topologie, il suffit d'avoir un espace topologique pour définir la notion de limite : pour tout voisinage V dans E du point x (sous-entendu aussi petit soit-il), il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $x_n \in V$:
$\forall V$ voisinage de x, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n > N$: $x_n \in V$.
Dans la suite, on ne traite que des espaces métriques. ▪

À partir de maintenant, on munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle : $d(x,y) = |x-y|$.

Exemple 3.5 Une suite constante, i.e. t.q. $x_n = x_1$ pour tout n, est convergente. Immédiat. ▪

Exemple 3.6 Cas $E = \mathbb{R}$ munit de sa distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.
La suite $(x_n = \frac{1}{n})_{\mathbb{N}^*}$ est convergente vers 0.
Soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ la suite donnée par : si n est pair alors $x_n = 1$, et si n est impair alors $x_n = \frac{1}{n}$: la suite (x_n) n'est pas convergente.
La suite $(x_n = n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}$. ▪

Définition 3.7 Cas $E = \mathbb{R}$ munit de sa distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}$ converge vers $+\infty$ ssi :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n > N, \quad x_n > A.$$

(Ou si on préfère : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n > N$, $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$.)
Et elle converge vers $-\infty$ si la suite $(-x_n)$ converge vers $+\infty$.

Définition 3.8 Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans E, et si $n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N}^* & \to E \\ k & \mapsto n(k) \overset{\text{noté}}{=} n_k \end{array} \right\}$ est une fonction strictement croissante, alors la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est appelée sous-suite extraite de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$.

Définition 3.9 Une valeur d'adhérence $a \in E$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un point $a \in E$ tel qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ extraite vérifiant $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Exemple 3.10 La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_n = 1$ si n est pair et $x_n = \frac{1}{n}$ si n est impair a deux valeurs d'adhérence : 1 et 0. ▪

Définition 3.11 Un suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ réelle est dite croissante ssi $u_n \le u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Elle est dite majorée ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \le c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Elle est dite minorée ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \ge c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Proposition 3.12 *Si $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle croissante et majorée dans $\mathbb{R}$ alors elle converge dans $\mathbb{R}$. Et sa limite est donnée par $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} \overset{\text{noté}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \overset{\text{noté}}{=} \sup\limits_{\mathbb{N}^*} u_n$.*

Preuve. Par définition de "majorée", $u = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ existe dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du sup, il existe u_N tel que $|u - u_N| < \varepsilon$. Et la suite étant croissante et majorée par u, on a donc : pour tout $n > N$, $|u - u_n| < \varepsilon$, et donc u est bien la limite de la suite. ▪

Proposition 3.13 *Si $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ sont deux suites dans $\mathbb{R}$ convergeant respectivement vers $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$ alors :*

1. *la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est bornée,*
2. *si $\lambda \in \mathbb{R}$ la suite $(\lambda u_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers λu,*

3. *si $u_n \le v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u \le v$,*
4. *la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v$,*
5. *la suite $(u - u_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers 0,*
6. *la suite $(u_n v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite uv.*

Preuve.

1. La suite (u_n) étant convergente vers u, prenant $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > N$ on a $|u_n - u| < 1$ et donc en particulier tel que $u_n < u+1$. On pose $c = \max(u_1, ..., u_N, u+1)$ et on a immédiatement $u_n \le c$ pour tout n.
2. Si $\lambda = 0$, c'est immédiat. Supposons $\lambda \ne 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ayant $\tilde{\varepsilon} > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$ on ait $|u - u_n| < \tilde{\varepsilon}$, i.e. tel que $|\lambda u - \lambda u_n| < \varepsilon$.
3. Supposons le contraire, i.e. que $u > v$. Notons $\varepsilon = u - v$. Par définition de la limite, soit N_1 tel que pour tout $n > N_1$ on ait $|u - u_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, et soit N_2 tel que pour tout $n > N_2$ on ait $|v - v_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, si $N = \max(N_1, N_2)$, on a : pour tout $n > N$, à la fois $u_n > u - \frac{\varepsilon}{3}$, $v_n < v + \frac{\varepsilon}{3}$, d'où $v_n < u_n$. Ce qui est contraire à l'hypothèse. C'est absurde, donc $u \le v$.
4. On a $|(u + v) - (u_n + v_n)| \le |u - u_n| + |v - v_n|$. Donc, si $\varepsilon > 0$ posant $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$, comme $\tilde{\varepsilon} > 0$, il existe $N_1 > 0$ et $N_2 > 0$ tels que pour tout $n > N_1$ on ait $|u - u_n| < \tilde{\varepsilon}$ et $|v - v_n| < \tilde{\varepsilon}$, et donc si $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n > N$ on a $|(u + v) - (u_n + v_n)| \le \varepsilon$.
5. Soit $w_n = u - u_n$. Alors à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N > 0$ tel que $|w_n| < \varepsilon$, et donc la suite (w_n) converge vers 0.
6. On a (en ajoutant et retranchant $u_n v$) :

$$uv - u_n v_n = (u - u_n)v + u_n(v - v_n).$$

Comme $\lim_{n\to\infty}(u - u_n) = 0$ et que $v \in \mathbb{R}$, on a $|(u - u_n)v| \to 0$, cf. 2.. Et comme u_n est convergente dans $\mathbb{R}$, on a $(|u_n|)$ est bornée, cf. 1.. Notons $c = \sup|u_n|$. Et comme $v_n \to v$ et que $|u_n(v - v_n)| \le c|v - v_n| \to 0$, on en déduit que $u_n(v - v_n) \to 0$. Puis on applique 4..

∎

3.2 Limites supérieures et inférieures

Pour calculer les valeurs d'adhérence de suites :

Définition 3.14 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Soit $y_n = \sup\limits_{k\ge n}(x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$). On appelle "limite supérieure" de la suite (x_n) la limite de la suite (y_n) (quand celle-ci existe) :

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\ge n}(x_k)).$$

De même, "limite inférieure" :

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\ge n}(x_k)).$$

Exemple 3.15 Soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $x_n = -\frac{1}{n}$ si n pair et $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ si n impair. Elle n'est pas convergente : elle a deux valeurs d'adhérences distinctes 0 et 1.

Posons $y_n = \sup_{k\ge n}(x_k)$. Donc $y_1 = 1 + \frac{1}{2} = y_2$, $y_3 = 1 + \frac{1}{4} = y_4$,... Et la suite (y_n) est convergente de limite $y = 1$, et on a $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$.

De même, avec $z_n = \inf_{k\ge n}(x_k)$. Donc $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{2} = z_3$, $z_4 = -\frac{1}{2}$... Et la suite (z_n) est convergente de limite $z = 0$, et on a $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$. ∎

Proposition 3.16 *Soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $\limsup_{\mathbb{N}^*}(x_n) = \liminf_{\mathbb{N}^*}(x_n)$. Alors la suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente, et $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \limsup_{n\to\infty}(x_n) = \liminf_{n\to\infty}(x_n)$.*

Preuve. Immédiat. ∎

Références

[1] Arnaudiès J.M., Fraysse H. : *Cours de mathématiques – 1*. Dunod Université, 1989.

[2] Reinhardt F., Soeder H. : *Atlas de mathématiques*. Poche.

[3] Krivine J.L. : *Théorie axiomatique des ensembles*. PUF, 1972.