Fonction exponentielle, résumé

Gilles Leborgne

9 janvier 2018

Le théorème de Cauchy–Lipschitz pour $f : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \to f(y,z) = z \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle $u'(x) = f(x,u(x))$ avec la condition initiale $u(0) = 1$ donne :

Définition 0.1 La fonction exponentielle est la fonction $u \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui vérifie $u'(x) = u(x)$ et $u(0) = 1$. De plus $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (avec $u^{(n+1)} = u$). On note $u(x) = \exp(x) = e^x$.

Et $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$ vérifie $g'(x) = 0$ donc $g(x) = \text{constante} = g(0) = 1$, donc $\exp > 0$, donc $\exp'' = \exp' = \exp > 0$ et exp est croissante concave. Donc l'inverse $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est croissante concave avec $\log(1) = 0$. Et $g(x) = 1$ donne $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$ dans $\mathbb{R}$.

Puis $h(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$ vérifie $h'(x) = h(x)$ et $h(0) = 1$, donc $h = \exp$, donc $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour $a,b \in \mathbb{R}$ (d'où la notation e^x). Donc $\log(zy) = \log(z) + \log(y)$ pour $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

Développement en série, x_0 fixé : $\exp(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\exp^n(0)}{n!} {x_0}^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{{x_0}^n}{n!}$, série convergente car $\frac{|\frac{{x_0}^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{{x_0}^n}{n!}|} = \frac{|x_0|}{n+1} < 1$ pour $n \ge |x_0|$ (règle de d'Alembert). Vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$: le rayon de convergence de la série est ∞.

Notons :

$$\lambda_n(x) = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n, \quad \text{et} \quad \mu_n(x) = \big(1 - \frac{x}{n}\big)^{-n} = \frac{1}{\lambda_n(-x)}. \tag{0.1}$$

Proposition 0.2

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \ge 0,\ \lambda_n(x) \le e^x$. Et 3) montrera : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \ge -n,\ \lambda_n(x) \le e^x$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \ge -1,\ 1 + ny \le (1+y)^n$ (inégalité de Bernoulli). Donc $1 + x \le \lambda_n(x)$ pour $x \ge -n$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda_n(x))_{n>|x|}$ est croissante et converge vers e^x, la suite $(\mu_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante et converge vers e^x (convergence simple des suites de fonctions $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(\mu_n)_{\mathbb{N}^*}$ vers exp).

4) À $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $e^{-x} \longrightarrow_{x\to-\infty} 0$, alors que $\lambda_n(x) \longrightarrow_{x\to-\infty} \pm\infty$ (polynôme de degré $n \ge 1$).

Preuve. 1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... \ge 1 + x$ pour $x \ge 0$. Donc $e^{\frac{x}{n}} \ge 1 + \dfrac{x}{n}$ pour $x \ge 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Et la fonction $y \to y^n$ est croissante pour $y \ge 0$, donc pour $x \ge 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $e^x \ge (1 + \dfrac{x}{n})^n$.

2) C'est trivial pour $n = 0, 1$. Soit $n \ge 2$. Soit $g(y) = (1+y)^n - (1+ny)$, donc $g'(y) = n(1+y)^{n-1} - n$, donc $g''(y) = n(n-1)(1+y)^{n-2}$, donc $g''(y) \ge 0$ pour $y \ge -1$, donc g' croissante sur $[-1,\infty[$; et $g'(y) = 0$ pour $y = 0$, donc g décroissante sur $[-1,0]$, croissante sur $[0,\infty[$, donc $g(y) \ge g(0) = 0$, donc $(1+y)^n \ge (1+ny)$ sur $[-1,\infty[$ (prouve Bernoulli). Et $x = ny \in [-n,\infty[$ donne $(1+\frac{x}{n})^n \ge (1+x)$.

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x_0|$ on a $\frac{x_0}{n} > -1$, donc $1 + \frac{x_0}{n} > 0$, donc $\lambda_n(x_0) \stackrel{\text{noté}}{=} \lambda_n > 0$.

Et $\log(\lambda_n) = n\log(1 + \dfrac{x_0}{n})$ pour $n > |x_0|$. Posons $\varphi(a) = a\log(1 + \frac{x_0}{a})$ quand $a > |x_0|$.

Donc $\varphi'(a) = \log(1+\frac{x_0}{a}) + a\frac{-\frac{x_0}{a^2}}{1+\frac{x_0}{a}} = \log(1+\frac{x_0}{a}) + \frac{-\frac{x_0}{a}}{1+\frac{x_0}{a}} = \log(1+\frac{x_0}{a}) - 1 + \frac{1}{1+\frac{x_0}{a}} \stackrel{\text{noté}}{=} \psi(z)$, où $z = 1 + \frac{x_0}{a} \in]0,2[$ et $\psi(z) = \log(z) - 1 + \frac{1}{z}$. On a $\psi'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2}(z-1)$, donc ψ décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,2[$. Donc $\psi(x) \ge \psi(1) = 0$ sur $]0,2[$: ψ est positive sur $]0,2[$. Donc φ' est positive sur $]|x_0|,\infty[$, donc φ est croissante sur $]|x_0|,\infty[$. Donc $\varphi(a) \le \varphi(b)$ pour $b > a > |x_0|$. Et la fonction log est croissante, donc $\lambda_n \le \lambda_{n+1}$ pour $n > |x_0|$: la suite $(\lambda_n)_{n>|x_0|} = (\lambda_n(x_0))_{n>|x_0|}$ est positive et croissante. Donc la suite $(\mu_n(x_0))_{n>|x_0|}$ donnée par $\mu_n(x_0) = \frac{1}{\lambda_n(-x_0)}$ est positive décroissante pour $n > |x_0|$.

Et $\mu_n(x_0) - \lambda_n(x_0) = \big(1 - \frac{x_0}{n}\big)^{-n}(1 - \big(1 - \frac{x_0}{n}\big)^n\big(1 + \frac{x_0}{n}\big)^n) = \big(1 - \frac{x_0}{n}\big)^{-n}(1 - \big(1 - (\frac{x_0}{n})^2\big)^n)$, donc, pour $n > |x_0|$ on a $\mu_n(x_0) - \lambda_n(x_0) \ge 0$ ainsi que $\mu_n(x_0) - \lambda_n(x_0) \le \mu_n(x_0)\frac{{x_0}^2}{n}$ (Bernoulli pour $y = (\frac{x_0}{n})^2$). Donc $\mu_n(x_0) - \lambda_n(x_0) \longrightarrow_{n\to 0} 0$. Donc les suites $(\lambda_n(x_0))_{n>|x_0|}$ et $(\mu_n(x_0))_{n>|x_0|}$ sont adjacentes, avec l'une croissante et l'autre décroissante : elles convergent vers un réel noté $\widetilde{\exp}(x_0)$.

Vérifions que $\widetilde{\exp}'(x) = \widetilde{\exp}(x)$, donc que $\widetilde{\exp} = \exp$ (car $\widetilde{\exp}(0) = 1$). (Intuitivement : on a ${\lambda_n}'(x) = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^{n-1} = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n\big(1 + \frac{x}{n}\big)^{-1}$ est $\simeq \lambda_n(x)$ quand $n \simeq \infty$...).

Pour cela montrons : $h\,\widetilde{\exp}(x) \le \widetilde{\exp}(x+h) - \widetilde{\exp}(x) \le h\,\widetilde{\exp}(x+h)$ pour $h > 0$, h petit. On a ${\lambda_n}'(x) = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^{n-1}$ et ${\lambda_n}''(x) = \frac{n-1}{n}\big(1+\frac{x}{n}\big)^{n-2} \ge 0$ pour $n > |x|$, donc ${\lambda_n}'$ est croissante au voisinage de x pour $|x| < n$. Donc le théorème des accroissements finis donne ${\lambda_n}'(x) \le \frac{\lambda_n(x+h) - \lambda_n(x)}{h} \le {\lambda_n}'(x+h)$, donc $\lambda_n(x) \le \frac{\lambda_n(x+h) - \lambda_n(x)}{h(1+\frac{x}{n})} \le \lambda_n(x+h)$ pour $n > |x[$ et $h > 0$, h petit. Donc, x fixé et $n \to \infty$ donnent $\widetilde{\exp}(x) \le \frac{\widetilde{\exp}(x+h) - \widetilde{\exp}(x)}{h} \le \widetilde{\exp}(x+h)$ au voisinage de x, comme annoncé.

Donc $(1+h)\widetilde{\exp}(x) \le \widetilde{\exp}(x+h) \le \frac{\widetilde{\exp}(x)}{1-h}$ pour $|h| < 1$. Donc $\widetilde{\exp}$ est continue en x et $\widetilde{\exp}$ est dérivable en x de dérivée elle-même ; et trivialement $\widetilde{\exp}(0) = 1$. Donc $\widetilde{\exp}$ est la fonction exponentielle. ∎

Pour un autre point de vue / présentation, voir Perrin :
`https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/definition-exponentielle.pdf`