

Traitement du signal : introduction aux distributions

Gilles LEBORGNE

7 août 2009

Table des matières

1	Signaux et fonctions	1
1.1	Signal	1
1.2	Série de Fourier : dans $L^2(]a, b[)$ pour $-\infty < a < b < \infty$	2
1.2.1	L'espace $L^2(]a, b[)$	2
1.2.2	Sa base de Fourier	3
1.2.3	Série de Fourier et spectre	3
1.2.4	Série de Fourier réelle	4
1.2.5	Remarque : série de Fourier de la masse de Dirac δ_0	5
1.3	Transformée de Fourier : dans $L^2(\mathbb{R})$	5
1.3.1	L'espace $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie totale finie	5
1.3.2	Transformée de Fourier = représentation spectrale	6
1.3.3	Bessel-Parseval	6
1.3.4	Fourier inverse	7
1.3.5	Concentration étalement par Fourier, principe d'incertitude d'Heisenberg	7
1.3.6	Remarque : cas des sinus et cosinus	8
1.4	La fonction sinus cardinal	8
1.5	Théorème de Shannon pour les fonctions $L^2(\mathbb{R})$	10
1.5.1	Introduction	10
1.5.2	Avantage, problème, correction	11
1.5.3	Théorème de Shannon pour les fonctions $L^2(\mathbb{R})$	11
1.6	Signaux de puissance finie	12
1.6.1	Définition	12
1.6.2	Parseval adapté	12
2	Signaux et distributions	13
2.1	Introduction	13
2.2	Convergence des distributions	15
2.3	Transformée de Fourier de certaines distributions	16
2.4	Transformée de Fourier inverse	17
2.5	Convolution	17
2.6	Peignes de Dirac et Fourier	19
2.6.1	Définition	19
2.6.2	Transformation par Fourier : formules sommatoires de Poisson	19
2.6.3	Prolongement par périodicité	19
2.7	Théorème de Shannon pour les fonctions trigonométriques	20

1 Signaux et fonctions

1.1 Signal

Définition 1.1 En traitement du signal, lorsque la variable $t \in \mathbb{R}$ désigne le “temps”, une fonction $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ est appelée un signal réel, et une fonction $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{C}$ est appelée un signal complexe.

Définition 1.2 Signal sinusoïdal pur (monochromatique). C'est un signal (une fonction) de type :

$$f(t) = \alpha_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \theta_0) = \alpha_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (1.1)$$

où $\alpha_0, \nu_0, \omega_0, T \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3 ν_0 est la fréquence, $T = \frac{1}{\nu_0}$ la période, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ est la pulsation, θ_0 la phase initiale, et $|\alpha_0|$ l'amplitude du signal.

Ayant $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, un signal sinusoïdal pur s'exprime également sous la forme :

$$f(t) = \beta_0 \cos(2\pi\nu_0 t) + \gamma_0 \sin(2\pi\nu_0 t), \quad (1.2)$$

où $\beta_0 = \alpha_0 \cos \theta_0$ et $\gamma_0 = \alpha_0 \sin \theta_0$.

Comme $f(t) = \alpha_0 \cos(2\pi\nu_0(t+t_0))$ où $t_0 = \frac{\theta_0}{2\pi\nu_0}$, quitte à changer l'origine des temps, on peut considérer le cas de la phase initiale nulle : on pose $g(t) = f(t-t_0)$, et on a :

$$g(t) = \alpha_0 \cos(2\pi\nu_0 t) = \alpha_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t).$$

Définition 1.4 Bis. Signal sinusoïdal pur (monochromatique). C'est un signal (une fonction) de type :

$$f(t) = \alpha_0 e^{i(2\pi\nu_0 t + \theta_0)} = \alpha_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right)} = \alpha_0 e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}, \quad (1.3)$$

dont la partie réelle $\Re(f)(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ redonne le signal réel.

N.B. : le recours aux exponentielles complexes est très utile pour simplifier les calculs (multiplication, dérivation...). On retrouve le signal réel en prenant la partie réelle de f .

1.2 Série de Fourier : dans $L^2(]a, b[)$ pour $-\infty < a < b < \infty$

1.2.1 L'espace $L^2(]a, b[)$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note \bar{z} son conjugué, et on note $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ son module. Autrement dit, si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\bar{z} = a - ib$ et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagore).

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on note $|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (fonction module), $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (fonction conjuguée) et $f^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (fonction carrée) les fonctions définies par :

$$|f|(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} |f(x)|, \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}, \quad f^2(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (f(x))^2. \quad (1.4)$$

(Exemple usuel avec $\sin^2(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (\sin(x))^2$.)

Définition 1.5 Pour $-\infty \leq a < b \leq \infty$, l'espace :

$$L^2(]a, b[; \mathbb{C}) = \left\{ f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q. } \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} L^2(]a, b[) \quad (1.5)$$

est appelé l'espace des fonctions "d'énergie finie pendant la durée $T = b-a$ ". Le cas $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est un cas particulier.

Et on note

$$\|f\|_{L^2(]a, b[)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2},$$

la dernière notation s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'intervalle $]a, b[$.

Exemple 1.6 Les fonctions $t \rightarrow e^{i\alpha t}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont dans $L^2(]a, b[)$ puisque $\|e^{i\alpha \cdot}\|_{L^2}^2 = \int_a^b 1 dt = b-a < \infty$. (Par contre, elles ne sont pas dans $L^2(\mathbb{R})$.) \blacksquare

Théorème 1.7 L'espace $L^2(]a, b[)$ est un espace vectoriel. La forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{L^2} : L^2(]a, b[) \times L^2(]a, b[) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(f, g)_{L^2} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad (1.6)$$

est un produit scalaire, de norme associée :

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f, f)_{L^2}} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Et $(L^2(]a, b[), (\cdot, \cdot)_{L^2})$ est un espace de Hilbert (espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui de plus est complet pour la norme associée).

Preuve. $L^2(]a, b[)$ est bien un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, ensemble muni de l'addition usuelle et de la multiplication par un scalaire usuelle (facile). La forme $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ est bien bilinéaire symétrique définie positive (facile). Pour le caractère complet, voir cours d'intégration. \blacksquare

1.2.2 Sa base de Fourier

On note $e^{ik2\pi\nu_0\cdot}$ la fonction $t \rightarrow e^{ik2\pi\nu_0 t}$.

Théorème 1.8 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, notant $T = b - a$, $\nu_0 = \frac{1}{T}$ et $\omega_0 = \frac{\nu_0}{2\pi}$, la famille de fonctions :

$$(e^{ik2\pi\nu_0\cdot})_{k \in \mathbb{Z}} \quad (= (e^{ik2\pi\frac{t}{T}})_{k \in \mathbb{Z}} = (e^{ik\omega_0\cdot})_{k \in \mathbb{Z}}) \quad (1.8)$$

est une base orthogonale de $(L^2(]a, b[), (\cdot, \cdot)_{L^2})$, appelée base de Fourier. Et la famille :

$$\frac{1}{\sqrt{T}}(e^{ik2\pi\nu_0\cdot})_{k \in \mathbb{Z}} \quad (= (\frac{1}{\sqrt{T}}e^{ik2\pi\frac{t}{T}})_{k \in \mathbb{Z}} = \frac{1}{\sqrt{T}}(e^{ik\omega_0\cdot})_{k \in \mathbb{Z}}) \quad (1.9)$$

est une base orthonormée de $L^2(]a, b[)$.

Preuve. Pour démontrer que c'est une base, cf. les polynômes trigonométriques et le théorème de Stone–Weierstrass. Pour l'orthogonalité et l'orthonormalité, on vérifie immédiatement que :

$$(e^{ik\omega\cdot}, e^{i\ell\omega\cdot})_{L^2} = \int_a^b e^{i(k-\ell)\omega t} dt = \begin{cases} b-a = T & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases} \quad (1.10)$$

■

Remarque 1.9 T est souvent appelée une période, sous-entendu après prolongement périodique sur \mathbb{R} tout entier. ■

Remarque 1.10 On note abusivement $e^{ik2\pi\nu_0 t}$ la fonction $e^{ik2\pi\nu_0\cdot} : t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{ik2\pi\nu_0 t}$. C'est très abusif, puisque $e^{ik2\pi\nu_0 t}$ est une valeur ; mais si le contexte est clair, cette notation abusive permet de rappeler que la variable qu'on utilisera s'appelle t .

Dans la suite, on fera souvent cet abus. Ainsi on parlera de la base $(e^{ik2\pi\nu_0\cdot})_{k \in \mathbb{Z}}$, alors qu'on devrait parler de la base $(e^{ik2\pi\nu_0 t})_{k \in \mathbb{Z}}$. ■

1.2.3 Série de Fourier et spectre

Corollaire 1.11 Toute fonction $f \in L^2(]a, b[)$ s'exprime sur cette base : il existe des constantes $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, appelées composantes de f sur la base de Fourier, telles que, pour presque tout $t \in]a, b[$:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik2\pi\nu_0 t} \quad (= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik2\pi\frac{t}{T}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega_0 t}). \quad (1.11)$$

(On dit que “ f est somme de signaux sinusoïdaux purs”.) Et on a

$$c_k = \frac{1}{T}(f, e^{ik2\pi\nu_0\cdot})_{L^2(]a, b[)} = \frac{1}{T} \int_a^b f(t) e^{-ik2\pi\nu_0 t} dt, \quad (1.12)$$

et (Bessel–Parseval, encore appelé Pythagore généralisé) :

$$\|f\|_{L^2}^2 = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2. \quad (1.13)$$

Preuve. On a (1.11) par définition d'une base.

$(\frac{1}{\sqrt{T}}e^{ik2\pi\frac{t}{T}})_{k \in \mathbb{Z}}$ étant orthonormale dans $L^2(]a, b[)$ on a

$$(f(t), e^{i\ell 2\pi\nu_0 t})_{L^2} = \sum_k c_k (e^{ik2\pi\nu_0 t}, e^{i\ell 2\pi\nu_0 t})_{L^2} = \sum_k c_k T \delta_{k\ell} = c_\ell T,$$

d'où (1.12).

Puis $\|f\|_{L^2}^2 = (f, f)_{L^2} = \sum_{k\ell} c_k c_\ell (e^{ik2\pi\nu_0 t}, e^{i\ell 2\pi\nu_0 t})_{L^2} = \sum_{k\ell} c_k c_\ell \delta_{k\ell} T$, d'où (1.13). ■

Définition 1.12 Pour $t \in \mathbb{R}$, la somme $S(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$S(f)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik2\pi\nu_0 t} \quad (1.14)$$

est appelée la série de Fourier de f en t .

Le corollaire précédent indique que, pour $f \in L^2([a, b])$, sa série de Fourier $S(f)$ existe et que :

$$S(f) = f \quad \text{presque partout.}$$

(On rappelle que “presque partout” signifie “partout sauf pour un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue, voir cours d’intégration.)

Exemple 1.13 La fonction $f :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in]0, \pi[$, $f(t) = 1$ si $t \in]\pi, 2\pi[$ et $f(\pi) = 36$ est égale à sa série de Fourier partout sauf en 1 où $Sf(\pi) = \frac{1}{2}$. ■

Définition 1.14 La fréquence $\nu_1 = \nu_0$ est appelée la fréquence fondamentale, et les fréquences $\nu_k = k\nu_0$, pour $k \geq 2$, sont appelées les fréquences harmoniques.

Définition 1.15 L’ensemble des couples (c_k, ν_k) , pour $k \in \mathbb{Z}$, constitue le spectre de f .

Remarque 1.16 Au sens de l’intégration (ici au sens de L^2), les valeurs ponctuelles n’ont pas de sens “partout” : par exemple, si la fonction f est modifiée en un point t_0 , et qu’on note g la nouvelle fonction, avec donc $\left\{ \begin{array}{l} g(t_0) \neq f(t_0), \\ g(t) = f(t) \text{ pour tout } t \neq t_0, \end{array} \right\}$, on a $c_k(f) = c_k(g)$, et donc f et g ont même série de Fourier, $S(f) = S(g)$. Ce bien que $f \neq g$.

Dans ce même cas, on a $\|f\|_{L^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2$: f et g ont même énergie.

Ainsi, pour une fonction f quelconque dans $L^2([a, b])$, la série $S(f)(t)$ n’a aucune raison d’être égale à $f(t)$ pour tout t : elle peut être égale à f , ou à g , ou à une fonction qui diffère de f uniquement “sur un ensemble négligeable”. Voir cours d’intégration.

On peut montrer par exemple que $S(f) = f$ si par exemple f est continue et dérivable par morceaux. ■

1.2.4 Série de Fourier réelle

Pour simplifier les calculs, on a considéré les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$: cela permet de travailler avec les exponentielles.

Pour revenir aux fonctions (à valeurs) réelles, i.e. $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et donc $f(t) \in \mathbb{R}$ pour tout t . Supposant que sa série de Fourier existe, elle vaut $Sf(t) = \sum_k c_k e^{2ik\pi\nu_0 t}$, comme $Sf = f$ presque partout, on a $Sf(t) \in \mathbb{R}$, i.e. on a $Sf(t) = \overline{Sf(t)}$.

Et on a $\overline{Sf(t)} = \sum_k \overline{c_k} e^{-2ik\pi\nu_0 t} = \sum_k \overline{c_{-k}} e^{+2ik\pi\nu_0 t} = Sf(t)$ (cas f réelle). Donc :

$$c_k = \overline{c_{-k}} \quad (1.15)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et en particulier $c_0 \in \mathbb{R}$. Et si on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 : a_k = c_k + c_{-k} \in \mathbb{R} \\ k > 0 : b_k = i(c_k - c_{-k}) \in i\mathbb{R} \\ a_0 = c_0, \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} k > 0 : c_k = \frac{a_k}{2} - i\frac{b_k}{2} \\ k > 0 : c_{-k} = \frac{a_k}{2} + i\frac{b_k}{2} \\ c_0 = a_0, \end{array} \right. \quad (1.16)$$

sachant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, on obtient :

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi\nu_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2k\pi\nu_0 t), \quad (1.17)$$

appelée série de Fourier réelle de f .

1.2.5 Remarque : série de Fourier de la masse de Dirac δ_0

La masse de Dirac δ_0 n'est pas dans L^2 : ce n'est même pas une fonction. Mais elle peut être approchée par des fonctions de L^2 (au sens des distributions, voir plus loin).

Peut-on alors approcher δ_0 par une série de Fourier (qui donnera "sa" série de Fourier) ?

Comme δ_0 n'est pas une fonction, la question semble absurde. On verra cependant qu'en se plaçant au sens des distributions relatives par exemple à l'intervalle $] -\pi, \pi[$, on aura :

$$\delta_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx}, \quad (1.18)$$

i.e. δ_0 s'exprime comme somme de Fourier, avec ici tous les coefficients de Fourier qui valent $c_k = \frac{1}{2\pi}$: ils ne décroissent pas avec k , et en particulier la somme de leurs carrés est infinie.

Cela se "voit" si on observe que la fonction :

$$P_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$$

(somme finie) est une approximation de δ_0 d'autant meilleure que N est grand.

Et P_N est une fonction $L^2(] -\pi, \pi[)$ (car P_N est continue sur \mathbb{R} et $] -\pi, \pi[$ est un intervalle borné, P_N étant un cas particulier de polynôme trigonométrique). Donc P_N a une série de Fourier : de fait on a défini P_N à l'aide de sa série de Fourier : $c_k = \frac{1}{2\pi}$ pour tout k t.q. $|k| < N$, et $c_k = 0$ pour tout k t.q. $|k| > N$.

Et immédiatement, on a $P_N(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\cos(x) + \dots + 2\cos(Nx))$, et P_N est donnée sous forme de Série de Fourier réelle paire. Et les cosinus $\cos(kx)$ étant tous périodiques de période 2π d'intégrale nulle sur une période quand $k \neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1,$$

i.e. que les P_N sont tous de masse unité.

Et on a $2\pi P_N(x) = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} (e^{ix})^k$, somme géométrique, et donc, pour $x \neq 0$:

$$2\pi P_N(x) = e^{-iNx} \frac{1 - (e^{ix})^{2N+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})x} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x},$$

fonction de plus en plus oscillante avec n et qui décroît avec x . (À représenter avec Matlab par exemple.) En 0, on a $2\pi P_N(0) = 2N+1$ (par définition de P_N), et $P_N(0) \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$.

La suite de fonction $(P_N)_{n \in \mathbb{N}}$ approche la masse de Dirac, au sens on a $\int_{-\pi}^{\pi} P_N(x) f(x) dx \rightarrow f(0)$ pour tout fonction continue dans $[-\pi, \pi]$. Il est donc tentant d'écrire (1.18). La justification et le calcul de la série de Fourier de δ_0 sont donnés à l'aide des distributions.

1.3 Transformée de Fourier : dans $L^2(\mathbb{R})$

Dans la pratique, un signal ne va pas de $t = -\infty$ à $+\infty$. Mais pour des raisons de simplifications de calcul, on va considérer des signaux définis sur tout \mathbb{R} .

1.3.1 L'espace $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie totale finie

Définition 1.17 L'espace :

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q. } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\} \quad (1.19)$$

est appelé l'espace des "fonctions d'énergie totale finie". Le cas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un cas particulier.

Théorème 1.18 $L^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. La forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{L^2} : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (1.20)$$

est un produit scalaire, de norme associée :

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f, f)_{L^2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.21)$$

Et $(L^2(\mathbb{R}), (\cdot, \cdot)_{L^2})$ est un espace de Hilbert (espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui de plus est complet pour la norme associée).

Preuve. Voir cours d'intégration. ▀

Remarque 1.19 Les fonctions $e^{i\alpha t}$ n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R})$, car $\|e^{i\alpha \cdot}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} 1 dt = \infty$. On ne peut donc pas trouver une base dans $L^2(\mathbb{R})$ formée de telle fonctions, contrairement au cas $L^2(a, b)$ (voir les séries de Fourier). ▀

1.3.2 Transformée de Fourier = représentation spectrale

Pour le passage formel des séries de Fourier aux transformées de Fourier, voir cours de distributions.

Définition 1.20 En traitement du signal, pour un signal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée, on définit la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par, quand ça a un sens :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ik2\pi\nu t} dt, \quad (1.22)$$

et la fonction \hat{f} est appelée la transformée de Fourier de f . Et on note aussi $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Définition 1.21 Pour f un signal, \hat{f} est appelée la représentation spectrale du signal f , et f est appelée la représentation temporelle.

Remarque 1.22 On note parfois très abusivement $\hat{f}(\nu) = (f, e^{ik2\pi\nu \cdot})_{L^2}$. C'est très abusif étant donné que $e^{ik2\pi\nu \cdot} \notin L^2(\mathbb{R})$, voir remarque 1.19, et que le minimum demandé pour que la notation $(f, g)_{L^2}$ ait un sens est que f et g soient dans L^2 .

Ce fut le travail de Laurent Schwartz, et sa théorie des distributions, qui permet l'utilisation d'une notation ressemblant à celle du produit scalaire : $\hat{f}(\nu) = \overset{\text{noté}}{\langle f, e^{ik2\pi\nu \cdot} \rangle}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité. Un crochet de dualité (relation entre une forme linéaire continue et un vecteur) se manipule comme un produit scalaire au sens où il est bilinéaire et continu (on peut passer à la limite dessous). Voir cours de distribution. ▀

1.3.3 Bessel–Parseval

Théorème 1.23 Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors \hat{f} existe, et mieux $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, et mieux, l'application :

$$\mathcal{F} = \hat{\cdot} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \mathcal{F}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{f} \end{cases} \quad \text{où} \quad \hat{f}(\nu) = \int_{t \in \mathbb{R}} f(t) e^{-ik2\pi\nu t} dt \quad (1.23)$$

est une isométrie : elle est linéaire, bijective et conserve les produits scalaires, i.e. pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$(f, g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2}.$$

En particulier elle conserve les normes, i.e. pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (\text{égalité de Bessel–Parseval}). \quad (1.24)$$

Autrement dit, la transformée de Fourier conserve les énergies : l'énergie spectrale est égale à l'énergie temporelle.

Preuve. Voir cours de distributions. ▀

1.3.4 Fourier inverse

Notons \check{f} la fonction :

$$\check{f}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} f(-t).$$

L'isométrie précédente \mathcal{F} est d'autant plus sympathique que :

Théorème 1.24 *L'application inverse \mathcal{F}^{-1} est donnée par :*

$$\mathcal{F}^{-1} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \mathcal{F}^{-1}(g) \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \int_{\nu \in \mathbb{R}} g(\nu) e^{+ik2\pi\nu t} d\nu, \quad (1.25)$$

à comparer avec (1.23). Ce qui s'exprime de manière équivalente par :

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \mathcal{F}(g)(-t), \quad (1.26)$$

soit encore, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ (après avoir posé $g = \widehat{f}$) :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t), \quad \text{soit} \quad \widehat{\widehat{f}} = \check{f}. \quad (1.27)$$

Preuve. Voir cours de distributions. ▀

Notation. Du fait du signe + dans l'exponentielle de (1.25), on note également $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$, en référence au conjugué de l'exponentielle complexe : $e^{-i\theta} = e^{+i\theta}$.

1.3.5 Concentration étalement par Fourier, principe d'incertitude d'Heisenberg

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

La gaussienne $t \mapsto e^{-\gamma t^2}$ est très concentrée quand $\gamma \gg 1$ et très étalée quand $\gamma \ll 1$.

Pour s'en convaincre, on part de la fonction e^{-s^2} , et on considère l'ensemble des s tels que $e^{-s^2} \geq \frac{9}{10}$ (par exemple), i.e. les $s \in [-c, c]$ (avec $c^2 = \log(\frac{10}{9})$). Puis on change d'échelle de temps en posant $s = \sqrt{\gamma} t$; l'ensemble des t tels que $e^{-\gamma t^2} \geq \frac{9}{10}$ est donné par $\sqrt{\gamma} t \in [-c, c]$, soit $t \in [-\frac{c}{\sqrt{\gamma}}, \frac{c}{\sqrt{\gamma}}]$, intervalle d'autant plus petit que γ est grand, et d'autant plus grand que γ est petit. Dessin à l'aide d'un logiciel comme Matlab.

La transformée de Fourier de la gaussienne est remarquable : c'est aussi une gaussienne :

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma\pi t^2})(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{1}{\gamma}\pi\nu^2},$$

voir cours de distribution. Et pour $\gamma = 1$, la gaussienne est conservée.

Et donc une gaussienne "concentrée" (cas $\gamma \gg 1$) est transformée par Fourier en une gaussienne "étalée" (car alors $\frac{1}{\gamma} \ll 1$), et une gaussienne "étalée" est transformée par Fourier en une gaussienne "concentrée".

Et cette propriété de "concentration-étalement" par Fourier est vraie quelle que soit la fonction (pas uniquement pour les gaussiennes).

On a d'ailleurs les relations d'incertitudes d'Heisenberg qui indiquent que si l'énergie de f est concentrée au voisinage d'un temps t_0 alors nécessairement celle de \widehat{f} est étalée au voisinage de toute fréquence ν_0 . Plus précisément : si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $tf \in L^2(\mathbb{R})$ alors si on pose :

$$W_{t_0}^2(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}, \quad \text{et donc} \quad W_{\nu_0}^2(\widehat{f}) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (\nu-\nu_0)^2 |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu}{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu}, \quad (1.28)$$

dès que $\widehat{\nu\widehat{f}} \in L^2(\mathbb{R})$, on a (Principe d'incertitude) :

$$W_{t_0}(f)W_{\nu_0}(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (1.29)$$

En d'autres termes, quitte à prendre des fonctions f telles que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, i.e. on considère $\frac{f}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}}$ au lieu de f (ce qui est un changement d'unité de mesure : on considère des fonctions dont

l'énergie est $1 = \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$, on a :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\nu-\nu_0)^2 |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu \right) \geq \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 \quad (1.30)$$

En particulier, si t_0 et ν_0 sont les centres de gravité de $|f|^2$ et de $|\widehat{f}|^2$, on a obtenu une inégalité sur les écart-types :

$$\sigma(|f|^2)\sigma(|\widehat{f}|^2) \geq \frac{1}{4\pi},$$

d'où si $|f|^2$ est "très concentrée" alors $|\widehat{f}|^2$ est "très étalée", idem en échangeant les rôles de f et \widehat{f} .

Ainsi on ne peut pas concentrer à la fois la densité d'énergie $|f|^2$ et la densité d'énergie $|\widehat{f}|^2$.

Remarque 1.25 On montre qu'on a égalité dans (1.29) uniquement pour les gaussiennes $e^{-\gamma t^2}$ (à la multiplication près par une fonction de type $e^{ig(t)}$ où g est à valeurs réelles) : les gaussiennes sont donc les fonctions qui sont les mieux localisées à la fois en temps et en fréquence (celles qui "s'étalent" le moins par Fourier). \blacksquare

1.3.6 Remarque : cas des sinus et cosinus

Prenons $f(t) = e^{i2\pi\nu_0 t}$ (fonction "infiniment étalée"). Cette fonction est parfaitement localisée en fréquence : on a une seule fréquence (positive) ν_0 . Cela s'exprime par : sa transformée de Fourier est $\widehat{f} = \delta_{\nu_0}$, et son support est $\text{supp}(\widehat{f}) = \{\nu_0\}$. (On a noté δ_a la masse de Dirac en a .)

Cela donne une illustration de l'inégalité d'Heisenberg (illustration à la limite étant donné que δ_{ν_0} n'est pas une fonction mais une limite de fonctions).

Et idem pour les sinus et cosinus (combinaisons linéaires de l'exponentielle précédente : $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$).

On pourra alors préférer une formulation à l'aide d'ondelettes au lieu d'une formulation de Fourier : but : avoir une base de fonctions où chaque fonction de base est relativement bien localisée à la fois en fréquence et en espace, ce qui n'est pas le cas des fonctions de base $e^{i2\pi k\nu_0 t}$ de Fourier.

1.4 La fonction sinus cardinal

On appelle fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b]$ quand $a < b$ la fonction notée :

$$1_{[a,b]} : x \rightarrow 1_{[a,b]}(x) = \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in [a, b], \\ 0 \text{ sinon,} \end{array} \right\}$$

Les fonctions sinus cardinal sont essentielles en traitement du signal : ce sont, à une constante multiplicative près, les transformées de Fourier des fonctions portes centrées

$$1_{[-a,a]}(\nu) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \nu \in [-a, a], \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right\} \quad (1.31)$$

D\u00e9finition 1.26 La fonction paire $\text{sinc}_\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d\u00e9finie par :

$$\forall x \neq 0, \quad \text{sinc}_\pi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \text{sinc}_\pi(0) = 1, \quad (1.32)$$

est appel\u00e9e sinus cardinal.

Cette fonction est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ (elle est int\u00e9grale au sens de Riemann \u00e0 savoir $\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}_\pi(x) dx < \infty$, mais non absolument int\u00e9grable, \u00e0 savoir $\int_{\mathbb{R}} |\text{sinc}_\pi(x)| dx = \infty$).

D\u00e9finition 1.27 Plus g\u00e9n\u00e9ralement les fonctions sinus cardinal sont les fonctions paires donn\u00e9es par, pour $a > 0$:

$$\forall x \neq 0, \quad \text{sinc}_a(x) = \frac{\sin(ax)}{ax} \quad \text{et} \quad \text{sinc}_a(0) = 1.$$

Elles se d\u00e9duisent de sinc_π par changement d'\u00e9chelle : $\text{sinc}_a(x) = \text{sinc}_\pi\left(\frac{a}{\pi}x\right)$.

Notons τ_c l'op\u00e9rateur de translation : $\tau_c f(t) = \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} f(t - c)$. Appel\u00e9 \u00e9galement op\u00e9rateur de changement d'origine car $\tau_c f(c) = f(0)$.

Par exemple pour $f = 1_{[-a,a]}$ on a $\tau_c 1_{[-a,a]} = 1_{[c-a, c+a]}$ (intervalle centr\u00e9 en c) puisque $\tau_c 1_{[-a,a]}(t) = 1_{[-a,a]}(t - c)$ vaut 1 ssi $t - c \in [-a, a]$.

Proposition 1.28 On a :

$$\widehat{1_{[-a,a]}}(\nu) = 2a \operatorname{sinc}_{2\pi a}(\nu), \quad (1.33)$$

d'où $\operatorname{sinc}_{2\pi a} \in L^2(\mathbb{R})$ (car transformée de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{R})$) et :

$$\widehat{\operatorname{sinc}_{2\pi a}}(t) = \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}(t). \quad (1.34)$$

Et pour les translatées, pour $c \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(\tau_c 1_{[-a,a]})(\nu) = \mathcal{F}(1_{[c-a,c+a]})(\nu) = 2a \operatorname{sinc}_{2\pi a}(\nu) e^{-i2\pi c\nu}, \quad (1.35)$$

$$\mathcal{F}(\tau_c \operatorname{sinc}_{2\pi a})(t) = e^{-i2\pi ct} \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}(t), \quad (1.36)$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{sinc}_{2\pi a}(\cdot) e^{i2\pi c\cdot})(t) = \frac{1}{2a} \tau_{-c} 1_{[-a,a]}(t) = \frac{1}{2a} 1_{[-a-c,a-c]}(t). \quad (1.37)$$

Preuve. Démonstrations élémentaires pour Fourier :

Pour (1.33), $\widehat{1_{[-a,a]}}(\nu) = \int_{t=-a}^a e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{1}{-2i\pi\nu} [e^{-2i\pi\nu t}]_{-a}^a = \frac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu} = 2a \operatorname{sinc}_{2\pi a}(\nu)$.

Pour (1.34), par Fourier inverse $\mathcal{F}(2a \operatorname{sinc}_{2\pi a}(\nu))(t) = 1_{[-a,a]}(-t) = 1_{[-a,a]}(t)$.

Puis $\mathcal{F}(\tau_c f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t-c) e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-2i\pi\nu(s+c)} ds = e^{-2i\pi\nu c} \mathcal{F}(f)(\nu)$, d'où (1.35) et (1.36).

Puis $\mathcal{F}(e^{i2\pi ct} f(t))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{+i2\pi ct} e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi(\nu-c)t} dt = \mathcal{F}(f)(\nu-c) = \tau_c \widehat{f}(\nu)$, d'où (1.37). \blacksquare

On a également les formules permettant d'affirmer que les fonctions $t \rightarrow n \operatorname{sinc}_n(t)$ et $t \rightarrow n \operatorname{sinc}_n(t)^2$ approchent la masse de Dirac (au facteur multiplicatif π près) quand $n \rightarrow \infty$: on commence par ;

Proposition 1.29 Les masses (aires sous les courbes), quand $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}_a(t) dt = \frac{1}{a} \pi, \quad (1.38)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}_a^2(t) dt = \frac{1}{a} \pi. \quad (1.39)$$

I.e. : les masses de sinc_π et de $\operatorname{sinc}_\pi^2$ valent 1, de même que celles des $\frac{a}{\pi} \operatorname{sinc}_a$ et $\frac{a}{\pi} \operatorname{sinc}_a^2$.

Preuve. On remarque que $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}_a(t) dt = (\operatorname{sinc}_a * 1_{\mathbb{R}})(x)$ valeur constante indépendante de x , et on sait que la transformée de Fourier d'une convolée est le produit simple des transformées (voir le cours de distributions). Ici la transformée de Fourier de la fonction $\operatorname{sinc}_a * 1_{\mathbb{R}}$ est le produit simple $\widehat{\operatorname{sinc}_a} \widehat{1_{\mathbb{R}}} = (\frac{\pi}{a} 1_{[-\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}]})(\delta_0) = \frac{\pi}{a} \delta_0$. Donc par Fourier inverse on obtient (1.38).

Puis ayant $\operatorname{sinc}_a^2(t) = \frac{1}{a^2 t^2} \sin^2(at) = u'(t)v(t)$, par intégration par parties on obtient (1.39). \blacksquare

Puis pour la convergence au sens des distributions :

Proposition 1.30 On a :

$$a \operatorname{sinc}_a \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \pi \delta_0, \quad (1.40)$$

$$a \operatorname{sinc}_a^2 \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \pi \delta_0, \quad (1.41)$$

au sens des distributions. Et pour $A \in \mathbb{R}$:

$$\tau_A(a \operatorname{sinc}_a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \pi \delta_A, \quad (1.42)$$

et pour tout $A, B \in \mathbb{R}$:

$$A \neq B \implies \tau_A(a \operatorname{sinc}_a) \tau_B(b \operatorname{sinc}_b) \xrightarrow{a,b \rightarrow \infty} 0, \quad (1.43)$$

au sens des distributions.

(Donc pour des fonctions f continues en 0 et à support borné on aura pour (1.40) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) n \operatorname{sinc}_n(x) dx \right) = \pi \delta_0(f) = \pi f(0). \text{ Idem pour les autres formules.)}$$

Preuve. Voir cours de distributions ; par exemple, pour (1.40) il s'agit de montrer des résultats comme : que pour toute fonction φ régulière à support compact, la suite de réels $(\lambda_n)_{\mathbb{N}^*} = (\int_{\mathbb{R}} n \operatorname{sinc}_n(t) \varphi(t) dt)_{\mathbb{N}^*}$ tend vers le réel $\varphi(0)$. \blacksquare

1.5 Théorème de Shannon pour les fonctions $L^2(\mathbb{R})$

“Si le signal d’énergie finie ne contient pas de hautes fréquences, alors il suffit de le connaître en des points discrets $(kt_0)_{k \in \mathbb{Z}}$ (en nombre dénombrable) pour le connaître en tout $t \in \mathbb{R}$, à condition que $t_0 \leq \frac{1}{\nu_0}$ où ν_0 est la fréquence maximum du signal.”

1.5.1 Introduction

On suppose ici que le signal ne comporte pas de hautes fréquences : on s’intéresse uniquement aux fonctions dont la fréquence est dans une bande bornée. On note :

$$V_B = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\widehat{f}) \subset [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]\} \quad (1.44)$$

le sous-ensemble des fonctions f de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ à son support borné dans $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$: on dit que f est à largeur de bande limitée en fréquence, ici largeur de bande B , et de largeur de demi-bande $\frac{B}{2}$.

Exemple 1.31 La fonction $f = \text{sinc}_{\pi B} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{sinc}_{\pi B}(x) = \frac{\sin \pi B x}{\pi B x}$ appartient à V_B : on a $\widehat{f} = \widehat{\text{sinc}_{\pi B}} = \frac{1}{B} 1_{[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]}$ fonction de support dans $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$, cf. (1.34). \blacksquare

Par définition de V_B , si $f \in V_B$, on a $f \in L^2(\mathbb{R})$ et donc $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Et $\text{supp}(\widehat{f}) \subset [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$. Notons $\widehat{f}_r : [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction :

$$\widehat{f}_r \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{f}|_{[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]}$$

la restriction de \widehat{f} à $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$.

On a évidemment $\widehat{f}_r \in L^2([-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}])$ (puisque $\|\widehat{f}_r\|_{L^2([-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}])} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$). Et donc \widehat{f}_r admet une série de Fourier : il existe une suite $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de complexes tels que, cf. (1.11) :

$$\widehat{f}_r(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{i2\pi k \frac{\nu}{B}} \quad \text{p.p.} \quad (1.45)$$

Donc :

$$\widehat{f}_r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \widehat{e^{i2\pi k \frac{\nu}{B}}}.$$

Et $\widehat{e^{i2\pi k \frac{\nu}{B}}} = \delta_k$ (voir plus loin les distributions), et. $\widehat{\widehat{f}} = \check{f}$. Donc :

$$\check{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \delta_k.$$

Comme :

$$d_k = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \widehat{f}_r(\nu) e^{-i2\pi k \frac{\nu}{B}} d\nu = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu) e^{-i2\pi k \frac{\nu}{B}} d\nu = \mathcal{F}(\widehat{f})(k) = f(-k), \quad (1.46)$$

la fonction \widehat{f} étant nulle à l’extérieur de $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$, on a donc :

$$\check{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k) \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \delta_{-k},$$

soit encore, sachant que $\check{\delta}_{-k} = \delta_k$ (voir les distributions où on a $\langle \check{\delta}_{-k}, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \delta_{-k}, \check{\varphi} \rangle = \check{\varphi}(-k) = \varphi(k)$), on a donc :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \delta_k. \quad (1.47)$$

Et f se présente sous la forme d’un peigne de Dirac. En particulier la seule connaissance d’un nombre dénombrable de valeurs, les $f(k)$, permet de connaître f sur tout \mathbb{R} .

Il reste un “détail” : vérifier que le peigne de Dirac du membre de droite de (1.47) donne une fonction...

1.5.2 Avantage, problème, correction

Avantage de (1.47) : on a exprimé f à l'aide d'un nombre dénombrable de valeurs, les $d_{-k} = f(k)$.

Problème de (1.47) : on a exprimé la fonction f comme une distribution alors qu'on sait que f est une fonction...

Comment améliorer cette approche, tout en gardant l'expression de f à l'aide d'un nombre dénombrable de valeurs ?

Où est le problème ? Le problème est l'apparition des masses de Dirac δ_k dues aux transformées de Fourier de la base des $e^{i2\pi k \frac{\nu}{B}}$.

Shannon propose alors de changer de base, pour garder l'avantage sans l'inconvénient. En fait, Shannon ne change pas vraiment de base : il considère que les transformées de Fourier sont des fonctions définies sur tout \mathbb{R} (pas uniquement sur $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$, même si elle sont nulles à l'extérieur de cet intervalle, cf. la définition de V_B).

La base qu'il prend, sur l'ensemble des fonctions $g \in L^2(\mathbb{R})$ telles que g est nulle à l'extérieur de $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$ (pour nous $g = \widehat{f}$) est formée des :

$$1_{[\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]} e^{-i2\pi k \frac{\nu}{B}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

i.e. les fonctions exponentielles tronquées. Ces fonctions sont dans $L^2(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas le cas des $e^{-i2\pi k \frac{\nu}{B}}$ non tronquées) et ont donc pour transformées de Fourier des fonctions qui sont également $L^2(\mathbb{R})$ avec :

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-i2\pi k \frac{\nu}{B}} 1_{[\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]}(\nu))(-t) = \tau_{\frac{k}{B}} \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} = \tau_{\frac{k}{B}} \text{sinc}_{\pi B}(t), \quad (1.48)$$

cf. (1.36). (On choisit ici \mathcal{F}^{-1} pour revenir au signal temporel.)

La base de Shannon est la base :

$$(\tau_{\frac{k}{B}} \text{sinc}_{\pi B})_{k \in \mathbb{Z}}$$

de fonctions toutes dans V_B .

1.5.3 Théorème de Shannon pour les fonctions $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 1.32 Si $f \in V_B$ (i.e. si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\text{supp} \widehat{f} \in [\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$), alors :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{B}\right) \tau_{\frac{k}{B}} \text{sinc}_{\pi B}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{B}\right) \frac{\sin(\pi B(t - \frac{k}{B}))}{\pi B(t - \frac{k}{B})} \quad (1.49)$$

Autrement dit, les fonctions $\tau_{\frac{k}{B}} \text{sinc}_{\pi B}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ forment une base de V_B , base qui est orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$. Et toutes les fonctions de base $\tau_{\frac{k}{B}} \text{sinc}_{\pi B}$ ont même norme $\frac{1}{\sqrt{B}}$, autrement dit $(\frac{1}{\sqrt{B}} \tau_{\frac{k}{B}} \text{sinc}_{\pi B})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée dans $(V_B, (\cdot, \cdot)_{L^2(\mathbb{R})})$. On en déduit que :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2\left(\frac{k}{B}\right). \quad (1.50)$$

Et on peut remplacer B par tout réel $C \geq B$, puisque $V_B \subset V_C$ dans ce cas : si $f \in V_B$ et si $C \geq B$ alors $f \in V_C$ et :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{C}\right) \tau_{\frac{k}{C}} \text{sinc}_{\pi C}(t). \quad (1.51)$$

Ou encore, si on note $t_0 = \frac{1}{C}$ ($\leq \frac{1}{B}$) (période d'échantillonnage), on a :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kt_0) \tau_{kt_0} \text{sinc}_{\frac{\pi}{t_0}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kt_0) \frac{\sin(\frac{\pi}{t_0}(t - kt_0))}{\frac{\pi}{t_0}(t - kt_0)}. \quad (1.52)$$

N.B. : considérer $\tau_{kt_0} \text{sinc}_{\frac{\pi}{t_0}}(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{t_0}(t - kt_0))}{\frac{\pi}{t_0}(t - kt_0)}$ c'est considérer la fonction $\text{sinc}_{\frac{\pi}{t_0}}$ centrée en kt_0 , fonction qui vaut 1 au point kt_0 et qui est nulle en tous les autres points d'échantillonnage mt_0 pour $m \neq k$.

Preuve. Voir cours de distributions. ▀

1.6 Signaux de puissance finie

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est insuffisant pour simplifier certains calculs : les fonctions périodiques comme les sinus et cosinus ne sont pas de carré intégrable sur \mathbb{R} ; d'où l'introduction de l'espace des signaux de puissance finie. Théoriquement ce nouvel espace est moins agréable car il n'est pas séparable, i.e. il n'admet pas de base dénombrable : une fonction ne pourra pas s'exprimer "à la Fourier", i.e. sous la forme $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots$

1.6.1 Définition

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ ne contient pas les fonctions périodiques (en particulier les fonctions constantes et les fonctions sinusoïdales).

On définit alors l'espace vectoriel (espace contenant $L^2(\mathbb{R})$) :

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty\}, \quad (1.53)$$

appelé espace des signaux de puissance moyenne finie (limite quand $\lambda \rightarrow \infty$ de la valeur moyenne sur la fenêtre $[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]$). Autrement dit, ce sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, quand on considère leurs énergies moyennes sur tout intervalle de type $[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]$, alors ces énergies moyennes convergent dans \mathbb{R} quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Exemple 1.33 Une fonction constante $f = c1_{\mathbb{R}}$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $c \in \mathbb{R}^*$, alors qu'elle est dans P , puisque ses valeurs moyennes sur toute fenêtre sont la constante c . ■

Pour $f \in P$ on note :

$$\|f\|_P = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2 dt. \quad (1.54)$$

Proposition 1.34 Toute fonction f périodique de période T qui est de carré intégrable sur une période est dans P , avec :

$$\|f\|_P = \left(\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2([a, a+T])}, \quad \forall a, \quad (1.55)$$

i.e. $\|f\|_P^2$ est l'énergie moyenne de f sur une période.

Preuve. Exercice facile. ■

Théorème 1.35 La forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_P : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(f, g)_P = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (1.56)$$

est un produit scalaire, de norme associée $\|f\|_P = \sqrt{(f, f)_P}$, et $(P, (\cdot, \cdot)_P)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. $(\cdot, \cdot)_P$ est bilinéaire, symétrique et définie positive.

Pour le caractère Hilbert (complet), voir cours d'intégration. ■

1.6.2 Parseval adapté

Ici, comme pour la transformée de Fourier, on voudrait bien que $\|f\|_P = \|\widehat{f}\|_P$, i.e. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2 dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu$.

Mais on a un problème ! Cela n'a pas de sens en général.

Exemple 1.36 Pour $f = 1_{\mathbb{R}}$, on a $\widehat{f} = \delta_0$ et δ_0^2 n'a aucun sens (on ne sait pas multiplier deux distributions : si on le fait on démontre sans aucun problème que $1 = 0$, ce qui pose problème...).

Si on veut s'en sortir (i.e. si on veut pouvoir calculer $(\widehat{f})^2$), on peut par exemple commencer par tronquer $f = 1_{\mathbb{R}}$, en posant :

$$g_{\lambda}(t) = f(t)1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]}(t).$$

Et on considère pour commencer $(\widehat{g_{\lambda}})^2$.

Ici avec $f = 1_{\mathbb{R}}$ on pose donc $g_{\lambda} = 1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]} \in L^2(\mathbb{R})$. Maintenant $\widehat{g_{\lambda}}$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, à savoir $\widehat{g_{\lambda}}(\nu) = \frac{1}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu\frac{\lambda}{2}) = \lambda \frac{\sin(\lambda\pi\nu)}{\lambda\pi\nu} = \lambda \operatorname{sinc}_{\lambda\pi}(\nu)$. Et $\widehat{g}(\nu)^2 = \lambda^2 \operatorname{sinc}_{\lambda\pi}^2(\nu)$.

On peut maintenant calculer $X_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |\widehat{g}(\nu)|^2 d\nu$ qui vaut $X_{\lambda} = \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \lambda \operatorname{sinc}_{\lambda\pi}(\nu)^2 d\nu = 1$. C'est une constante indépendante de λ : donc $(X_{\lambda})_{\lambda}$ converge dans \mathbb{R} quand $\lambda \rightarrow \infty$, vers 1.

Et c'est la valeur souhaitée $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu = 1 \stackrel{\text{noté}}{=} \|\widehat{f}\|_P$.

Et on a trivialement $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_P = 1$.

On a donc bien :

$$\|f\|_P = \|\widehat{f}\|_P,$$

à condition de lire cette égalité comme :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} (f1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]})(t)^2 dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |\mathcal{F}(f1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]}) (\nu)|^2 d\nu,$$

où on a considéré la fonction f tronquée. ▀

Proposition 1.37 Pour $f \in P$, on a :

$$\|f\|_P = \|\widehat{f}\|_P,$$

à condition de lire cette égalité comme :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} (f1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]})(t)^2 dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |\mathcal{F}(f1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]}) (\nu)|^2 d\nu.$$

Preuve. On adapte la démarche de l'exemple précédent. ▀

Remarque 1.38 Dans le membre de gauche, on peut très bien remplacer $(f1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]})$ par f , puisqu'on intègre sur $[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]$. Mais PAS dans le membre de droite, où c'est la transformée de la fonction tronquée $f1_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]}$ qu'il faut considérer, et non la transformée de Fourier de f . ▀

2 Signaux et distributions

2.1 Introduction

Pour simplifier les calculs, on introduit des "objets limites de fonctions" qu'on appellera distributions. Ces "objets" peuvent être vus comme des instruments de mesures de fonctions.

Exemple 2.1 Soit $C_{x_0}^0$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en x_0 . Pour toute φ continue en un point x_0 , si on veut connaître sa valeur en x_0 , on regarde l'application $\varphi \rightarrow \varphi(x_0)$. Cette application est notée :

$$\delta_{x_0} : \begin{cases} C_{x_0}^0 \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \delta_{x_0}(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(x_0) \stackrel{\text{noté}}{=} \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle, \end{cases}$$

la dernière notation étant celle du crochet de dualité, possible grâce à la linéarité de δ_0 . ▀

Exemple 2.2 Soit $C_{x_0}^1$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en x_0 . Pour toute φ dérivable en un point x_0 , si on veut la valeur de sa dérivée en x_0 , on regarde l'application $\varphi \rightarrow \varphi'(x_0)$. Cette application est notée :

$$-\delta'_{x_0} : \begin{cases} C_{x_0}^1 \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto (-\delta'_{x_0})(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi'(x_0) \stackrel{\text{noté}}{=} \langle -\delta'_{x_0}, \varphi \rangle. \end{cases}$$

▀

Exemple 2.3 Soit E l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt < \infty$. Pour toute $\varphi \in E$, si on veut connaître "l'aire sous la courbe", on regarde l'application $\varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$. Cette application est notée :

$$T_{1_{\mathbb{R}}} : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto T_{1_{\mathbb{R}}}(\varphi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \langle T_{1_{\mathbb{R}}}, \varphi \rangle \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \langle 1_{\mathbb{R}}, \varphi \rangle. \end{cases}$$

Et ici on a simplement $\langle 1_{\mathbb{R}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}}(t) \varphi(t) dt (= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt)$. ▀

On "g\u00e9n\u00e9ralise" l'exemple pr\u00e9c\u00e9dent :

D\u00e9finition 2.4 Lorsque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (est localement int\u00e9grable sur \mathbb{R} i.e. telle que $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$), on appelle distribution T_f associ\u00e9e \u00e0 f l'application :

$$T_f : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto T_f(\varphi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \langle T_f, \varphi \rangle \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \langle f, \varphi \rangle, \end{cases} \quad (2.1)$$

o\u00f9 :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \text{ t.q. } \text{supp}(\varphi) \text{ est compact}\} \quad (2.2)$$

est l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ qui sont \u00e0 support compact (i.e. qui sont identiquement nulles \u00e0 l'ext\u00e9rieur d'un intervalle born\u00e9 : $\exists [a, b]$ t.q. $\forall x \notin [a, b]$ on a $\varphi(x) = 0$).

Comme $dm(t) = f(t) dt$ peut \u00eatre consid\u00e9r\u00e9e comme une mesure de densit\u00e9 f , sur tout intervalle born\u00e9, on a \u00e9galement, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (f(t) dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dm(t) = dm(\varphi),$$

i.e. $T_f(\varphi)$ est la mesure de la fonction φ par dm .

Remarque 2.5 Le choix de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans la d\u00e9finition ci-dessus permet :

d'une part de g\u00e9n\u00e9raliser cette d\u00e9finition aux masses de Dirac et \u00e0 ses d\u00e9riv\u00e9es, ainsi qu'\u00e0 des "objets relativement irr\u00e9guliers". Ainsi lorsqu'on consid\u00e8rera une expression de type " $\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt$ ", la r\u00e9gularit\u00e9 "infinie" de φ permettra de compenser le manque de r\u00e9gularit\u00e9 de f .

D'autre part, le choix de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dict\u00e9 par des consid\u00e9rations topologiques : pour que tout soit simple, il faudra que les distributions $T : \varphi \rightarrow T(\varphi)$ soient "continues", et en particulier que la forme bilin\u00e9aire $(T, \varphi) \rightarrow T(\varphi) \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \langle T, \varphi \rangle$ soit continue, i.e. se comporte "comme un produit scalaire". Voir cours de distributions et dualit\u00e9. ▀

D\u00e9finition 2.6 Une distribution dans \mathbb{R} est une application :

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

qui est \u00e0 la fois lin\u00e9aire et continue. Et on note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions.

La lin\u00e9arit\u00e9 signifie : $T(\varphi + \lambda\psi) = T(\varphi) + \lambda T(\psi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tous $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Et la continuit\u00e9 signifie : si (φ_n) est une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors (T, φ_n) converge vers (T, φ) dans \mathbb{R} ; le seul "petit" probl\u00e8me est de savoir ce que veut dire "la suite (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ " : cela signifie que toutes les fonctions appartiennent \u00e0 un m\u00eame compact et que les d\u00e9riv\u00e9es $f_n^{(k)}$ (\u00e0 tout ordre $k \in \mathbb{N}$) converge uniform\u00e9ment vers $f^{(k)}$ quand $n \rightarrow \infty$. On renvoie au cours de distributions. Dans toute la suite, et pour tous les exemples du traitement du signal, quand on parlera de distributions c'est que cette continuit\u00e9 est v\u00e9rifi\u00e9e.

Exemple 2.7 $\delta_{x_0}, \delta'_{x_0}, T_f$ pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, sont des distributions. ▀

Comme T est lin\u00e9aire et continue, on utilise \u00e9galement le crochet de dualit\u00e9 :

$$T(\varphi) \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \langle T, \varphi \rangle. \quad (2.4)$$

En particulier quand $T = T_f$ est une distribution r\u00e9guli\u00e8re (avec donc $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$), on a :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \int T\varphi. \quad (2.5)$$

2.2 Convergence des distributions

Les distributions sont des objets limites de fonctions : on montre (voir cours de distributions) que toute distribution est limite d'une suite de fonctions régulières, et plus précisément :

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \quad \text{t.q. :}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad T(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \varphi(t) dt \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}(\varphi)).$$

Et on note alors :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

N.B. : au lieu de prendre une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut prendre une suite de fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Exemple 2.8 La masse de Dirac δ_0 est limite de fonctions portes $\Pi_n = n1_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$: on a bien, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \Pi_n(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) = \delta_0(\varphi),$$

i.e. :

$$\Pi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta_0.$$

(On n'est pas obligé de centrer les portes en 0 : du moment que leur support contienne 0. Par exemple $(n1_{]0, \frac{1}{n}]})_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou encore $(n1_{]0, \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge aussi vers δ_0 au sens des distributions.) ■

Exemple 2.9 Et si on préfère approcher la masse de Dirac par des fonctions f_n C^∞ à support compact (i.e. $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) : par exemple on définit la fonction positive :

$$\zeta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{si } t \in]-1, 1[, \\ 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[. \end{cases}$$

Puis on pose $\gamma_1(t) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \zeta(t) dt} \zeta(t)$, qui vérifie donc $\int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t) dt = 1$ (masse unité), puis on "concentre" γ_1 en posant $\gamma_n(t) = n\gamma_1(nt)$. Toutes les fonctions γ_n sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $\text{supp}(\gamma_n) =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ et vérifient $\int_{\mathbb{R}} \gamma_n(t) dt = 1$ (masse unité), et on vérifie que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \gamma_n(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) = \delta_0(\varphi),$$

i.e. :

$$\gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta_0.$$

■

Exemple 2.10 Plus généralement, on montre que si $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ ou $\in L^2(\mathbb{R})$ est une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}} f_1(t) dt = 1$, alors en la concentrant en posant $f_n(t) = nf_1(nt)$, alors les f_n convergent vers la masse de Dirac. Exemple : la fonction sinus cardinal, pour $a > 0$:

$$\text{sinc}_a(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sin(at)}{at}, \quad (2.6)$$

prolongée par continuité en $t=0$ en $\text{sinc}_a(0) = 1$, est telle que $\int_{\mathbb{R}} a \text{sinc}_a(t) dt = \pi$ pour tout $a > 0$ et est dans $L^2(\mathbb{R})$. On pose $f_1 = \text{sinc}_1$ et $f_n = nf_1(n \cdot) = n \text{sinc}_n$, alors on a $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \pi$ et la suite (f_n) converge vers $\pi\delta_0$:

$$n \text{sinc}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi\delta_0. \quad (2.7)$$

De même pour le sinus cardinal au carré qui est dans $L^1(\mathbb{R})$: on a $\int_{\mathbb{R}} a \text{sinc}_a^2(t) dt = \pi$ pour tout $a > 0$, et donc :

$$n \text{sinc}_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi\delta_0. \quad (2.8)$$

■

Remarque 2.11 Application pratique : si pour $n \gg 1$ on veut calculer $\int_{\mathbb{R}} n \operatorname{sinc}_n(t) \varphi(t) dt$ pour une fonction φ donnée, le calcul exacte risque d'être long... Mais on a :

$$\int_{\mathbb{R}} n \operatorname{sinc}_n(t) \varphi(t) dt \simeq \pi \varphi(0),$$

l'approximation étant d'autant meilleur que n est grand. Et cette valeur ne demande aucun effort de calcul. Donc, pour n grand, on modélise la fonction $n \operatorname{sinc}_n$ en la remplaçant par la distribution $\pi \delta_0$: attention : uniquement pour faire le calcul d'intégration approché ci-dessus. ■

2.3 Transformée de Fourier de certaines distributions

Si $T = T_f$ est une distribution régulière, et si f admet une transformée de Fourier \widehat{f} , on veut bien sûr que :

$$\widehat{(T_f)} = T_{(\widehat{f})},$$

et d'ailleurs comme on note abusivement $T_f = f$, et on veut bien sûr que $\widehat{\widehat{f}} = f$.

I.e. on veut, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \widehat{(T_f)}, \varphi \rangle = \langle T_{(\widehat{f})}, \varphi \rangle \quad \text{donc} \quad = \int_{\nu \in \mathbb{R}} \widehat{f}(\nu) \varphi(\nu) d\nu. \quad (2.9)$$

Mais avec le théorème de Fubini, on a immédiatement :

$$\int_{\nu \in \mathbb{R}} \widehat{f}(\nu) \varphi(\nu) d\nu = \int_{t \in \mathbb{R}} f(t) \widehat{\varphi}(t) dt = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Et donc (2.9) s'écrit, quand $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \widehat{(T_f)}, \varphi \rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle. \quad (2.10)$$

D'où la définition, généralisation de (2.10) au cas où T n'est pas une distribution régulière (n'est pas de la forme T_f avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$) :

Définition 2.12 Quand ça a un sens, on définit \widehat{T} la transformée de Fourier d'une distribution T par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle. \quad (2.11)$$

et on note $\widehat{\widehat{T}} = \mathcal{F}(T)$, et on a donc, quand ça a un sens :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle. \quad (2.12)$$

On montre qu'on peut définir la transformée de Fourier de toute distribution dont "la croissance est au plus polynomiale au voisinage de $\pm\infty$ ", voir cours de distributions. En particulier toutes les distributions utilisées en traitement du signal ont une transformée de Fourier (au sens des distributions).

Exemple 2.13 On a $\widehat{\delta}_0 = 1_{\mathbb{R}}$, donc au sens $\widehat{\delta}_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$.

En effet $\langle \widehat{\delta}_0, \varphi \rangle = \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) e^{2ik\pi 0t} dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$. ■

Exemple 2.14 On a $\widehat{1_{\mathbb{R}}} = \delta_0$, donc au sens $\langle \widehat{1_{\mathbb{R}}}, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Voir cours de distribution (avec Fourier inverse pour les distributions on utilise l'exercice précédent). ■

Définition 2.15 On dit qu'une distribution T est à support compact ssi il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - K)$ (pour toutes les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui ont leur support dans l'ouvert $\mathbb{R} - K$) on a $T(\varphi) = 0$.

Et on dit alors que T s'annule sur $\mathbb{R} - K$ (au sens ci-dessus).

Exemple 2.16 En particulier si $T = T_f$ est une distribution régulière, alors on montre que $\operatorname{supp}(T) = \operatorname{supp}(f)$.

Pour la masse de Dirac δ_a on a $\operatorname{supp}(\delta_a) = \{a\}$. ■

Pour les distributions à support compact on a le résultat très simple :

Proposition 2.17 Si T est à support compact, alors sa transformée de Fourier est une fonction (qui d'ailleurs est C^∞ et dont le support n'est jamais compact) qui est donnée par :

$$\widehat{T}(\nu) = T(e^{-2i\pi\nu\cdot}) = \langle T, e^{-2i\pi\nu\cdot} \rangle \stackrel{\text{noté}}{=} \int_{\mathbb{R}} T(t)e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (2.13)$$

(Attention à cette dernière notation car T n'est pas une fonction.)

Preuve. Appliquer (2.12), voir cours de distributions. ▀

Exemple 2.18 Avec (2.13), on a $\widehat{\delta}_0(\nu) = \delta_0(e^{-2i\pi\nu\cdot}) = e^{-2i\pi\nu\cdot 0} = 1$ pour tout ν , soit donc $\widehat{\delta}_0 = 1_{\mathbb{R}}$.

On a $\widehat{\delta}_a(\nu) = \delta_a(e^{-2i\pi\nu\cdot}) = e^{-2i\pi\nu a}$ pour tout ν .

C'est si simple qu'on note abusivement $\widehat{\delta}_a(\nu) = \int_{t \in \mathbb{R}} \delta_a(t)e^{-2i\pi\nu t} dt$, notation qui n'a aucun sens (δ_a n'est pas une fonction)... mais qui est très pratique quand on n'en abuse pas.

On a $\mathcal{F}(\delta_a + \delta_{-a})(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} + e^{2i\pi\nu a} = 2 \cos(2\pi\nu a)$.

On a $\mathcal{F}(\delta_a - \delta_{-a})(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} - e^{2i\pi\nu a} = -2i \sin(2\pi\nu a)$.

On a $\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(\nu) = \int_{t=-a}^a e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{1}{-2i\pi\nu} [e^{-2i\pi\nu t}]_{-a}^a = \frac{1}{2i\pi\nu} (e^{2i\pi\nu a} - e^{-2i\pi\nu a})$ et donc :

$$\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(\nu) = \frac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu} = 2a \operatorname{sinc}_{2\pi a}(\nu), \quad (2.14)$$

et une fonction porte est transformée en une fonction sinus cardinal. Déjà vu. ▀

2.4 Transformée de Fourier inverse

On conserve le résultat vu pour les fonctions :

Proposition 2.19 Si T est une distribution tempérée (dont "la croissance à l'infini est au plus polynomiale"), alors $\mathcal{F}(T)$ est une distribution tempérée, et \mathcal{F} est inversible avec :

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle. \quad (2.15)$$

(Autre notation : $\mathcal{F}^{-1}(T)(\varphi) = T(\mathcal{F}^{-1}(\varphi))$.) (A comparer avec (2.12).) Et on a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(T)) = \check{T}, \quad (2.16)$$

où \check{T} est défini par :

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \check{\varphi} \rangle,$$

noté $= \int_{\mathbb{R}} T(-t)\varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} T(t)\varphi(-t) dt$.

Preuve. Voir cours de distributions. ▀

Exemple 2.20 On a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta_0)) = \check{\delta}_0$, et comme δ_0 est paire (au sens $\delta_0(\check{f}) = \delta_0(f)$ car $= f(0)$), on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta_0)) = \delta_0$. Et ici on obtient $\mathcal{F}(\delta_0) = \mathcal{F}^{-1}(\delta_0)$ qui vaut $= 1_{\mathbb{R}}$. ▀

2.5 Convolution

La convolution est une méthode de calcul de "valeurs moyennes" d'une fonction ou d'une distribution, ainsi qu'un outil de calcul très pratique.

Définition 2.21 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Quand ça a un sens, on définit une nouvelle fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \int_{s \in \mathbb{R}} f(s)\varphi(t-s) ds \stackrel{\text{noté}}{=} (f * \varphi)(t), \quad (2.17)$$

et cette nouvelle fonction, notée $g = f * \varphi$, est appelé le produit de convolution de f par φ

Et quand ça a un sens (i.e. quand pour t donné la valeur de l'intégrale existe dans \mathbb{R}), on a :

$$f * \varphi = \varphi * f,$$

par changement de variable immédiat. C'est une des raisons essentielles pour laquelle on choisit le signe “-” (moins) dans $t-s$, et qu'on choisit $t-s$ et non $s-t$ dans la définition (2.17).

Ainsi la relation :

$$* : (f, \varphi) \rightarrow f * \varphi$$

est un produit commutatif, i.e. est distributif : $(f+g) * (\varphi+\psi) = f * \varphi + g * \varphi + f * \psi + g * \psi$, et c'est commutatif : $f * g = g * f$. Ainsi il se comporte (presque) comme le produit usuel dans \mathbb{R} , d'où des calculs simples.

Interprétation. On a $(f * \varphi)(t) = \int_{s \in \mathbb{R}} \varphi(s) dm$, où $dm = f(t-s) ds$ est la mesure de densité $\rho_t(s) = f(t-s)$. En d'autres termes, c'est une valeur “moyenne” de φ après pondération par la densité massique dm .

Ainsi si $f = 1_{\mathbb{R}}$ on obtient la masse de φ , i.e. $(1_{\mathbb{R}} * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$.

Et si $f = \gamma_n$ une approximation de la masse de Dirac δ_0 , on obtient $(\gamma_n * \varphi)(t) = \int_{s \in \mathbb{R}} \varphi(s) \gamma_n(t-s) ds \simeq \varphi(t)$ la valeur ponctuelle de φ en t . Et γ_n représente un “vrai” appareil de mesure de la valeur de φ en t , appareil de mesure d'autant plus précis que n est grand, l'appareil de mesure idéal (infiniment précis) étant donné par $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \delta_0$.

D'ailleurs on posera $\delta_0 * \varphi = \varphi = \varphi * \delta_0$, avec donc $(\varphi * \delta_0)(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour les distributions, on veut que $S * T$ ait un sens, i.e. on veut pouvoir considérer $S * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Et bien sûr, on veut conserver le sens qu'on connaît déjà pour les fonctions. On a, si $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle f * \varphi, \psi \rangle &= \int_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_{s \in \mathbb{R}} f(s) \varphi(t-s) ds \right) \psi(t) dt \\ &= \iint_{t, s \in \mathbb{R}} f(s) \varphi(t) \psi(t+s) ds dt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Définition 2.22 Si S et T sont deux distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit leur produit de convolution $S * T$, quand cela a un sens, comme étant la distribution définie par, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle S * T, \psi \rangle = \iint_{t, s \in \mathbb{R}} S(s) T(t) \psi(s+t) ds dt. \quad (2.19)$$

(Sans abus de notation, on commence par définir $S \otimes T$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par, pour $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle S \otimes T, f \otimes g \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)} = \langle S, f \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R})} \langle T, g \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$$
 le produit simple,

ce qui permet de donner un sens à $\langle S \otimes T, h \rangle$ pour tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, puis on définit $h(s, t) = \psi(s+t)$, puis on définit $S * T$ par :

$\langle S * T, \psi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R})} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle S \otimes T, h \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)}$, voir cours de distributions. La notation utilisant l'intégrale dans (2.19) simplifie la compréhension.)

On démontre qu'on peut toujours appliquer Fubini, i.e. intégrer dans l'ordre qu'on veut (d'abord en s ou d'abord en t , au choix), à condition de prendre $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Et on démontre que dès que l'une des distribution a un support compact, le produit de convolution des distributions existe toujours. Et que δ_0 est l'élément neutre du produit :

$$\delta_0 * T = T,$$

pour toute distribution T , voir le cours de distribution. C'est formellement immédiat avec (2.19) puisque $\int_{t \in \mathbb{R}} T(t) \left(\int_{s \in \mathbb{R}} \delta_0(s) \psi(s+t) ds \right) dt = \int_t T(t) \psi(0+t) dt = T(\psi)$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Et c'est vrai pour T fonction et pour T distribution.

Et on démontre que δ_a est le changement d'origine (décalage) :

$$\delta_a * T = \tau_a T \quad \text{noté abusivement} \quad (\delta_a * T)(x) = T(x-a).$$

C'est formellement immédiat puisque $\int_{t \in \mathbb{R}} T(t) \left(\int_{s \in \mathbb{R}} \delta_a(s) \psi(s+t) ds \right) dt = \int_t T(t) \psi(a+t) dt = T(\tau_{-a} \psi) = \tau_a T(\psi)$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque 2.23 De manière générale, on a, quand cela a un sens $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$: l'intégrale double $\widehat{f * g}$ est égale au produit des intégrales simples \widehat{f} et \widehat{g} (calcul immédiat par changement de variables dans \mathbb{R}^2). Donc la fonction transformée du produit de convolution par Fourier est la fonction produit des transformées de Fourier.

Et de même, quand cela a un sens $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Et quand toutes les quantités existent, c'est encore vrai pour les distributions.

Et c'est ainsi qu'on montre que $\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}_a(t) dt = \frac{\pi}{a}$, voir (1.38). ▀

2.6 Peignes de Dirac et Fourier

2.6.1 Définition

On aborde ici les notations utilisées en échantillonnage et les techniques de calcul associées.

Définition 2.24 Le peigne de Dirac de période $a > 0$ est la distribution Δ_a définie par :

$$\Delta_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka} = \dots + \delta_{-2a} + \delta_{-a} + \delta_0 + \delta_a + \dots \quad (2.20)$$

(On peut également prendre $a < 0$, mais il est immédiat que $\Delta_{-a} = \Delta_a$.)

Donc, pour φ donnée (fonction supposée continue aux ka) :

$$\Delta_a(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka) = \dots + \varphi(-2a) + \varphi(-a) + \varphi(0) + \varphi(a) + \dots \quad (2.21)$$

Le minimum pour que $\Delta_a(\varphi)$ est un sens est que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka)$ soit $< \infty$.

Remarque 2.25 On a $\delta_\varepsilon * \Delta_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_\varepsilon * \delta_{ka} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka - \varepsilon} = \dots + \delta_{-2a - \varepsilon} + \delta_{-a - \varepsilon} + \delta_{-\varepsilon} + \delta_{a - \varepsilon} + \dots$ est le peigne décalé. ▀

2.6.2 Transformation par Fourier : formules sommatoires de Poisson

On a immédiatement la première formule de Poisson :

$$\widehat{\Delta}_a(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi k a \nu}. \quad (2.22)$$

(On se sert de la linéarité et de la continuité de la transformée Fourier et de $\widehat{\delta}_a(\nu) = e^{-2i\pi a \nu}$.)

La seconde formule de Poisson demande un peu de travail (voir cours de distributions) :

$$\widehat{\Delta}_a = b \Delta_b, \quad b = \frac{1}{a}. \quad (2.23)$$

En particulier pour $a = 1$ le peigne de Dirac est conservé par Fourier : $\widehat{\Delta}_1 = \Delta_1$.

Donc un peigne de Dirac de période $a \gg 1$ (peigne "très lâche" de "hauteur 1") est transformé par Fourier en un peigne de Dirac de période $b = \frac{1}{a} \ll 1$ (peigne "très serré" de "hauteur $b \ll 1$ ").

(C'est une illustration particulière de la propriété de concentration – étalement par Fourier.)

2.6.3 Prolongement par périodicité

Et si f est une fonction, on a formellement pour tout t :

$$\begin{aligned} (f * \Delta_a)(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_{ka} * f)(t) = \sum_k \tau_{ka}(f)(t) = \sum_k f(t - ka) \\ &= \dots + f(t - a) + f(t) + f(t + a) + f(t + 2a) + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mais (2.24) est toujours faux pour f périodique (non nulle) de période a : on aurait, en un point t tel que $f(t) \neq 0$, la somme = infinie.

Soit f une fonction périodique de période a . On note $f_a = \stackrel{\text{déf}}{=} f1_{[0,a]}$ (troncature de f à l'intervalle $[0, a]$). Alors on a :

$$f = f_a * \Delta_a.$$

Et cette approche est applicable aux distributions : si T est une distribution périodique de période a (i.e. telle que $\tau_a T = T$), alors il existe une distribution S à support compact telle que :

$$T = S * \Delta_a. \quad (2.25)$$

Si T est régulière (i.e. $T = T_f$ avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$), on peut prendre S telle que $\text{supp}(S) \subset [0, a]$.

Par contre, pour une distribution T quelconque (non régulière) de période a , on pourra prendre S telle que $\text{supp}(S) \subset [-\varepsilon, a+\varepsilon]$ quelque soit $\varepsilon > 0$, mais en général on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$.

Exemple 2.26 Pour le peigne de Dirac on peut prendre $\varepsilon = 0$: le peigne de Dirac $T = \Delta_a$ est périodique de période a , et ici $S = \delta_0$ convient : on a bien $\Delta_a = \delta_0 * \Delta_a$. ■

2.7 Théorème de Shannon pour les fonctions trigonométriques

Prenons le cas de la fonction $\sin(2\pi Bt) = \frac{e^{i2\pi Bt} - e^{-i2\pi Bt}}{2i}$, qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ mais dont la transformée de Fourier $\frac{i}{2}(\delta_B - \delta_{-B})$ est une distribution à support compact dans $[-B, B]$. Si (1.49) était vraie, on aurait $\sin(Bt) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin(B(\frac{k\pi}{B})) \frac{\sin(Bt - k\pi)}{Bt - k\pi} = 0$ pour tout t car $\sin(B(\frac{k\pi}{B})) = 0$ pour tout k , donc \sin est la fonction nulle. C'est absurde. Donc (1.49) est faux pour $f = \sin$ (noter bien sûr que $\sin \notin L^2(\mathbb{R})$).

On devra se contenter de (1.51) avec $C > B$.

Théorème 2.27 Soit $e_B(t) = e^{i2\pi Bt}$ où $B > 0$. Si $C > B$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$e_B(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_B\left(\frac{k}{C}\right) \tau_{\frac{k}{C}} \text{sinc}_{\pi C}(t), \quad (2.26)$$

i.e. la fonction $e^{i2\pi Bt}$ est décomposable sur les fonctions $(\text{sinc}_{\pi C}(t - \frac{k}{C}))_{k \in \mathbb{Z}}$ (à condition de prendre $C > |B|$).

Et, par linéarité, si $f = \sum_{k=-N}^N c_k e^{i2\pi B_k t}$ (somme finie), où les $B_k \in \mathbb{R}$ et les $c_k \in \mathbb{C}$, on a :

$$\text{si } C > \max_{k=-N, N} |B_k| \text{ alors } f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{C}\right) \frac{\sin(Ct - k\pi)}{Ct - k\pi}, \quad (2.27)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Voir cours de distributions. ■

Références

- [1] Gasquet C., Witomski P. : *Analyse de Fourier et applications*. Dunod, 2000.
- [2] Hervé M. : *Transformation de Fourier et distributions*. Puf, 1986.
- [3] Mallat S. : *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 2nd edition, 1999.
- [4] Meyer Y. : Le traitement du signal et l'analyse mathématique. *Annales de l'Institut Fourier*. Tome 50, n°2 (2000), pp.593-632.
- [5] Schwartz L. : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1965 (nouveau tirage 1993).
- [6] Strang G. : *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [7] Strang G. : *Signal Processing for Everyone*.
<http://www-math.mit.edu/gs/papers/newsigproc.ps>