

# Introduction au krigeage

Gilles LEBORGNE

22 mars 2018

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Régression</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Exemple 1-D</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Vers la méthode de krigeage</b>	<b>2</b>
4.1	Approximation affine par morceaux . . . . .	2
4.2	Inverse distance weighting (IDW) . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Méthode de krigeage</b>	<b>4</b>
5.1	Les fonctions inconnues . . . . .	4
5.2	Vocabulaire des probabilités . . . . .	4
5.3	Mesurer l'inhomogénéité : la "matrice" de covariance . . . . .	5
5.3.1	Les ensembles des points voisins . . . . .	5
5.3.2	La fonction de covariance . . . . .	5
5.4	On préfère les fonctions croissantes : le variogramme . . . . .	6
5.5	Le semi-variogramme approchée par une fonction simple . . . . .	6
5.6	Solution au problème initial . . . . .	6

## 1 Présentation

Soit  $d = 1, 2, 3$  (dimension d'espace). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  (un entier qui peut être "grand"). Soit  $n$  points  $(P_i, z_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  où  $P_i$  est une position et  $z_i$  une valeur.

Exemple : les  $P_i$  sont des points d'un champ pétrolifère et les  $z_i = z(P_i)$  représentent une "quantité" de pétrole en  $P_i$  (obtenue par carottage).

But : en un point  $P$  quelconque (du champ pétrolifère), on veut estimer la quantité  $z(P)$  à l'aide des  $n$  valeurs connues  $z_i$  en les  $P_i$ .

Moyen : construire une fonction d'interpolation  $\tilde{z} : P \rightarrow \tilde{z}(P)$  dont le graphe passe "au mieux" par les  $n$  points  $(P_i, z_i)$  (donc  $\tilde{z}(P_i) \simeq z_i$ ), ce à l'aide de critères dépendant du choix de l'utilisateur ("art de l'ingénieur"). Suivant les critères choisis, la méthode est appelée une méthode de Krigeage.

## 2 Régression

Démarche pour parvenir au but :

- 1- On représente (on dessine) les  $n$  points  $(P_i, z_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .
- 2- Parmi un certain nombre de fonctions prédéfinies  $\tilde{z}$  (linéaire, quadratique, exponentielle, log, rationnelle...), on en choisit une qui "semble passer au mieux par les  $n$  points".
- 3- La fonction  $\tilde{z}$  choisie dépend de quelques paramètres. (Exemple : avec  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2$  si le graphe d'un plan semble convenir, alors on choisit  $z$  sous la forme  $\tilde{z}(x, y) = ax + by + c$ , et  $\tilde{z}$  dépend des 3 paramètres  $a, b, c$ .) On choisit alors (art de l'ingénieur) un critère pour calculer les paramètres. (Exemple : méthode des moindres carrés).
- 4- On a ainsi construit une fonction  $\tilde{z}$ , et pour un point quelconque  $P$  on dira que sa valeur estimée est  $\tilde{z}(P)$ .

**Définition 2.1** Les étapes 2- et 3- sont appelées les étapes de la régression. Une régression consiste donc à, quand on dispose de  $n$  points :

- (i) se donner a priori une fonction  $\tilde{z}$  "simple" dépendant de quelques paramètres,
- (ii) se donner a priori un critère pour calculer les paramètres, ce qui déterminera  $\tilde{z}$ .

### 3 Exemple 1-D

Cas  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$ .

1- Soit les  $n = 4$  points  $P_1 = x_1 = -1$ ,  $P_2 = x_2 = 4$ ,  $P_3 = x_3 = 3$ ,  $P_4 = x_4 = 10$ , en lesquels  $z_1 = 6$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$ ,  $z_4 = 12$ . Dessin.

2- Choisissons  $\tilde{z}$  une droite, soit  $\tilde{z}(x) = a_0 + a_1x$ .

3- Il s'agit de calculer les paramètres  $a_0$  et  $a_1$ . Choix du critère pour calculer  $a_0$  et  $a_1$  : méthode des moindres carrés. Donc  $a_0$  et  $a_1$  devront minimiser la fonction  $J$  définie par :

$$J(a_0, a_1) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |z_j - \tilde{z}(x_j)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_0 + a_1x_j - z_j)^2. \quad (3.1)$$

Au minimum on a  $\vec{\nabla}J(a_0, a_1) = \vec{0}$ , donc  $\vec{\nabla}J(a_0, a_1) = \left( \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (a_0 + a_1x_j - z_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^n x_j(a_0 + a_1x_j - z_j) = 0 \end{array} \right)$ , d'où le

$$\text{système } \left\{ \begin{array}{l} na_0 + \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)a_1 = \sum_{j=1}^n z_j \\ \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)a_0 + \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)a_1 = \sum_{j=1}^n x_j z_j \end{array} \right\} \text{ à résoudre : on obtient } a_0 \text{ et } a_1.$$

4- Pour un point  $x$  quelconque on pose alors  $\tilde{z}(x) = a_0 + a_1x =$  valeur estimée en  $x$ .

## 4 Vers la méthode de krigeage

### 4.1 Approximation affine par morceaux

Domaine d'étude  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (avec  $d = 2$  par exemple). Et soit  $n$  points  $(P_i, z_i) \in \Omega \times \mathbb{R}$ .

Soit  $P$  un point donné dans  $\Omega$ .

Une méthode très simple pour estimer une valeur  $z(P)$  à partir des  $n$  valeurs  $z_i = z(P_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$  est la méthode de Lagrange (utilisée en éléments finis) : plutôt que d'essayer de trouver une fonction  $z$  globale, comme décrit ci-dessus, on cherche une fonction localement affine (dite fonction affine par morceaux).

Description de la méthode de Lagrange : on construit un maillage constitués de simplexes de  $\mathbb{R}^d$  (dans  $\mathbb{R}$  des segments, dans  $\mathbb{R}^2$  des triangles, dans  $\mathbb{R}^3$  des tétraèdres...) dont les points  $P_i$  constituent les "sommets" (les "noeuds") du maillage. Le maillage approximant  $\Omega$  est noté  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{n_K} K_j$  le maillage, les  $K_j$  désignant les simplexes, et  $n_K$  désignant leur nombre. Dessin (voir cours d'éléments finis).

Et on prend les fonctions "chapeau"  $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n}$  définies par : chaque  $\varphi_i$  est continue sur  $\Omega$ , est affine sur chaque simplexe, et vérifie, pour tout  $i, j$  :

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}. \quad (4.1)$$

Donc  $\varphi_i(P_i) = 1$  et  $\varphi_i$  est nulle en tous les autres points  $P_j \neq P_i$ , et donc  $\varphi_i$  est nulle sur tous les simplexes dont  $P_i$  n'est pas un sommet.

**Exercice 4.1** Donner et dessiner les  $n = 4$  fonctions chapeau de base de l'exemple du § 3. ▀

Et la fonction d'estimation  $\tilde{z}$  retenue est la fonction affine par morceaux donnée par :

$$\tilde{z} = \sum_{j=1}^n z_j \varphi_j, \quad \text{soit,} \quad \forall P \in \tilde{\Omega}, \quad \tilde{z}(P) = \sum_{j=1}^n z_j \varphi_j(P). \quad (4.2)$$

**Remarque 4.2** Pour un  $P$  fixé, ce  $P$  appartient à un simplexe  $K$ . Soit  $(K_k)_{k=1, \dots, d+1}$  les numéros du sommet du simplexe  $K$  (un segment  $[P_{K_1}, P_{K_2}]$  dans  $\mathbb{R}$ , un triangle  $(P_{K_1}, P_{K_2}, P_{K_3})$  dans  $\mathbb{R}^2$ ). Pour les  $i \neq K_k$  les fonctions  $\varphi_i$  sont nulles sur  $K$ . Dessin. Donc  $\tilde{z}(P) = \sum_{k=1}^{d+1} z_{K_k} \varphi_{K_k}(P)$ .

On dit que la valeur  $\tilde{z}(P)$  est obtenue par un calcul local, au sens où elle ne dépend que du triangle contenant  $P$  (on ne va pas voir plus loin). Avec un dessin tout est clair. ▀

Pour comparer avec la méthode de krigeage, cf. § 5 : (4.2) donne :

$$\begin{cases} \text{si } \exists j \text{ t.q. } P = P_j \text{ alors } \tilde{z}(P) = z(P_j), \\ \text{sinon, } \forall j, P \neq P_j, \text{ et alors } \tilde{z}(P) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(P) z_j, \end{cases} \quad (4.3)$$

avec :

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(P) = 1 = \frac{100}{100} = 100\%. \quad (4.4)$$

(Voir (4.5) et (4.6).)

Dans la méthode de krigeage, les inconnues correspondent aux fonctions  $\varphi_j$ , souvent notées  $w_j$  pour “weighting functions”. (Ici les  $\varphi_j$  ont été données a priori). La méthode de krigeage est une méthode très particulière pour calculer les  $w_i$ . Et d’ailleurs la méthode de krigeage ne les calcule pas vraiment (les  $w_j$ ) : elle les calcule uniquement en un point.

Précisons les équations (4.3)-(4.4) à l’aide de (4.2). Plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2$  par exemple. Soit  $K_P = (P_{k(1)}, P_{k(2)}, P_{k(3)})$  le triangle du maillage (de sommets les  $P_{k(j)}$ ) contenant  $P$ . Alors les coordonnées barycentriques de  $P$  sont les  $\lambda_i = \varphi_i(P)$ , voir cours d’éléments finis : on a  $P = \sum_{j=1}^3 \lambda_j P_{k(j)}$  (au sens  $\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \overrightarrow{OP_{k(j)}}$  pour un point  $O$  donné), et  $\sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1$ . Donc :

$$\begin{cases} \lambda_j = \varphi_{k(j)}(P) \text{ est la } j\text{-ème coordonnée barycentrique dans } K_P \text{ pour } j = 1, 2, 3, \\ \text{et } \varphi_i(P) = 0, \forall i \notin \{k(1), k(2), k(3)\}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour connaître  $\tilde{z}(P)$ , cf. (4.3), on a uniquement besoin de connaître les  $(P_{k(j)}, z_{k(j)})$  pour  $j = 1, 2, 3$ . Et :

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(P) = \sum_{j=1}^3 \varphi_{k(j)}(P) = 1 = 100\% \quad (\text{somme des coefficients barycentriques}). \quad (4.6)$$

**Remarque 4.3** Cette méthode est adaptée au cas où seules les valeurs “proches” de  $P$  sont importantes.

Ici il n’y a pas d’étape de régression : on donne a priori les  $\lambda_i(P) = \varphi_i(P)$  (après construction d’un maillage), i.e. on se donne  $\tilde{z}$  a priori.  $\blacksquare$

## 4.2 Inverse distance weighting (IDW)

L’approche ici est globale (non locale comme précédemment) exprimant l’idée :

“Things which are closer to each other are more related than distant ones”.

Donc on définit la fonction  $\tilde{z}$  par :

$$\begin{cases} \text{si } P = P_i \text{ alors } \tilde{z}(P) = z_i, \\ \text{si } P \neq P_i \text{ pour tout } i, \text{ alors } \tilde{z}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(P) z_i, \end{cases} \quad (4.7)$$

où les fonctions de pondérations  $w_i = \lambda_i$  (les “weighting functions”) sont données par exemple par :

$$\lambda_i(P) = \frac{W_i(P)}{W(P)} \quad \text{où} \quad W_i(P) = \frac{1}{\|P - P_i\|^2} \quad \text{et} \quad W(P) = \sum_{i=1}^n W_i(P). \quad (4.8)$$

En particulier on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(P) = 1 = \frac{100}{100} = 100\%. \quad (4.9)$$

Les  $\lambda_i(P)$  sont des pourcentages car ils sont tous positifs et leur somme vaut  $1 = 100\%$ .

**Remarque 4.4** Cette méthode est adaptée au cas d’un milieu “relativement homogène”.

Ici il n’y a pas d’étape de régression : on donne a priori les  $\lambda_i(P)$ , donc  $\tilde{z}$ .

Et plus généralement on peut remplacer  $W_i(P) = \frac{1}{\|P - P_i\|^2}$  par une autre fonction dépendant également de la distance à  $P_i$ .  $\blacksquare$

## 5 Méthode de krigeage

C'est une méthode purement déterministe, et non probabiliste comme peuvent le suggérer certains ouvrages. Le vocabulaire utilisé est néanmoins celui des statistiques–probabilités.

### 5.1 Les fonctions inconnues

On cherche toujours à estimer des valeurs  $\tilde{z}(P)$  en des points  $P$  en fonction de valeurs  $z_i$  données aux  $n$  points  $P_i$ . La forme de  $\tilde{z} : P \rightarrow \tilde{z}(P)$  s'exprimera comme dans (4.3) avec (4.4), ou comme dans (4.7) avec (4.9) :

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^n w_i z_i, \quad \text{au sens} \quad \tilde{z}(P) = \sum_{i=1}^n w_i(P) z_i, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n w_i(P) = 1 = 100\%. \quad (5.1)$$

Les inconnues sont les fonctions  $w_i : P \rightarrow w_i(P)$  (les réels  $w_i(P)$  sont les coefficients de pondération).

Mais ici on n'essaiera pas de connaître les  $w_i$  en tout point, mais uniquement en un point  $P_0$ .

**Remarque 5.1** Dans le cas d'un "milieu assez homogène", les fonctions  $w_i$  trouvées par la méthode de krigeage ne seront "pas très différentes" des fonctions  $\lambda_i$  données en (4.8) : la méthode de krigeage n'a aucun intérêt dans ce cas. La méthode de krigeage est intéressante dans le cas d'un milieu "suffisamment non homogène" ("suffisamment hétérogène") avec suffisamment de  $(P_i, z_i)$ . ■

### 5.2 Vocabulaire des probabilités

1- La valeur moyenne d'une fonction  $f$  sur un ensemble  $E = \{x_1, \dots, x_N\}$  discret de cardinal  $N$  est formellement :

$$\text{valeur moyenne de } f = \bar{f} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} f(x_i), \quad \text{où} \quad m = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (5.2)$$

les  $m_i$  étant les "masses ponctuelles",  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  étant la "masse de  $E$ ", et  $\frac{m_i}{m}$  le pourcentage correspondant.

1'- Quand on ramène la masse totale à  $1 = \frac{100}{100} = 100\%$ , le vocabulaire utilisé est souvent celui des probabilités et la moyenne de  $f$  est appelée l'espérance de  $f$ . Relativement à (5.2) cela revient à poser :

$$p_i = \frac{m_i}{m}, \quad \bar{f} = \sum_{i=1}^N p_i f(x_i), \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 = \frac{100}{100} = 100\%. \quad (5.3)$$

2- Le moment d'ordre 2 de  $f$  autour de sa valeur moyenne est formellement :

$$M_2(f) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} (f(x) - \bar{f})^2. \quad (5.4)$$

2'- En probabilité le moment d'ordre 2 de  $f$  est appelé la variance et noté  $V(f)$  :

$$V(f) = \sum_{i=1}^N p_i (f(x) - \bar{f})^2. \quad (5.5)$$

3- Le moment  $M_2(f)$  définit trivialement une semi-norme (au carré) associée au semi-produit scalaire :

$$(f, g)_2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} (f(x) - \bar{f})(g(x) - \bar{g}), \quad (5.6)$$

et  $(\cdot, \cdot)_2$  un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de valeur moyenne nulle. (On a  $M_2(f) = (f, f)_2$ .) On dispose alors de la notion d'orthogonal : on a  $f \perp g$  quand  $(f, g)_2 = 0$  sur cet ensemble.

3'- En probabilité le semi-produit scalaire (5.6) est appelé la covariance :

$$\text{cov}(f, g) \stackrel{\text{noté}}{=} (f, g)_{\text{cov}} = (f, g)_2 = \sum_{i=1}^N p_i (f(x) - \bar{f})(g(x) - \bar{g}), \quad (5.7)$$

où donc  $V(f) = \text{cov}(f, f)$ . Si on note  $\mathcal{E}_0$  l'ensemble des fonctions d'espérance nulle, alors  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{E}_0$ . Et on a la notion d'orthogonalité sur  $\mathcal{E}_0$ . En particulier deux fonctions non nulles  $f, g \in \mathcal{E}_0$  orthogonales sont indépendantes. Et  $(f, g)_{\text{cov}}$  mesure "une dépendance (ou indépendance) relative de  $f$  et de  $g$ ".

### 5.3 Mesurer l'inhomogénéité : la "matrice" de covariance

#### 5.3.1 Les ensembles des points voisins

Notons  $\mathcal{P} = \{P_i : i = 1, \dots, n\}$ . Et notons  $z(P_i) = z_i$  pour tout  $i$ . On pose (avec le cardinal = le nombre d'éléments) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(0) = \{(P_i, P_j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \text{ t.q. } i < j\}, \\ N(0) = \text{cardinal de } E(0) = \frac{n(n-1)}{2}, \\ m(0) = \frac{1}{N(0)} \sum_{(P_i, P_j) \in E(0)} z(P_i) \quad (\text{moyenne de } z \text{ sur } E(0)), \\ V(0) = \frac{1}{N(0)} \sum_{(P_i, P_j) \in E(0)} (z(P_i) - m(0))^2 \quad (\text{variance de } z \text{ sur } E(0)). \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Et pour  $h > 0$  on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(h) = \{(P_i, P_j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \text{ t.q. } i < j \text{ et } \|P_i - P_j\| = h\}, \\ N(h) = \text{cardinal de } E(h), \quad \text{et si } N(h) \neq 0 : \\ m(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{(P_i, P_j) \in E(h)} z(P_j) \quad (\text{moyenne de } z \text{ sur } E(h)), \\ V(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{(P_i, P_j) \in E(h)} (z(P_j) - m(h))^2 \quad (\text{variance de } z \text{ sur } E(h)). \end{array} \right. \quad (5.9)$$

(Donc le couple  $(P_i, P_j)$  est dans  $E_h$  ssi  $i < j$  et la distance qui sépare  $P_i$  de  $P_j$  est  $h$ .)

En pratique : on considère les  $P_j$  à une distance  $h \pm \varepsilon$  de  $P_i$  avec  $\varepsilon < h$  où  $\varepsilon$  est à définir par l'observateur. Donc dans  $E(h)$  on peut remplacer  $\|P_i - P_j\| = h$  par  $\|P_i - P_j\| \in [h - \varepsilon, h + \varepsilon]$ .

Et pour trouver  $E(h)$  on forme la matrice triangulaire supérieure stricte avec  $P_i$  en ligne,  $P_j$  en colonne, et  $\|P_i - P_j\|$  à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ . Et on extrait les termes de la matrice qui valent  $h \pm \varepsilon$  pour déterminer  $E(h)$ .

(Il n'y a qu'un nombre fini de réels  $h > 0$  t.q.  $E(h)$  soit non vide.)

#### 5.3.2 La fonction de covariance

Notons  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les projections  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}$  définies par  $\pi_1(x, y) = x$  et  $\pi_2(x, y) = y$ .

Notons  $X_0 = z \circ \pi_1 : E(h) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_h = z \circ \pi_2 : E(h) \rightarrow \mathbb{R}$ , les fonctions (appelées variables aléatoires par les probabilistes) qui sont donc définies par :  $\forall (P_i, P_j) \in E(h)$  :

$$X_0(P_i, P_j) = z(P_i), \quad X_h(P_i, P_j) = z(P_j). \quad (5.10)$$

$X_0$  et  $X_h$  étant définies sur le même ensemble  $E(h)$ , on peut donc considérer leur covariance :

$$C(h) \stackrel{\text{d'éf}}{=} \text{cov}(X_0, X_h) = \sum_{(P_i, P_j) \in E(h)} (X_0(P_i, P_j) - m_0)(X_h(P_i, P_j) - m_h). \quad (5.11)$$

Notations usuelles : on numérote les éléments (les couples) de  $E(h)$  : pour  $k = 1, \dots, N(h)$  :

$$(P_i, P_j) \stackrel{\text{noté}}{=} Q_{hk} \in E_h \quad \text{quand} \quad k = k(i, j), \quad (5.12)$$

où on a défini au préalable une bijection  $k : \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : (P_i, P_j) \in E(h)\} \rightarrow k = k(i, j) \in$

$[1, N(h)]_{\mathbb{N}}$  (on a ordonné l'ensemble  $E(h)$ ). Et, quand  $(P_i, P_j) = Q_{hk}$  où  $k = k(i, j)$ , on note :

$$Z_k = X_0(Q_{hk}) = X_0(P_i, P_j) = z_i, \quad Z_{k+h} = X_h(Q_{hk}) = X_h(P_i, P_j) = z_j, \quad (5.13)$$

quand  $(P_i, P_j) = Q_{hk}$  avec  $k = k(i, j)$ . Et donc (5.11) s'écrit aussi :

$$C(h) = \text{cov}(X_0, X_h) = \sum_{k=1}^{N_h} (Z_k - m_0) (Z_{k+h} - m_h). \quad (5.14)$$

#### 5.4 On préfère les fonctions croissantes : le variogramme

Il se trouve que la fonction  $C : h \rightarrow C(h)$  définie en (5.14) est décroissante en général. Et on préfère utiliser les fonctions croissantes : on pose :

$$\Gamma(h) = C(0) - C(h). \quad (5.15)$$

Cette fonction  $\Gamma : h \rightarrow \Gamma(h)$  est appelée le "variogramme". Et l'usage fait qu'on utilise le "semi-variogramme" :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\Gamma(h) = \frac{C(0) - C(h)}{2}. \quad (5.16)$$

#### 5.5 Le semi-variogramme approchée par une fonction simple

On reprend la démarche du § 1 (régression). Soit  $\tilde{z} : P \rightarrow \tilde{z}(P)$  la fonction inconnue cf. (5.1).

1- On représente les valeurs calculées  $\gamma(h)$  du semi-variogramme pour les  $h$  t.q.  $E(h) \neq \emptyset$ .

2- Et on choisit une fonction  $\hat{\gamma} : h \rightarrow \hat{\gamma}(h)$  qui "passe au mieux par ces valeurs  $\gamma(h)$ ".

3- On calcule les paramètres caractérisant la fonction  $\hat{\gamma}$  choisie.

4- On obtient :

$$\hat{\gamma} = \text{fonction d'approximation du semi-variogramme.} \quad (5.17)$$

#### 5.6 Solution au problème initial

Rappel : but : calculer les fonctions  $w_i$  de (5.1) (on suppose que les méthodes des § 4.1 et 4.2 ne sont pas satisfaisantes).

En fait on ne va pas calculer les fonctions  $w_i$  (en tout point) : on ne va s'intéresser qu'à un seul point  $P = \text{noté } P_0$ , et on ne va calculer que les  $n$  valeurs  $w_i(P_0)$ . Donc on n'obtiendra qu'une seule valeur d'estimation de  $\tilde{z}(P_0)$  au point  $P_0$ , cf. (5.1) :

$$\tilde{z}(P_0) = \sum_{i=1}^n w_i(P_0) z_i. \quad (5.18)$$

Procédé :

- On connaît les points  $P_i$ , et donc les  $h_{ij} = \|P_i - P_j\|$  pour  $i, j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$  (calculs simples).
- $P_0$  est fixé, donc on connaît les  $h_{0j} = \|P_0 - P_j\|$  pour  $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$  (calculs simples).
- À l'aide du semi-variogramme approché (5.17), on note :

$$G_{ij} = \hat{\gamma}(\|P_i - P_j\|) = \hat{\gamma}(h_{ij}), \quad \text{pour } i \in [0, n]_{\mathbb{N}} \text{ et } j \in [1, n]_{\mathbb{N}}, \quad (5.19)$$

Noter que  $h_{ii} = 0$ , mais que  $\hat{\gamma}(0)$  n'est pas forcément nul, cf. effet pépité éventuel.

- On choisit les  $n$  valeurs  $w_j(P_0)$  pour  $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$  pour qu'elles vérifient le système de  $n$  équations :

$$G_{i1}w_1(P_0) + \dots + G_{in}w_n(P_0) + \lambda = G_{i0}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \quad (5.20)$$

où  $\lambda$  (multiplicateur de Lagrange) est introduit pour satisfaire la contrainte supplémentaire :

$$w_1(P_0) + \dots + w_n(P_0) = 1 = 100\%, \quad \text{i.e. la somme des poids vaut 1.} \quad (5.21)$$

(Si on n'introduit pas  $\lambda$  alors les poids  $w_i(P_0)$  ne sont pas des pourcentages.) Ecriture de (5.20)

et (5.21) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} & 1 \\ \vdots & & & \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1(P_0) \\ \vdots \\ w_n(P_0) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{10} \\ \vdots \\ G_{n0} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

- La résolution de ce système donne les  $w_j(P_0)$ . D'où  $\tilde{z}(P_0)$  avec (5.18).

**Remarque 5.2** Comparaison avec (4.3)-(4.4) ou (4.7)-(4.8) : dans (4.4) ou (4.8) les  $w_i$  sont donnés explicitement a priori, et dans (4.8) en fonction des  $h_{0j}$  où  $h_{0j} = \|P_0 - P_j\|$ , cf. (4.8).

Alors qu'ici les  $w_i(P_0)$  ne sont pas donnés explicitement, mais implicitement : ils sont solutions du système (5.22) qu'il faut résoudre.  $\blacksquare$