

Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et

Éléments finis

Gilles LEBORGNE

11 septembre 2024

Les paragraphes commençant par une étoile * sont hors-programme. Ils sont donnés comme compléments pouvant être utiles lors de projets, de stages ou dans le but de préparer un master de mathématiques appliquées.

Table des matières

I Problèmes elliptiques	3
1 Introduction aux espaces de Hilbert	4
1.1 Produit scalaire	4
1.2 Espaces préhilbertiens et hilbertiens	4
1.3 Inégalité de Cauchy–Schwarz	5
1.4 Une application	6
1.5 L'espace de Hilbert ℓ^2	7
1.6 Remarque sur les espaces vectoriels fermés ou non	8
1.7 Projection	9
2 Introduction aux espaces de Sobolev	11
2.1 Espaces $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^n$	11
2.2 Notions de distributions	12
2.2.1 Espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact	12
2.2.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	13
2.2.3 Notation intégrale	14
2.2.4 Dérivation des distributions	15
2.2.5 Exemples de dérivations	15
2.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	17
2.4 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré	19
2.5 L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$	22
2.6 Théorèmes de trace et formules de Green	23
2.6.1 Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$	23
2.6.2 Formule de Green dans $H^1(\Omega)$	24
2.6.3 $H_0^1(\Omega) = \text{Ker}(\gamma_0)$	25
2.6.4 Dans $H^2(\Omega)$	25
2.7 * Espace de Sobolev $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et inégalité de Poincaré généralisée	26
2.8 * Cas vectoriel : l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)^2$ et inégalités de Korn	27
3 Problèmes aux limites elliptiques et formulations variationnelles	29
3.1 Rappels matriciels	29
3.2 Opérateur différentiel elliptique	31
3.3 Problème variationnel abstrait	33
3.3.1 Rappel : continuité et linéarité	33
3.3.2 Le problème	34
3.3.3 Coercitivité	35
3.4 Théorème de Lax–Milgram	36
3.4.1 Théorème de représentation de Riesz–Fréchet	36
3.4.2 Théorème de Lax–Milgram	37
3.4.3 Interprétation du problème	38
3.5 Applications	38
3.5.1 Problème de Dirichlet homogène et condition aux limites essentielle	38
3.5.2 Problème de Dirichlet non homogène et condition aux limites essentielle	42
3.5.3 Problème de Neumann homogène et condition aux limites naturelle	44
3.5.4 Problème de Neumann non homogène et condition aux limites naturelle	46
3.5.5 * Problème mixte Dirichlet–Neumann	47
3.5.6 * Autre Condition aux limites mixte	48

3.6	* Principe du maximum	49
3.7	* Un problème de transmission	49
3.8	* Interface et équation de Steklov–Poincaré	51
3.9	* Un problème avec conditions aux limites périodiques	52
3.10	* Exemple de problème avec condition de compatibilité	53
3.11	* Cas du laplacien dans \mathbb{R}^2	54
3.11.1	Cas du laplacien	54
3.11.2	Un problème symétrique : cas de l'élasticité	54
3.11.3	Système de Stokes	55
3.12	* Régularité des solutions faibles	58
II Approximations variationnelles		59
4	Approximation variationnelle abstraite	60
4.1	Le problème variationnel abstrait	60
4.2	Conformité	60
4.3	Convergence de u_h vers u	61
4.4	Rapidité de la convergence	62
4.5	Méthode de Ritz-Galerkin	62
5	Introduction aux éléments finis 1-D	63
5.1	Triangulation	63
5.2	P_0 espace des fonctions constantes par morceaux	63
5.2.1	Base de P_0	63
5.2.2	Approximation L^2 d'une fonction $f \in L^2(]0, 1[)$ par une fonction P_0	64
5.2.3	Approximation $H^1(\Omega)$ d'une fonction $f \in H^1(\Omega)$ par une fonction P_0	65
5.3	P_1 espace des fonctions continues qui sont affines par morceaux	65
5.3.1	Base de P_1	65
5.3.2	Approximation L^2 d'une fonction $f \in L^2(]a, b[)$ par une fonction P_1	66
5.3.3	Approximation $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ par une fonction P_1	67
5.4	P_2 espace des fonctions continues qui sont quadratiques par morceaux	68
5.4.1	Base de P_2	68
5.4.2	Approximation L^2 d'une fonction $f \in L^2(]a, b[)$ par une fonction P_2	69
5.4.3	Approximation $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ par une fonction P_2	69
5.5	Éléments finis de Lagrange P_k	69
5.5.1	Définition d'un Élément fini de Lagrange	69
5.5.2	Opérateur d'interpolation Π_K	70
5.5.3	Base de la méthode des éléments finis et éléments finis C^0	70
5.6	Approximation de problèmes elliptiques aux limites du second degré en dimension 1	71
5.6.1	Avec conditions aux limites de Dirichlet	71
5.6.2	Avec conditions aux limites de Neumann	72
5.7	Remarques	73
5.7.1	Convergence ponctuelle	73
5.7.2	Approximation numérique des intégrales	73
5.7.3	Assemblage	74
6	* Exemple d'éléments finis généraux : ceux de classe C^1	75
6.1	Une motivation : problème elliptique de degré 4	75
6.2	Généralisation de la notion de degré de liberté	75
6.3	Exemple d'éléments finis de classe C^1	76
6.3.1	Construction d'un élément fini	76
6.3.2	Construction d'un maillage éléments finis de classe C^1	77
7	Introduction aux éléments finis 2-D	77
7.1	Triangles et base de P_1	77
7.2	Triangles et base de P_2	78
7.3	Quadrangles et base de Q_1	79
7.4	Quadrangles et base de Q_2	79
7.5	Résolution de problèmes elliptiques du second degré	80
7.5.1	Résolution de ' $-\Delta u = f$ ' dans $H_0^1(\Omega)$	80
7.5.2	Résolution des problèmes elliptiques du second ordre	80

8	Coordonnées barycentriques	81
8.1	Simplexe et coordonnées barycentriques dans \mathbb{R}^n	81
8.1.1	Définition d'un n -simplexe (simplexe dans \mathbb{R}^n)	81
8.1.2	Définition des coordonnées barycentriques	82
8.1.3	Écriture matriciel et calcul des coordonnées barycentriques	82
8.1.4	Les fonctions coordonnées barycentriques = les fonctions P_1 de base	83
8.1.5	Exemples	84
8.1.6	Interprétation "massique" des coordonnées barycentriques	85
8.1.7	Théorème de Thalès dans \mathbb{R}^2	85
8.1.8	Théorème de Thalès dans \mathbb{R}^n	86
9	Méthode des éléments finis	87
9.1	Cadre	87
9.2	Définition d'un élément fini (de Lagrange)	87
9.3	Éléments finis simpliciaux	88
9.3.1	Définition de P_k	88
9.3.2	Σ_k treillis principal d'ordre k	88
9.3.3	Élément fini n -simplexe de type (k)	89
9.3.4	Exemples de 2-simplexes de type k , simplexe de référence	89
9.4	Famille d'éléments finis	90
9.4.1	Introduction	90
9.4.2	Famille d'éléments finis affines-équivalents	91
9.5	Maillage éléments finis : triangulation de Ω	92
9.5.1	Triangulation	92
9.5.2	Opérateur d'interpolation sur K	92
9.5.3	Opérateur d'interpolation sur \mathcal{T}	93
9.6	Éléments finis de classe C^m , exemple P_1	93
9.7	Méthode des éléments finis, exemple 2-D, éléments finis P_1	93
9.7.1	Résolution d'un problème elliptique aux limites approché 2-D	93
9.7.2	Calcul des fonctions de base	94
9.7.3	Calcul d'intégrales, assemblage	95
9.7.4	Calcul des termes élémentaires	95
9.7.5	Calcul des termes de bord	96
9.8	Un résultat d'approximation et de convergence dans les Sobolev	97
9.8.1	Un résultat d'approximation dans les Sobolev : cas $\Omega = K$	97
9.8.2	Résultat d'approximation : cas $\Omega = K$ affine équivalent à \hat{K}	98
9.8.3	Maillage régulier et convergence de la méthode des éléments finis	99
A	Quelques rappels sur les formes et applications linéaires continues	100
A.1	Application continue	100
A.2	Applications et formes linéaires	100
A.3	Forme linéaire continue et sa norme	100
A.4	Normes sur \mathbb{R}^n	101
A.5	Application linéaire continue de E dans \mathbb{R}^n	102
A.6	Valeurs propres de matrices	102
B	Rappels d'intégration	104
B.1	Intégration de fonctions rationnelles	104
B.2	Intégration par parties dans \mathbb{R}	104
B.3	Opérateurs différentiels usuels dans \mathbb{R}^n	105
B.4	Intégration par parties dans \mathbb{R}^n	105
C	Triangulation et relation d'Euler–Poincaré	106

Première partie

Problèmes elliptiques

Si on souhaite se rendre compte rapidement et plus en détail de ce qu'est la technique des éléments finis, on renvoie au paragraphe 5 qui traite du cas 1-D et au paragraphe 7 qui traite du cas 2-D.

1 Introduction aux espaces de Hilbert

1.1 Produit scalaire

Une forme bilinéaire $\varphi(\cdot, \cdot)$ sur un espace vectoriel réel H est une application de $H \times H$ dans \mathbb{R} telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y), \\ \varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha \varphi(x, y_1) + \beta \varphi(x, y_2).\end{aligned}$$

(Linéarité par rapport à chaque variable.)

Elle est dite symétrique (et resp. positive, strictement positive) si, pour tout $x, y \in H$:

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad (\text{resp. } \varphi(x, x) \geq 0, \quad \varphi(x, x) > 0 \text{ si } x \neq 0).$$

Un produit scalaire sur un vectoriel réel H est une forme bilinéaire symétrique et définie positive; on la notera $(\cdot, \cdot)_H$.

Une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel complexe H est une application de $H \times H$ dans \mathbb{C} telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y), \\ \varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \bar{\alpha} \varphi(x, y_1) + \bar{\beta} \varphi(x, y_2).\end{aligned}$$

(Linéarité par rapport à la première variable, antilinéarité par rapport à la seconde.)

Elle est dite hermitienne (et resp. positive, strictement positive) si, pour tout $x, y \in H$:

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} \quad (\text{resp. } \varphi(x, x) \geq 0, \quad \varphi(x, x) > 0 \text{ si } x \neq 0).$$

Un produit scalaire sur un vectoriel complexe H est une forme sesquilinéaire hermitienne et définie positive; on la notera $(\cdot, \cdot)_H$.

On rappelle qu'une norme sur H est une application $p : H \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{aligned}(i) \quad & p(x) \geq 0, \quad \forall x \in H \quad \text{et} \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ (ii) \quad & p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in H \\ (iii) \quad & p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in H\end{aligned}$$

La dernière inégalité est l'inégalité triangulaire qui s'écrit aussi $p(x - y) \leq p(x - z) + p(z - y)$ pour tout $x, y, z \in H$.

On associe à un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ la norme définie sur H par :

$$\|x\|_H = \sqrt{(x, x)_H}. \quad (1.1)$$

On vérifie immédiatement que $\|\cdot\|_H$ est bien une norme. On omet l'indice H quand aucune confusion n'est possible.

1.2 Espaces préhilbertiens et hilbertiens

Soit E un espace vectoriel muni d'une normé $\|\cdot\|_E$. On rappelle qu'une suite de Cauchy de E est une suite (x_n) de E telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N, \|x_n - x_m\|_E \leq \varepsilon.$$

Cela s'écrit en termes de limite comme : $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_E = 0$.

Et un espace normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E . Un tel espace est dit de Banach.

Définition 1.1 Un espace vectoriel réel ou complexe H est un espace préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$. On note $\|\cdot\|_H$ la norme associée (donnée par $\|x\|_H = \sqrt{(x, x)_H}$).

Exercice 1.2 Montrer que toute suite convergente (x_n) vers x dans un pré-hilbert H est de Cauchy dans H .

Réponse. Hypothèse : $\forall \delta > 0, \exists M_\delta, \forall n \geq M_\delta, \|x - x_n\|_H \leq \delta$.

On veut montrer : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n, m \geq N_\varepsilon, \|x_n - x_m\|_H \leq \varepsilon$.

On a $\|x_n - x_m\|_H = \|x_n - x + x - x_m\|_H \leq \|x_n - x\|_H + \|x - x_m\|_H$, donc pour $\varepsilon > 0$ on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ et on a $\|x_n - x_m\|_H \leq \delta + \delta = \varepsilon$ dès que $n, m \geq M_\delta$, donc pour $\varepsilon > 0$ l'entier $N_\varepsilon = M_\delta$ convient. \blacksquare

Définition 1.3 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire. C'est donc en particulier un espace de Banach pour la norme dérivée du produit scalaire.

Définition 1.4 Soit $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ un espace préhilbertien. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux ssi $(x, y)_H = 0$, et on note $x \perp_H y$, ou plus simplement $x \perp y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix du produit scalaire. (L'orthogonalité dépend du produit scalaire choisi.)

Proposition 1.5 Dans un espace préhilbertien $(H, (\cdot, \cdot)_H)$, pour tout $x, y \in H$:

$$\begin{aligned} (1) \quad x \perp y &\iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 && \text{(théorème de Pythagore),} \\ (2) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 && \text{(identité du parallélogramme),} \\ (3) \quad (x, y) &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) && \text{(identité de polarisation),} \\ (4) \quad \|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 &= 2\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + \frac{1}{2}\|a - b\|^2 && \text{(identité de la médiane).} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Preuve. Immédiat : il suffit d'écrire $\|c\|^2 = (c, c)$. ▀

Exercice 1.6 Montrer que, dans $C^0([0, 2])$, la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2]} |f(x)|$ ne dérive pas d'un produit scalaire.

Réponse. Cette norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, cf. (1.2). Prendre $f = (1-x)1_{[0, 1]}$ et $g = (x-1)1_{[1, 2]}$ (faire un dessin), et on a $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = 1$. ▀

Exercice 1.7 Soit $p : H \rightarrow \mathbb{R}_+$ une norme sur H . Montrer que p dérive d'un produit scalaire ssi $p(x + y)^2 + p(x - y)^2 = 2p(x)^2 + 2p(y)^2$ (identité du parallélogramme).

Réponse. \Rightarrow . Si p dérive d'un produit scalaire, on note φ ce produit scalaire, avec donc $p(x)^2 = \varphi(x, x)$, d'où l'identité du parallélogramme.

\Leftarrow . On pose $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(p(x + y)^2 - p(x - y)^2)$. Si identité du parallélogramme, alors immédiatement $p(y - x)^2 = p(x - y)^2$ et $p(2x) = 4p(x)^2$. D'où φ est symétrique définie positive et $p(x)^2 = \varphi(x, x)$. ▀

Exercice 1.8 Montrer que, si $z, z' \in \mathbb{C}$, si $u^2 = zz'$, alors $|z| + |z'| = |\frac{z+z'}{2} + u| + |\frac{z+z'}{2} - u|$.

Réponse. C'est l'identité de la médiane dans $H = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, après avoir posé $a^2 = z$ et $a'^2 = z'$: on a alors $2(|a^2| + |a'^2|) = |a + a'|^2 + |a - a'|^2$ avec " $|c^2| = |c|^2 = \rho^2$ " quand $c = \rho e^{i\theta}$. ▀

1.3 Inégalité de Cauchy–Schwarz

La norme mesure la longueur. Le produit scalaire sert entre autres à mesurer l'orthogonalité de deux vecteurs : par définition $x \perp y$ dans H ssi $(x, y)_H = 0$. Cela permet de définir des bases orthonormales et d'effectuer des calculs simples grâce au théorème de Pythagore ou à la relation de Bessel-Parseval (Pythagore généralisé en dimension infinie). Et on a :

Proposition 1.9 (Inégalité de Schwarz) Dans un espace préhilbertien $(H, (\cdot, \cdot)_H)$:

$$|(x, y)_H| \leq \|x\|_H \|y\|_H, \quad \forall x, y \in H. \tag{1.3}$$

Avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Preuve. Soit $x, y \in H$ fixés non nuls (sinon c'est trivial). Dans un espace vectoriel réel, on considère le polynôme $P(t) = \|x - ty\|_H^2 = \|y\|_H^2 t^2 - 2(x, y)t + \|x\|_H^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a $P(t)$ positif pour tout t , car $\|\cdot\|_H$ est une norme, donc discriminant ≤ 0 , donc $(x, y)^2 - \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 \leq 0$. Et $P(t) = 0$ ssi $x - ty = 0$ (car $\|\cdot\|_H$ est une norme), i.e. ssi x et y sont colinéaires, i.e. $P(t)$ a une racine double, i.e. ssi le discriminant est nul, i.e. ssi $(x, y)^2 - \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 = 0$.

Dans un espace vectoriel complexe on se ramène au cas précédent avec le polynôme $P(t) = \|x - t\alpha y\|_H^2 = |\alpha|^2 \|y\|_H^2 t^2 - (\alpha(y, x) + \bar{\alpha}(x, y))t + \|x\|_H^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, et on choisit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et $\alpha(y, x)_H \in \mathbb{R}$. ▀

L'importance considérable des espaces préhilbertiens et hilbertiens (existence d'un produit scalaire) est due au théorème de Cauchy–Schwarz et à la simplicité des calculs qui en résultent.

Corollaire 1.10 *Continuité du produit scalaire.* Si $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de points dans l'Hilbert H , alors :

$$(x_n)_{\mathbb{N}} \text{ converge dans } H \text{ vers } x \iff \forall y \in H, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y)_H = (x, y)_H = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y \right)_H. \quad (1.4)$$

Autrement dit, on peut passer à la limite sous le signe $(\cdot, \cdot)_H$, ou encore (x_n) converge ssi toutes les projections $(x_n, y)_H$ convergent vers $(x, y)_H$.

Preuve. Notons $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ la limite dans H .

\Rightarrow . Par hypothèse $\|x - x_n\|_H \rightarrow 0$, donc, pour $y \in H$, $|(x - x_n, y)_H| \leq \|x - x_n\|_H \|y\|_H \rightarrow 0$, donc $(x - x_n, y)_H \rightarrow 0$, donc $(x_n, y)_H \rightarrow (x, y)_H$.

\Leftarrow . On a $\lim_{n \rightarrow \infty} (x - x_n, y)_H = 0$ pour tout y . On prend $y = x - x_n$. \blacksquare

Définition 1.11 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot) : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue ssi :

$$\exists c > 0, \quad \forall (u, v) \in E \times F, \quad |b(u, v)| \leq c \|u\|_E \|v\|_F, \quad (1.5)$$

i.e. ssi $b(\cdot, \cdot)$ est bornée sur la "boule cartésienne carrée" $B_C = \{(u, v) \in E \times F : \|u\|_E \leq 1, \|v\|_F \leq 1\}$. Et on note $\|b\|$ la plus constante possible : $\|b\| = \sup_{(u, v) \in E \times F} \frac{|b(u, v)|}{\|u\|_E \|v\|_F}$.

Corollaire 1.12 *Continuité du produit scalaire bis.* Si $a(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur l'Hilbert H qui est continu, si $(x_n)_{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{\mathbb{N}}$ sont deux suites convergents dans l'Hilbert H , respectivement vers x et y , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(x_n, y_n)_H = a(x, y)_H. \quad (1.6)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} |a(x, y)_H - a(x_n, y_n)_H| &\leq |a(x, y)_H - a(x_n, y)_H| + |a(x_n, y)_H - a(x_n, y_n)_H| \\ &\leq \|a\| \|x - x_n\|_H \|y\|_H + \|a\| \|x_n\|_H \|y - y_n\|_H. \end{aligned}$$

(x_n) est convergente, donc bornée, donc le membre de droite tend vers 0 avec n . \blacksquare

1.4 Une application

On a toujours dans \mathbb{R} : $(a - b)^2 \geq 0$, ce qui donne :

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

On en déduit :

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

puisque $2abcd \leq a^2 d^2 + b^2 c^2$.

Mais cela se déduit également directement de la relation de Cauchy-Schwarz : $\vec{a} \cdot \vec{c} \leq \|\vec{a}\| \|\vec{c}\|$ où $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Et plus généralement :

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) \leq \sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)} \sqrt{(b_1^2 + \cdots + b_n^2)}, \quad \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n .

Cette dernière inégalité (Cauchy-Schwarz) sera utilisée dans la suite comme, pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\vec{\nabla} u\|_{(L^2)^n} \|\vec{\nabla} v\|_{(L^2)^n} \\ \leq (\|u\|_{L^2}^2 + \|\vec{\nabla} u\|_{(L^2)^n}^2)^{\frac{1}{2}} (\|v\|_{L^2}^2 + \|\vec{\nabla} v\|_{(L^2)^n}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

i.e., pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\vec{\nabla} u\|_{(L^2)^n} \|\vec{\nabla} v\|_{(L^2)^n} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad (1.8)$$

où $\|v\|_{H^1}^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \|v\|_{L^2}^2 + \|\vec{\nabla} v\|_{(L^2)^n}^2$.

1.5 L'espace de Hilbert ℓ^2

C'est le prototype des espaces de Hilbert.

Quand $n \rightarrow \infty$, \mathbb{R}^n devient l'espace noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$, appelé espace des suites réelles. Et un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est représenté par $\vec{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} = (x_1, \dots, x_n, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{e}_i$ où $(\vec{e}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est la base canonique, où $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le i -ème qui vaut 1. Et \vec{x} est représenté

par la matrice colonne $[\vec{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Remarque 1.13 En d'autres termes $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ où on note $x(i) = x_i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. \blacksquare

C'est espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ n'a pas de produit scalaire canonique : celui déduit de \mathbb{R}^n serait donné par :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad (1.9)$$

mais ce produit peut être infini : prendre $\vec{y} = \vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{e}_i$ (suite constante $x_i = 1$ pour tout i).

On introduit le sous-espace $\ell^2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ dit "l'espace de Hilbert" (le prototype des espaces de dimension infinie séparables) :

$$\ell^2 = \{ \vec{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \text{ t.q. } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}, \quad (1.10)$$

également appelé espace des énergies finies (la contrainte $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$). Et pour $\vec{x} \in \ell^2$ on note :

$$\|\vec{x}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.11)$$

qui est un réel positif.

Remarque 1.14 ℓ^2 est l'extension "naturelle" de \mathbb{R}^n pour n grand, au sens : quand on étudie un phénomène, on l'approxime, i.e. on limite le nombre de composantes qu'on regarde, i.e. pour $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{e}_i$ on conserve $\sum_{i=1}^N x_i \vec{e}_i$ et on néglige le reste $\sum_{i=N+1}^{\infty} x_i \vec{e}_i$, avec N assez grand pour que l'approximation soit "bonne" (par rapport au besoin du moment). Ce n'est possible que si l'énergie de \vec{x} est finie, i.e. si $\vec{x} \in \ell^2$, i.e. si le reste $\sum_{i=N+1}^{\infty} \|x_i\|^2$ peut être rendu "négligeable" pour N est assez grand. \blacksquare

Proposition 1.15 L'application $(\cdot, \cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (1.9) est un produit scalaire sur ℓ^2 , de norme associée $\|\cdot\|_{\ell^2} : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par (1.11). Et l'espace normé $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ est complet : c'est un espace de Hilbert.

Preuve. Pour une suite $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \vec{e}_n = (x_n) \in \ell^2$, notons $\vec{x}^{(N)} = (x_n^{(N)})$ la suite tronquée au rang N , i.e. t.q. $x_n^{(N)} = x_n$ pour tout $n \leq N$ et $x_n^{(N)} = 0$ pour tout $n > N$. On a immédiatement $\|\vec{x}^{(N)}\|_{\ell^2} \leq \|\vec{x}\|_{\ell^2}$.

Pour $\vec{x} = (x_n)$ et $\vec{y} = (y_n) \in \ell^2$, on considère la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ positive croissante :

$$S_N = \sum_{n=1}^N |x_n y_n|.$$

On a $S_N \leq \|\vec{x}^{(N)}\|_{\ell^2} \|\vec{y}^{(N)}\|_{\ell^2}$ grâce à Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^N , donc $S_N \leq \|\vec{x}\|_{\ell^2} \|\vec{y}\|_{\ell^2} < \infty$: la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, donc $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty$ (convergence absolue). Donc $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$. Donc (1.9) a un sens dans ℓ^2 . Puis la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. De même que $\|\cdot\|_{\ell^2}$ est la norme associée au produit scalaire.

Montrons que $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ est complet, i.e. que toute suite de Cauchy est convergente. Soit $(\vec{x}^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2 . Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall i, j \geq N_\varepsilon, \|\vec{x}^i - \vec{x}^j\|_{\ell^2} < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Notons génériquement $\vec{x}^i = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^i \vec{e}_n = (x_n^i)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit un N_ε vérifiant (1.12). Donc $\|\vec{x}^i - \vec{x}^j\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n^i - x_n^j|^2 < \varepsilon^2$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i, j \geq N_\varepsilon$, $|x_n^i - x_n^j| < \varepsilon$. Donc, pour tout n , la suite $(x_n^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} qui est complet, donc $(x_n^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un $x_n = \lim_{i \rightarrow \infty} x_n^i \in \mathbb{R}$ (toutes les composantes convergent). Notons $\vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite ainsi construite. Montrons que $\vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$ et que $\|\vec{x}^i - \vec{x}\|_{\ell^2} \rightarrow_{i \rightarrow \infty} 0$, ce qui montrera que ℓ^2 est complet.

(1.12) donne, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^M |x_n^i - x_n^j|^2 \leq \varepsilon^2$, donc, par continuité de la norme dans \mathbb{R}^M , $\sum_{n=1}^M |x_n^i - x_n|^2 \leq \varepsilon^2$ dès que $i \geq N_\varepsilon$, majoration est indépendante de M . La suite $(\sum_{n=1}^M |x_n^i - x_n|^2)_{M \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante, on déduit $\sum_{n=1}^\infty |x_n^i - x_n|^2 \leq \varepsilon^2$. En particulier la suite $(\vec{x}^{N_\varepsilon} - \vec{x})$ est dans ℓ^2 , donc $\vec{x} \in \ell^2$. Et $\sum_{n=1}^\infty |x_n^i - x_n|^2 = \|\vec{x}^i - \vec{x}\|_{\ell^2} < \varepsilon$, dès que $i \geq N_\varepsilon$, donc (\vec{x}^i) est convergente dans ℓ^2 (vers \vec{x}). ■

Remarque 1.16 Soit ℓ_f l'espace des suites finies, i.e. qui ont tous leurs éléments nuls sauf un nombre fini, i.e. l'espace des suites dont les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang :

$$\vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell_f \iff \vec{x} = (x_n)_{\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \exists N_{\vec{x}} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\vec{x}}, x_n = 0.$$

ℓ_f est un sous-espace vectoriel (trivial) dense (trivial par troncature $\vec{x}^{(N)}$ de \vec{x}) de ℓ^2 . Autrement dit ℓ^2 est le complété de ℓ_f pour la norme de ℓ^2 définie sur ℓ_f .

La base canonique $(\vec{e}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est également une base orthonormée de ℓ^2 (en particulier chaque élément $\vec{e}_i \in \ell_f$ de la base est bien dans ℓ^2 : $\|\vec{e}_i\|_{\ell^2} = 1 < \infty$). L'utilisation du vocable "base orthonormée" est un peu abusif, mais très usité : on devrait dire base hilbertienne, au sens où tout $\vec{x} \in \ell^2$ est limite de combinaisons linéaires : $\vec{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\sum_{n=1}^N x_n \vec{e}_n)$, autrement dit que l'espace vectoriel $\text{Vect}\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ engendré par les \vec{e}_n est dense dans ℓ^2 . ■

1.6 Remarque sur les espaces vectoriels fermés ou non

En dimension infinie, les espaces ou sous-espaces vectoriels ne sont pas toujours fermés : cela dépend de la norme choisie, toutes les normes n'étant pas équivalentes.

Exemple 1.17 Soit $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ l'application linéaire définie par $T\vec{e}_n = \frac{1}{n}\vec{e}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où (\vec{e}_n) est la base canonique de ℓ^2 (et T est continue de norme égal à 1). L'image $\text{Im}T = \{\vec{y} = T\vec{x} = (\frac{x_n}{n})_{\mathbb{N}^*} : \vec{x} \in \ell^2\}$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^2 (immédiat). Et $\text{Im}T$ est dense dans ℓ^2 : toute suite $\vec{y} = (y_n)_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ est limite de la suite tronquée $\vec{y}^N = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, \dots) = T\vec{x}^N = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_N}{N}, 0, \dots) \in \text{Im}T$, car $\|\vec{y} - \vec{y}^N\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=N+1}^\infty y_n^2 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$ (reste d'une série convergente). Mais $\text{Im}T \neq \ell^2$: la suite $\vec{y} = (\frac{1}{n})_{\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ n'a pas d'antécédent dans ℓ^2 car la suite constante $\vec{x} = (1)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas dans ℓ^2 . (Ici $T : \ell^2 \rightarrow \text{Im}T$ est continue bijective, d'inverse T^{-1} donné par $T^{-1}\vec{e}_n = n\vec{e}_n$, avec T^{-1} non continue pour la norme $\|\cdot\|_{\ell^2}$.) ■

Exemple 1.18 Soit $C^0([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. La norme de la convergence uniforme est définie sur $C^0([0, 1])$ par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Et muni de cette norme, $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach (exercice classique). ■

Exemple 1.19 Par contre, muni de la norme de $L^2([0, 1])$ (norme de l'énergie) définie par :

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ n'est pas complet (d'ailleurs son complété est l'espace $L^2([0, 1])$ tout entier).

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la fonction $f = 1_{] \frac{1}{2}, 1]}$ qui vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et 1 sur $] \frac{1}{2}, 1]$: cette fonction est en escalier et donc n'est pas continue (non dans $C^0([0, 1])$) et est pourtant limite, au sens de la convergence dans $L^2([0, 1])$, d'une suite de fonctions continues (en dessiner). Par exemple, avec :

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ f_n(x) = n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ f_n(x) = 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1.13)$$

la suite (f_n) de $C^0([0, 1])$ est telle que $\|1_{] \frac{1}{2}, 1]} - f_n\|_{L^2} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Et il est immédiat que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$. Cette suite ne convergeant pas dans C^0 , on en déduit que $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ n'est pas hilbertien (uniquement préhilbertien). Et on vérifie que (f_n) n'est pas de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: pour $m \geq n$ on a $\sup_{[0, 1]} |f_m(x) - f_n(x)| = 1$ atteint pour $x = \frac{1}{n}$ (sinon elle convergerait dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet). ■

Exemple 1.20 Et soit $F = \{f \in C^0([0, 1]) : f_{] \frac{1}{2}, 1]} = 0\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de C^0 (stabilité par somme et multiplication par un scalaire). Mais il n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, i.e. ce n'est pas un sous-espace vectoriel fermé de $(L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$: voir l'exemple de la suite (f_n) données en (1.13) qui appartient

à F , est de Cauchy dans L^2 (elle est convergente dans L^2), mais converge à l'extérieur de F (vers la fonction discontinue $1_{] \frac{1}{2}, 1]}$).

(Noter tout de même que F est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: dans ce cas, la suite (f_n) choisie n'est pas de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et donc ne peut pas converger pour cette norme.) \blacksquare

Remarque 1.21 Ces exemples montrent qu'en dimension infinie les normes ne sont pas toujours équivalentes. En effet, il est immédiat que : lorsque les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes dans un espace vectoriel E , alors $(E, \|\cdot\|_1)$ complet équivaut à $(E, \|\cdot\|_2)$ complet : si une suite est de Cauchy (resp. converge) dans une norme alors elle est de Cauchy (resp. converge) dans une norme équivalente (resp. et les limites sont identiques).

Or $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet alors que $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ ne l'est pas : les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{L^2}$ ne sont donc pas équivalentes.

Ou encore : soit g_1 la fonction chapeau $g_1(x) = x1_{[0,1]} + (2-x)1_{[1,2]}$ (faire un dessin), et soit (g_n) la suite de fonctions chapeau donnée par $g_n(x) = \sqrt{n}g_1(nx) = \sqrt{n}x1_{[0, \frac{1}{n}]} + \sqrt{n}(2-x)1_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$. On a $\|g_n\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} g_n(y)^2 dy = \int_{\mathbb{R}} ng_1(ny)^2 dy = \int_{\mathbb{R}} g_1(x)^2 dx = 1$ alors que $\|g_n\|_\infty = \sqrt{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$. \blacksquare

1.7 Projection

On rappelle, dans le cas des sous-espaces vectoriels fermés :

Théorème 1.22 et Définition. Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $a \in F$ tel que :

$$\|x - a\|_H = d(x, F) \quad (\stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{b \in F} \|x - b\|_H). \quad (1.14)$$

Ce point $a \stackrel{\text{noté}}{=} P_F x$ est appelé projection de x sur F relativement au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$. On a ainsi défini une fonction $P_F : H \rightarrow H$ vérifiant $\text{Im}(P_F) = F$ et caractérisée par :

$$(x - P_F x, b)_H = 0, \quad \forall b \in F \quad \text{i.e.} \quad (P_F x, b)_H = (x, b)_H, \quad \forall b \in F \quad (1.15)$$

(en particulier $x - P_F x \perp F$.) Et P_F est appelée la projection orthogonale de H sur F relativement au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$. Et P_F est linéaire et continue, et vérifie :

$$P_F \circ P_F = P_F, \quad \text{et} \quad \|P_F\| = 1. \quad (1.16)$$

Donc pour tout $x, y \in H$ on a :

$$\|P_F x - P_F y\|_H \leq \|x - y\|_H. \quad (1.17)$$

(On rappelle que $\|P_F\|_{L(H, H)} \stackrel{\text{noté}}{=} \|P_F\| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{\|P_F x\|_H}{\|x\|_H} = \text{le sup sur la boule unité.})$

Preuve. 1- Existence : soit (a_n) une suite minimisante : $\|x - a_n\|_H \rightarrow d(x, F)$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrons qu'elle est de Cauchy. L'identité de la médiane donne :

$$\frac{1}{2} \|a_n - a_m\|_H^2 = \|x - a_n\|_H^2 + \|x - a_m\|_H^2 - 2\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|_H^2$$

avec $\frac{a_n + a_m}{2} \in F$ car F est stable (sous-espace vectoriel), et donc $\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|_H \geq d(x, F)$. Et $\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|_H \leq \frac{1}{2}(\|x - a_n\|_H + \|x - a_m\|_H) \rightarrow d(x, F)$, d'où $\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|_H \rightarrow d(x, F)$ et :

$$\frac{1}{2} \|a_n - a_m\|_H^2 \rightarrow d(x, F) + d(x, F) - 2d(x, F) = 0.$$

Donc (a_n) est une suite de Cauchy. Puisque F est fermé, cette suite converge. Si a est sa limite, on a bien $\|x - a\|_H = \lim \|x - a_n\|_H = d(x, F)$.

2- Si a et a' vérifie $\|x - a\|_H = d(x, F) = \|x - a'\|_H$ alors la suite (a, a', a, a', \dots) est de Cauchy, grâce au lemme de la médiane. Donc cette suite est convergente, donc $a = a'$.

3- Montrons que (1.14) implique (1.15). Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $b \in F$ on a $c = a + \lambda(b - a) \in F$ (car F est stable), et par définition de a on a $\|x - a\|_H \leq \|x - c\|_H$. D'où, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|x - a\|_H^2 \leq \|x - a\|_H^2 + \lambda^2 \|b - a\|_H^2 - 2\lambda(x - a, b - a)_H,$$

et donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \|b - a\|_H^2 \geq 2\lambda(x - a, b - a)_H.$$

Prenant $\lambda > 0$ puis $\lambda < 0$, on en déduit que $(x - a, b - a)_H \leq 0$ puis $(x - a, b - a)_H \geq 0$. D'où $(x - a, b - a)_H = 0$, ce pour tout $b \in F$.

4- Réciproquement, montrons que (1.15) implique (1.14). Pour tout $b \in F$ on a bien :

$$\|x - b\|_H^2 = \|x - a + a - b\|_H^2 = \|x - a\|_H^2 + \|a - b\|_H^2 + 0 \geq \|x - a\|_H^2,$$

car $x - a \perp a - b$ (et donc $(x - a, a - b)_H = 0$).

5- Il est immédiat que P_F est linéaire (un produit scalaire est bilinéaire). Et avec (1.15), pour tout x dans H , avec $b = P_F x$ on a $\|P_F x\|_H^2 \leq \|x\|_H \|P_F x\|_H$ (Cauchy-Schwarz), donc $\|P_F x\|_H \leq \|x\|_H$, donc $\|P_F\| \leq 1$.

6- Il est immédiat que $P_F \circ P_F = P_F$.

7- Enfin (1.17) car P_F est linéaire et $\|P_F\| \leq 1$, ou encore grâce à Pythagore :

$$\|x - y\|_H^2 = \|(P_F(x - y)) + (x - y + P_F(y - x))\|_H^2 = \|P_F x - P_F y\|_H^2 + \|x - y + P_F(y - x)\|_H^2.$$

■

Remarque 1.23 Ce théorème et cette démonstration tiennent dès que F est un convexe fermé dans H à condition de changer la caractérisation (1.15) (égalité) en la caractérisation (l'inégalité) :

$$\forall b \in F \quad (x - a, b - a)_H \leq 0.$$

Faire un dessin. Et si F n'est pas fermé, la projection n'existe pas toujours (elle existe dans \overline{F}). ■

On rappelle que, par définition :

$$F^\perp = \{x \in H : (x, b)_H = 0, \forall b \in F\}. \quad (1.18)$$

Pour un sous-ensemble $B \subset H$, on rappelle que $\text{Vect}(B)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de H contenant B : c'est le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de B , i.e. l'espace des combinaisons linéaires (sommes finies) d'éléments de B :

$$\text{Vect}(B) = \{x \in H : \exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, \exists b_i \in B, 1 \leq i \leq n : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\}.$$

Exemple 1.24 Dans ℓ^2 et $B = \{\vec{e}_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble constitué des vecteurs de base canonique, alors $\text{Vect}(B)$ est l'ensemble des suites finies, et l'adhérence de $\text{Vect}(B)$ est l'ensemble ℓ^2 tout entier. C'est un exemple de sous-espace vectoriel dense mais non fermé : $\overline{\text{Vect}(B)} = \ell^2$ avec $\text{Vect}(B) \neq \ell^2$ (la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas dans $\text{Vect}(B)$).

(On rappelle qu'en dimension finie tout sous-espace vectoriel est fermé.) ■

Proposition 1.25 Soit H Hilbert.

- 1- Si B et C sont deux sous-ensembles de H , et si $B \subset C$ alors $C^\perp \subset B^\perp$.
- 2- Si B est un sous-ensemble de H alors $B^\perp = (\overline{B})^\perp$,
- 3- et $B^\perp = (\text{Vect}(B))^\perp$.
- 4- B^\perp est fermé dans H ,
- 5- si $C \subset B^\perp$, alors $\overline{C} \subset B^\perp$,
- 6- et $(B^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}(B)}$.

Preuve. 1- Si $x \in C^\perp$, alors pour tout $c \in C$ on a $(x, c)_H = 0$ et en particulier si $B \subset C$, pour tout $b \in B$ on a $(x, b)_H = 0$, donc $x \in B^\perp$. On a bien $C^\perp \subset B^\perp$.

2- On en déduit que $B^\perp \supset (\overline{B})^\perp$ (car $B \subset \overline{B}$). Réciproquement, soit $x \in B^\perp$, montrons que $x \in (\overline{B})^\perp$: si c'est faux, il existe $c \in \overline{B}$ tel que $(x, c) = \alpha \neq 0$. Mais alors pour une suite (b_n) de B convergente vers c , par continuité du produit scalaire on aurait $|(x, b_n)_H| \geq \frac{|\alpha|}{2} > 0$ à partir d'un certain rang n , donc $x \not\perp b_n$ pour n assez grand, donc $x \notin B^\perp$, contraire à l'hypothèse. Donc $B^\perp \subset (\overline{B})^\perp$, et finalement $B^\perp = (\overline{B})^\perp$.

3- Et comme $B \subset \text{Vect}(B)$ on a $\text{Vect}(B)^\perp \subset B^\perp$. Et si $x \in B^\perp$, alors pour tout $b \in B$ on a $(x, b)_H = 0$ et donc pour toute combinaison linéaire, i.e. tout $c \in \text{Vect}(B)$ on a $(x, c)_H = 0$ et $x \in \text{Vect}(B)^\perp$.

4- Si (x_n) est une suite de Cauchy de B^\perp (donc de Cauchy dans H), elle est convergente vers $x \in H$ (complet). Et pour tout $b \in B$ on a $(x, b)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, b)_H$ car le produit scalaire est continu, cf. (1.4), et $(x_n, b)_H = 0$ (car $x_n \in B^\perp$), d'où $x \in B^\perp$.

5- Si $C \subset B^\perp$ alors $\overline{C} \subset \overline{B^\perp} = B^\perp$ car B^\perp est fermé.

6- Si $b \in B$ alors pour tout $x \in B^\perp$ on a $(b, x)_H = 0$ et donc $b \in (B^\perp)^\perp$: on a $B \subset (B^\perp)^\perp$, puis immédiatement $\text{Vect}(B) \subset (B^\perp)^\perp$, d'où $\overline{\text{Vect}(B)} \subset (B^\perp)^\perp$.

Puis si $b \in (B^\perp)^\perp$ alors pour tout $x \in B^\perp$ on a $(x, b)_H = 0$; supposons que $b \notin \overline{\text{Vect}(B)}$, alors avec 2-, il existe $c \in \text{Vect}(B)^\perp$ tel que $(c, b)_H \neq 0$, donc il existe $c \in B^\perp$ tel que $(c, b)_H \neq 0$ (cf 3-) et donc $b \notin (B^\perp)^\perp$, absurde. ■

On en déduit en particulier :

Corollaire 1.26 Soit F un sous-espace vectoriel (fermé ou non) de H Hilbert. Alors on a :

- 1- F^\perp est fermé dans H , $(\overline{F})^\perp = F^\perp$, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$ et,
- 2- F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

(Le 2- de cette proposition est très utile pour démontrer qu'un sous espace est dense.)

Preuve. Le 1- n'est autre que la proposition précédente.

2- Si F est dense dans H alors $\overline{F} = H$ et $F^\perp = \overline{F}^\perp = \{0\}$. Et réciproquement, si $\{0\} = F^\perp$ alors $H = (F^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}(F)} = \overline{F}$, d'où F est dense dans H . ■

Proposition 1.27 Si H est un Hilbert et si F est fermé, alors l'orthogonal F^\perp de F est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans H : on a $H = F \oplus F^\perp$.

Preuve. En effet, $x = P_F x + (x - P_F x)$ (car $P_F x$ existe, F étant fermé). ■

Remarque 1.28 Ce corollaire est faux si F n'est pas fermé. On reprend l'exemple 1.20 dans $C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire de $L^2(]0, 1[)$: on a immédiatement $F^\perp = \{f \in C^0([0, 1]) : f|_{]0, 1[} = 0\}$, mais $F + F^\perp$ ne contient pas la fonction $\equiv 1$ qui est pourtant dans $C^0([0, 1])$ (la fonction 1 ne peut être écrite $1 = f + f_\perp$ avec $f \in F$ et $f_\perp \in F^\perp$). ■

Remarque 1.29 Dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, F^\perp n'a aucun sens car la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne dérive pas d'un produit scalaire, et donc il n'y a pas de notion d'orthogonalité. ■

2 Introduction aux espaces de Sobolev

Pour simplifier l'exposé on se restreint aux fonctions à valeurs réelles. On considère un ouvert borné 1-régulier Ω de \mathbb{R}^n (i.e. un ouvert dont la frontière est paramétrable par une fonction localement C^1). Un espace de Sobolev est un espace de fonctions muni d'une norme dérivant d'une intégration qui fait de cet espace un Banach, comme par exemple les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ définis par, pour $p \geq 1$:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(\vec{x})|^p < \infty\}.$$

Les espaces de Sobolev qu'on considèrera dans ce cours seront hilbertiens (la norme qu'on considèrera dérivera d'un produit scalaire), et ce seront l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(\vec{x})|_{\mathbb{R}}^2 < \infty\}, \quad (2.1)$$

et des sous-espaces de $L^2(\Omega)$ de fonctions dont des dérivées sont de carré intégrable (fonctions d'énergie finie), comme par exemple :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \forall i=1, \dots, n, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\} = \{f \in L^2(\Omega) : \vec{\nabla} f \in (L^2(\Omega))^n\}.$$

2.1 Espaces $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^n$

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable, cf. (2.1), est un espace vectoriel muni du produit scalaire et de la norme associée, pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Si un seul ouvert Ω est utilisé on note plus simplement $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)} = (\cdot, \cdot)_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz $|(f, g)_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$ s'écrit aussi, pour $f, g \in L^2(\Omega)$:

$$\left(\int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} f^2(x) dx \right) \left(\int_{\Omega} g^2(x) dx \right).$$

Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles ($n \geq 2$). On note $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$.

L'espace $L^2(\Omega)^n = L^2(\Omega) \times \dots \times L^2(\Omega)$ (produit cartésien n -fois) est l'espace des fonctions $\vec{f} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dont les composantes $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ sont dans $L^2(\Omega)$.

Pour faire de $L^2(\Omega)^n$ un espace de Hilbert, on le munit du produit scalaire cartésien :

$$(\vec{f}, \vec{g})_{L^2(\Omega)^n} = \sum_{i=1}^n (f_i, g_i)_{L^2(\Omega)} \stackrel{\text{noté}}{=} (\vec{f}, \vec{g})_{L^2},$$

associé à la norme (Pythagore) :

$$\|\vec{f}\|_{L^2(\Omega)^n} = \sqrt{\|f_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \dots + \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \stackrel{\text{noté}}{=} \|\vec{f}\|_{L^2}.$$

Par exemple, pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et Ω borné dans \mathbb{R}^n , on a $\vec{\nabla}u \in C^0(\bar{\Omega})^n \subset L^2(\Omega)^n$ et :

$$\|\vec{\nabla}u\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \|\vec{\nabla}u(\vec{x})\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) \right|^2 d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) \right|^2 d\Omega. \quad (2.3)$$

On se servira très souvent de $\|\vec{\nabla}u\|_{L^2}$ dans ce cours.

Théorème 2.1 (Riesz–Fischer) $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Voir cours d'intégration. ▀

Exercice 2.2 Soit $\Omega =]0, 1[$ et $\|\cdot\|_{L^1} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ donné par $f \rightarrow \|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx$. Montrer que $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme qui n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

Réponse. Norme : facile. Puis soit $f_n(x) = x^n$. On a $\|f_n\|_{L^1} = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$. Et il n'existe pas de constante c t.q., pour tout n , $\|f_n\|_{L^2} \leq c \|f_n\|_{L^1}$, i.e. $\sqrt{\frac{1}{2n+1}} \leq c \frac{1}{n+1}$, i.e. $\frac{1}{2n+1} \leq c \frac{1}{(n+1)^2}$, i.e. $(n+1)^2 \leq c(2n+1)$. ▀

2.2 Notions de distributions

On va avoir besoin de dériver les fonctions affines par morceaux comme la fonction chapeau $f(x) = x1_{[0,1]} + (2-x)1_{[1,2]}$, faire un dessin. Le problème est que cette fonction n'est pas dérivable au sens classique sur tout \mathbb{R} (n'est pas dérivable aux "coins").

De manière plus générale, pour $f \in L^2(\Omega)$ on cherchera à savoir si $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in L^2(\Omega)$. Il faut pour cela avoir donné un sens (généralisé) à $\frac{\partial f}{\partial x^i}$.

On va pour ce faire introduire la notion de dérivées généralisées (ou "dérivées faibles") à l'aide de la théorie des distributions de Laurent Schwartz.

Ce paragraphe n'est qu'une introduction à la théorie des distributions, voir cours de deuxième année d'ISIMA, et qui de manière générale décrit des outils T linéaires pour mesurer des fonctions φ régulières à l'aide des valeurs $T(\varphi)$.

2.2.1 Espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit f une fonction de Ω dans \mathbb{R} . On appelle support de f l'ensemble fermé de \mathbb{R}^n qui est l'adhérence de $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

C'est aussi le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle, voir figure 2.1. C'est le domaine sur lequel il est intéressant d'étudier f .

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ borné}, \text{supp}(f) \subset \Omega\} \quad (2.5)$$

(un fermé borné est compact dans \mathbb{R}^n .)

Exemple 2.3 Dans \mathbb{R} : la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ et sur $\mathbb{R} -] -1, 1[$ par $\varphi(x) = 0$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ainsi qu'à $\mathcal{D}(]-1-r, 1+r[)$ pour tout $r > 0$). ▀

Exemple 2.4 Dans \mathbb{R}^n , la fonction $\varphi(\vec{x}) = e^{-\frac{1}{1-|\vec{x}|^2}}$ pour $|\vec{x}| < 1$ et $\varphi(\vec{x}) = 0$ sinon appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (ici $|\vec{x}|$ représente la norme euclidienne de \vec{x}). ▀

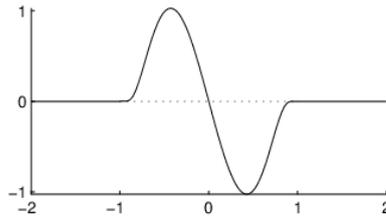


FIGURE 2.1 – Le support de cette fonction est $[-1, 1]$, adhérence de $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$.

On admet la proposition suivante (voir cours de distribution, démonstration faite par troncature et régularisation) :

Proposition 2.5 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i.e.,

$$\forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Donc $f \in L^2(\Omega)$ étant donnée, il existe une suite $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$, i.e. telle que $\|f - \varphi_n\|_{L^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Et on dit que : toute fonction de carré intégrable sur Ω peut être approchée à ε près, au sens de la norme de $L^2(\Omega)$, par une fonction $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω .

Remarque 2.6 Pour un compact K de \mathbb{R}^n on a bien sûr $D(K) = C^\infty(K)$, mais dans ce cours on s'intéresse aux ouverts bornés Ω de \mathbb{R}^n . Et dans ce cas $D(\Omega) \subsetneq C^\infty(\Omega)$: prendre par exemple la fonction 1_Ω , constante égale à 1 sur Ω , qui est bien $C^\infty(\Omega)$ mais n'est pas à support compact dans Ω . ■

Remarque 2.7 La fonction de l'exemple 2.3 n'est pas analytique sur \mathbb{R} : elle est $C^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas égale à son développement limité à tout ordre au voisinage des points -1 et 1 (si elle l'était, ses dérivées successives étant nulles en ces points, on en conclurait qu'elle est égale à la fonction nulle au voisinage de ces points, ce qui est faux). ■

2.2.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ étant $C^\infty(\Omega)$ on peut la dériver à tout ordre. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1, n} \alpha_i$, et :

$$\partial^\alpha \varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x). \quad (2.7)$$

On munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la convergence suivante (convergence 'très contraignante') : la suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et on note $\varphi_m \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, si et seulement si :

1. les supports des φ_m restent dans un compact fixe :

$$\exists K \text{ compact } \subset \Omega \text{ t.q. } \forall \varphi_m \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp}(\varphi_m) \subset K, \quad (2.8)$$

(il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$ du bord de Ω , à savoir $\mathcal{O} = \Omega - K$, tel que toutes les φ_m sont nulles dans tout \mathcal{O})

2. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (i.e. pour chaque ordre) on a $\partial^\alpha \varphi_m \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément dans Ω , i.e. :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}, \quad \forall m > M, \quad \|\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (2.9)$$

(Convergence uniforme à tout ordre. On rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$).

On définit dès lors l'espace dual $\mathcal{D}'(\Omega) = L(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. l'espace des formes linéaires continues (pour la notion de convergence ci-dessus) sur $\mathcal{D}(\Omega)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est appelé espace des distributions et ses éléments sont appelés distributions.

Donc on a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

1. la linéarité : pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tous $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$T(r\varphi + \psi) = rT(\varphi) + T(\psi) \quad (\text{égalité dans } \mathbb{R}), \quad (2.10)$$

2. la continuité au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$T(\varphi_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T(\varphi) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ dès que } \varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi \text{ au sens ci-dessus de } \mathcal{D}(\Omega), \quad (2.11)$$

voir (2.8) et (2.9).

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (fonctionnelle linéaire continue), on utilise la notation du crochet de dualité :

$$T(\varphi) \stackrel{\text{noté}}{=} \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle T, \varphi \rangle$$

(sans indice si aucune confusion n'est possible). Cette notation usuelle dans le cas linéaire permettra dans le cas où T peut être représentée par une fonction de manipuler l'expression $\langle T, \varphi \rangle$ comme un produit scalaire $(T, \varphi)_{L^2(\Omega)}$, voir l'exemple suivant 2.9.

Exemple 2.8 Masse de Dirac δ_a en $a \in \mathbb{R}^n$ (ou mesure de Dirac). On définit $T = \delta_a$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \quad (\stackrel{\text{noté}}{=} \langle \delta_a, \varphi \rangle).$$

On vérifie que δ_a est une distribution : la linéarité est immédiate (par définition de l'addition et de la multiplication par un scalaire dans l'espace des fonctions), et la continuité est tout aussi immédiate puisque de la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a uniquement besoin de la convergence uniforme à l'ordre 0 (l'écrire).

C'est un exemple de distribution qui n'est pas une fonction : δ_a n'est pas une fonction, voir plus loin. \blacksquare

Exemple 2.9 Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors T_f définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad (\stackrel{\text{noté}}{=} \langle T_f, \varphi \rangle) \quad (2.12)$$

est une distribution : la linéarité est immédiate (c'est celle de la linéarité de l'intégrale), et la continuité est tout aussi immédiate puisque de la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a uniquement besoin de la convergence uniforme à l'ordre 0 : $|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_m)|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi - \varphi_m\|_{L^2}$ par Cauchy-Schwarz, et $\|\varphi - \varphi_m\|_{L^2} \leq C \|\varphi - \varphi_m\|_{\infty}$ où C est le volume d'un ouvert qui contient $\text{supp} \varphi$ et tous les $\text{supp}(\varphi_m)$, et donc $|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_m)|_{\mathbb{R}} \rightarrow 0$ quand $\varphi_m \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. (Si Ω est borné, on prend plus simplement $C = |\Omega|$ le volume de Ω .) \blacksquare

Définition 2.10 Toute distribution de type T_f défini dans l'exemple ci-dessus est appelée distribution régulière (associée à la fonction f de $L^2(\Omega)$).

Remarque 2.11 On vérifie que $T : f \in L^2(\Omega) \rightarrow T(f) \stackrel{\text{déf}}{=} T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est linéaire (trivial) et injective i.e. :

$$T_f = 0 \implies f = 0,$$

i.e. $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies f = 0$.

En effet, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et continuité du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, ayant f dans $L^2(\Omega)$, de $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$ on déduit $\int_{\Omega} f^2(x) dx = 0$ et donc $f = 0$ presque partout, i.e., $f = 0$ dans $L^2(\Omega)$ (f est nulle sauf sur un ensemble de mesure nulle).

T étant injective, on identifie T_f et f , i.e., on note $T_f = f$. On a donc :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = (f, \varphi)_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

\blacksquare

2.2.3 Notation intégrale

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ étant une fonctionnelle linéaire, outre la notation de crochet de dualité $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$, on utilise également la notation intégrale (notation linéaire par excellence) : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} T\varphi dx.$$

Attention : c'est une notation abusive qui n'a de sens que lorsque T est une distribution régulière (de la forme T_f avec $f \in L^2(\Omega)$). En particulier, l'écriture $\int_{\Omega} T(\vec{x})\varphi(\vec{x}) dx$ est abusive lorsque $T(\vec{x})$ n'a pas de sens.

Ainsi " $\delta_a(f) \stackrel{\text{noté}}{=} \int_{\Omega} \delta_a f dx$ " est une notation abusive, uniquement formelle.

2.2.4 Dérivation des distributions

Il est évident que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour tout $i = 1, \dots, n$ (fonctions C^∞ de même support que φ). Et donc, si T est une distribution, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'expression $\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$ a un sens.

Définition 2.12 Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega) = L(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$, on définit les fonctionnelles, pour $i=1, \dots, n$:

$$S_i : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow S_i(\varphi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle.$$

Les S_i sont appel\u00e9es les d\u00e9riv\u00e9es premi\u00e8res de T au sens des distributions, et not\u00e9es $S_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}$.

Donc, les d\u00e9riv\u00e9es premi\u00e8res de T au sens des distributions sont d\u00e9finies par : pour tout $i=1, \dots, n$:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.13)$$

Ou encore, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - T(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$.

C'est une g\u00e9n\u00e9ralisation de la formule d'int\u00e9gration par partie, les termes de bord (sur $\Gamma = \partial\Omega$) \u00e9tant nuls lorsque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Attention, c'est une d\u00e9finition, pas une propri\u00e9t\u00e9. Avec la notation int\u00e9grale, on a donc, par d\u00e9finition :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x_i} \varphi dx \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - \int_{\Omega} T \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On v\u00e9rifie imm\u00e9diatement :

Proposition 2.13 Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors, pour tout $i=1, \dots, n$, les fonctionnelles $S_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}$ sont des distributions : $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque 2.14 On rappelle que pour d\u00e9finir une fonction f , il suffit de donner sa valeur en chacun de ses points : f est connue si on connaît $f(x)$ pour tout x dans le domaine de d\u00e9finition de f .

Les fonctionnelles $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont avant tout des fonctions (d\u00e9finies sur un espace de fonctions). Donc elle sont connues si on connaît $T(\varphi)$ pour tout φ dans le domaine de d\u00e9finition de T , i.e. pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Avec la notation du crochet de dualit\u00e9, une distribution T est donc connue si on connaît $\langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Et c'est bien ainsi qu'ont \u00e9t\u00e9 d\u00e9finies la masse de Dirac δ_a , la distribution r\u00e9guli\u00e8re T_f , et la d\u00e9riv\u00e9e partielle $\frac{\partial T}{\partial x_i}$. ■

Exercice 2.15 On dit que la suite $(T_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ des distributions $T_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tend vers la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et on note $T_j \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, ssi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_j, \varphi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle.$$

(Similaire \u00e0 la convergence ponctuelle des fonctions.) Montrer que si $T_j \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $\frac{\partial T_j}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial T}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Et on dit que la d\u00e9rivation est une op\u00e9ration continue au sens des distributions.

R\u00e9ponse. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \frac{\partial T_j}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle T_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle,$$

puisque si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout i . ■

2.2.5 Exemples de d\u00e9rivations

Exemple 2.16 Pour a et b deux r\u00e9els tels que $a < b$, si $f \in C^1([a, b])$ alors $f' \in C^0([a, b])$, et f et f' appartiennent \u00e0 $L^2([a, b])$. On v\u00e9rifie qu'alors $(T_f)' = T_{(f')}$, i.e. que la d\u00e9riv\u00e9e au sens des distributions est une g\u00e9n\u00e9ralisation de la d\u00e9riv\u00e9e usuelle. En effet, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([a, b])$:

$$\langle T_{(f)'}, \varphi \rangle = \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \langle T_f, \varphi' \rangle \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \langle (T_f)', \varphi \rangle$$

le deuxi\u00e8me signe '=' \u00e9tant donn\u00e9 par l'int\u00e9gration par partie classique puisque $\varphi \in \mathcal{D}([a, b])$ donne en particulier $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. On peut identifier sans souci f' et les distributions associ\u00e9es $T_{(f')}$ ou $(T_f)'$ quand $f \in C^1$. ■

Exemple 2.17 Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ non dérivable, la dérivée $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ n'a pas de sens usuel. Par contre elle a un sens "au sens des distributions" : si T_f est la distribution associée à f par (2.9), sa dérivée $(T_f)'$ définie par (2.13) sera notée (abusivement) f' . Par contre on n'a pas $(T_f)' = T_{(f')}$ pour la simple raison que f' n'existe pas en général.

De même pour $f \in L^2(\Omega)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ qui n'a de sens qu'au sens des distributions : $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la notation abusive de $\frac{\partial(T_f)}{\partial x_i}$ définie en (2.13). \blacksquare

Exemple 2.18 La fonction (marche unité) de Heaviside $H_0 = 1_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H_0(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H_0(x) = 0$ si $x < 0$ (marche unité) n'est pas dérivable en 0. Elle est dérivable au sens des distributions : si T_{H_0} est la distribution associée à H_0 par $\langle T_{H_0}, \varphi \rangle = (H_0, \varphi)_{L^2(\Omega)}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors :

$$\left\langle \frac{dT_{H_0}}{dx}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{d\'ef}}{=} - \langle T_{H_0}, \frac{d\varphi}{dx} \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Donc $\frac{dT_{H_0}}{dx} = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On note : $\frac{dT_{H_0}}{dx} = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ou encore " $H'_0 = \delta_0$ au sens des distributions" (attention la fonction de Heaviside n'est pas dérivable, et écrire H'_0 impose de préciser 'au sens des distributions').

Montrer que pour la marche unité $H_a = 1_{]a, \infty[}$ on a $H'_a = \delta_a$ au sens des distributions. \blacksquare

Exemple 2.19 La fonction valeur absolue : $|x| = x$ si $x > 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$ a pour dérivée au sens des distributions $H_0(x) - H_0(-x) = (1_{\mathbb{R}^+} - 1_{\mathbb{R}^-})(x)$. Le vérifier et faire le dessin. \blacksquare

Exemple 2.20 Soit f une fonction C^1 par morceaux, en deux morceaux, i.e., $f \in C^1(\mathbb{R}) - \{a\}$ et $f(a-), f(a+), f'(a-), f'(a+) \in \mathbb{R}$. On note :

$$s = f(a+) - f(a-) = [f](a), \quad (2.14)$$

le saut de f en a . Alors la distribution T_f associée à f est dérivable au sens des distributions et par définition :

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx.$$

f' a un sens dans $C^0(]-\infty, a[)$ et dans $C^0(]a, \infty[)$, et on peut appliquer les règles usuelles de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx &= - \int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^\infty f(x) \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^a f'(x) \varphi(x) dx + \int_a^\infty f'(x) \varphi(x) dx + s \varphi(a). \end{aligned}$$

On a donc :

$$(T_f)' = T_{f'} + s\delta_a,$$

(attention aux notations!) où on a noté $T_{f'}$ la distribution associée à f' là où f' a un sens (!), i.e. :

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^a f'(x) \varphi(x) dx + \int_a^\infty f'(x) \varphi(x) dx.$$

Attention aux notations! Ce sont celles usuellement employées par les physiciens et il convient de connaître leur signification qui n'est pas classique. Donc, si on veut dériver la fonction f discontinue en a , à la dérivée classique f' (là où elle a un sens) il faut ajouter la masse de Dirac $s\delta_a$. On retrouve bien sûr les cas particuliers $f = H_0$, et f est continue dérivable en a (pour lequel $s=1$). \blacksquare

Remarque 2.21 La plus grosse difficulté dans l'utilisation des distributions est les notations : on vient de voir que considérer f' n'a aucun sens quand par exemple f a un saut en a , ou plutôt a deux sens! Le premier sens est classique et désigne la dérivée de f là où elle a un sens (ici partout sauf en a) : cette dérivée classique ne permet pas de décrire ce qui se passe en a , alors que c'est justement la discontinuité en a qui gouverne généralement le phénomène à étudier.

Et le deuxième sens est pris au sens des distributions, i.e. comme $(T_f)'$ définie par (2.13) et qui ne doit en aucun cas être notée f' au voisinage de a . Alors, attention au contexte et aux notations! \blacksquare

Exercice 2.22 Soit $\Omega =]-1, 1[$. Résoudre le problème de Dirichlet, pour $y \in]-1, 1[$:

$$\begin{cases} u'' = \delta_y \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On note $u_y(x) = E(x, y)$ la solution (dite solution élémentaire), solution qui dépend de y . On montrera que $u_y(x) = \frac{1}{2}(y+1)(x-1)$ si $x \geq y$ et $u_y(x) = \frac{1}{2}(y-1)(x+1)$ si $x < y$ (fonction continue). Cette équation correspond à un problème de charge ponctuelle (en y) et sa solution non dérivable au sens classique.

Indication : $u'(x) = H_y(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration, i.e., $u'(x) = 1 + c$ si $x \geq y$ et $u'(x) = c$ si $x < y$. Puis intégrer à nouveau : cela introduit 2 nouvelles constantes d'intégration, ces trois constantes étant données par les conditions de Dirichlet et la continuité en y à justifier (dériver 2 fois).

Vérifier que la solution du problème associé (au sens des distributions) :

$$\begin{cases} u'' = f \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

est donnée par $u(x) = \int_{-1}^1 E(x, y) f(y) dy$ pour $-1 < x < 1$.

Réponse : voir cours des distributions. On peut faire la vérification formelle en écrivant $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, y) = \delta_y(x)$ et en dérivant sous le signe \int (ce qui sera toujours valide au sens des distributions). ■

Définition 2.23 De manière générale, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha T$ est défini par :

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (2.15)$$

Et on vérifie immédiatement que $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (i.e. $\partial^\alpha T$ définit une distribution) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

Proposition 2.24 Une distribution est infiniment dérivable au sens des distributions.

2.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit une fonction $v \in L^2(\Omega)$. En général v n'est pas dérivable et $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'a pas de sens (au sens des fonctions) et en particulier n'est pas dans $L^2(\Omega)$. Mais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ a un sens au sens des distributions donné par définition par $\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} - \langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Soit $T_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ la distribution ainsi définie. S'il existe une fonction $f_i \in L^2(\Omega)$ telle que $T_i = T_{f_i}$, alors T_i est une distribution régulière, et on note simplement $f_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Exemple 2.25 Soit $\Omega =]0, 2[$ et soit la fonction affine par morceaux (fonction "chapeau") :

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2[. \end{cases} \quad (2.16)$$

(Faire le dessin.) Cette fonction n'est pas dérivable (au sens classique en $x=1$), mais est dérivable au sens des distributions : si T_φ est la distribution régulière associée, alors on a $(T_\varphi)' = T_\psi$ où $\psi = 1_{]0, 1[} - 1_{]1, 2[} \in L^2(]0, 2[)$ et T_ψ est la distribution régulière associée.

Et on notera « $(T_\varphi)' = \psi = \varphi'$ au sens des distributions » (ne pas oublier "au sens des distributions" car φ' n'a pas de sens en $x=1$).

(Notez que ψ n'est autre que φ' là où ça a un sens, i.e. dans $]0, 1[\cup]1, 2[$). ■

On note (on s'est placé dans la base canonique de \mathbb{R}^n) :

$$\text{si } n \geq 2, \quad \vec{\nabla} v(x) = \text{grad} v(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{et si } n = 1, \quad \vec{\nabla} v(x) = v'(x). \quad (2.17)$$

On définit alors l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω ouvert de \mathbb{R}^n par :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \{v \in L^2(\Omega) : \vec{\nabla} v \in L^2(\Omega)^n\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

(Par exemple, la fonction chapeau φ donnée en (2.16) est dans $H^1(]0, 2[)$.)

On lui associe le produit scalaire :

$$\begin{aligned}(u, v)_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} (\vec{\nabla}u(x), \vec{\nabla}v(x))_{\mathbb{R}^n} d\Omega,\end{aligned}$$

où $(\vec{\nabla}u(x), \vec{\nabla}v(x))_{\mathbb{R}^n} \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{\nabla}u(x) \cdot \vec{\nabla}v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ (produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^n). Donc :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.19)$$

où on a noté $(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v)_{L^2(\Omega)} \stackrel{\text{noté}}{=} \int_{\Omega} \vec{\nabla}u(x) \cdot \vec{\nabla}v(x) d\Omega$. La norme associée est notée :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_{H^1(\Omega)}} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e. :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla}v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on note simplement $\|v\|_{H^1} = \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Exercice 2.26 Montrer que dans $H^1(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ ne sont pas équivalentes.

Réponse. Prendre la suite de fonctions définie en (1.13) : elle est dans H^1 , de Cauchy dans $(L^2, \|\cdot\|_{L^2})$, mais pas de Cauchy dans $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$ car $f'_{2n} - f'_n = n1_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}]} - n1_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}$, donc $|f'_{2n} - f'_n| = n1_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}$ donc $\int_0^1 |f'_n(x) - f'_{n+1}(x)|^2 dx = n^2 \frac{1}{n} = n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Donc cette suite converge dans L^2 , pas dans H^1 . ■

Théorème 2.27 L'espace $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Il est immédiat que $(H^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)})$ est un espace préhilbertien. Il s'agit de montrer qu'il est complet. Soit (v_j) une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$). On en déduit que (v_j) est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ ainsi que $(\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe $v \in L^2(\Omega)$ et des $w_i \in L^2(\Omega)$ tels que $v_j \rightarrow v$ et $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \rightarrow w_i$ dans $L^2(\Omega)$. Les convergences sont également vraies dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (trivial) et on applique l'exercice 2.15 qui donne $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i}$, d'où $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Comme les $w_i \in L^2(\Omega)$, on a obtenu $v \in H^1(\Omega)$. D'où $H^1(\Omega)$ est fermé. ■

Remarque 2.28 L'espace $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ (l'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\Omega)$) n'est pas un espace de Hilbert : il n'est pas complet, voir exercice 2.26.

Sa fermeture est $L^2(\Omega)$ tout entier. En effet, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. ■

Remarque 2.29 Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues en général. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 prendre la fonction définie dans la boule unité $B = B(\vec{0}, 1)$, par, pour $k > 0$ et $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$v(\vec{x}) = |\ln|\vec{x}||^k.$$

v n'est pas prolongeable par continuité en $\vec{0}$ mais appartient à $H^1(B)$ pour $0 < k < \frac{1}{2}$. Pour le voir, intégrez sur le disque B en coordonnées polaires pour obtenir $\|v\|_{L^2(B)}^2 = 2\pi \int_{r=0}^{\frac{1}{2}} (-\log r)^{2k} r dr = 2\pi \int_{t=-\log(\frac{1}{2})}^{\infty} e^{-2t} t^{2k} dt < \infty$, puis $\|\vec{\nabla}v\|_{L^2(B)}^2 = 2\pi \int_{t=-\log(\frac{1}{2})}^{\infty} k^2 t^{2(k-1)} dt < \infty$ pour $k < \frac{1}{2}$. Donc les fonctions ayant une dérivée dans $L^2(\Omega)$ ne sont pas forcément continues : $H^1(\Omega) \not\subset C^0(\Omega)$ en dimension $n \geq 2$.

Autre exemple : la fonction $\ln(-\ln|\vec{x}|)$ qui est dans $H^1(B)$ (le vérifier) mais n'est pas continue en 0. ■

Remarque 2.30 Par contre, dans \mathbb{R} (en dimension 1 donc), les fonctions de $H^1(I)$ seront des fonctions continues pour I intervalle borné ou non : par définition :

$$H^1(I) = \{v(x) \in L^2(I) : v'(x) \in L^2(I)\}.$$

Or sur tout intervalle borné I_1 , une fonction f de $L^2(I_1)$ appartient aussi à $L^1(I_1)$. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_{I_1} |f(x)| dx \leq (\int_{I_1} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{I_1} dx)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Donc $v \in H^1(I)$ implique $v' \in L^1(I_1)$ pour tout intervalle borné I_1 inclus dans I ; et pour c un point intérieur à I , la fonction $x \rightarrow \int_c^x v'(t) dt$ est bien définie et de plus continue. On définit :

$$\tilde{v}(x) = C + \int_c^x v'(t) dt, \quad (2.21)$$

et \tilde{v} est continue. Et on vérifie que $v = \tilde{v}$ presque partout, voir cours d'intégration. (\tilde{v} est un élément de la classe de v : une fonction v_0 nulle presque partout ajoutée à \tilde{v} donne une fonction $\tilde{v} + v_0$ qui a la même valeur dans $L^2(I)$: $\|\tilde{v} + v_0\|_{L^2(I)} = \|\tilde{v}\|_{L^2(I)}$, voir cours "intégrale de Lebesgue". Sans précision supplémentaire, on prendra toujours le représentant continu \tilde{v} de la classe d'équivalence pour définir $v \in H^1(I)$.)

Cela permet d'utiliser une autre définition de $H^1(I)$ (dans le cas I intervalle de \mathbb{R}) : plutôt que de considérer les classes de fonctions, on considère les fonctions définies par :

$$H^1(I) = \{v \in L^2(I) : \exists g \in L^2(I), \exists C \in \mathbb{R}, \exists c \in I, v(x) = C + \int_c^x g(t) dt\} \subset C^0(I). \quad (2.22)$$

$H^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dites absolument continues sur I , et avec la notation ci-dessus g est la dérivée généralisée (ou faible ou au sens L^2) de v (on rappelle que $g \in L^2$ n'est définie que presque partout).

On a donc, en dimension 1 (uniquement), pour $a < b$: $H^1(]a, b[) \subset C^0(]a, b[)$. (Un exemple de fonction continue non absolument continue est donnée par la fonction de Cantor, voir cours d'intégration, ou encore la fonction de Weierstrass qui est continue mais n'est dérivable en aucun point.) ■

Remarque 2.31 En 1-D, une autre propriété intéressante des $v \in H^1(I)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$, est que v admet des limites finies en a et b :

$$v(a+) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} v(x) \in \mathbb{R}, \quad v(b-) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} v(x) \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Et on peut prolonger v par continuité en a et b en posant $v(a) = v(a+)$ et $v(b) = v(b-)$, et donc $v \in C^0([a, b])$.

En effet, e.g. en b , si $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers b , avec (2.22) et Cauchy-Schwarz, on a $|v(x_m) - v(x_n)| = |\int_{x_n}^{x_m} 1 g(t) dt| \leq C|x_m - x_n|^{\frac{1}{2}}$ où $C = \|g\|_{L^2}$, et donc la suite $(v(x_n))$ est de Cauchy, donc convergente dans \mathbb{R} , vers le réel $v(b-)$ car v est continue dans $]a, b[$.

Et si $a = -\infty$ alors $v(x) \rightarrow_{x \rightarrow -\infty} 0$, et si $b = \infty$ alors $v(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$. En effet, e.g. en $+\infty$, on a $v^2(x) = v^2(c) + \int_c^x 2v(t)v'(t) dt$ (par intégration par partie dont on verra qu'elle est licite dans H^1), pour tout $c, x \in]a, \infty[$. Et, à c fixé, $vv' \in L^1([c, \infty[)$ (Cauchy-Schwarz), donc $v^2(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \ell = v^2(c) + \int_c^\infty 2v(t)v'(t) dt$ dans \mathbb{R} , le réel ℓ étant nécessairement nul sinon $v \notin L^2([c, \infty[)$. ■

2.4 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré

On considère un ouvert borné Ω .

On a vu (Proposition 2.5) que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (donc pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$). Par contre $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. En effet, la fonction constante = 1 sur Ω appartient à $H^1(\Omega)$ mais n'est pas limite de fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$: la variation au voisinage du bord serait trop 'rapide' (gradient élevé) pour qu'on puisse avoir $\|1 - \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla}1 - \vec{\nabla}\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 < \varepsilon^2$ (sachant $\vec{\nabla}1 = 0$).

En effet, par exemple dans $H^1(]0, 1[)$, on devrait, pour tout $\varepsilon > 0$, avoir l'existence d'un $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ tel que $\|1 - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$ et $\|\varphi'\|_{L^2} < \varepsilon$, avec φ à support compact, donc en particulier nulle au bord : $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(x) dx$, d'où $|\varphi(x)| \leq \int_0^1 |\varphi'(x)| dx \leq (\int_0^1 |\varphi'(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ (Cauchy-Schwartz) et donc $|\varphi(x)| \leq \|\varphi'\|_{L^2} \leq \varepsilon$. On en déduit que $|1 - \varphi(x)| \geq 1 - \varepsilon$ et donc que $\|1 - \varphi\|_{L^2}^2 \geq (1 - \varepsilon)^2$, ce qui est incompatible avec $\|1 - \varphi\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2$ pour ε petit.

On définit alors $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ (l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$) :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\{\mathcal{D}(\Omega)\}}^{H^1(\Omega)} \quad (2.24)$$

i.e. :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|v - \varphi\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon\}. \quad (2.25)$$

Remarque 2.32 On rappelle que l'adhérence ci-dessus est définie comme étant l'ensemble des points $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels qu'il existe une suite $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\varphi_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \varphi$ la limite étant prise au sens de $H^1(\Omega)$, i.e. au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Donc φ est dans l'adhérence s'il existe une suite $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\|\varphi - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Le choix de l'espace et donc de la norme associée est primordial : si on avait considéré l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ cette adhérence serait l'espace $H^1(\Omega)$ tout entier de manière triviale puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Or $H_0^1(\Omega) = \overline{\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}}^{H^1(\Omega)}$ n'est jamais égal à $H^1(\Omega)$ lorsque Ω est borné : prendre la fonction 1_Ω qui est dans $H^1(\Omega)$ mais n'est pas dans $H_0^1(\Omega)$ (cf début du paragraphe). ■

Remarque 2.33 On verra que $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent au bord :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\}.$$

(dès que Ω est un ouvert 1-régulier.) Et on admet le théorème de prolongement par 0 en dehors de Ω : si $f \in H_0^1(\Omega)$ alors la fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R}^n comme valant f sur Ω et étant nulle sur $\mathbb{R}^n - \Omega$ vérifie $\tilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, et on note (abusivement) $\tilde{f} = f$ (permet d'éviter de multiplier les notations). ■

Dans $H_0^1(\Omega)$ on a (propriété différenciant $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$ pour Ω borné) :

Théorème 2.34 (Inégalité de Poincaré) Si l'ouvert Ω est borné alors (dans $H_0^1(\Omega)$)

$$\exists c_{\Omega} > 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega} \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.26)$$

où c_{Ω} ne dépend que de Ω . (C'est évidemment faux dans $H^1(\Omega)$: prendre $v = 1_{\Omega}$.)

Preuve. On montrera le résultat pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis on conclura par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Ω étant borné, Ω est contenu dans une bande $\Omega \subset \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, a_n \leq x_n \leq b_n\}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit \tilde{v} son prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. On a $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{v}(x', a_n) = 0$, d'où, posant $\tilde{v}_{x'}(t) = \tilde{v}(x', x_n)$, on a $\tilde{v}_{x'}(x_n) = \tilde{v}_{x'}(x_n) - \tilde{v}_{x'}(a_n) = \int_{t=a_n}^{x_n} \frac{d\tilde{v}_{x'}}{dt}(t) dt = (1, \frac{d\tilde{v}_{x'}}{dt})_{L^2(]a_n, x_n])}$, soit

$$\tilde{v}(x', x_n) = (1, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', \cdot))_{L^2(]a_n, x_n])}.$$

D'où, $|\tilde{v}(x', x_n)| \leq \|1\|_{L^2(]a_n, x_n])} \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', \cdot)\|_{L^2(]a_n, x_n])}$ (Cauchy-Schwarz), donc, pour $x_n \geq a_n$,

$$|\tilde{v}(x', x_n)|^2 \leq \int_{t=a_n}^{x_n} 1^2 dt \int_{t=a_n}^{x_n} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t)|^2 dt \leq |x_n - a_n| \int_{t=-\infty}^{\infty} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t)|^2 dt.$$

D'où, à x_n fixé en intégrant en x' :

$$\int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx' \leq |x_n - a_n| \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t)|^2 dt dx' = |x_n - a_n| \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'où en intégrant en x_n , sachant $\tilde{v}(x', \cdot)$ nul à l'extérieur de $]a_n, b_n[$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx' dx_n = \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{x_n=a_n}^{b_n} |x_n - a_n| dx_n \leq \frac{(b_n - a_n)^2}{2} \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

inégalité pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ plus précise que le résultat recherché car $\|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}^2$. On a obtenu l'inégalité de Poincaré avec $C = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{2}}$.

Et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ par définition de $H_0^1(\Omega)$, c.f. (2.24), donc ce résultat reste vrai pour $v \in H_0^1(\Omega)$. En effet : si $v \in H_0^1(\Omega)$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.q. $\|v - \varphi\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$, donc $\|v - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$ et $\|\vec{\nabla} v - \vec{\nabla} \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$, donc $\|v\|_{L^2} \leq \|v - \varphi\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon + c_{\Omega} \|\vec{\nabla} \varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon + c_{\Omega} (\|\vec{\nabla} \varphi - \vec{\nabla} v\|_{L^2} + \|\vec{\nabla} v\|_{L^2}) \leq \varepsilon(1 + c_{\Omega}) + c_{\Omega} \|\vec{\nabla} v\|_{L^2}$. Vrai pour tout ε , d'où (2.26). ■

Remarque 2.35 Ce résultat est évidemment faux dans $H^1(\Omega)$: prendre $v \equiv 1$. Ou encore si cette égalité était vraie dans $H^1(\Omega)$ pour un v donné, elle le serait encore pour $v + c$ où c est une constante, ce qui serait absurde puisque $\vec{\nabla}(v + c) = \vec{\nabla} v$ et on pourrait choisir la constante pour rendre l'inégalité ci-dessus fautive. Par contre, pour v dans $H_0^1(\Omega)$ on ne peut pas prendre une constante autre que $c = 0$ pour garder $v + c$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

Remarque 2.36 On peut remarquer que la démonstration indique qu'il suffit de supposer Ω borné dans une direction et que $c_{\Omega} = \frac{d}{\sqrt{2}}$ où d est la largeur de la plus petite bande contenant Ω . ■

Remarque 2.37 Pour Ω borné, la plus petite constante c_{Ω} possible est $\frac{1}{\lambda_{\min}}$ l'inverse de la plus petite valeur propre λ_{\min} du laplacien : $\lambda_{\min} = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\vec{\nabla} v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}$, quotient de Rayleigh, voir cours EDP de 3ème année. ■

Corollaire 2.38 Si Ω est borné, la semi-norme de $H^1(\Omega)$ définie par :

$$|v|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\text{déf}}{=} \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)} \quad (= \left(\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\|_{L^2}^2 + \dots + \|\frac{\partial v}{\partial x_n}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}})$$

vérifie dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + c_{\Omega}^2} \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}$$

C'est donc une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Preuve. $\|\vec{\nabla}v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla}v\|_{H^1(\Omega)}^2$, et $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla}v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_\Omega^2 \|\vec{\nabla}v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla}v\|_{H^1(\Omega)}^2$. \blacksquare

Lorsqu'on ne considère que des fonctions de $H_0^1(\Omega)$, on note aussi $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = |\cdot|_{H^1(\Omega)}$ la norme sur $H_0^1(\Omega)$ ci-dessus, et :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v)_{L^2(\Omega)} \quad (2.27)$$

définit un produit scalaire (associé à la norme) sur $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 2.39 Si Ω est borné alors l'espace vectoriel normé $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert (l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$).

Preuve. Le sous-espace $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ de l'Hilbert $H^1(\Omega)$ est fermé par définition (adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$), et donc c'est un Hilbert. Comme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$, on en déduit que $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ est un Hilbert. \blacksquare

Remarque 2.40 Attention à la norme choisie : lorsqu'on parle de $H^1(\Omega)$ on parle implicitement de l'espace $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$, i.e. l'espace $H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ lui conférant la propriété d'être complet.

Rappel : pour Ω borné $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ complet (l'adhérence est $H_0^1(\Omega)$), alors qu'il l'est dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ qui n'est pas complet...

On voit l'importance de considérer la 'bonne' norme ! On rappelle que la norme est un instrument de mesure. En particulier, la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ permet de mesurer des fonctions (au sens $L^2(\Omega)$) alors que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est beaucoup plus 'sévère' ('précise') puisqu'elle mesure de plus les variations (gradients) des fonctions (au sens $L^2(\Omega)$). \blacksquare

Exemple 2.41 Soit Ω un ouvert borné et soit la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie par :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = (\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v)_{L^2(\Omega)}.$$

Montrer que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercitive dans l'espace $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ (l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$), i.e. montrer que :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2.$$

(Indication : utiliser l'inégalité de Poincaré.) \blacksquare

Exercice 2.42 Montrer que $(\mathcal{D}(\Omega))^{\perp_{H^1}} = \{u \in H^1(\Omega) : -\Delta u + u = 0\}$ (l'orthogonal de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$). En déduire que si Ω est borné alors $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$.

Réponse. On a $v \in \mathcal{D}(\Omega)^{\perp_{H^1}} \Leftrightarrow (v, \varphi)_{H^1(\Omega)} = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, i.e., après intégration par parties, $-\Delta v + v = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et dans $L^2(\Omega)$ puisque $v \in L^2(\Omega)$, d'où $-\Delta v + v = 0$ p.p. Et la réciproque est triviale.

Et pour Ω borné l'ensemble $\{u \in H^1(\Omega) : -\Delta u + u = 0\}$ n'est pas réduit à 0 : dans \mathbb{R} et $\Omega =]-1, 1[$ par exemple, prendre $u(x) = e^{\pm x}$; et dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$ et par exemple Ω contenant $\vec{0}$, prendre $u(\vec{x}) = e^{\vec{r} \cdot \vec{x}}$ où $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\|\vec{r}\| = 1$. \blacksquare

Exercice 2.43 Montrer, pour $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} u(\vec{y}) - u(\vec{x}) &= \int_{t=x_1}^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt + \int_{t=x_2}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(y_1, t, x_3, \dots, x_n) dt + \dots \\ &\dots + \int_{t=x_n}^{y_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, t) dt. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Réponse. $\int_{t=x_1}^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt = u(y_1, x_2, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\int_{t=x_2}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(y_1, t, x_3, \dots, x_n) dt = u(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) - u(y_1, x_2, \dots, x_n) \dots$$

On fait la somme, et il reste $u(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. \blacksquare

Exercice 2.44 Soit Ω dans le cube $[-a, a]^n$, $a > 0$. À l'aide de (2.28), montrer l'inégalité de Poincaré-Friedrichs : pour $u \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2a^2 n \|\vec{\nabla}u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{(2an)^2} \left| \int_\Omega u(\vec{x}) d\Omega \right|^2 \quad (2.29)$$

Réponse. On a $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$ (en effet récurrence, vrai pour $n = 1$, et $(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_{n+1}^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} \leq (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2) - (a_1^2 + \dots + a_n^2) - na_{n+1}^2 + a_1^2 + a_{n+1} + \dots + a_n^2 + a_{n+1}$

Donc (2.28) donne :

$$\begin{aligned} |u(\vec{y}) - u(\vec{x})|^2 &\leq n \left(\left(\int_{t=x_1}^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt \right)^2 + \dots + \left(\int_{t=x_n}^{y_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, t) dt \right)^2 \right) \\ &\leq n \left(\left(\int_{t=-a}^a 1 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right| dt \right)^2 + \dots + \left(\int_{t=-a}^a 1 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \right| dt \right)^2 \right) \\ &\leq n(2a) \left(\int_{t=-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt + \dots + \int_{t=-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \right|^2 dt \right). \end{aligned}$$

Et $(u(\vec{y}) - u(\vec{x}))^2 = u(\vec{y})^2 + u(\vec{x})^2 - 2u(\vec{x})u(\vec{y})$ donne :

$$u(\vec{y})^2 + u(\vec{x})^2 \leq 2u(\vec{x})u(\vec{y}) + n(2a) \left(\int_{t=-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt + \dots + \int_{t=-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \right|^2 dt \right) \quad (2.30)$$

Et on a :

$$\int_{x_2=-a}^a \dots \int_{x_n=-a}^a \left(\int_{t=-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt \right) dx_2 \dots dx_n = \int_{\vec{x} \in \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\vec{x}) \right|^2 dt,$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \left(\int_{t=-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt \right) d\Omega = 2a \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\vec{x}) \right|^2 d\Omega.$$

De même avec les autres termes. D'où en intégrant (2.30) sur $\Omega \times \Omega$:

$$\begin{aligned} (2a)^n \int_{\vec{y} \in \Omega} u(\vec{y})^2 d\Omega + (2a)^n \int_{\vec{x} \in \Omega} u(\vec{x})^2 d\Omega &\leq 2 \int_{\vec{x} \in \Omega} u(\vec{x}) d\Omega \int_{\vec{y} \in \Omega} u(\vec{y}) d\Omega \\ &\quad + 2an(2a)(2a)^n \int_{\vec{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\Omega. \end{aligned}$$

D'où (2.29). ▀

Remarque 2.45 Autres inégalités de Poincaré–Friedrichs : Ω borné régulier (frontière lipschitzienne) :

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2). \quad (2.31)$$

Voir Nečas [12] page 11. En particulier on retrouve l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\Omega)$. ▀

2.5 L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$

L'espace de Sobolev d'ordre 2 sur Ω ouvert de \mathbb{R}^n est défini par :

$$H^2(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i, j = 1, \dots, n\} \quad (2.32)$$

On lui associe le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2} + (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2} + (d^2 u, d^2 v)_{L^2} \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{i=0}^2 (d^i u, d^i v)_{L^2}, \quad (2.33)$$

où on a posé (cadre euclidien et produit terme à terme de $[d^2 u] = [\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}]$ et de $[d^2 v] = [\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}]$) :

$$(d^2 u, d^2 v)_{L^2} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx. \quad (2.34)$$

La norme associée est :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|d^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{noté}}{=} \left(\sum_{i=0}^2 \|d^i v\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.35)$$

où $\|d^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 = (d^2 v, d^2 v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)^2 dx$.

Théorème 2.46 $(H^2(\Omega), \|\cdot\|_{H^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Admis (exercice). ▀

On peut également noter le résultat suivant (admis) :

Théorème 2.47 Si Ω est borné alors il existe une constante C_Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.36)$$

Ce résultat n'est pas évident a priori car, dans le terme de droite, les dérivées secondes croisées de v n'apparaissent pas. Voir par exemple Raviart–Thomas [14].

Remarque 2.48 On a également l'inégalité de Poincaré généralisé : si Ω est borné et $u \in H^k(\Omega)$ alors ;

$$\|u\|_{H^k}^2 \leq \text{const} \left(\|d^k u\|_{L^2}^2 + \sum_{|\vec{i}| < k} \left| \int_{\Omega} d^{\vec{i}} u(x) d\Omega \right|^2 \right), \quad (2.37)$$

où $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\vec{i}| = i_1 + \dots + i_n$. Voir Nečas [12] page 9.

Et, avec P_m l'ensemble des polynômes de degré $\leq m$, pour l'espace quotient $H^k(\Omega)/P_{k-1}$ on a :

$$\|u\|_{H^k/P_{k-1}}^2 \leq \text{const} \left(\|d^k u\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.38)$$

Ainsi la semi-norme $\|d^k u\|_{L^2}$ est une norme sur $H^k(\Omega)/P_{k-1}$. Voir Nečas [12] page 10.

Et quand Ω est borné régulier (frontière lipschitzienne) :

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C(\|d^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2). \quad (2.39)$$

Voir Nečas [12] page 12. ▀

2.6 Théorèmes de trace et formules de Green

On se place dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$ et Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n .

Une fonction $v \in H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue, et définir sa trace $v|_\Gamma$ (i.e. sa 'valeur') sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ pose problème.

Remarque 2.49 Noter que Γ est de mesure nulle, et que pour $v \in L^2(\Omega)$, comme v n'est définie que presque partout, sa valeur sur Γ n'a pas de sens. On va voir qu'on peut le faire quand la régularité de v est suffisante : quand $v \in H^1(\Omega)$. ▀

Remarque 2.50 Comme Γ est de mesure nulle, définir une fonction sur Ω au sens "presque partout" est équivalent à définir une fonction sur $\bar{\Omega}$ au sens "presque partout". En particulier on a $H^1(\Omega) = H^1(\bar{\Omega})$ qu'on notera simplement $H^1(\Omega)$. D'où la notation bizarre au premier abord : $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. ▀

2.6.1 Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$

On a vu que pour Ω ouvert borné, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'était pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Maintenant on considère le borné $\bar{\Omega}$ qui est fermé (donc compact dans \mathbb{R}^n). On a $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$, et on va voir que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\bar{\Omega})$, ce qui va permettre de définir, avec un argument de densité, la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ (i.e. sa 'valeur') sur Γ .

On considérera uniquement les ouverts Ω qui sont 1-réguliers, i.e. dont la frontière Γ est paramétrable par une fonction localement C^1 , Ω étant localement "d'un seul côté" de Γ .

Théorème 2.51 Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de \mathbb{R}^n . Alors :

- 1 - $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, et
- 2 - l'application γ_0 de restriction au bord définie par :

$$\gamma_0 : \begin{cases} (\mathcal{D}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) & \rightarrow (C^0(\Gamma), \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}), \\ v & \mapsto \gamma_0(v) = v|_\Gamma, \end{cases}$$

est linéaire et continue (pour $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $C^0(\Gamma)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$), et γ_0 se prolonge par continuité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

On définit ainsi l'application linéaire continue γ_0 appelée "application trace" :

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^1(\Omega) & \rightarrow L^2(\Gamma), \\ v & \mapsto \gamma_0(v) = v|_\Gamma. \end{cases}$$

De plus l'espace $\text{Im}(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega)) = {}^{\text{noté}} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$.

La continuité s'écrit :

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On note $\|\gamma_0\|$ sa norme :

$$\|\gamma_0\| = \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \quad (\stackrel{\text{noté}}{=} \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{\|v\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}). \quad (2.40)$$

(Attention aux normes employées.)

Preuve. On admet le théorème. Indications sur la démonstration : 1- Par cartes locales et partition de l'unité on se ramène au cas Ω est le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{x_n > 0\}$ et $v \in H^1(\Omega)$ à support borné dans Ω . 2- On approche $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ à support compact par une fonction régulière $w \in C^1(\bar{\Omega})$ par régularisation ; difficulté pour la dérivée $\frac{\partial v}{\partial x_n}$ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ traitée par exemple par réflexion. 3- On a alors, notant $\vec{z} = (x_1, \dots, x_{n-1})$:

$$\begin{aligned} w(\vec{z}, 0)^2 &= - \int_0^\infty \frac{\partial(w^2)}{\partial x_n}(\vec{z}, x_n) dx_n = -2 \int_0^\infty w(\vec{z}, x_n) \frac{\partial w}{\partial x_n}(\vec{z}, x_n) dx_n \\ &\leq 2 \left(\int_0^\infty w(\vec{z}, x_n)^2 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x_n}(\vec{z}, x_n)^2 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^\infty w(\vec{z}, x_n)^2 dx_n + \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x_n}(\vec{z}, x_n)^2 dx_n, \end{aligned}$$

d'où en intégrant en $\vec{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w(\vec{z}, 0)^2 dz = \|\gamma_0 w\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|w\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

■

Remarque 2.52 On peut montrer que γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\Gamma)$ (l'espace $L^2(\Gamma)$ contient des fonctions f trop irrégulières pour avoir un antécédent dans $H^1(\Omega)$). En particulier, dans la démonstration précédente on a uniquement besoin de la dérivation $\frac{\partial v}{\partial x_n}$ (dérivation dans la direction normale à la frontière) et on a pas besoin des dérivations dans les directions parallèles à la frontière. On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega)) = \text{Im}(\gamma_0)$, notation qui peut être justifiée, voir cours de distributions et transformées de Fourier. ■

2.6.2 Formule de Green dans $H^1(\Omega)$

On a alors le théorème d'intégration par parties avec régularité 'minimale' des fonctions :

Théorème 2.53 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de \mathbb{R}^n , et soit $\vec{n}(\vec{x})$ la normale unitaire extérieure à Γ en un point $\vec{x} \in \Gamma$. On notera $(n_i)_{i=1, \dots, n}$ les composantes de \vec{n} (et n_i est appelée i -ème cosinus directeur). Alors, dès que $u \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma, \quad (2.41)$$

notée usuellement $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma} u n_i d\Gamma$. Et dès que $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} u(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} u(\vec{x}) v(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.42)$$

notée usuellement $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_i d\Gamma$.

Preuve. Il s'agit de montrer que $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} \gamma_0(u)(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma$. Le résultat est connu dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ (et dans $C^1(\bar{\Omega})$), voir section B.4, et la démonstration s'obtient par densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ et par continuité de l'application trace γ_0 .

Puis dans (2.41), on remplace u par le produit uv , ce qui donne (2.42) pour u et v dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Puis, par densité, pour $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, puis pour $u, v \in H^1(\Omega)$. ■

Remarque 2.54 La notation $\int_{\Gamma} u n_i d\Gamma$ est abusive : on devrait noter $\int_{\Gamma} \gamma_0(u) n_i d\Gamma$ ou bien $\int_{\Gamma} u|_{\Gamma} n_i d\Gamma$, pour $u \in H^1(\Omega)$. Mais l'usage (et l'absence d'ambiguïté) fait qu'on écrit $\int_{\Gamma} u n_i d\Gamma$. ■

Exercice 2.55 Dans \mathbb{R}^2 , soit le quadrilatère A, B, C, D où $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dessin). On note $x_1 = x$ et $x_2 = y$. Soit $u(x, y) = y$. Vérifier (2.41) pour $i = 1$ (ne pas oublier n_1 !).

Réponse. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ donne $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) d\Omega = 0$. Paramétrage de $\Gamma = \Gamma_{AB} \cup \Gamma_{BC} \cup \Gamma_{CD} \cup \Gamma_{DA}$ (dessin) : 1- Γ_{AB} est l'image de la courbe paramétrique $\vec{x} = \vec{r}(t) = A + t\vec{AB}$ pour $t \in [0, 1]$. Donc $\vec{r}'(t) = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est tangent en \vec{x} , et $\vec{n}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal unitaire sortant. Donc $n_1(\vec{x}) = 0$, donc $\int_{\Gamma_{AB}} u(\vec{x})n_1(\vec{x}) d\Gamma = 0$. 2- Γ_{BC} est donné par $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \vec{r}(t) = B + t\vec{BC} = \begin{pmatrix} x(t) = 2 - t \\ y(t) = t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 1]$. Donc $\vec{r}'(t) = \vec{BC}$ et $d\Gamma = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{2} dt$ et $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal unitaire sortant, donc $n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc $\int_{\Gamma_{BC}} u(\vec{x})n_1(\vec{x}) d\Gamma = \int_{t=0}^1 u(\vec{r}(t))n_1(\vec{r}(t))\sqrt{2} dt = \int_{t=0}^1 y(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} dt = [\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$. 3- $\int_{\Gamma_{CD}} u(\vec{x})n_1(\vec{x}) d\Gamma = 0$. 4- $\int_{\Gamma_{DA}} u(\vec{x})n_1(\vec{x}) d\Gamma = -\frac{1}{2}$. D'où $\int_{\Gamma} u(\vec{x})n_1(\vec{x}) d\Gamma = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$. D'où (2.41) est vérifié. \blacksquare

2.6.3 $H_0^1(\Omega) = \text{Ker}(\gamma_0)$

On en déduit le théorème :

Théorème 2.56 Si Ω est un ouvert borné 1-régulier de \mathbb{R}^n , alors $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ_0 , i.e. :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v) = 0\} = \text{Ker}(\gamma_0) \quad (2.43)$$

Preuve. La preuve de l'inclusion $H_0^1(\Omega) \subset \text{Ker}(\gamma_0)$ est simple (par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et continuité de γ_0); la réciproque délicate est admise (par cartes locales et partition de l'unité, voir par exemple Raviart-Thomas [14]). \blacksquare

2.6.4 Dans $H^2(\Omega)$

Pour $v \in C^2(\Omega)$, on dispose de son développement limité au voisinage de $\vec{x} \in \Omega$:

$$f(\vec{x} + h\vec{n}(\vec{x})) = f(\vec{x}) + h(\vec{\nabla}f(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n} + o(h). \quad (2.44)$$

Cette formule est généralisée au cas $f \in H^2(\Omega)$.

Soit $v \in H^2(\Omega)$. Donc $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ pour $i = 1, \dots, n$, et la quantité $\gamma_0(\frac{\partial v}{\partial x_i}) = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Gamma}$ a un sens dans $L^2(\Gamma)$. On définit alors sur Γ , $\vec{n}(\vec{x})$ étant le vecteur normal unitaire sortant en un point $\vec{x} \in \Gamma$:

$$\forall v \in H^2(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial n}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) = \vec{\nabla}v(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \in \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

et $\frac{\partial v}{\partial n}(\vec{x})$ est appelé dérivée normale en \vec{x} .

Et pour tout $v \in H^2(\Omega)$, on définit ainsi la fonction $\frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$.

On admet alors :

Théorème 2.57 Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de \mathbb{R}^n . Alors :

- 1 - $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$,
- 2 - l'application γ_1 définie par :

$$\gamma_1 : \begin{cases} (\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{H^2(\Omega)}) & \rightarrow (C^0(\Gamma), \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}), \\ v & \mapsto \frac{\partial v}{\partial n}, \end{cases}$$

est linéaire continue et se prolonge par continuité de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$:

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad \|\gamma_1(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|v\|_{H^2(\Omega)} \quad (2.46)$$

γ_1 est appelée application trace. On note $\|\gamma_1\|$ sa norme :

$$\|\gamma_1\| = \sup_{0 \neq v \in H^2(\Omega)} \frac{\|\gamma_1(v)\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^2(\Omega)}} \quad (\stackrel{\text{noté}}{=} \sup_{0 \neq v \in H^2(\Omega)} \frac{\|\frac{\partial v}{\partial n}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^2(\Omega)}}). \quad (2.47)$$

On en déduit directement à partir du théorème 2.53 le

Théorème 2.58 Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de \mathbb{R}^n . Alors, dès que $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.48)$$

Et on note usuellement $\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i v d\Gamma$.

Et donc en sommant, avec la notation (2.45) :

$$\int_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} v(\vec{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma, \quad (2.49)$$

appelé également formule de Green, et notée $\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma$.

Preuve. La formule de Green (2.42) donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) v(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

D'où le résultat. ▀

Exercice 2.59 Établir dans \mathbb{R}^2 , pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A \cdot \vec{\nabla} u)(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} (A \cdot \vec{\nabla} u)(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} v(\vec{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} (A \cdot \vec{\nabla} u)(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma.$$

L'établir plus généralement dans \mathbb{R}^n pour une matrice A quelconque

N.B. : le point '.' dénote soit le produit scalaire dans \mathbb{R}^n soit le produit matrice-vecteur : on devrait noter :

$$\int_{\Omega} (A \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}), \vec{\nabla} v(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} (A \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n} v(\vec{x}) d\Gamma \quad (2.50)$$

pour lever les ambiguïtés. Dans la suite on notera $\frac{\partial u}{\partial n_A}(\vec{x}) = (A \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n}$.

Réponse. Poser $\vec{w} = A \cdot \vec{\nabla} u$ et appliquer (2.42). ▀

Remarque 2.60 * On dispose également du résultat : si $v \in H^1(\Omega)$ et si $\Delta v \in L^2(\Omega)$, alors $\frac{\partial v}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et :

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}),$$

à comparer avec (2.46). ▀

2.7 * Espace de Sobolev $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et inégalité de Poincaré généralisée

On suppose ici Ω ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière partitionnée en $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ (avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$) et on suppose Γ_0 de mesure non nulle : $\operatorname{meas}(\Gamma_0) \neq 0$.

On définit alors :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\} \quad (2.51)$$

Cet espace est fermé dans $H^1(\Omega)$ comme noyau de l'application (linéaire) continue $r \circ \gamma_0$ où $r : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ est l'application restriction et γ_0 est l'application trace. Donc $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un Hilbert.

Sur $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ on dispose de l'inégalité de Poincaré généralisée :

Théorème 2.61 Dès que Ω est connexe, borné et 1-régulier, et que $\operatorname{meas}(\Gamma_0) > 0$, la semi-norme $|v|_{H^1(\Omega)} = \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. On la note $\|\cdot\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}$:

$$\forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad \|v\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} = \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.52)$$

et $(u, v)_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} = (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2(\Omega)}$ définit un produit scalaire (associé à la norme) sur $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

Preuve. On vérifie que $|v|_{H^1(\Omega)}$ est une norme sur $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$: c'est une semi-norme et $|v|_{H^1(\Omega)} = 0$ implique $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où v est constant (presque partout) sur Ω connexe. Puisque $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$ on déduit que si $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ alors v est la constante nulle (presque partout).

Montrons qu'il existe 2 constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que :

$$\forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Trivialement $C_2 = 1$ et il reste à vérifier l'existence de C_1 (démonstration hors programme deuxième année, démonstration classique pour le cours de troisième année).

Supposons le contraire : il existe une suite de fonctions (u_m) de $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ telle que :

$$\frac{1}{m} \|u_m\|_{H^1(\Omega)} > \|\vec{\nabla} u_m\|_{L^2(\Omega)}$$

Normant cette suite dans $H^1(\Omega)$, on a la suite $v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{H^1(\Omega)}}$ telle que :

$$\|v_m\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \|\vec{\nabla} v_m\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{m} \quad (2.53)$$

Sachant que Ω est borné, le théorème de Rellich (admis, voir cours de 3ème année) indique que l'injection canonique de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est compacte (de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ on peut extraire une sous-suite convergente pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$).

Donc, (v_m) étant bornée dans $H^1(\Omega)$, quitte à extraire une sous-suite, (v_m) est convergente dans $L^2(\Omega)$, donc est en particulier de Cauchy dans $L^2(\Omega)$: $\|v_m - v_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ quand m et n tendent vers ∞ . On en déduit avec (2.53) :

$$\|v_m - v_k\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v_m - v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla}(v_m - v_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{m,k \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0$$

et (v_m) est une suite de Cauchy dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ (car fermé dans $H^1(\Omega)$ complet), et (v_m) converge vers un élément $w \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tel que $\vec{\nabla} w = 0$ (avec (2.53)). D'où $w = 0$ puisque $\text{meas}(\Gamma_0) \neq 0$. Ce qui n'est pas compatible avec $\|w\|_{H^1(\Omega)} = 1 = \lim \|v_m\|_{H^1(\Omega)}$. Il n'existe donc pas de suite satisfaisant (2.7) d'où l'existence de $C_1 > 0$. \blacksquare

2.8 * Cas vectoriel : l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)^2$ et inégalités de Korn

On s'intéresse ici aux applications où l'inconnue est une fonction vectorielle \vec{u} à valeurs dans \mathbb{R}^2 : $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\vec{x}) \\ u_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$, où u_1 et u_2 sont deux fonctions de $H^1(\Omega)$.

Ce cas correspondant en particulier au vecteur déplacement en élasticité (mécanique des solides). Le cas de \mathbb{R}^3 (ou de \mathbb{R}^n) se traite de la même manière. Si $\underline{\underline{\sigma}}$ représente le tenseur des contraintes, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = 0$$

où \vec{f} une densité volumique de forces. La loi d'état d'un solide élastique homogène et isotrope est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \text{div} \vec{u}) I + \mu (\text{grad} \vec{u} + (\text{grad} \vec{u})^T) = (\lambda \text{div} \vec{u}) I + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

où I est le tenseur identité, $(\text{grad} \vec{u})^T$ est le tenseur transposé de $\text{grad} \vec{u} = [\frac{\partial u_i}{\partial x_j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ et :

$$\text{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \text{Tr}(\text{grad} \vec{u}), \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad} \vec{u} + (\text{grad} \vec{u})^T).$$

$\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ sont appelés coefficients de Lamé, et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur des déformations linéaires.

Se limitant à \mathbb{R}^2 , si $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, on a donc :

$$\sigma_{ij} = (\lambda \text{div} \vec{u}) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = (\lambda \text{div} \vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

avec δ_{ij} symbole de Kronecker.

Le problème consistera à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \vec{u} \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que :} \\ - \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\vec{u})) = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \vec{u}|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}) \cdot \vec{n} = \gg \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (2.54)$$

où Γ la frontière régulière de Ω est la partition $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, où \vec{n} est la normale extérieure à Γ , $\vec{f} \in L^2(\Omega)^2$ et $\gg \in \gamma_1(H^1(\Omega)^2) \subset L^2(\Gamma)^2$. La condition sur Γ_0 est une condition d'encastrement, et la condition sur Γ_1 une condition de chargement par une densité superficielle de force \gg .

On munit les espaces $L^2(\Omega)^2$, $H^1(\Omega)^2$ et $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2$ des structures d'espaces produits, et en particulier des normes, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\|v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\vec{v}\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} &= \left(\|\vec{\nabla} v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla} v_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où pour cette dernière norme on a supposé que $\text{meas}(\Gamma_0) \neq \emptyset$. On a alors besoin pour résoudre le problème de Dirichlet du théorème suivant dans $H_0^1(\Omega)^2$:

Théorème 2.62 (Inégalité de Korn) *On suppose Ω ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ régulière. Alors :*

$$\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2} \|\text{grad} \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.56)$$

et le membre de gauche définit sur $H_0^1(\Omega)^2$ une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)^2$.

Ce résultat n'est pas immédiat car le membre de gauche ne contient que les combinaisons linéaires 'symétrisées' de $\text{grad} \vec{v}$, tandis que le membre de droite fait intervenir toutes les combinaisons linéaires de $\text{grad} \vec{v}$. Ce résultat est également vrai dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^n .

Preuve. On a pour $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2$:

$$\sum_{ij} \left(\varepsilon_{ij}(\vec{v}) \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

d'où

$$\int_{\Omega} \sum_{ij} \left(\varepsilon_{ij}(\vec{v}) \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \|\text{grad} \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega$$

Il reste à montrer que le dernier terme est positif. On suppose de plus $\vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ (on travaillera ensuite par densité). Par intégrations par parties on va intervertir l'ordre des dérivations :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_i v_j d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_i v_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_j v_j d\Gamma \end{aligned}$$

D'où puisque $\vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ est nul au bord les intégrales sur le bord sont nulles et :

$$\sum_{ij} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \geq 0$$

puisque de manière générique $(\sum_i \alpha_i)^2 = (\sum_i \alpha_i)(\sum_j \alpha_j) = \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j$. D'où le théorème sachant $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $H_0^1(\Omega)$. \blacksquare

Pour résoudre le problème de Neumann, on aura besoin du théorème suivant (admis) :

Théorème 2.63 (Inégalité de Korn) *On suppose Ω ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ régulière. Alors il existe une constante $C_1 = C_1(\Omega) > 0$ qui ne dépend que de l'ouvert Ω telle que :*

$$\forall \vec{v} \in H^1(\Omega)^2, \quad \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_1 \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.57)$$

et le membre de gauche définit sur $H^1(\Omega)$ une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)$.

Autrement dit :

$$\forall \vec{v} \in H^1(\Omega)^2, \quad \|\text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_1 (\|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{grad} \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad (2.58)$$

On en déduit (utile pour résoudre le problème aux limites mixtes) :

Théorème 2.64 (Inégalité de Korn) Si Ω est de plus connexe et si $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, alors il existe une constante $C_2 = C_2(\Omega) > 0$ qui ne dépend que de l'ouvert Ω telle que :

$$\forall \vec{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2, \quad \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_2 \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.59)$$

et le membre de gauche définit sur $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)$.

Autrement dit $\|\text{grad}\vec{v} + (\text{grad}\vec{v})^T\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_2 \|\text{grad}\vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$ dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. C'est un analogue 2-D du théorème de Poincaré généralisé.

Remarque 2.65 On peut montrer facilement que le membre de gauche définit une norme sur $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. C'est une semi-norme et il suffit de vérifier que $\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)} = 0$ implique $\|\vec{v}\| = 0$ si $\vec{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. Mais si $\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)} = 0$ alors $\vec{v} = (v_1, v_2)$ est de la forme :

$$\begin{aligned} v_1(\vec{x}) &= a_1 + bx_2 \\ v_2(\vec{x}) &= a_2 - bx_1 \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \vec{v}(\vec{x}) = \vec{a} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

où a_1, a_2 et b sont des constantes. Donc \vec{v} est un déplacement rigide. De plus il s'annule en 2 points car $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$ et donc $\vec{v} = 0$. De même dans \mathbb{R}^3 on a $\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)} = 0$ implique $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de la forme $\vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x}$: c'est un déplacement rigide.

L'équivalence des normes se déduit comme pour l'inégalité de Poincaré généralisée. ▀

3 Problèmes aux limites elliptiques et formulations variationnelles

3.1 Rappels matriciels

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{M}_{nm} l'ensemble des matrices réelles $n \times m$. Donc \mathcal{M}_{nn} est l'ensemble des "matrices carrées" et \mathcal{M}_{n1} est l'ensemble des "matrices colonnes".

- Dans \mathcal{M}_{n1} , la base canonique $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n} = \text{noté } (\vec{a}_i)$ est la base définie par $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, le

produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_I$ est défini par $(\vec{a}_i, \vec{a}_j)_I = \delta_{ij}$ pour tout i, j . Donc

$$(\vec{x}, \vec{y})_I = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [\vec{x}]^T \cdot [\vec{y}] \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{x}^T \cdot \vec{y} \quad (3.1)$$

quand $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{a}_i$, et $[\vec{x}]$ et $[\vec{y}]$ sont les matrices colonnes des composantes dans la base canonique notées abusivement \vec{x} et \vec{y} (pour alléger l'écriture). Et la norme associée est donnée par $\|\vec{x}\|_I = (\vec{x}, \vec{x})_I^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

- $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{nn}$ est symétrique ssi $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.
- $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est définie positive ssi

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{M}_{n1} - \{\vec{0}\}, \quad \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0. \quad (3.2)$$

- $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est elliptique ssi

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{M}_{n1} - \{\vec{0}\}, \quad \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \geq \alpha \vec{x}^T \cdot \vec{x}. \quad (3.3)$$

• $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est diagonalisable ssi il existe n couples $(\lambda_i, \vec{z}_i) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n1}$, appelées couple de valeurs propres et vecteurs propres de A , t.q., pour tout $i, j = 1, \dots, n$,

$$A \cdot \vec{z}_j = \lambda_j \vec{z}_j \quad \text{et} \quad (\vec{z}_i) \text{ est une base dans } \mathcal{M}_{n1}. \quad (3.4)$$

Notant $D = \text{diag}(\lambda_i)$ la matrice diagonale des λ_i et $P = [P_{ij}]$ la matrice de passage de la base (\vec{a}_i) à la base (\vec{z}_i) (donc définie par $\vec{z}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \vec{a}_i$ pour tout j), (3.4) s'écrit

$$A \cdot P = P \cdot D \quad \text{et} \quad P \text{ est inversible} \quad (\text{donc } D = P^{-1} \cdot A \cdot P). \quad (3.5)$$

Vérification : la j -ème colonne de $A \cdot P$ est $A \cdot \vec{z}_j$, la j -ème colonne de $P \cdot D$ est $P \cdot (\lambda_j \vec{a}_j) = \lambda_j P \cdot \vec{a}_j = \lambda_j \vec{z}_j$, pour tout j : donc $A \cdot \vec{z}_j = \lambda_j \vec{z}_j$ pour tout j équivaut bien à $A \cdot P = P \cdot D$.

Théorème 3.1 Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}$ symétrique réelle est diagonalisable dans une b.o.n. (sous-entendu pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_I$), i.e. il existe n couples $(\lambda_i, \vec{z}_i) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n1}$, appelées couple de valeurs propres et vecteurs propres de A , t.q., pour tout $i, j = 1, \dots, n$,

$$A.\vec{z}_j = \lambda_j \vec{z}_j \quad \text{et} \quad \vec{z}_i^T . \vec{z}_j = \delta_{ij}, \quad \text{i.e.} \quad A.P = P.D \quad \text{et} \quad P^T . P = I. \quad (3.6)$$

Preuve. Classique : voir poly diagonalisation.

Vérification de $P^T . P = I$: $(P^T . P)_{ij} = \vec{z}_i^T . \vec{z}_j = \delta_{ij}$ pour tout i, j équivaut à $P^T . P = I$. \blacksquare

Exercice 3.2 Montrer : si A est définie positive alors A est inversible.

Réponse. Si A n'est pas inversible alors elle n'est pas injective, donc $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ t.q. $A.\vec{x} = \vec{0}$, donc $\vec{x}^T . A.\vec{x} = 0$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, donc A n'est pas définie positive. \blacksquare

Exercice 3.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$ symétrique définie positive. Montrer :

- 1- Ses valeurs propres λ_i sont > 0 .
- 2- $\vec{x}^T . A.\vec{x} \geq \lambda_{\min} \vec{x}^T . \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathcal{M}_{n1}$, où $\lambda_{\min} = \min_{i=1, \dots, n}(\lambda_i)$.
- 3- Dédurre que A (symétrique définie positive) est elliptique (la réciproque est triviale), i.e.

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{M}_{n1}, \quad \vec{x}^T . A.\vec{x} \geq \alpha \vec{x}^T . \vec{x}, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i,j=1}^n x_i x_j a_{ij} \geq \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (3.7)$$

Réponse. 1- Avec (3.6), $0 < \vec{z}_i^T . A.\vec{z}_i = \vec{z}_i^T . (\lambda_i \vec{z}_i) = \lambda_i \vec{z}_i^T . \vec{z}_i = \lambda_i$.

2- Soit $\vec{x} \in \mathcal{M}_{n1}$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{z}_i$. Alors $A.\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j A.\vec{z}_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \vec{z}_j$, donc $\vec{x}^T . A.\vec{x} = \sum_{i,j=1}^n x_i \lambda_j x_j \vec{z}_i^T . \vec{z}_j = \sum_{i,j=1}^n \lambda_j x_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_{\min} \vec{x}^T . \vec{x}$.

3- D'où A est elliptique : $\alpha = \lambda_{\min}$ convient. \blacksquare

Exercice 3.4 Soit $S = \{\vec{x} \in \mathcal{M}_{n1} : \|\vec{x}\|_I = 1\}$ (sphère unité de \mathcal{M}_{n1}), et soit $\|A\| := \sup_{\vec{x} \in S} \|A.\vec{x}\|_I$ (la norme matricielle de A). Montrer :

- 1- $\|A\| = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{y})_I| = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in S} |\vec{y}^T . A.\vec{x}|$.
- 2- Si A est symétrique alors $\|A\| = \sup_{\vec{x} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{x})_I| = \sup_{\vec{x} \in S} |\vec{x}^T . A.\vec{x}|$.
- 3- Si A est symétrique alors $\|A\| = |\lambda_{\max}|$ = la plus grande des valeurs propres en valeur absolue.
- 4- Les points 1- et 2- sont faux si A n'est pas symétrique.

Réponse. 1- Cauchy Schwarz donne $\|A.\vec{x}\|_I = \sup_{\vec{y} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{y})_I|$, (sup atteint pour $\vec{y} = \frac{A.\vec{x}}{\|A.\vec{x}\|_I}$), donc $\|A\| := \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{y})_I|$.

2.1- Et $\sup_{\vec{x}, \vec{y} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{y})_I| \geq \sup_{\vec{x} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{x})_I|$, donc $\|A\| \geq \sup_{\vec{x} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{x})_I|$.

2.2- Avec A symétrique et $\vec{x}, \vec{y} \in S$ on a $4(A.\vec{x}, \vec{y})_I = (A.(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y})_I - (A.(\vec{x}-\vec{y}), \vec{x}-\vec{y})_I$ (immédiat), donc $4|(A.\vec{x}, \vec{y})_I| \leq \|\vec{x}+\vec{y}\|_I^2 (A.(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\|\vec{x}+\vec{y}\|_I}, \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\|\vec{x}+\vec{y}\|_I})_I) + \|\vec{x}-\vec{y}\|_I^2 (A.(\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|_I}, \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|_I})_I) \leq (\|\vec{x}+\vec{y}\|_I^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|_I^2) \sup_{\vec{z} \in S} |(A.\vec{z}, \vec{z})_I|$, avec $\|\vec{x}+\vec{y}\|_I^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|_I^2 = 2\|\vec{x}\|_I^2 + 2\|\vec{y}\|_I^2 = 4$, donc $|(A.\vec{x}, \vec{y})_I| \leq \sup_{\vec{z} \in S} |(A.\vec{z}, \vec{z})_I|$. Donc $\|A\| \leq \sup_{\|\vec{z}\|_I=1} |(A.\vec{z}, \vec{z})_I|$.

2.3- Donc $\|A\| = \sup_{\|\vec{z}\|_I=1} |(A.\vec{z}, \vec{z})_I|$.

3- A est symétrique réelle ; donc diagonalisable dans une b.o.n. (\vec{v}_i) de vecteurs propres associée aux valeurs propres λ . Soit $\vec{x} \in \mathcal{M}_{n1}$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i$. On a $|(A.\vec{x}, \vec{x})_I| = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i^2| \leq |\lambda_{\max}| \sum_{i=1}^n x_i^2 = |\lambda_{\max}| \|\vec{x}\|_I^2$ pour $\vec{x} \in S$, donc, avec le point 1- ci-dessus, $\|A\| \leq |\lambda_{\max}|$; et, avec $\vec{v}_{\max} \in S$ un vecteur propre associé à λ_{\max} on a $|(A.\vec{v}_{\max}, \vec{v}_{\max})_I| = |\lambda_{\max}|$, donc $\|A\| \geq |\lambda_{\max}|$, donc $\|A\| = |\lambda_{\max}|$.

4- Exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (non symétrique). Ici $\|A\| = 1$: prendre $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \in S$ qui donne $\|A.\vec{x}\|_I^2 = \sin^2 \theta \leq 1$, et $\|A.\vec{x}\|_I = 1$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ici 0 est l'unique valeur propre, donc $\lambda_{\max} = 0$, donc $\|A\| > \lambda_{\max}$. Et $(A.\vec{x}, \vec{x})_I = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$, donc $\sup_{\vec{x} \in S} |(A.\vec{x}, \vec{x})_I| = \frac{1}{2} < \|A\|$. \blacksquare

Exercice 3.5 Montrer : Si A est elliptique, c.f. (3.7), et non symétrique, alors ses valeurs propres (éventuelles) sont > 0 , mais on peut avoir la plus grande constante d'ellipticité α t.q. $\alpha < \lambda_{\min}$.

Réponse. Soit \vec{v} un vecteur propre (donc non nul) associé à une valeur propre λ ; on a $0 < \alpha \|\vec{v}\|_I^2 \leq \vec{v}^T . A.\vec{v} = \vec{v}^T . (\lambda \vec{v}) = \lambda \|\vec{v}\|_I^2$, donc $\lambda > 0$.

Et prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice non symétrique). $\lambda = 1$ est valeur propre double, donc $\lambda_{\min} = 1$. Soit $\vec{x} = (\cos \theta, \sin \theta) \in S$. On a $(A.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^2} = \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\theta)$, donc $\alpha = \frac{1}{2}$ est la plus grande constante d'ellipticité possible (pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$) : et $\alpha < \lambda_{\min}$. \blacksquare

Exercice 3.6 1- Montrer si A est une matrice elliptique symétrique alors la forme bilinéaire associée $(\cdot, \cdot)_A$ définie par $(\vec{x}, \vec{y})_A = (A.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n}$ est un produit scalaire.

2- Réciproquement, montrer qu'un produit scalaire dans \mathbb{R}^n est de la forme $(\vec{x}, \vec{y})_A = (A.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n}$ où A est une matrice elliptique symétrique.

Réponse. 1- $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (A.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n}$ est une forme bilinéaire car le produit matriciel est linéaire et un produit scalaire est bilinéaire. $(\vec{x}, \vec{y})_A = (A.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{x}, A.\vec{y})_{\mathbb{R}^n} = (A.\vec{y}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{y}, \vec{x})_A$ car A est symétrique et $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ est symétrique. Et $(\vec{x}, \vec{x})_A \geq \lambda_{\min} \|\vec{x}\|^2$, c.f. exercice précédent. Donc $(\cdot, \cdot)_A$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

2- Soit $a(\cdot, \cdot)$ un produit scalaire. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Soient $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$ et $\vec{y} = \sum_j y_j \vec{e}_j$. Alors $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire donne $a(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} x_i y_j a(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{x}^t . A . \vec{y}$, où $A = [a_{ij}]$ est la matrice définie par $a_{ij} = a(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Il est immédiat que cette matrice est symétrique, et après diagonalisation, qu'elle est définie positive, i.e. elliptique. ■

Exercice 3.7 Est-ce que le produit de deux matrices $n * n$ symétriques est une matrice symétrique ?

Réponse. NON en général : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique. ■

Exercice 3.8 Montrer : si $A \in \mathcal{M}_{nn}$ est définie positive (cas symétrique déjà traité) alors A est elliptique.

Réponse. La fonction $f : \vec{\xi} \in \mathcal{M}_{n1} \rightarrow f(\vec{\xi}) = (A.\vec{\xi}, \vec{\xi})_I$ est continue dans \mathcal{M}_{n1} (elle est polynomiale de degré 2 en les composantes de $\vec{\xi}$ sur la base canonique). Donc continue sur le compact $S = \{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\xi}\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}$ (la sphère unité). Donc f atteint son minimum sur S . Notons $\alpha = \min_{\vec{\xi} \in S} f(\vec{\xi}) = \min_{\vec{\xi} \in S} (A.\vec{\xi}, \vec{\xi})_{\mathbb{R}^n} = f(\vec{\xi}_{\min})$, où donc $\vec{\xi}_{\min}$ est un point de S où le min est atteint. Et $\alpha > 0$ car A est définie > 0 et $\|\vec{\xi}_{\min}\|_{\mathbb{R}^n} \neq 0$, d'où (3.3). ■

Exercice 3.9 Montrer : si M est symétrique définie positive et R est symétrique, alors le problème "aux valeurs propres" généralisé $R.\vec{v} = \lambda M.\vec{v}$ admet un base (\vec{v}_i) des solutions t.q. $R.\vec{v}_i = \lambda_i M.\vec{v}_i$ et $(M.\vec{v}_i, \vec{v}_j)_I = \delta_{ij}$, pour tout i, j .

Réponse. Soit $M = L.L^T$ la décomposition de Cholesky. Donc $R.\vec{v} = \lambda L.L^T.\vec{v}$, soit $L^{-1}.R.\vec{v} = \lambda L^T.\vec{v}$, soit $L^{-1}.R.L^{-T}.\vec{w} = \lambda \vec{w}$ où on a posé $\vec{w} = L^T.\vec{v}$. $L^{-1}.R.L^{-T}$ est symétrique (car R l'est) : soit (\vec{w}_i) la b.o.n. de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i : on a $L^{-1}.R.L^{-T}.\vec{w}_i = \lambda_i \vec{w}_i$ avec $(\vec{w}_i, \vec{w}_j)_I = \delta_{ij}$ pour tout i, j . On pose $\vec{v}_i = L^{-T}.\vec{w}_i$: on obtient $R.\vec{v}_i = \lambda_i L.L^T.\vec{v}_i = \lambda_i M.\vec{v}_i$. Donc la base (\vec{v}_i) est t.q. $R.\vec{v}_i = \lambda_i M.\vec{v}_i$ pour tout i . Et $\delta_{ij} = (\vec{w}_i, \vec{w}_j)_I = (L^T.\vec{v}_i, L^T.\vec{v}_j)_I = (L.L^T.\vec{v}_i, \vec{v}_j)_I = (M.\vec{v}_i, \vec{v}_j)_I$ pour tout i, j . ■

3.2 Opérateur différentiel elliptique

Définition 3.10 Un opérateur différentiel P du second ordre est une application linéaire de $C^\infty(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$ (et de manière plus générale de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) définies par, pour $f \in C^\infty(\Omega)$: pour tout $\vec{x} \in \Omega$:

$$\begin{aligned} (Pf)(\vec{x}) &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j})(\vec{x}) + a_0(\vec{x}) \\ &= - \operatorname{div}(A.\vec{\nabla} f)(\vec{x}) + a_0(\vec{x}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

où a_0 et les $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables bornées sur Ω .

Notation : on note de manière abrégée $P = -\operatorname{div}(A.\vec{\nabla}) + a_0$.

Exemple 3.11 Si $A = I$ et $a_0 = 0$, on a $P = -\operatorname{div}(\vec{\nabla}) = -\Delta$. ■

Définition 3.12 L'opérateur P du second ordre est dit elliptique sur l'Hilbert V , ou coercitif sur V , ou coercif sur V (anglicisme), si :

1. la fonction matricielle A est elliptique, et
2. $a_0(\vec{x}) > 0$ pour tout $\vec{x} \in \Omega$ (ou si $V = H_0^1(\Omega)$: $a_0(\vec{x}) \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in \Omega$).

Définition 3.13 On appelle 'problème aux limites elliptique du second ordre' un problème avec conditions aux limites, qui est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ P(u) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{Conditions aux limites (C.L.) sur } u \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

où V est un Hilbert de fonctions, où P est un opérateur elliptique du second ordre et où f est une fonction donnée. C'est l'importance des conditions aux limites qui peut justifier cette appellation 'problème aux limites elliptique', plutôt que 'problème elliptique avec conditions aux limites'.

Un problème aux limites elliptique du second ordre s'écrit donc, pour une fonction matricielle A elliptique et une fonction a_0 positive bornée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ - \operatorname{div}(A.\vec{\nabla} u) + a_0 u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{C.L. sur } u. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Exemple 3.14 En particulier, si $A = I$ (elliptique) et $a_0 = 0$, alors le problème est : trouver u dans l'espace V (à déterminer) tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{C.L. sur } u. \end{cases} \quad (3.11)$$

Et si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (elliptique) et $a_0 = 1$, le problème est : trouver u dans l'espace V (à déterminer) tel que :

$$\begin{cases} -2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{C.L. sur } u. \end{cases} \quad (3.12)$$

■

Définition 3.15 Les conditions aux limites que nous regarderons seront de l'un des types suivants :

1. Dirichlet (condition aux limites de) :

$$u|_{\Gamma} = \text{donnée du pb},$$

i.e. u est connu sur Γ , et donc $u|_{\Gamma}$ n'est pas une inconnue du problème.

2. Neumann (condition aux limites de) :

$$(A.\vec{\nabla}u).\vec{n}|_{\Gamma} = \text{donnée du pb},$$

et en 1-D, dans $\Omega =]a, b[$, elles imposent $u'(a)$ et $u'(b)$. Attention : la fonction u est inconnue sur Γ (on ne connaît que sa dérivée au bord) et donc $u|_{\Gamma}$ est une inconnue du problème.

3. Neumann généralisé (condition aux limites de) :

$$(A.\vec{\nabla}u).\vec{n} + \gamma u|_{\Gamma} = \text{donnée du pb},$$

avec $\gamma \geq 0$ (en 1-D, dans $\Omega =]a, b[$, elles imposent $u'(a) + \gamma u(a)$ et $u'(b) + \gamma u(b)$). Attention : la fonction u est inconnue sur Γ et donc $u|_{\Gamma}$ est une inconnue du problème.

4. Mixtes Dirichlet–Neumann (condition aux limites). Le bord Γ est partitionné en Γ_0 et en Γ_1 , avec conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_0 et de Neumann sur Γ_1 .

Remarque 3.16 La condition aux limites de Dirichlet est une condition de “position imposée au bord”.

La condition aux limites de Neumann s'interprète comme l'imposition d'une force sur Γ qui engendrera un déplacement qui devra être calculé. Par exemple dans le cas de $A = I$, la condition de Neumann s'écrit simplement $\vec{\nabla}u.\vec{n} = \text{force} = \text{donnée}$ (imposée) sur le bord.

La condition aux limites mixte correspond typiquement, au problème du chargement d'un balcon : encastré dans le mur d'un côté (condition de Dirichlet sur Γ_0) et avec une force connue sur les autres bords (par exemple le poids d'une palissade sur Γ_1). Le problème sera de connaître la forme u du balcon soumis à une force volumique f et à une force sur le bord (surfactive) Γ_1 (condition de Neumann), lorsqu'on connaît sa position sur Γ_0 (condition de Dirichlet) : l'inconnue sera la position u (altitude) qui ne sera connue qu'à la position d'encastrement (i.e. sur Γ_0) et à déterminer ailleurs (i.e. dans Ω et sur Γ_1). ■

Définition 3.17 On appelle *solution classique* une solution u de (3.10) qui est $C^2(\Omega)$.

On ne s'intéressera pas aux solutions classiques dans la suite car elles sont trop régulières : en particulier on voudra calculer une solution approchée (par ordinateur) qui sera uniquement continue et affine par morceaux (composée de segments de droites). Une telle approximation n'étant pas dans C^1 , ne sera pas dans C^2 .

Définition 3.18 On appellera *solution forte* une solution u de (3.10) considérée au sens des distributions dans Ω :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\text{div}(A.(\vec{\nabla}u)) + a_0 u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{C.L. sur } u & \text{dans } \mathcal{D}(\Gamma) \end{cases} \quad (3.13)$$

Définition 3.19 On appellera *solution faible* ou *solution variationnelle* une solution u du problème du type : trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$:

$$\int_{\Omega} (A.\vec{\nabla}u).\vec{\nabla}v \, d\Omega + \int_{\Omega} a_0 u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma \quad (3.14)$$

En particulier, on devra supposer $u, v \in H^1(\Omega)$ (i.e. prendre $V \subset H^1(\Omega)$) pour que les intégrales aient un sens.

Remarque 3.20 La solution classique demandait la régularité $u \in C^2$ qui est beaucoup plus contraignante : en particulier, on ne pourra pas chercher de solution classique u continue affine par morceau (une telle fonction n'est même pas C^1), alors qu'on pourra chercher une telle fonction u au sens faible (car une fonction u continue affine par morceau appartient à $H^1(\Omega)$). ■

Remarque 3.21 Avec cette formulation faible on se rend également compte qu'il n'est pas utile de supposer les fonctions a_{ij} dérivables, ni même continues (la définition de l'opérateur P est donc à prendre au sens des distributions) : l'hypothèse $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ (fonctions bornées) sera suffisante. ■

On verra que la solution faible sera (souvent) équivalente à la solution forte une fois une intégration par parties effectuée.

Il sera (souvent) facile d'établir l'existence et l'unicité d'une solution faible u (c'est le but de la suite de ce cours) de même que sa dépendance continue en fonction des données (f et les C.L.) : par exemple si f devient " $f + \varepsilon$ " avec ε "petit" alors u n'est pas "trop modifié" : u devient u_ε avec $\|u - u_\varepsilon\|_{H^1} \leq c\varepsilon$ pour c une constante à déterminer. Et l'application $f \in L^2(\Omega) \rightarrow u \in H^1(\Omega)$ est continue (avec les bonnes normes). C'est primordial pour les approximations numériques : une erreur d'arrondi sur f ne changera pratiquement pas la solution u (stabilité de la solution).

Définition 3.22 Un tel problème sera dit 'bien posé' (existence, unicité et dépendance continue de la solution u en fonction des données).

3.3 Problème variationnel abstrait

3.3.1 Rappel : continuité et linéarité

Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un espace vectoriel normé.

Rappel : une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point $v_0 \in V$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \varepsilon. \quad (3.15)$$

Equivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| \leq \varepsilon. \quad (3.16)$$

En effet, si (3.15), pour $\varepsilon > 0$ et $\eta_\varepsilon > 0$ correspondant, alors posant $\nu_\varepsilon = \frac{\eta_\varepsilon}{2}$, on a $\|v - v_0\|_V \leq \nu_\varepsilon \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \varepsilon \leq \varepsilon$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V \leq \nu_\varepsilon \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| \leq \varepsilon$.

Et si (3.16), pour $\varepsilon > 0$ et $\eta_\varepsilon > 0$ correspondant alors posant $\alpha = 2\varepsilon$, on a $\|v - v_0\|_V \leq \eta \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| \leq \varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha$. Et si $\|v - v_0\|_V \leq \eta_\varepsilon$ alors $\|v - v_0\|_V < \frac{\eta_\varepsilon}{2} =^{\text{noté}} \beta$. Donc $\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V < \beta \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \alpha$.

Proposition 3.23 Soit $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire. ℓ est continue dans $V \Leftrightarrow \ell$ est continue en un point $\Leftrightarrow \ell$ est continue en 0 \Leftrightarrow :

$$\exists c_\ell > 0, \forall v \in V, |\ell(v)| \leq c_\ell \|v\|_V. \quad (3.17)$$

Preuve. 1- Si ℓ est continue en tout point, alors ℓ est continue en un point.

2- Si ℓ linéaire est continue en un point v_0 alors (3.16) donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V \leq \eta \Rightarrow |\ell(v) - \ell(v_0)| = |\ell(v - v_0)| \leq \varepsilon, \text{ donc}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall w \in V, \|w\|_V \leq \eta \Rightarrow |\ell(w)| \leq \varepsilon, \text{ donc } \ell \text{ est continue en 0.}$$

3- Si ℓ linéaire est continue en 0, alors (3.16) donne

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall w \in V, \|w\|_V \leq \eta \Rightarrow |\ell(w)| \leq \varepsilon$. Soit $v_0 \in V$. On a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V \leq \eta \Rightarrow |\ell(v - v_0)| = |\ell(v) - \ell(v_0)| \leq \varepsilon$, donc ℓ est continue en v_0 . Vrai pour v_0 quelconque dans V , donc ℓ est continue dans V .

4- Si ℓ linéaire est continue en 0, alors pour $\varepsilon = 1$, soit $\eta > 0$ t.q.

$$\forall v \in V, \|v\|_V = \eta \Rightarrow |\ell(v)| \leq 1, \text{ donc}$$

$$\forall v \in V, \|\frac{v}{\eta}\|_V = 1 \Rightarrow |\frac{\ell(v)}{\eta}| \leq \frac{1}{\eta}, \text{ donc}$$

$$\forall w \in V \text{ t.q. } \|w\|_V = 1, \text{ on a } |\ell(w)| \leq \frac{1}{\eta}, \text{ donc}$$

$$\forall z \in V, |\ell(\frac{z}{\|z\|_V})| \leq \frac{1}{\eta}, \text{ donc } c_\ell = \frac{1}{\eta} \text{ dans (3.17) convient.} \quad \blacksquare$$

Notation :

$$\|\ell\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}. \quad (3.18)$$

Toutes les constantes c_ℓ satisfaisant (3.17) vérifient $c_\ell \geq \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}$. Donc la constante $\|\ell\|$ est la plus petite des constantes c_ℓ satisfaisant (3.17).

Définition 3.24 La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue ssi :

$$\exists c_a > 0, \quad \forall (u, v) \in V^2, \quad |a(u, v)| \leq c_a \|u\|_V \|v\|_V. \quad (3.19)$$

Notation :

$$\|a\| = \sup_{u, v \in V, u, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_V \|v\|_V}. \quad (3.20)$$

Toutes les constantes c_a satisfaisant (3.19) vérifient $c_a \geq \sup_{u, v \in V, u, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_V \|v\|_V}$. Donc la constante $\|a\|$ est la plus petite des constantes c_a satisfaisant (3.19).

Exercice 3.25 On munit $Z = V \times V$ de la norme $\|(u, v)\|_\infty = \max(\|u\|_V, \|v\|_V)$. On note $f(\cdot)$ la fonction $\vec{z} = (u, v) \in Z \rightarrow f(\vec{z}) \stackrel{\text{déf}}{=} a(u, v) \in \mathbb{R}$.

- 1- Montrer que si $f(\cdot) : (Z, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0, alors $a(\cdot, \cdot)$ vérifie (3.19).
 - 2- Montrer que si $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie (3.19) alors $f(\cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0.
 - 3- Montrer que si f est continue en $\vec{0}$ alors f est continue en tout \vec{z} (la réciproque est triviale).
 - 4- Montrer que prendre sur Z la norme $\|(u, v)\|_2 = \sqrt{\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2}$ ne change par le résultat.
- N.B. : l'application $f(\cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas linéaire : en particulier $f(\lambda \vec{z}) = \lambda^2 f(\vec{z})$.

Réponse. Une forme bilinéaire vérifie $a(0, 0) = 0$, donc $f(0) = 0$.

1- $f(\cdot)$ continue en 0, donc pour $\varepsilon = 1$ il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$\forall \vec{z} = (u, v) \in Z, \|(u, v)\|_Z \leq \eta \Rightarrow |f(\vec{z}) - f(0)| = |a(u, v) - a(0, 0)| = |a(u, v)| \leq 1, \text{ donc}$$

$$\forall \vec{z} = (u, v) \in Z, \|u\|_V \leq \eta \text{ et } \|v\|_V \leq \eta \Rightarrow |a(u, v)| \leq 1, \text{ donc}$$

$$\forall (w, t) \in V^2, \|w\|_V \leq 1 \text{ et } \|t\|_V \leq 1 \Rightarrow |a(\eta w, \eta t)| \leq 1, \text{ donc } |a(w, t)| < \frac{1}{\eta^2}, \text{ donc}$$

$$\forall (u, v) \in V^2, |a(\frac{u}{\|u\|_V}, \frac{v}{\|v\|_V})| \leq \frac{1}{\eta^2}, \text{ donc } c_a = \frac{1}{\eta^2} \text{ convient dans (3.19).}$$

2- Supposons (3.19) : $\forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq \|a\| \|u\|_V \|v\|_V$.

$$\text{Donc } \forall u, v \in V, \|u\|_V \leq \eta \text{ et } \|v\|_V \leq \eta \Rightarrow |a(u, v)| \leq \|a\| \eta^2.$$

$$\text{Donc } \forall \vec{z} \in Z, \|\vec{z}\|_Z \leq \eta \Rightarrow |f(\vec{z})| \leq \|a\| \eta^2.$$

$$\text{Donc, pour } \varepsilon > 0, \text{ on pose } \eta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\|a\|}}, \text{ et on a } \|\vec{z}\| \leq \eta \Rightarrow |f(\vec{z}) - f(0)| = |f(\vec{z})| \leq \|a\| (\sqrt{\frac{\varepsilon}{\|a\|}})^2 = \varepsilon.$$

3- Soit \vec{z} fixé. On a $|f(\vec{z} + \vec{h}) - f(\vec{z})| = |a(u+h, v+k) - a(u, v)| = |a(h, v) + a(u, k) + a(h, k)| \leq \|h\|_V \|a\| \|v\|_V + \|k\|_V \|a\| \|u\|_V + \|h\|_V \|k\|_V \|a\| \xrightarrow{\|\vec{h}\|_Z = \max(\|h\|_V, \|k\|_V) \rightarrow 0} 0$.

4- Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes : $\|\vec{z}\|_\infty \leq \|\vec{z}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\vec{z}\|_\infty$.

$$\text{En effet, si } \vec{z} = (u, v) \text{ alors } \|\vec{z}\|_2 = \sqrt{\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2} \leq \sqrt{\|\vec{z}\|_\infty^2 + \|\vec{z}\|_\infty^2} = \sqrt{2} \|\vec{z}\|_\infty.$$

$$\text{Et } \|\vec{z}\|_\infty = \max(\|u\|_V, \|v\|_V) \leq \max(\sqrt{\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2}, \sqrt{\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2}) = \sqrt{\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2} = \|\vec{z}\|_2. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.26 La fonction $g : \vec{z} = (u, v) \in V^2 \rightarrow g(\vec{z}) = \|u\|_V \|v\|_V$ n'est pas une norme dans $Z = V^2$: prendre $\vec{z} = (1, 0)$: on a $g(\vec{z}) = 0$ alors que $\vec{z} \neq \vec{0}$, ou encore on a $g(\lambda \vec{z}) = \lambda^2 g(\vec{z})$.

La définition (3.19) permet d'exprimer qu'à u fixé la forme linéaire $a_u : v \rightarrow a_u(v) \stackrel{\text{déf}}{=} a(u, v)$ est continue, soit $\|a_u\| \leq c_u$, avec de plus c_u indépendante de u . (Idem en inversant les rôles de u et v). \blacksquare

3.3.2 Le problème

On se donne un espace de Hilbert V muni de son produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de sa norme associée $\|\cdot\|_V$.

On dispose d'une forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (par exemple représentant la loi de comportement du matériau étudié).

On se donne une forme linéaire continue $\ell(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ (qui représente les forces extérieures appliquées à ce matériau, qui donnera un déplacement $u(\ell)$).

On notera (usuel) $\|a\|_{L(V \times V, \mathbb{R})}$ et $\|\ell\|_{L(V, \mathbb{R})}$ les plus petites constantes c_a et c_ℓ satisfaisant ces inégalités :

$$\|\ell\|_{L(V, \mathbb{R})} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}, \quad (3.21)$$

$$\|a\|_{L(V \times V, \mathbb{R})} = \sup_{u, v \in V, u \neq 0, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_V \|v\|_V}.$$

Si aucune confusion n'est à craindre, on notera plus simplement $\|a\|$ et $\|\ell\|$ ces constantes.

Le problème abstrait qu'on regardera est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ (un 'déplacement') tel que :} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.22)$$

Exemple 3.27 Un exemple de formulation de type (3.22) est donné par (3.14). \blacksquare

Remarque 3.28 Le problème (3.22) est appelée forme faible ou forme variationnelle. On devrait en fait réserver l'expression forme variationnelle au problème ci-dessus dans le cas où $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique. En effet, dans ce cas, (3.22) s'écrit comme le problème de trouver le minimum de la fonctionnelle :

$$\mathcal{L}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v) \quad (3.23)$$

dans V . En effet, par dérivation (calcul de variations), on trouve le minimum comme point réalisant la nullité de la dérivée : on tombe sur (3.22) (dans le cas $a(\cdot, \cdot)$ symétrique). L'équation du problème (3.22) est donc l'équation d'Euler du problème de minimisation. Dans le cas $a(\cdot, \cdot)$ non symétrique, on continue néanmoins (abusivement) à utiliser l'expression 'forme variationnelle'. ■

Exemple 3.29 Dériver \mathcal{L} donné par (3.23). Et montrer qu'un minimum $\mathcal{L}(u)$ éventuel de \mathcal{L} est donné pour u solution de (3.22) lorsque $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique.

Réponse. Soit $u \in V$. Ayant $a(\cdot, \cdot)$ symétrique, pour $v \in V$ et $h \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{L}(u + hv) = \mathcal{L}(u) + ha(u, v) - h\ell(v) + \frac{1}{2}h^2a(v, v) = \mathcal{L}(u) + h\mathcal{M}_u(v) + o(h)$, où $\mathcal{M}_u(v) = a(u, v) - \ell(v)$ et \mathcal{M}_u est linéaire. Donc \mathcal{L} est différentiable en u (i.e. a un développement limité au premier ordre au voisinage de u) avec sa différentielle donnée par $d\mathcal{L}(u) = \mathcal{M}_u$. Et ses minima éventuels sont atteints en un point u tel que $\mathcal{M}_u = 0$ (plan tangent horizontal), i.e. quand $\mathcal{M}_u(v) = 0$ pour tout v , i.e. quand u est solution de (3.22). ■

Proposition 3.30 Le problème (3.22) est linéaire : si u_1 est solution du problème pour la donnée $\ell_1(\cdot)$, si u_2 est solution du problème pour la donnée $\ell_2(\cdot)$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u_1 + \lambda u_2$ est solution du problème pour la donnée $\ell_1(\cdot) + \lambda\ell_2(\cdot)$.

Preuve. Si pour tout $v \in V$ on a $a(u_1, v) = \ell_1(v)$ et $a(u_2, v) = \ell_2(v)$, alors on a, par linéarité de $a(\cdot, \cdot)$ par rapport à la première variable, $a(u_1 + \lambda u_2, v) = (\ell_1 + \lambda\ell_2)(v)$ pour tout $v \in V$. ■

Le problème (3.22) étant linéaire, si la solution $u = u(\ell)$ de (3.22) existe et est unique la dépendance continue pour prouver le caractère bien posé sera démontrée si l'application linéaire $\ell \rightarrow u = u(\ell)$ est continue, i.e. si :

$$\exists c > 0, \quad \forall \ell \in L(V, \mathbb{R}), \quad u = u(\ell) \text{ vérifie } \|u\|_V \leq c\|\ell\|_{L(V, \mathbb{R})}.$$

3.3.3 Coercitivité

Il est clair que le caractère bien posé du problème abstrait dépend d'hypothèses supplémentaires pour $a(\cdot, \cdot)$ (prendre $a(\cdot, \cdot) \equiv 0$).

Définition 3.31 On dit que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est α -coercitive (ou encore α -elliptique, α -coercive, V -coercitif, V -elliptique, V -coercive) ssi :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad (3.24)$$

ou de manière équivalente (grâce à la bilinéarité), avec la sphère unité $S_V(0, 1) = \{u \in V : \|u\|_V = 1\}$, ssi :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in S_V(0, 1), \quad a(v, v) \geq \alpha. \quad (3.25)$$

Exercice 3.32 Montrer que si $a(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_V$ on a $\|a\| = 1$ et $\alpha = 1$. ■

Proposition 3.33 Si la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et vérifie

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad |a(v, v)| \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad (3.26)$$

alors soit $a(\cdot, \cdot)$ est positive, soit $a(\cdot, \cdot)$ est négative, et donc soit $a(\cdot, \cdot)$ est coercitive, soit $-a(\cdot, \cdot)$ est coercitive. (Si $a(\cdot, \cdot)$ est négative, le problème $a(u, v) = \ell(v)$ s'écrit également $-a(u, v) = m(v)$ avec $m = -\ell$: application à la résolution de $\Delta u = f$ qui s'écrit également $-\Delta u = g$ avec $g = -f$: le signe \pm devant Δ ou devant f ne change pas le caractère résoluble d'une équation aux dérivées partielles linéaire.)

Preuve. Soit $f(v) := a(v, v)$. Par hypothèse, $|f(v)| \geq \alpha$ pour $v \in S_V(0, 1)$. Et f est continue dans $S_V(0, 1)$, car si $v_0, v \in S_V(0, 1)$ alors $|f(v) - f(v_0)| = |a(v, v) - a(v_0, v_0)| = \frac{1}{2}|a(v+v_0, v-v_0) + a(v-v_0, v+v_0)| \leq \|a\| \|v+v_0\|_V \|v-v_0\|_V \leq \|a\| (\|v\|_V + \|v_0\|_V) \|v-v_0\|_V \leq 2\|a\| \|v-v_0\|_V \xrightarrow{v \rightarrow v_0} 0$. Donc f ne s'annule pas dans $S_V(0, 1)$. Donc (théorème des valeurs intermédiaires) : soit $f \geq 0$, soit $f \leq 0$ dans $S_V(0, 1)$, donc soit $f(v) \geq \alpha$, soit $-f(v) \geq \alpha$, i.e. $f(v) \leq -\alpha$, dans $S_V(0, 1)$, soit f négative. ■

Exercice 3.34 Montrer que si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, continu et coercitif sur V , alors $a(\cdot, \cdot)$ définit un produit scalaire sur V qui est équivalent au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ (i.e. que les normes associées aux produits scalaires sont équivalentes). ■

Exemple 3.35 Dans le cas du problème du Laplacien “ $-\Delta u = f$ ” dans $H_0^1(\Omega)$ avec Ω borné, on a $a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega$, et la meilleure constante de coercivité α (la plus grande) est la plus petite valeur propre du laplacien (en valeur absolue), valeur propre donnant la fréquence fondamentale du problème de vibration associé. Voir cours de 3ème année. ■

Pour démontrer que (3.22) est un problème bien posé on aura besoin du théorème suivant.

3.4 Théorème de Lax–Milgram

C’est le théorème principal de ce cours. On en donne la démonstration complète, basée sur le théorème de Riesz, ainsi que son interprétation avec la caractérisation fonctionnelle du caractère “bien posé”.

3.4.1 Théorème de représentation de Riesz–Fréchet

Proposition 3.36 Soit $(V, (\cdot, \cdot)_g)$ un espace de Hilbert (produit scalaire $(\cdot, \cdot)_g$), et soit $\vec{\ell} \in V$. Alors la fonction :

$$\ell_g : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} \mapsto \ell_g(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{\ell}, \vec{v})_g, \end{cases} \quad (3.27)$$

est linéaire et continue.

Preuve. La linéarité est immédiate, un produit scalaire étant bilinéaire. Et le théorème de Cauchy–Schwarz donne immédiatement la continuité avec $\|\ell_g\| = \|\vec{\ell}\|_V$. ■

Le théorème de représentation de Riesz (ou de Riesz–Fréchet) démontre la réciproque :

Théorème 3.37 Soit $(V, (\cdot, \cdot)_g)$ un espace de Hilbert (produit scalaire $(\cdot, \cdot)_g$), et soit V' son dual topologique (l’espace $V' = L(V, \mathbb{R})$ des formes linéaires qui sont continues sur V). Alors :

$$\forall \ell \in V', \quad \exists \vec{\ell}_g \in V, \quad \forall \vec{v} \in V, \quad \ell(\vec{v}) = (\vec{\ell}_g, \vec{v})_g, \quad (3.28)$$

i.e., toute forme linéaire continue sur V peut être représentée par un vecteur (qui dépend du choix du produit scalaire). De plus on a :

$$\|\vec{\ell}_g\|_V = \|\ell\|_{V'}. \quad (3.29)$$

(D’où la représentation graphique d’une forme linéaire : son noyau $\text{Ker} \ell$ est $(\cdot, \cdot)_g$ -orthogonal à $\vec{\ell}_g$.)

Preuve. Rappel. Ce résultat est connu dans un espace de dimension finie. Par exemple, dans \mathbb{R}^n avec sa base canonique (\vec{e}_i) et son produit scalaire usuel $(\cdot, \cdot)_g = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$, une forme linéaire est déterminée dès qu’on connaît les images $\ell \cdot \vec{e}_i \stackrel{\text{noté}}{=} a_i$ des vecteurs de base : pour $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$, la linéarité donne $\ell(\vec{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. On pose $\vec{\ell}_g = \sum_i a_i \vec{e}_i$, et on a $\ell(\vec{x}) = (\vec{\ell}_g, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = \sum_i a_i x_i$ pour tout \vec{x} . Et $\|\ell\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{\vec{x}} \frac{|\ell \cdot \vec{x}|}{\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^n}} = \sup_{\vec{x}} \frac{|(\vec{\ell}_g, \vec{x})_{\mathbb{R}^n}|}{\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^n}} = \|\vec{\ell}_g\|_{\mathbb{R}^n}$ par Cauchy–Schwarz.

Cas général. Si $\ell = 0$ alors $\vec{\ell}_g = \vec{0}$ donne la solution. Supposons $\ell \neq 0$. Construction de $\vec{\ell}_g$:

• Comme ℓ est continue, son noyau $\text{Ker} \ell = \ell^{-1}(0)$ est fermé. Soit $\vec{w} \in V$ tel que $\vec{w} \notin \text{Ker} \ell$ (possible car $\ell \neq 0$), et soit $\vec{w}_0 \in \text{Ker} \ell$ sa projection $(\cdot, \cdot)_g$ -orthogonale sur $\text{Ker} \ell$ (existe car $\text{Ker} \ell$ est fermé), projection caractérisée par :

$$\vec{w}_0 \in \text{Ker} \ell \quad \text{et} \quad \forall \vec{z}_0 \in \text{Ker} \ell, \quad (\vec{w} - \vec{w}_0, \vec{z}_0)_g = 0.$$

Dessin. En particulier $\vec{w} - \vec{w}_0 \perp \text{Ker} \ell - \{\vec{0}\}$. Notons $\vec{n} = \frac{\vec{w} - \vec{w}_0}{\|\vec{w} - \vec{w}_0\|_g} \in (\text{Ker} \ell)^\perp - \{\vec{0}\}$.

• On a $(\text{Ker} \ell)^\perp = \text{Vect}\{\vec{n}\}$ car $\vec{n} \in (\text{Ker} \ell)^\perp$ et $\dim(\text{Ker} \ell)^\perp = \text{codim}(\text{Ker} \ell) = 1$ (voir exercice 3.38).

• Comme $\text{Ker} \ell = \ell^{-1}(\{0\})$ est fermé (car ℓ continue) et $(\text{Ker} \ell)^\perp$ fermé (c’est un orthogonal), on a $V = (\text{Ker} \ell)^\perp \oplus \text{Ker} \ell$, donc \vec{v} est de la forme $\vec{v} = \lambda \vec{n} + \vec{v}_0 \in (\text{Ker} \ell)^\perp \oplus \text{Ker} \ell$. Donc, d’une part $(\vec{v}, \vec{n})_g = (\lambda \vec{n}, \vec{n})_g + (\vec{v}_0, \vec{n})_g = \lambda \|\vec{n}\|_g^2 + 0 = \lambda$, donc $\lambda = (\vec{v}, \vec{n})_g$, et d’autre part $\ell(\vec{v}) = \ell(\lambda \vec{n}) + \ell(\vec{v}_0) = \lambda \ell(\vec{n})$, donc $\ell(\vec{v}) = (\vec{v}, \vec{n})_g \ell(\vec{n}) = (\vec{v}, \ell(\vec{n}) \vec{n})_g = (\ell(\vec{n}) \vec{n}, \vec{v})_g$, vrai pour tout $\vec{v} \in V$, donc $\ell(\vec{v}) = (\vec{\ell}_g, \vec{v})_g$ où on a posé $\vec{\ell}_g = \ell(\vec{n}) \vec{n}$.

De plus $\|\ell\| = \sup_{\vec{v}} \frac{\ell(\vec{v})}{\|\vec{v}\|_g} = \sup_{\vec{v}} \frac{(\vec{\ell}_g, \vec{v})_g}{\|\vec{v}\|_g} = \|\vec{\ell}_g\|_g$ grâce à Cauchy–Schwarz (et $\|\ell\| = |\ell(\vec{n})|$). ■

Exercice 3.38 Soit $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue non nulle : rappeler pourquoi $\text{codim}(\text{Ker}\ell) = 1$, et donner $(\text{Ker}\ell)^\perp$.

Réponse. Rappel : Pour $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ Hilbert et A sous-espace vectoriel de V , la codimension $\text{codim}A \in [0, \infty]_{\mathbb{N}}$ de A est la dimension de $A^\perp = \{v \in V : \forall w \in A, (v, w)_V = 0\}$. En particulier $(\text{Ker}\ell)^\perp = \{v \in V : (v, w)_V = 0; \forall w \in \text{Ker}\ell\}$. La proposition précédente montre que, ℓ étant continue, $\vec{n} \in (\text{Ker}\ell)^\perp$, donc $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp \geq 1$. Montrons $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp \leq 1$. On considère $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp} : \left\{ \begin{array}{l} (\text{Ker}\ell)^\perp \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} \rightarrow \ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp} \vec{v} = \ell \vec{v} \end{array} \right\}$, la forme linéaire ℓ restreinte à $(\text{Ker}\ell)^\perp$. On a $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}$ injective car si $v \in (\text{Ker}\ell)^\perp$ est t.q. $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}(x) = 0$, i.e. t.q. $\ell(\vec{x}) = 0$, alors $x \in \text{Ker}\ell$ (par définition du noyau), donc $x \in (\text{Ker}\ell)^\perp \cap \text{Ker}\ell$, donc $x = 0$. Donc $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp \leq \dim \mathbb{R} \leq 1$ (on prend deux vecteurs \vec{z}_1, \vec{z}_2 dans $(\text{Ker}\ell)^\perp$, et $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}(\vec{z}_1)$ et $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}(\vec{z}_2)$ dans \mathbb{R} implique l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}(\vec{z}_2) = \lambda \ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}(\vec{z}_1)$, donc $\ell|_{(\text{Ker}\ell)^\perp}(\vec{z}_2 - \lambda \vec{z}_1) = 0$, donc $\vec{z}_2 - \lambda \vec{z}_1 = \vec{0}$ et les vecteurs sont liés). Donc $(\text{Ker}\ell)^\perp = \text{Vect}\{\vec{n}\}$. ■

Remarque 3.39 La forme linéaire $\ell : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\ell \cdot \vec{e}_n = n \vec{e}_n$ pour tout n (avec (\vec{e}_n) la base canonique de ℓ^2 muni de sa norme usuelle) n'est pas continue car $\|\vec{e}_n\| = 1$ et $\|\ell \cdot \vec{e}_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$. NB : Ici le domaine de définition de ℓ n'est pas ℓ^2 tout entier (c'est juste un sous-espace dense dans ℓ^2). En fait on ne connaît pas d'exemple explicite de forme linéaire non continue sur un Banach (e.v.n. complet) ; une telle forme linéaire est obtenue à l'aide de l'axiome du choix, résultat montrer pas Solovay. ■

3.4.2 Théorème de Lax–Milgram

Le théorème de Lax–Milgram donne des hypothèses suffisantes pour lesquelles le problème (3.22) est bien posé. C'est une application du théorème de représentation de Riesz–Fréchet.

Théorème 3.40 Soit :

- (i) V un espace de Hilbert muni de son produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de sa norme associée $\|\cdot\|_V$,
- (ii) $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et α -coercive sur V , et
- (iii) $\ell(\cdot)$ une forme linéaire et continue sur V .

Alors le problème (3.22) est bien posé : la solution u existe, est unique, et dépend continûment de ℓ :

$$\|u\|_V \leq \frac{\|\ell\|_V}{\alpha}. \quad (3.30)$$

Preuve. Partie immédiate : supposons que le problème admette une solution $u \in V$. Alors, la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ et la continuité de $\ell(\cdot)$ donnent, avec (3.22) vrai pour tout $v \in V$ donc en particulier pour $v = u$:

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq \|\ell\| \|u\|_V, \quad (3.31)$$

d'où (3.30). Reste à voir l'existence et l'unicité.

$\ell(\cdot)$ étant une forme linéaire continue sur V Hilbert, théorème de représentation de Riesz–Fréchet donne :

$$\exists \tau_\ell \in V, \quad \forall v \in V, \quad \ell(v) = (\tau_\ell, v)_V.$$

De même, pour u quelconque dans V , $a_u(\cdot) = \text{déf} a(u, \cdot)$ étant linéaire continue sur V : il existe un vecteur qu'on note $\mathcal{A}u \in V$ tel que :

$$\exists \mathcal{A}u \in V, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = (\mathcal{A}u, v)_V.$$

On a ainsi défini une application $\mathcal{A} : u \in V \rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u \in V$. La linéarité de \mathcal{A} est immédiate car $a(\cdot, \cdot)$ est linéaire en u , et on note $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$. Puis $a(\cdot, \cdot)$ étant continue on a $\|\mathcal{A}u\|_V^2 = a(u, \mathcal{A}u)_V \leq \|a\| \|\mathcal{A}u\|_V \|u\|_V$, donc $\|\mathcal{A}u\|_V \leq \|a\| \|u\|_V$, donc \mathcal{A} continu avec $\|\mathcal{A}\| \leq \|a\|$. (De plus $|a(u, v)| \leq \|\mathcal{A}u\|_V \|v\|_V \leq \|\mathcal{A}\| \|u\|_V \|v\|_V$, donc $\|a\| \leq \|\mathcal{A}\|$. Donc $\|a\| = \|\mathcal{A}\|$.)

Et le problème (3.22) s'écrit : étant donné un vecteur $\tau_\ell \in V$, trouver $u \in V$ tel que :

$$\mathcal{A}u = \tau_\ell. \quad (3.32)$$

Il s'agit maintenant de montrer que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ (endomorphisme continu) est bijectif.

• \mathcal{A} est injectif (si la solution existe elle est unique) : on a $\mathcal{A}v = 0$ implique $0 = (\mathcal{A}v, v)_V = a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ (car $a(\cdot, \cdot)$ est coercif), donc $v = 0$. Donc, \mathcal{A} étant linéaire, \mathcal{A} est bien injectif (son noyau $\text{Ker}\mathcal{A}$ est réduit à $\{0\}$).

• \mathcal{A} est surjectif (existence de la solution). Donc on veut $\text{Im}(\mathcal{A}) = E$. On a $E = \text{Im}(\mathcal{A})^\perp \oplus \overline{\text{Im}\mathcal{A}}$. Donc les deux points suivants sont à vérifier (cf. proposition 1.26) :

1 - $(\text{Im}\mathcal{A})^\perp = \{0\}$ où $(\text{Im}\mathcal{A})^\perp = \{v \in V : \forall w \in V, (\mathcal{A}w, v)_V = 0\}$: oui car $v \in (\text{Im}\mathcal{A})^\perp$ implique $(\mathcal{A}v, v)_V = 0 = a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$, donc $v = 0$. (Donc $\text{Im}\mathcal{A}$ est dense dans V .)

2 - Et $\text{Im}\mathcal{A}$ est fermé dans V : soit $(w_m)_{\mathbb{N}^*} = (\mathcal{A}v_m)_{\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{A}(V) = \text{Im}(\mathcal{A})$ qui converge vers $w \in V$. Il s'agit de montrer que $w \in \text{Im}\mathcal{A}$, i.e. qu'il existe $v \in V$ tel que $\mathcal{A}v = w$.

21- (v_m) converge dans V car :

$$\begin{aligned} \alpha \|v_m - v_n\|_V^2 &\leq a(v_m - v_n, v_m - v_n) = (\mathcal{A}v_m - \mathcal{A}v_n, v_m - v_n)_V = (w_m - w_n, v_m - v_n)_V \\ &\leq \|w_m - w_n\|_V \|v_m - v_n\|_V, \end{aligned}$$

donc $\|v_m - v_n\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|w_m - w_n\|_V \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$ (car (w_m) est convergente donc de Cauchy). Donc (v_m) est une suite de Cauchy de V complet, donc (v_m) converge vers un $v \in V$.

22- \mathcal{A} est continu donc $\|w_m - \mathcal{A}v\|_V = \|\mathcal{A}v_m - \mathcal{A}v\|_V \leq \|\mathcal{A}\| \|v_m - v\|_V \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Donc (w_m) converge vers $\mathcal{A}v \in \text{Im}\mathcal{A}$. Donc $\text{Im}\mathcal{A}$ est fermé dans V . ■

Exercice 3.41 Donner un exemple de forme linéaire qui n'est pas continue.

Réponse. En dimension finie, i.e. $\dim(V) < \infty$, toutes les formes linéaires $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues : prendre une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, poser $\alpha_i = \ell(\vec{e}_i)$, d'où $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ donne $\ell(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n); et toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, donc $\|\ell(\vec{x})\| \geq c \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \|\vec{x}\|_V$ pour tout $\vec{x} \in V$ (avec c la constante dans $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq c \|\vec{x}\|_V$ pour tout $\vec{x} \in V$).

En dimension infinie : on considère $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ le produit cartésien de \mathbb{R} par lui-même une infinité dénombrable de fois. Soit $(\vec{e}_i)_{\mathbb{N}^*}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Soit $V = \ell^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \|\vec{x}\|_{\ell^2} < \infty\}$, où on a posé $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \vec{e}_i$ et $\|\vec{x}\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$. Et $(\vec{x}, \vec{y})_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ donne le produit scalaire choisis ; avec ce produit scalaire, ℓ^2 est un Hilbert (exercice). Soit $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\ell(\vec{e}_n) = n \vec{e}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|\vec{e}_n\|_{\ell^2} = 1$, donc $\|\ell(\vec{e}_n)\|_{\ell^2} = n$, donc $\sup_{\vec{x}, \|\vec{x}\|_{\ell^2}=1} \|\ell(\vec{x})\|_{\ell^2} \geq m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, donc $\|\ell\| = \infty$: la forme linéaire ℓ n'est pas continue (non bornée sur la sphère unité). ■

3.4.3 Interprétation du problème

À la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, on associe l'opérateur A de V dans son dual $V' = L(V, \mathbb{R})$:

$$\forall u, v \in V, \quad \langle Au, v \rangle_{V', V} = a(u, v).$$

On a noté $\langle Au, v \rangle_{V', V}$ au lieu de $Au(v)$ car Au est linéaire continu. Et le problème (3.22) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ Au = \ell \quad \text{dans } V'. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Cette forme (3.33) du problème (3.22) s'appelle forme forte. C'est cette forme qui constitue le problème interprété. Cela correspond, dans les cas traités dans la suite, à l'équation aux dérivées partielles qu'on cherche à résoudre (équation «somme des forces = $m\vec{\gamma}$ »), alors que la formulation variationnelle correspond à la formulation énergie associée (théorème des puissances virtuelles).

Enfin, le théorème de Lax-Milgram indique que l'opérateur $A^{-1} : V' \rightarrow V$ est bijectif et continu :

$$\ell \in V' \xrightarrow{A^{-1}} u = A^{-1}\ell \in V \quad \text{et} \quad \|u\|_V = \|A^{-1}\ell\|_V \leq c \|\ell\|_{V'},$$

où $c > 0$ est indépendant de ℓ : $c = \frac{1}{\alpha}$. Donc une perturbation de ℓ (erreur de mesure sur la donnée ℓ , mauvaise précision machine...) produira une erreur du même ordre sur u (dans les normes qui ont un sens i.e. $\|\cdot\|_V$ pour u et $\|\cdot\|_{V'}$ pour ℓ).

Remarque 3.42 Ne pas confondre la forme forte (3.33) (qui est une équation dans V' avec A , i.e. égalité de fonctions) avec (3.32) (qui est une équation dans V avec \mathcal{A} , i.e. égalité de vecteurs). Cette dernière équation (3.32) avec \mathcal{A} n'interviendra plus dans la suite de ce cours (elle ne sert qu'à la démonstration du théorème de Lax-Milgram).

Typiquement $V = H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta$ est tel que pour $u \in H_0^1(\Omega)$ on a $-\Delta u$ beaucoup moins régulier que u (faire le parallèle avec $u \in C^2$ qui donne uniquement $-\Delta u \in C^0$). Et donc la forme forte est une égalité dans V' espace de fonctions beaucoup moins régulières que l'espace des fonctions $H^1(\Omega)$ pour lequel l'égalité (3.33) a un sens. ■

3.5 Applications

3.5.1 Problème de Dirichlet homogène et condition aux limites essentielle

Étant donnée une fonction $f \in L^2(\Omega)$, il s'agit de trouver, dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 1-régulier, une fonction u telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f, \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{array} \right.$$

Avec f dans $L^2(\Omega)$, cette formulation n'a pas de sens classique. On commence par réécrire ce problème sous forme forte (au sens des distributions) :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u|_{\Gamma} = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma). \end{cases} \quad (3.34)$$

Formulation variationnelle formelle

Multipliant par une fonction v puis intégrant sur Ω , une intégration par parties (formelle pour le moment) donne :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que } u|_{\Gamma} = 0 \text{ et, pour tout } v : \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \end{cases} \quad (3.35)$$

Connaissant u sur Γ ($u|_{\Gamma} = 0$), de manière intuitive qui sera bientôt justifiée, on se contente de considérer ce problème pour les v tels que $v|_{\Gamma} = 0$. (En pratique, on aura alors un problème avec même nombre d'inconnues que d'équations, u et v étant dans le même espace, et mécaniquement, pour ce problème on ne peut pas faire de déplacements "virtuels" sur le bord).

Cela donne :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que } u|_{\Gamma} = 0 \text{ et :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v, v|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Remarque 3.43 Attention : dire que $u|_{\Gamma} = 0$ n'implique pas $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$! Pour s'en convaincre, regarder en 1-D la fonction $u : x \in]0, \pi[\rightarrow \sin x \in \mathbb{R}$, nulle au bord, qui a pour dérivée $u'(x) = \cos x$ dans $[0, \pi]$ qui au bord vérifie $-u'(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$ et $u'(\pi) = \cos \pi = -1 \neq 0$.

C'est uniquement l'hypothèse ajoutée $v|_{\Gamma} = 0$ (ici $v(0) = v(\pi) = 0$) qui permet d'annuler le terme de bord dans (3.35), et en aucun cas l'hypothèse $u|_{\Gamma} = 0$.

Et en 2-D, il suffit de considérer la fonction $u : (x, y) \in]0, \pi]^2 \rightarrow \sin x \in \mathbb{R}$, nulle sur les bords verticaux, de dérivée $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \pm \cos x$ sur les bords verticaux. C'est uniquement l'hypothèse ajoutée $v|_{\Gamma} = 0$ (ici $v(0, y) = v(\pi, y) = 0$) qui permet d'annuler le terme $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) v(x, y) \, dx$ sur les bords verticaux. ■

Formulation variationnelle rigoureuse

Pour que ce problème ait un sens, il faut que chaque terme dans (3.36) ait un sens. Pour appliquer le théorème de Lax–Milgram, on impose u et v dans le même espace, et la régularité minimale est alors u et v dans $L^2(\Omega)$, et $\vec{\nabla} u$ et $\vec{\nabla} v$ dans $L^2(\Omega)^n$, donc u et v dans $H^1(\Omega)$. On en déduit que le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ (1) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0 \\ (2) \quad u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Définition de 'condition aux limites essentielle'

Définition 3.44 Dans la formulation variationnelle (3.37), l'équation (3.37)₂ (contrainte " $u|_{\Gamma}=0$ ") est dite condition aux limites **essentielle** : elle constitue une équation à part entière du problème.

Elle est également dite condition aux limites de Dirichlet, homogène ici car la contrainte est $u|_{\Gamma} = g$ avec $g = 0$.

Donc, en plus de la régularité $H^1(\Omega)$ nécessaire pour donner un sens à (3.37)₁, il est indispensable d'ajouter l'équation (3.37)₂ de condition aux limites $u|_{\Gamma} = 0$.

De manière usuelle, on met cette condition essentielle dans l'espace V de recherche de la solution. Ici, $V = H^1(\Omega) \cap \{u|_{\Gamma=0}\} = H_0^1(\Omega)$: donc ici l'espace $H_0^1(\Omega)$ contient deux informations : 1- une condition de régularité, ici $H^1(\Omega)$, et 2- une équation, ici $u|_{\Gamma=0}$.

Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) : \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \end{cases} \quad (3.38)$$

C'est la formulation variationnelle cherchée.

Remarque 3.45 On verra qu'une condition aux limites naturelle est une condition qui n'entre pas dans la définition de V : la régularité seule sera prise en compte (i.e., la régularité minimum permettant de donner un sens aux intégrales). ■

Équivalence formulation variationnelle – formulation forte (au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$)

On cherche à savoir si une solution du problème faible, i.e. une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.38), est solution du problème fort (3.34) : très souvent c'est le problème fort qui est le problème à résoudre, alors que c'est le problème faible qu'on propose de résoudre (parce que c'est beaucoup plus facile), et il s'agit de vérifier que la solution qu'on a trouvée (celle du problème faible) est bien la solution demandée (celle du problème fort).

Et, réciproquement, si u est une solution du problème fort et que de plus $u \in H_0^1(\Omega)$ alors u est solution du problème faible.

On vient de voir que la formulation forte (3.34) (au sens des distributions) impliquait la formulation faible (3.38). En effet, si le problème (3.34) admet une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au sens des distributions, alors par intégration par parties avec $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ on vérifie que u est solution de (3.38) pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Et puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, que u est solution de (3.38) pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Réciproquement, si (3.38) a une solution $u \in H_0^1(\Omega)$, (3.38) étant vrai pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ est vrai pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$). D'où en prenant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$, (3.38) est réécrite au sens des distributions comme :

$$\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \rangle + \langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui donne par définition de la dérivation au sens des distributions :

$$\langle -\Delta u + u - f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

soit $-\Delta u + u - f = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, i.e. (3.36)₁.

De plus, si (3.38) admet une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ on a par définition de $H_0^1(\Omega)$ que $u|_\Gamma = 0$, i.e. (3.36)₂ (condition aux limites essentielle).

Donc le problème (3.38) implique bien le problème (3.34) au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les problèmes (3.34) et (3.38) sont donc équivalents : si on résout le problème variationnel, on résout effectivement le problème fort initial.

Problème bien posé

On vient de voir que les problèmes (3.38) et (3.34) sont équivalents. Il reste à voir s'ils sont bien posés, i.e. s'ils ont une unique solution qui, de plus, dépend continûment de la donnée ℓ . Le théorème de Lax–Milgram va permettre de prouver que le problème faible est bien posé (et donc que le problème fort l'est aussi).

On prend $V = H_0^1(\Omega)$ muni de son produit scalaire $(u, v)_V = (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2(\Omega)}$ (c'est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ puisque Ω est borné et qu'on dispose de l'inégalité de Poincaré (2.26)). On définit sur V :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega \end{aligned} \tag{3.39}$$

et le problème (3.38) est mis sous forme abstraite (3.22). Il reste à vérifier les hypothèses du théorème de Lax–Milgram.

1. $V = (H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1})$ est bien un espace de Hilbert (et ici $\|v\|_{H_0^1} = \|\vec{\nabla} v\|_{L^2}$).
2. $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et $\ell(\cdot)$ est linéaire, vérification immédiate car \int et $\vec{\nabla}$ sont linéaires.
3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue dans $H_0^1(\Omega)$ car, à l'aide des inégalités de Cauchy–Schwarz et de Poincaré (2.26) :

$$|a(u, v)| = (u, v)_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + c_\Omega^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Donc $a(\cdot, \cdot)$ est bien continu (et sa constante de continuité vérifie $\|a\| \leq (1 + c_\Omega^2)$).

4. $a(\cdot, \cdot)$ est 1-coercive dans $H_0^1(\Omega)$ car pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(v, v) = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

donc une constante de V -coercivité est $\alpha = 1$.

5. La forme linéaire $\ell(\cdot)$ est continue dans $H_0^1(\Omega)$ car pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (c_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(Cauchy–Schwarz dans $L^2(\Omega)$ puis inégalité de Poincaré.) Et en particulier $\|\ell\|_{H_0^1(\Omega)'} \leq c_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Le problème (3.38) est donc bien posé dans $H_0^1(\Omega)$: il admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ qui dépend continûment de ℓ ou de f : $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\| \leq c_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Exemple 3.46 On peut travailler dans l'espace $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$, i.e., l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ (normes induites équivalentes dans $H_0^1(\Omega)$ à l'aide de l'inégalité de Poincaré pour un domaine borné 1-régulier). Les continuités et la coercivité sont alors immédiat avec $\|a\| = 1$ et $\|\ell\| = \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Le vérifier. C'est dû au fait que $a(\cdot, \cdot)$ n'est ici autre que le produit scalaire de $H^1(\Omega)$. ■

Exemple 3.47 Le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

se traite de la même façon, car la forme linéaire induite $a(u, v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = (u, v)_{H_0^1(\Omega)}$ est continue et coercive dans $H_0^1(\Omega)$: c'est le produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$. Vérifier que dans ce cas $\|a\| = 1$, $\alpha = 1$ et $\|\ell\| \leq c_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Si on équipe $H_0^1(\Omega)$ de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, que valent $\|a\|$, α et $\|\ell\|$? ■

Exercice 3.48 Problème : trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \cdot \vec{\nabla} u) = f, \\ u|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

pour A l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ce dernier cas donnant un problème mal posé). Démarche imposée : mettre sous forme variationnelle, i.e. donner V , $a(\cdot, \cdot)$ et ℓ , calculer les constantes $\|\ell\|$, $\|a\|$ et α (constante de coercivité de $a(\cdot, \cdot)$), et appliquer le théorème de Lax–Milgram.

Réponse. Par intégration par partie formelles on trouve $a(u, v) = (A \cdot \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2}$ et $\ell(v) = (f, v)_{L^2}$. Rigoureusement les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ ont un sens dès que $u, v \in V$ avec $V = H_0^1(\Omega)$. On munit V du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H_0^1}$ donné par $(u, v) = (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2}$ qui fait de V un Hilbert. Trivialement $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et $\ell(\cdot)$ est linéaire. Et ℓ est continue car $|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq c_\Omega \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$ où c_Ω est la constante de Poincaré (on a Ω ouvert borné). Les constantes $\|a\|$ et α dépendent de A . On a $|(A \cdot \vec{X}, \vec{Y})_{\mathbb{R}^n}| \leq \|A\| \|\vec{X}\|_{\mathbb{R}^n} \|\vec{Y}\|_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$, où $\|A\| = \|A\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} = \sup_{\|\vec{X}\|=1} \|A \cdot \vec{X}\|$ est la "norme matricielle". En particulier avec $\vec{X} = A \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x})$ et $\vec{Y} = \vec{\nabla} v(\vec{x})$ on a $(A \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}), \vec{\nabla} v(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\| \|\vec{\nabla} u(\vec{x})\|_{\mathbb{R}^n} \|\vec{\nabla} v(\vec{x})\|_{\mathbb{R}^n}$. D'où :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_\Omega |(A \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}), \vec{\nabla} v(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n}| \, d\Omega \\ &\leq \int_\Omega \|A\| \|\vec{\nabla} u(\vec{x})\|_{\mathbb{R}^n} \|\vec{\nabla} v(\vec{x})\|_{\mathbb{R}^n} \, d\Omega = \|A\| (\|\vec{\nabla} u\|_{\mathbb{R}^n}, \|\vec{\nabla} v\|_{\mathbb{R}^n})_{L^2} \\ &\leq \|A\| \|\vec{\nabla} u\|_{L^2}, \|\vec{\nabla} v\|_{L^2} = \|A\| \|u\|_{H_0^1}, \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

D'où $a(\cdot, \cdot)$ est continue. La coercivité éventuelle dépend également de A . Si la matrice A est elliptique, i.e. s'il existe $\beta > 0$ t.q. pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on a $(A \cdot \vec{X}, \vec{X})_{\mathbb{R}^n} \geq \beta \|\vec{X}\|_{\mathbb{R}^n}^2$, alors :

$$a(v, v) = \int_\Omega (A \cdot \vec{\nabla} v(\vec{x}), \vec{\nabla} v(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n} \, d\Omega \geq \int_\Omega \beta \|\vec{\nabla} v(\vec{x})\|_{\mathbb{R}^n}^2 \, d\Omega = \beta \|\vec{\nabla} v\|_{L^2}^2,$$

et $a(\cdot, \cdot)$ est coercitive avec $\alpha = \beta$. C'est le cas pour les 4 premières matrices (calcul de β en exercice). Si la matrice A n'est pas est elliptique, alors il existe $\beta > 0$ et $\vec{X} \neq \vec{0}$ t.q. $(A \cdot \vec{X}, \vec{X})_{\mathbb{R}^n} \leq 0$ et on ne peut pas conclure (par exemple en 1-De prendre u une fonction chapeau, fonction qui vérifie u' constante par morceaux).

Rappel : si A est $n \times n$ symétrique, alors $\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} (|\lambda_i|)$ la plus grande des valeurs absolue des valeurs propres, et $\alpha = \min_{i=1, \dots, n} (\lambda_i)$ à condition que toutes les valeurs propres soient positives. ■

Remarque 3.49 Un résultat de régularité indique que lorsque $f \in L^2(\Omega)$ alors u est en fait dans $H^2(\Omega)$. Et donc le Laplacien Δ réalise un isomorphisme entre $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$.

Ou encore, on vient de montrer que son inverse Δ^{-1} est un endomorphisme continu de $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ dans $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$: quelle que soit la force f , si elle appartient à $L^2(\Omega)$, alors il existe une solution u dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, où u dépend continûment de f (continuité de Δ^{-1}) :

$$\Delta^{-1} : \begin{cases} L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ f \longrightarrow u = \Delta^{-1} f \end{cases} \quad \text{et} \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\Delta^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

avec $c = \|\Delta^{-1}\|$.

En particulier, une petite erreur sur f (en norme $L^2(\Omega)$) n'entraînera qu'une erreur du même ordre sur u (en norme $H_0^1(\Omega)$). Ce résultat de continuité de Δ^{-1} est à la base de l'étude des valeurs propres du laplacien traité en troisième année d'ISIMA. ■

3.5.2 Problème de Dirichlet non homogène et condition aux limites essentielle

Etant données une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et une fonction $d \in L^2(\Gamma)$, le problème consiste à trouver une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u|_{\Gamma} = d & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma). \end{cases} \quad (3.41)$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax–Milgram, et obtenir une fonction $u \in H^1(\Omega)$, on prend la fonction d dans $\text{Im}(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, sous-espace de $L^2(\Gamma)$, où $\gamma_0(H^1(\Omega))$ est l'image de $H^1(\Omega)$ par l'application trace γ_0 . (On a $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, voir poly espaces de Sobolev fractionnaires.) Donc :

$$\exists u_d \in H^1(\Omega) \quad \text{t.q.} \quad (u_d)|_{\Gamma} = \gamma_0(u_d) = d. \quad (3.42)$$

Définition 3.50 La fonction $u_d \in H^1(\Omega)$ est appelé un relèvement de $d \in L^2(\Gamma)$ (dès que $d \in \gamma_0(H^1(\Omega))$).

Notation : On note $d + H_0^1(\Omega) := u_d + H_0^1(\Omega)$ l'espace affine, associé à l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$, défini par :

$$d + H_0^1(\Omega) := u_d + H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \exists v_0 \in H_0^1(\Omega), w = u_d + v_0\}.$$

Cet espace affine est indépendant du relèvement u_d de d choisi, i.e., si u_{2d} est un second relèvement de d , i.e., si $(u_{2d})|_{\Gamma} = \gamma_0(u_{2d}) = d$, alors $u_{2d} + H_0^1(\Omega) = u_d + H_0^1(\Omega)$. En effet, si $w \in u_{2d} + H_0^1(\Omega)$, alors $w = u_{2d} + v \in u_{2d} + H_0^1(\Omega)$, donc $w = u_d + (v + u_{2d} - u_d) \in u_d + H_0^1(\Omega)$, donc $u_{2d} + H_0^1(\Omega) \subset u_d + H_0^1(\Omega)$, et de même $u_d + H_0^1(\Omega) \subset u_{2d} + H_0^1(\Omega)$.

Formulation variationnelle formelle

Multipliant (3.41) par v , une intégration par parties (formelle pour le moment) donne :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que } u|_{\Gamma} = d \text{ et :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v, v|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

On a pris $v|_{\Gamma} = 0$, i.e. $v \in H_0^1(\Omega)$ = l'espace vectoriel associé à l'espace affine auquel appartient u . Intuitivement, $u|_{\Gamma}$ étant connu ($= d$), on a pas besoin de le calculer, donc on n'a pas besoin de considérer les fonctions v non nulles sur Γ . Rappel mécanique : pour connaître une force sur une particule, on bouge cette particule, mais ici sur Γ la valeur u_0 est fixée, donc on ne peut pas la bouger.

C'est justifié mathématiquement par l'équivalence 'problème fort–problème faible', voir plus loin.

Rappel : Un espace affine n'est pas stable par addition : si V est un e.v., et si u_1 et u_2 sont dans un espace affine $d + V$ associé, on a $u_1 + u_2 \notin d + V$ (quand $d \neq 0$), car $u_1 + u_2 \in 2d + V$. Un espace affine n'est pas un espace vectoriel.

Formulation variationnelle rigoureuse et condition aux limites essentielle

Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in d + H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.43)$$

En effet, la régularité minimum pour que les intégrales aient un sens est u et v dans $H^1(\Omega)$, et la condition $u|_{\Gamma} = d$ est essentielle.

Équivalence formulation variationnelle – formulation forte

Problème fort implique problème faible est immédiat, et par intégration par parties à partir de (3.43), avec $u \in d + H_0^1(\Omega)$, on retrouve (3.41), i.e. $-\Delta u + u = f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $u|_{\Gamma} = d$ (condition aux limites essentielle), voir paragraphe problème de Dirichlet homogène.

Problème bien posé

Sous la forme (3.43), u est cherché dans un espace affine (le translaté de l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$ par d), on ne peut pas appliquer directement le théorème de Lax–Milgram (il faut un espace vectoriel). On se ramène

à un espace vectoriel (par translation) : soit u_d un relèvement de d , donc $u_d \in d + H_0^1(\Omega)$. Et on considère le problème en la variable vectorielle $u_0 = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) : \\ \underbrace{\int_{\Omega} (\vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} v + u_0 v) d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} u_d \cdot \vec{\nabla} v + u_d v) d\Omega}_{\ell_d(v)}, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u_0, v) = \ell_d(v), \end{array} \right. \quad (3.45)$$

avec la même forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ que pour le problème homogène (donc bilinéaire continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$), et avec

$$\ell_d(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} - (\vec{\nabla} u_d, \vec{\nabla} v)_{L^2(\Omega)} - (u_d, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} - (u_d, v)_{H^1(\Omega)},$$

ℓ_d étant trivialement linéaire, et ℓ_d est définie sur $H_0^1(\Omega)$. Et, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |\ell_d(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u_d\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} (c_{\Omega} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}) + \|u_d\|_{H^1(\Omega)} (\sqrt{1 + c_{\Omega}^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}) \\ &\leq (c_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1 + c_{\Omega}^2} \|u_d\|_{H^1(\Omega)}) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Poincaré car Ω est borné et $v \in H_0^1(\Omega)$. D'où $\ell_d(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ avec :

$$\|\ell_d\| \leq c_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1 + c_{\Omega}^2} \|u_d\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.46)$$

Donc, conclusion intermédiaire : pour un relèvement u_d donné, on a une solution $u = u_0 + u_d = u_0(d) + u_d$ du problème (3.43). Il reste à vérifier que :

La solution $u = u_0 + u_d$ ne dépend pas du relèvement u_d choisi

Pour cela on prend deux relèvements u_{d1} et u_{d2} de d et on pose $u_{01} = u - u_{d1} \in H_0^1(\Omega)$ et $u_{02} = u - u_{d2} \in H_0^1(\Omega)$. Les problèmes (3.44) associés admettent resp. une unique solution u_{01} et u_{02} , et le problème 3.43 admet les solutions $u_1 = u_{01} + u_{d1}$ et $u_2 = u_{02} + u_{d2}$. On pose $w = u_1 - u_2$, donc $w \in H_0^1(\Omega)$, et on vérifie immédiatement :

$$-\Delta w + w = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad (3.47)$$

équation pour laquelle on a montré l'existence et l'unicité dans $H_0^1(\Omega)$, la fonction $w = 0$ étant solution. Donc $u_1 = u_2$, donc la solution de (3.43) ne dépend donc pas du relèvement choisi.

Conclusion

On a obtenu $u = u_0 + u_d$, d'où $\|\vec{\nabla} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\vec{\nabla} u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} u_d\|_{L^2(\Omega)}$, avec $\|\vec{\nabla} u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|\ell_d\|}{\alpha}$, donc, avec (constante de coercivity) $\alpha = 1$ ici, et avec (3.46), on a

$$\|\vec{\nabla} u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} + (1 + \sqrt{1 + c_{\Omega}^2}) \|u_d\|_{H^1(\Omega)}.$$

Et ce pour tout $u_d \in d + H_0^1(\Omega)$, donc

$$\|\vec{\nabla} u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} + (1 + \sqrt{1 + c_{\Omega}^2}) \inf_{\substack{u_d \in H^1(\Omega) \\ u_d|_{\Gamma} = d}} \|u_d\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.48)$$

(Et voir remarque 3.53 et (3.50).)

Exemple 3.51 Traiter les exemples 3.48 en changeant la condition de dirichlet homogène par la condition $u|_{\Gamma} = 1$ (condition d'encastrement à 'l'altitude' constante 1). \blacksquare

Remarque 3.52 Lors de la programmation, on ne cherche pas à déterminer un relèvement u_d : les conditions aux limites seront intégrées directement au problème matriciel résultant. Ce relèvement ne sert qu'à s'assurer du caractère bien posé du problème (3.41) en appliquant le théorème de Lax–Milgram. \blacksquare

Remarque 3.53 Avec $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \gamma_0(H^1(\Omega))$ (image de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ par l'application trace), on peut montrer que le r\u00e9el :

$$\|d\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \inf_{\substack{w \in H^1(\Omega) \\ w|_{\Gamma} = d}} \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.49)$$

d\u00e9finit une norme sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et ainsi que :

$$\|\vec{\nabla}u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} + (1 + \sqrt{1 + c_{\Omega}^2}) \|d\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

Et u d\u00e9pend donc bien contin\u00fament des donn\u00e9es f et d dans les normes naturellement associ\u00e9es.

De plus, on peut voir que $\|d\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|w_d\|_{H^1(\Omega)}$ o\u00f9 w_d est solution du probl\u00e8me de Dirichlet non homog\u00e8ne avec second membre nul :

$$\begin{cases} -\Delta w + w = 0 \\ w|_{\Gamma} = d \end{cases} \quad (3.50)$$

En effet, soit $w_d \in H^1(\Omega)$ la solution de (3.50). Puisque :

$$\inf_{\substack{w \in H^1(\Omega) \\ w|_{\Gamma} = d}} \|w\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{w_0 \in H_0^1(\Omega)} \|w_d + w_0\|_{H^1(\Omega)}$$

il suffit de montrer que $\inf_{w_0 \in H_0^1(\Omega)} \|w_d + w_0\|_{H^1(\Omega)}$ est r\u00e9alis\u00e9 pour $w_0 = 0$. Mais, pour $w_0 \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|w_d + w_0\|_{H^1(\Omega)}^2 &= (\vec{\nabla}(w_d + w_0), \vec{\nabla}(w_d + w_0))_{L^2(\Omega)} + (w_d + w_0, w_d + w_0)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\vec{\nabla}w_d, \vec{\nabla}w_d)_{L^2(\Omega)} + (w_d, w_d)_{L^2(\Omega)} + (\vec{\nabla}w_0, \vec{\nabla}w_0)_{L^2(\Omega)} + (w_0, w_0)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2 \left[(\vec{\nabla}w_d, \vec{\nabla}w_0)_{L^2(\Omega)} + (w_d, w_0)_{L^2(\Omega)} \right] \\ &= \|w_d\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|w_d\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

car le terme entre crochet est nul puisque w_d satisfait \u00e0 (3.50)₁ et $w_0 \in H_0^1(\Omega)$. \u25a0

3.5.3 Probl\u00e8me de Neumann homog\u00e8ne et condition aux limites naturelle

\u00c9tant donn\u00e9e une fonction $f \in L^2(\Omega)$, il s'agit de trouver, dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 1-r\u00e9gulier, une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \end{cases} \quad (3.51)$$

Formulation variationnelle formelle

Multipliant par v , une int\u00e9gration par parties (formelle pour le moment) donne :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \end{cases}$$

On ne peut pas se permettre ici de prendre $v|_{\Gamma} = 0$. En effet, u n'est pas connu sur le bord : il faudra donc calculer $u|_{\Gamma}$. Par contre, on sait que $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$, et donc le terme de bord est nul.

Exemple 3.54 La connaissance de $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ ne permet pas de conna\u00eetre $u|_{\Gamma}$: prendre par exemple sur le carr\u00e9 $]0, 2\pi[$ les fonctions $u_k(x, y) = \pm x^k \cos(y)$ dont la d\u00e9riv\u00e9e normale sur le bord $y = 0$ est nulle quelque soit k . Et pourtant la valeur au bord des fonctions u_k d\u00e9pend de k et elle ne saurait donc \u00eatre d\u00e9termin\u00e9e par la valeur $\frac{\partial u_k}{\partial n} = -\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0$ sur le bord $y = 0$, valeur ind\u00e9pendante de k . \u25a0

Il reste donc :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \end{cases} \quad (3.52)$$

Formulation variationnelle rigoureuse

Le probl\u00e8me (3.52) a un sens d\u00e8s que u et v sont dans $H^1(\Omega)$. On s'int\u00e9resse donc au probl\u00e8me :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.53)$$

Équivalence formulation variationnelle – formulation forte

On cherche à savoir si une solution du problème faible, i.e. une solution $u \in H^1(\Omega)$ de (3.53), est solution du problème fort (3.51), et, réciproquement, si u est une solution du problème fort et que de plus $u \in H^1(\Omega)$ alors u est solution du problème faible.

En fait, il faut supposer un peu plus de régularité pour u , à savoir $u \in H^2(\Omega)$.

Supposant que u est solution de (3.51) avec $u \in H^1(\Omega)$. On suppose de plus que $u \in H^2(\Omega)$. Alors en multipliant (3.51)₁ par $v \in H^1(\Omega)$, par intégration par parties on obtient (3.53).

Réciproquement : on suppose que u est solution de (3.53). En particulier (3.53) est valide pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$). On réécrit (3.53) comme :

$$\langle \bar{\nabla} u, \bar{\nabla} v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et on retrouve donc (3.51)₁.

Il reste à retrouver la condition aux limites (3.51)₂ : supposons de plus que la solution u de (3.53) est $H^2(\Omega)$. Alors par intégration par parties on obtient :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u) v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.54)$$

Remarque 3.55 L'hypothèse $u \in H^2(\Omega)$ est indispensable pour que les termes ci-dessus aient un sens, i.e. pour que $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$. On montre en fait que dès que $f \in L^2(\Omega)$ alors la solution de (3.53) a effectivement la régularité $H^2(\Omega)$, et cette hypothèse $u \in H^2(\Omega)$ n'est alors pas contraignante. ■

L'équation (3.54) s'écrit encore :

$$(-\Delta u + u - f, v)_{L^2(\Omega)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right)_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Le terme de gauche est nul grâce à (3.51)₁ et au fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$: ayant $(-\Delta u + u - f, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v \, d\Omega = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on garde cette égalité pour tout $v \in L^2(\Omega)$, donc en particulier pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

Il reste donc dans (3.54) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right)_{L^2(\Gamma)} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.55)$$

On admet ici que $\gamma_0(H^1(\Omega))$ est dense dans $L^2(\Gamma)$ ce qui permet de conclure $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ .

On vient de montrer que, si u est solution du problème variationnel (3.53), alors, sous la condition supplémentaire que $u \in H^2(\Omega)$, u est également solution du problème fort (3.51). Et finalement, les problèmes forts et variationnels sont équivalents sous la condition qu'ils admettent l'un et l'autre une solution $u \in H^2(\Omega)$ (si u est solution de (3.51) avec $u \in H^2(\Omega)$, alors u est solution de (3.53), et réciproquement).

Condition aux limites naturelle

La condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ est obtenue naturellement par intégration par parties de (3.53), voir (3.55). Une telle condition aux limites est dite condition aux limites naturelle ('naturellement obtenue par intégration par parties').

Remarque 3.56 Il est inutile d'essayer de faire entrer la condition de Neumann dans l'espace de recherche de la solution : si on essaie, on doit considérer l'espace $V = \{v \in H^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma} = 0\}$, la régularité $H^2(\Omega)$ étant imposé pour que $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma}$ ait un sens. D'autre part il faudra considérer cet espace muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ pour avoir la coercivité de la forme bilinéaire associée $a(\cdot, \cdot)$, voir paragraphe suivant. Malheureusement l'espace $(V, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ n'est pas un Hilbert : il n'est pas complet, sa fermeture étant l'espace $H^1(\Omega)$ tout entier. Or on a besoin d'un espace de Hilbert pour pouvoir appliquer le théorème de Lax–Milgram.

Donc la condition de Neumann ne peut en aucun cas être considérée comme essentielle. ■

Problème bien posé

Il reste à montrer que le problème (3.53) est bien posé. L'application du théorème de Lax–Milgram est similaire aux cas précédents : il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

avec ici $\alpha = 1$ (le prouver).

Noter que la solution trouvée n'a que la régularité $H^1(\Omega)$, et donc si on ne peut pas prouver que de plus $u \in H^2(\Omega)$, on ne peut pas retrouver la condition aux limites naturelle $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ autrement que formellement.

Régularité de la solution trouvée

Le théorème de Lax-Milgram a donné l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H^1(\Omega)$ qui de plus dépend continûment de f . Il reste à vérifier que cette solution est en fait dans $H^2(\Omega)$: on aura alors bien équivalence des problèmes (3.51) et (3.53) et le problème (3.51) sera bien posé.

On renvoie par exemple à Nédélec [13] pour une démonstration (démonstration technique faisant appel à des résultats de compacité hors programme) ou à Brézis [3] pour une autre démonstration (voir le paragraphe 3.12 pour l'idée de cette démonstration).

Exemple 3.57 Reprendre les exemples 3.48 en prenant pour conditions aux limites des conditions de Neumann homogène. \blacksquare

3.5.4 Problème de Neumann non homogène et condition aux limites naturelle

Étant donnée une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \gamma_1(H^2(\Omega))$, il s'agit de trouver, dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 1-régulier, une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \end{cases} \quad (3.56)$$

Formulation variationnelle formelle

Multipliant par v , une intégration par parties (formelle pour le moment) donne :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \end{cases}$$

Puisqu'on a $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g$ cela s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \end{cases}$$

Formulation variationnelle rigoureuse

La formulation ci-dessus a un sens dès que u et v sont dans $H^1(\Omega)$. On regarde donc le problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.57)$$

Noter qu'il suffira ici de supposer que $g \in L^2(\Gamma)$ pour avoir une solution (par contre pour pouvoir avoir $g = \frac{\partial u}{\partial n}$ et donc interpréter le problème, il sera nécessaire d'avoir $g \in \gamma_1(H^2(\Omega))$).

Équivalence formulation variationnelle – formulation forte

La démarche précédente montre que dès que $u \in H^2(\Omega)$ et que u vérifie le problème fort (3.56) alors u est aussi solution du problème faible (3.57).

Réciproquement, supposons que $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (3.57). L'équation (3.57) étant en particulier vraie pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ on obtient :

$$\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Et on a bien $-\Delta u + u = f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Supposons de plus que la solution u de (3.57) est dans $H^2(\Omega)$ (hypothèse de régularité).

Par intégration par parties on trouve :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u) v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Et avec $-\Delta u + u = f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ il reste :

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Sachant $\gamma_0(H^1(\Omega))$ dense dans $L^2(\Gamma)$ on conclut que $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ . Ainsi les problèmes fort et faible sont équivalents dès que la solution u a la régularité $H^2(\Omega)$.

Condition aux limites naturelle

La condition $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ provient de l'intégration par parties de (3.57) : c'est une condition aux limites naturelle.

Problème bien posé

Il reste à prouver que (3.57) est bien posé. Le théorème de Lax-Milgram donnera le résultat comme précédemment dès qu'on aura prouvé que la forme linéaire :

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma \quad (3.58)$$

est continue dans $H^1(\Omega)$. Le seul terme non encore analysé est l'intégrale sur Γ . Or par définition $v|_{\Gamma} = \gamma_0(v)$, d'où pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Gamma} g v|_{\Gamma} \, d\Gamma \right| = |(g, \gamma_0(v))_{L^2}| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}$$

Et la continuité de l'application trace donne $\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_0\| \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Finalement, pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$|\ell(v)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0\| \|g\|_{L^2(\Gamma)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

et la continuité de ℓ est démontrée. Le problème est bien posé et la solution vérifie :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0\| \|g\|_{L^2(\Gamma)}$$

Exemple 3.58 On considère le problème, pour $\beta \geq 0$:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En donner une formulation variationnelle, et montrer son caractère bien posé au sens des distributions. (Indication : on se servira du premier théorème de trace pour avoir $(u, v)_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_0\|^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$.) ■

3.5.5 * Problème mixte Dirichlet–Neumann

Soit Ω ouvert borné 1-régulier connexe de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. On suppose $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$. Soit le problème de trouver u tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u|_{\Gamma_0} = d & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \end{cases} \quad (3.59)$$

(au sens des distributions.) On suppose $f \in L^2(\Omega)$, et $d \in \gamma_0(H^2(\Omega))$ et $g \in \gamma_1(H^2(\Omega))$.

Formulation variationnelle formelle

Multipliant par v , une intégration par parties (formelle pour le moment) donne :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \text{ tel que } u|_{\Gamma_0} = d \text{ et :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \end{cases}$$

Puis u étant connu sur Γ_0 on prendra $v|_{\Gamma_0} = 0$, et ayant $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = g$, on en déduit :

Formulation variationnelle rigoureuse

Le problème variationnel trouvé se formule comme :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u|_{\Gamma_0} = d \text{ et :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0. \end{cases}$$

La condition $u|_{\Gamma_0} = d$ est une condition essentielle alors que la condition $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = g$ est une condition naturelle (on va la retrouver par intégration par parties).

Notons :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Le problème se reformule alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in d + H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) : \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v \, d\Gamma. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Équivalence formulation variationnelle – formulation forte

On suppose que (3.60) a une solution $u \in H^1(\Omega)$. Par intégration par parties on retrouve, en supposant de plus $u \in H^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u|_{\Gamma_0} = d \text{ et :} \\ \int_{\Omega} (-\Delta u + u) v \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Ceci est en particulier vrai pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on retrouve $-\Delta u + u = f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il reste donc :

$$\int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$$

On conclut que $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ_1 (par densité de $\gamma_0(H^1(\Omega))$ dans $L^2(\Gamma)$). Sachant de plus par hypothèse que $u|_{\Gamma_0} = d$ (condition essentielle), on conclut qu'une solution du problème faible qui est $H^2(\Omega)$ est solution du problème fort. Réciproquement, dès que $u \in H^2(\Omega)$ est une solution du problème fort, alors u est solution du problème faible, ceci étant obtenu immédiatement par intégrations par parties. Ces problèmes sont donc équivalents.

Problème bien posé

Il reste à prouver que (3.60) est bien posé (puis par un résultat de régularité que la solution trouvée est $H^2(\Omega)$ pour retrouver les conditions aux limites du problème fort, résultat admis ici sous les conditions de régularités supposées des données).

On commence par remarquer que $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un Hilbert : il est trivialement stable, et il est fermé car l'application $u|_{\Gamma_0} \circ \gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est continue (on a noté $u|_{\Gamma_0} : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ l'application $v \rightarrow v|_{\Gamma_0}$ restriction à Γ_0 , cette application étant trivialement linéaire continue).

Supposons que $d = 0$. On vérifie comme dans les paragraphes précédents que les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ (membre de gauche de (3.60)) et ℓ (membre de droite de (3.60)) vérifient les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram (grâce à l'inégalité de Poincaré généralisée, ayant supposé $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$). Le faire.

Et si $d \neq 0$, on procède de même que pour le problème de Dirichlet non homogène (on fait un relèvement u_d de d dans $H^1(\Omega)$, et on regarde le problème en l'inconnue $u_0 = u - u_d \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$).

3.5.6 * Autre Condition aux limites mixte

Soit le problème de trouver u tel que (forme forte) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u|_{\Gamma} + \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \end{array} \right. \quad (3.61)$$

(au sens des distributions.) On suppose $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \gamma_1(H^2(\Omega))$.

Noter que u n'est pas connue sur Γ , et qu'on ne peut se contenter de travailler dans $H_0^1(\Omega)$.

La formulation variationnelle associée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega) : \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma. \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Le point non encore vu est la continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

et plus précisément de la forme bilinéaire :

$$a_{\Gamma}(u, v) = \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Les théorèmes de Cauchy–Schwarz et de trace indiquent immédiatement que :

$$|a_\Gamma(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_0\|^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $H^1(\Omega)$. Sachant que $a_\Gamma(v, v) \geq 0$, la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $H^1(\Omega)$ est immédiate.

D'où le caractère bien posé à l'aide du théorème de Lax-Milgram.

Et l'équivalence avec la forme forte est obtenue comme précédemment dès qu'on suppose que la solution de la forme variationnelle est en fait dans $H^2(\Omega)$.

3.6 * Principe du maximum

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n 1-régulier.

Théorème 3.59 *Pour le problème de Dirichlet associé à $-\Delta u + u = f$: trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que $u|_\Gamma =$ donné et :*

$$\int_\Omega \text{grad} u \cdot \text{grad} v \, dx + \int_\Omega u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

on a :

$$\min(\inf_\Gamma(u), \inf_\Omega(f)) \leq u(\vec{x}) \leq \max(\sup_\Gamma(u), \sup_\Omega(f)). \quad (3.63)$$

Donc u est minoré (resp. majoré) par sa valeur au bord et par le min de f dans Ω .

Preuve. On ne fait la démonstration que dans le cas classique : $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Voir Brézis [3] pour le cas général. Soit $\vec{x}_0 \in \overline{\Omega}$ où u atteint son maximum : $u(\vec{x}_0) = \max_{\vec{x} \in \overline{\Omega}}(u(\vec{x}))$. Alors si $\vec{x}_0 \in \Gamma$ la conclusion est évidente. Soit donc $\vec{x}_0 \in \Omega$. Alors $\vec{\nabla} u(\vec{x}_0) = 0$ et pour tout $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0$. D'où $\Delta u(\vec{x}_0) \leq 0$ et $u(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \Delta u(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}_0)$. ■

Remarque 3.60 Ce résultat est faux pour le problème du Laplacien $-\Delta u = f$:

Par exemple, en 1-D, prendre $\Omega =]0, 1[$ et $f = x$ pour $u(0) = u(1) = 0$: on a $u(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}$ et $u(\frac{1}{2}) < 0$. ■

Théorème 3.61 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Pour le problème de Neumann : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_\Omega u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

on a :

$$\inf_\Omega(f) \leq u(\vec{x}) \leq \sup_\Omega(f). \quad (3.64)$$

Preuve. On se limite au cas classique. Si le max est atteint dans Ω , même démonstration que pour les conditions aux limites de Dirichlet.

Et si le max est atteint sur Γ on a également $\Delta u \leq 0$. En effet, on a $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ et si on avait $\Delta u > 0$, alors le max ne serait pas atteint en ce point. Et même conclusion. ■

3.7 * Un problème de transmission

Soit Ω et $\Gamma = \partial\Omega$ son bord. On suppose Ω partitionné en $\Omega_1 \cup \Omega_2$, et soit Γ_{12} la frontière entre Ω_1 et Ω_2 . Typiquement Ω_1 correspond à un matériau donné et Ω_2 à un autre matériau (par exemple Γ_{12} est une interface air-eau, ou de contact entre deux solides de propriétés différentes...).

On notera \vec{n} le vecteur normal à Γ_{12} sortant de Ω_1 , et si u est une fonction scalaire définie sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ qu'on notera également $u = u_1$ dans Ω_1 et $u = u_2$ dans Ω_2 , on notera :

$$[u] = u_+ - u_- = \text{saut de } u \text{ sur } \Gamma_{12},$$

où u_+ est la valeur limite de u dans Ω_2 et u_- la valeur limite de u dans Ω_1 , i.e., pour (presque tout) $\vec{x} \in \Gamma_{12}$:

$$[u(\vec{x})] = \lim_{h \rightarrow 0} (u_2(\vec{x} + h\vec{n}) - u_1(\vec{x} - h\vec{n})) = u(\vec{x}_+) - u(\vec{x}_-).$$

On considère le problème, pour $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ et $f_2 \in L^2(\Omega_2)$: trouver u tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ -\Delta u = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma_{12}, \\ [\frac{\partial u}{\partial n}] = 0 & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (3.65)$$

Les deux conditions de saut peuvent s'interpréter comme deux 'demi-conditions'. Notant $f \in L^2(\Omega)$ la fonction

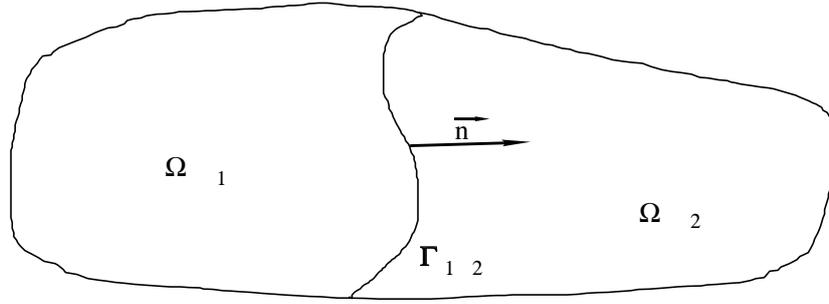


FIGURE 3.1 – Problème de transmission

qui vaut $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ et $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, le problème s'écrit aussi de manière plus concise :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [u] = 0 \text{ et } \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0 & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (3.66)$$

On a imposé la condition aux limites de Dirichlet pour u sur Γ , mais on aurait pu imposer des C.L. mixtes : cf. les paragraphes précédents.

Formulation variationnelle formelle Puisque $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ on a de manière générique dans $L^2(\Omega)$ ' $\int_{\Omega} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2}$ '. Multipliant par v et intégrant sur Ω on a :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = -\int_{\Omega_1} \Delta u v \, dx - \int_{\Omega_2} \Delta u v \, dx.$$

D'où par intégration par parties avec $v|_{\Gamma} = 0$ (condition de Dirichlet sur Γ), désignant par v_1 (resp. v_2) la valeur de v dans Ω_1 (resp. Ω_2) :

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx - \int_{\Gamma_{12}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} v_1 - \frac{\partial u_2}{\partial n} v_2 \right) d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, dx$$

(avec un signe moins pour $\frac{\partial u_2}{\partial n}$ car la normale est entrante dans Ω_2 et c'est $-\vec{n}$ qui est sortante.)

Le terme sur le bord Γ_{12} s'écrit aussi, puisque $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0$: $\int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial u}{\partial n} [v] \, d\Gamma$ et on le prend nul en imposant $[v] = 0$ sur Γ_{12} . En effet, intuitivement on cherche u dans l'espace :

$$\{u : [u] = 0\}$$

pour avoir un système avec même nombre d'équations que d'inconnues, on prend v dans le même espace (la suite indiquera que $[u] = 0$ est une condition essentielle).

Formulation variationnelle rigoureuse On considère l'espace :

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega) : [u] = 0\},$$

dont on montrera que c'est un Hilbert. Le problème se formule alors :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.67)$$

et dans cette formulation tous les termes ont bien un sens.

Interprétation de la formulation variationnelle (ou, équivalence avec la formulation forte.)

On suppose que (3.67) admet une solution $u \in V$. On suppose de plus que cette solution est dans $H^2(\Omega)$ (on peut montrer que c'est effectivement le cas pour $f \in L^2(\Omega)$ et cette hypothèse ne sera pas restrictive). Par

intégration par parties de (3.67) pour tout $v \in V$ il vient :

$$-\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \Delta u v \, dx + \int_{\Gamma_{12}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} v_1 - \frac{\partial u_2}{\partial n} v_2 \right) d\Gamma = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f v \, dx,$$

soit puisque $[v] = 0$, pour tout $v \in V$:

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (-\Delta u - f) v \, dx + \int_{\Gamma_{12}} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] v \, d\Gamma = 0. \quad (3.68)$$

En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ (prolongée à 0 sur tout Ω), puis pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ (prolongée à 0 sur tout Ω), on retrouve bien :

$$-\Delta u = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad \text{et} \quad -\Delta u = f_2 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ et dans $\mathcal{D}'(\Omega_2)$. Et avec $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ et $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, cela s'écrit effectivement :

$$-\Delta u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

au sens de $L^2(\Omega)$. Il reste donc dans (3.68), pour tout $v \in V$:

$$\int_{\Gamma_{12}} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] v \, d\Gamma = 0.$$

Mais ceci est donc vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on en déduit par densité que ceci est vrai pour tout $\varphi \in L^2(\Gamma_{12})$ et donc que $[\frac{\partial u}{\partial n}] = 0$ sur Γ_{12} . Et puisque par hypothèse $u \in V$, on a $u|_\Gamma = 0$ et $[u] = 0$. On a bien retrouvé le pb fort.

Problème bien posé Par rapport à ce qui a déjà été fait, il faut montrer que V est bien un espace de Hilbert. Or c'est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$ (trivial). Et il est fermé (exercice). Donc il est complet pour la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. D'où le résultat. Et la vérification des hypothèses du théorème de Lax–Milgram se fait comme précédemment.

Autres conditions de transmission Plutôt que les conditions $[u] = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ_{12} on aurait pu imposer, avec des fonctions b_1 et b_2 de $L^\infty(\Gamma_{12})$, et considérer le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon_1 \Delta u = f_1, \quad \text{dans } \Omega_1, \\ -\varepsilon_2 \Delta u = f_2, \quad \text{dans } \Omega_2, \\ \text{C.L. de Dirichlet sur } \Gamma, \\ b_1 u_1 = b_2 u_2, \quad \text{sur } \Gamma_{12}, \\ b_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = b_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad \text{sur } \Gamma_{12}. \end{array} \right.$$

On aurait alors travaillé dans l'espace :

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega) : b_1 u_1 = b_2 u_2 \text{ sur } \Gamma_{12}\}$$

Donner la formulation variationnelle. De même, lorsque la condition de Dirichlet sur Γ est remplacée par une condition de Neumann, donner la formulation variationnelle.

3.8 * Interface et équation de Steklov–Poincaré

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^n de frontière Γ . On souhaite résoudre le problème de Poisson avec par exemple les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.69)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ce problème est linéaire et peut se mettre sous la forme : trouver $u = u_f + u_g$ où u_f et u_g sont solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_f = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_f = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_g = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_g = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

Soit $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ une partition de Ω , où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts connexes de frontière Γ_1 et Γ_2 , et soit $\Gamma_{12} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ la frontière entre Ω_1 et Ω_2 .

On souhaite (pour des raisons de parallélisation, ou des problèmes de contact par exemple) résoudre ce problème sur Ω_1 et Ω_2 , et non sur Ω tout entier. On note $u_i = u|_{\Omega_i}$, et sur Γ_{12} on note $\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ la normale sortante de Ω_1 vers Ω_2 . On commence par remarquer que

Proposition 3.62 Le problème (3.69) équivaut au “problème de transmission” :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 = f & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1 = g & \text{sur } \Gamma \cap \Gamma_1, \\ u_2 = g & \text{sur } \Gamma \cap \Gamma_2, \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma_{12}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.70)$$

(Les deux dernières équations sont appelées les conditions de transmission, la première $u_1 = u_2$ sur Γ_{12} étant essentielle, la seconde $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ sur Γ étant naturelle.)

Preuve. Mettre sous forme variationnelle, voir paragraphe précédent, où on cherche une solution dans l’Hilbert $V = \{v \in H_0^1(\Omega) : v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma\}$ (la condition $u_1 = u_2$ sur Γ_{12} est essentielle). ▀

Dans (3.70), notons $\lambda = u_1 = u_2$ la valeur inconnue de u sur Γ_{12} . Si on connaissait cette valeur, on pourrait découpler les calculs de u_1 et u_2 :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i = g & \text{sur } \Gamma_i - \Gamma_{12}, \\ u_i = \lambda & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (3.71)$$

Et on a deux “petits” problèmes de Dirichlet à résoudre au lieu du “gros” problème (3.69).

Regardons donc qu’elle est l’équation satisfaite par λ . Les équations u_i dans (3.71) sont décomposées en $u_i = u_{ifg} + u_{i\lambda}$ (linéarité du problème) où :

$$\begin{cases} -\Delta u_{ifg} = f & \text{dans } \Omega_i, \\ u_{ifg} = g & \text{sur } \Gamma_i - \Gamma_{12}, \\ u_{ifg} = 0 & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta u_{i\lambda} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{i\lambda} = 0 & \text{sur } \Gamma_i - \Gamma_{12}, \\ u_{i\lambda} = \lambda & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (3.72)$$

Notons :

$$G_i(f, g) = u_{ifg}, \quad H_i(\lambda) = u_{i\lambda}.$$

Les solutions cherchées dans les Ω_i sont donc données par :

$$u_i = G_i(f, g) + H_i(\lambda).$$

Et dans (3.70), l’équation naturelle de transmission $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ sur Γ s’écrit alors :

$$\frac{\partial H_1(\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial H_2(\lambda)}{\partial n} = \frac{\partial G_2(f, g)}{\partial n} - \frac{\partial G_1(f, g)}{\partial n}.$$

On note alors :

$$S(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial H_1(\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial H_2(\lambda)}{\partial n}, \quad \chi(f, g) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial G_2(f, g)}{\partial n} - \frac{\partial G_1(f, g)}{\partial n},$$

et le problème en λ s’écrit :

$$S(\lambda) = \chi(f, g), \quad (3.73)$$

qui est l’équation de Steklov–Poincaré : équation exprimant λ en fonction des données du problème.

Remarque 3.63 On peut considérer n’importe quel opérateur elliptique sur $H_0^1(\Omega)$, et pas seulement le laplacien $-\Delta$. ▀

3.9 * Un problème avec conditions aux limites périodiques

On se place ici dans \mathbb{R}^2 (pour simplifier) et l’ouvert Ω est le carré $[0, a] \times [0, b]$. Et on pave l’espace \mathbb{R}^2 à l’aide de Ω .

On dit qu'une fonction u est Ω -périodique si :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2, \quad u(\vec{x} + (k_1 a, k_2 b)) = u(\vec{x}).$$

On regarde alors le problème : trouver u tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u \text{ } \Omega\text{-périodique,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \text{ } \Omega\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.74)$$

Montrer que le problème s'écrit sous forme faible :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_{\text{per}}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_{\text{per}}^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.75)$$

où $H_{\text{per}}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v \text{ } \Omega\text{-périodique}\}$.

Remarque 3.64 Dans le cas du Laplacien : $-\Delta u = f$ dans $H_{\text{per}}^1(\Omega)$, il est clair que si u est solution alors $u + c$ est aussi solution pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. On n'a pas unicité de la solution. Il faut alors travailler dans $H_{\text{per}}^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et ce problème n'aura de solution que si de plus la donnée f satisfait $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ (condition de compatibilité sur f , voir le paragraphe suivant). \blacksquare

3.10 * Exemple de problème avec condition de compatibilité

On regarde le problème de Neumann pour le laplacien , pour $f \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Il est clair que si ce problème admet une solution u , alors $u+c$ est aussi solution, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Donc, si une solution existe elle n'est pas unique.

D'autre part, la formulation variationnelle donne, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, pour une solution $u \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (3.77)$$

Donc toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (3.76) est solution de (3.77). Réciproquement, par intégration par parties, on montre que toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (3.77) qui de plus est dans $H^2(\Omega)$ est solution de (3.76). Les deux problèmes sont alors équivalents.

En outre, pour $v = 1$ (3.77) donne :

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = 0. \quad (3.78)$$

C'est "la" condition de compatibilité que doit satisfaire f . On a alors :

Lemme 3.65 Si $f \in L^2(\Omega)$ et si la condition de compatibilité (3.78) est satisfaite alors le problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.79)$$

est bien posé (dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$). En particulier, (3.77) admet une solution $u \in H^1(\Omega)$ unique à une constante près.

Preuve. On se place dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ des classes de fonctions sur $H^1(\Omega)$ définies à une constante près : pour $v \in H^1(\Omega)$ on a $\dot{v} = \{v+c : c \in \mathbb{R}\}$. On définit (de manière usuelle) la norme sur $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ par, pour $\dot{v} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et si $v \in \dot{v}$:

$$\|\dot{v}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v+c\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left(\inf_{c \in \mathbb{R}} (\|v+c\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le problème s'écrit : trouver $\dot{u} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que pour tout $\dot{v} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ on ait ' $a(\dot{u}, \dot{v}) = \ell(\dot{v})$ ', où on a défini pour tout $(\dot{u}, \dot{v}) \in (H^1(\Omega)/\mathbb{R})^2$:

$$\begin{cases} a(\dot{u}, \dot{v}) = (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall (u, v) \in \dot{u} \times \dot{v} \\ \ell(\dot{v}) = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \dot{v} \end{cases}$$

La fonction ℓ est bien définie (indépendamment du représentant $v \in \dot{v}$) grâce à la condition de compatibilité (3.78) : en effet, cette condition donne $(f, v+c)_{L^2} = (f, v)_{L^2}$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Et ℓ est une

fonction trivialement linéaire. De plus est elle continue car, pour $\dot{v} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et $v \in \dot{v}$, et pour tout $c \in \mathbb{R}$:

$$\ell(\dot{v}) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega = \int_{\Omega} f (v+c) \, d\Omega \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v+c\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v+c\|_{H^1(\Omega)}.$$

Et donc $\ell(\dot{v}) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \min_{c \in \mathbb{R}} \|v+c\|_{H^1(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{v}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}$. C'est donc une forme linéaire continue.

La fonction $a(\cdot, \cdot)$ est bien définie car $\vec{\nabla}(v+c) = \vec{\nabla}v$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, et est trivialement linéaire. On montre également que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}$ est équivalente à la norme :

$$\|\dot{v}\|_1 = \|\vec{\nabla}v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \dot{v}.$$

(Admis : application du théorème de Rellich, voir cours de 3ème année.) Cette norme étant associée au produit scalaire $(\dot{v}, \dot{w})_1 = (\vec{\nabla}v, \vec{\nabla}w)_{L^2(\Omega)}$ si $v \in \dot{v}$ et $w \in \dot{w}$.

Dans ces conditions, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est trivialement continue coercive (constantes de continuité et de coercivité égales à 1). Les hypothèses du théorème de Lax–Milgram sont vérifiées et le problème est donc bien posé dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. \blacksquare

3.11 * Cas du laplacien dans \mathbb{R}^2

3.11.1 Cas du laplacien

Ce problème ne diffère du cas 1-D que par le nombre d'équations :

$$-\Delta \vec{u} = \vec{f}, \tag{3.80}$$

s'écrit si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ composante par composante :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f_1, \\ -\Delta u_2 = f_2. \end{cases}$$

Accouplé à des conditions aux limites pour \vec{u} , i.e., pour u_1 et u_2 , sur Γ , on retrouve les cas scalaires précédents.

On rappelle que pour une fonction tensorielle A , $\text{div}A$ est une fonction vectorielle :

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{x}) & a_{12}(\vec{x}) \\ a_{21}(\vec{x}) & a_{22}(\vec{x}) \end{pmatrix} \implies \text{div}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, sachant que :

$$\text{grad} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

il vient :

$$\text{div}(\text{grad} \vec{u}) = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}.$$

3.11.2 Un problème symétrique : cas de l'élasticité

Plutôt que de résoudre le problème du laplacien découplé ci-dessus, on peut être amené à résoudre le problème couplé en u_1 et u_2 (cf. élasticité) :

$$\text{div}(\text{grad} \vec{u} + (\text{grad} \vec{u})^T) = \vec{f}. \tag{3.81}$$

Et on résout le problème couplé :

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = f_1 \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = f_2 \end{cases}$$

Remarque 3.66 Usuellement on pose $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\text{grad} \vec{u} + (\text{grad} \vec{u})^T)$, où $\varepsilon(\vec{u})$ est appelé le tenseur (symétrique) des déformations linéaires, i.e. :

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

et on résout donc $2\text{div}(\varepsilon(\vec{u})) = \vec{f}$. \blacksquare

Dans le cas des conditions aux limites mixtes, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ étant une partition de Γ :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{d} & \text{sur } \Gamma_0, \\ (\text{grad}\vec{u} + \text{grad}\vec{u}^T) \cdot \vec{n} = \vec{g} & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.82)$$

la formulation variationnelle de ce problème est :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{u} \in \vec{d} + H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\text{grad}\vec{u} + \text{grad}\vec{u}^T) : \text{grad}\vec{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2. \end{cases} \quad (3.83)$$

Pour $\vec{f} \in L^2(\Omega)^2$, $\vec{d} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$ et $\vec{g} \in L^2(\Gamma)^2$, l'inégalité de Korn permet alors de montrer que ce problème est bien posé. Le vérifier par intégration par parties sur $\int (3.11.2)_1 \cdot v_1 \, d\Omega$ et sur $\int (3.11.2)_2 \cdot v_2 \, d\Omega$.

La notation ' \cdot ' correspond ici au produit terme à terme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \implies \\ A : B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = \text{Tr}(A \cdot B^T).$$

Par ailleurs, on a pour toutes matrices A et B :

$$(A + A^T) : B = \frac{1}{2}(A + A^T) : (B + B^T) \\ \text{car } A^T : B = A : B^T = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \text{ et le problème (3.83) est le problème symétrique :}$$

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{u} \in \vec{d} + H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2 \text{ tel que pour tout } \vec{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2 : \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad}\vec{u} + \text{grad}\vec{u}^T) : (\text{grad}\vec{v} + \text{grad}\vec{v}^T) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\Gamma. \end{cases}$$

C'est sous cette forme symétrique qu'il peut être préférable de programmer.

3.11.3 Système de Stokes

Le système de Stokes linéaire est à la base des méthodes de résolution de problèmes d'écoulement de fluides. C'est également un prototype pour la résolution par éléments finis de problèmes sous contrainte. Les équations sont de la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{u} \in H_0^1(\Omega)^n \text{ et } p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tels que :} \\ -\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div}\vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.84)$$

Il est clair que si (\vec{u}, p) est solution alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $(\vec{u}, p+c)$ est aussi solution. Réciproquement, on peut montrer que toute solution est de cette forme, et qu'il existe une unique solution $(\vec{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ (p est définie à une constante près, la pression hydrostatique).

Remarque 3.67 On peut noter que $\text{div}(\text{grad}\vec{u}^T) = \vec{\nabla}(\text{div}\vec{u})$ et donc que :

$$\text{div}\vec{u} = 0 \implies \text{div}(\text{grad}\vec{u}^T) = 0.$$

Le problème s'écrit donc également sous la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{u} \in H_0^1(\Omega)^2 \text{ et } p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tels que :} \\ -\text{div}(\varepsilon(\vec{u})) + \vec{\nabla}p = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div}\vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $\varepsilon(\vec{u}) = \text{grad}\vec{u} + \text{grad}\vec{u}^T$. Cette forme symétrique pourra être privilégiée. ▀

En 2-D (généralisation immédiate en n -D), si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, les équations sont :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2 \text{ et } p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tels que :} \\ -\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.85)$$

La forme variationnelle du problème en (\vec{u}, p) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\vec{u}, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \text{grad} \vec{u} : \text{grad} \vec{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \text{div} \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \vec{v} d\Omega, \quad \forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \text{div} \vec{u} q d\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.86)$$

(Ici la notation ' $:$ ' correspond au produit terme à terme.)

Si on cherche \vec{u} dans l'espace

$$H_0^1(\text{div}0) = \{\vec{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \text{div} \vec{v} = 0\}, \quad (3.87)$$

alors, se limitant à la recherche de \vec{u} , la forme variationnelle est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \vec{u} \in H_0^1(\text{div}0) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \text{grad} \vec{u} : \text{grad} \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \vec{v} d\Omega, \quad \forall \vec{v} \in H_0^1(\text{div}0). \end{array} \right. \quad (3.88)$$

Le théorème de Lax-Milgram est applicable et ce problème (3.88) est bien posé dans l'espace $H_0^1(\text{div}0)$ muni de la norme $H_0^1(\Omega)$. La programmation par éléments finis de ce problème n'est pas agréable car un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\text{div}0)$ n'est pas 'simple'. C'est la raison pour laquelle on relaxe la contrainte $\text{div} \vec{v} = 0$ à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange p (qui sera interprété comme étant la pression) pour obtenir (3.86).

On peut montrer que le problème (3.86) admet une unique solution $(\vec{u}, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ où \vec{u} est solution de (3.88). Démonstration délicate dont l'idée est que, pour \vec{u} solution de (3.88), le vecteur $\vec{w} = \vec{f} + \Delta \vec{u}$ est en fait un potentiel : $\vec{w} = \vec{\nabla} p$. Il 'suffit' (délicat) d'établir qu'une forme linéaire continue $L : H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule sur $H_0^1(\text{div}0)$ est de la forme $L(\vec{v}) = (p, \text{div} \vec{v})_{L^2}$ où $p \in L^2(\Omega)$, i.e. puisque $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)$ que $L(\vec{v}) = -\langle \vec{\nabla} p, \vec{v} \rangle$ (théorème établi par De Rham). Ici L est représentée par $\vec{f} + \Delta \vec{u} : L(\vec{v}) = (\vec{f} + \Delta \vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)}$ pour tout $\vec{v} \in V$ et $L(\vec{v}) = 0 = (\vec{f} + \Delta \vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)}$ pour tout $\vec{v} \in V$ dès que $\vec{u} \in V$ est solution de (3.86).

Il reste à montrer que, résolvant (3.86), on a bien résolu (3.84) au sens des distributions, ce qui s'obtient par intégration par parties.

$\vec{f} + \Delta \vec{u} = \vec{\nabla} p$, avec $\Delta \vec{u}$ dans $H(\text{div}0)$

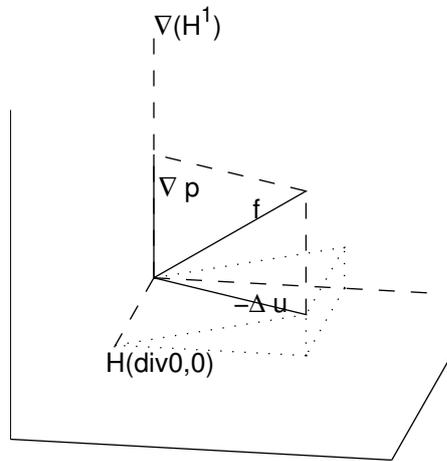


FIGURE 3.2 – Représentation de $-\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f}$. L'espace $L^2(\Omega)^n$ est l'espace ambiant, $-\Delta \vec{u}$ est dans le sous-espace à divergence nulle, et la solution \vec{u} est dans l'espace $H_0^1(\text{div}0)$, sous-espace de $H(\text{div}0, 0)$.

Remarque 3.68 Si on note :

$$\begin{aligned} H(\text{div}) &= \{\vec{v} \in L^2(\Omega)^n : \text{div} \vec{v} \in L^2(\Omega)\}, \\ H(\text{div}0) &= \{\vec{v} \in H(\text{div}) : \text{div} \vec{v} = 0\}, \\ H(\text{div}0, 0) &= \{\vec{v} \in H(\text{div}), \text{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \end{aligned}$$

on peut montrer que $L^2(\Omega)^n$ est somme directe orthogonale :

$$L^2(\Omega)^n = H(\text{div}0, 0) \oplus \vec{\nabla}(H^1(\Omega)).$$

Noter que dans la définition de $H(\text{div}0, 0)$, les 2 conditions $\text{div} \vec{v} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ne sont pas redondantes. La

première $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ indique que le fluide est incompressible et en particulier que ce qui rentre est égale à ce qui sort. On ne peut en déduire que la relation globale $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0$ et non la relation locale $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Alors que la deuxième condition $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ indique que rien ne rentre et rien ne sort, mais le fluide pourrait très bien être compressible à l'intérieur. De plus, on peut remarquer que l'espace $H(\operatorname{div} 0)$ n'est pas orthogonal à $\vec{\nabla}(H^1(\Omega))$: en effet, un élément $\vec{w} = \vec{\nabla} p \in \vec{\nabla}(H^1(\Omega))$ peut très bien satisfaire $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ sans être nul : on demande seulement $\Delta p = 0$ ce qui n'implique pas que p soit une constante (on donne les conditions aux limites voulues pour résoudre ce problème de laplacien). Par contre, si on impose de plus $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ alors p doit satisfaire le problème $\Delta p = 0$ avec la condition de Neumann $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, et le théorème de Lax–Milgram indique que p est une constante (voir paragraphe 3.10). ■

Remarque 3.69 On remarque que $\Delta \vec{u}$ est dans $H(\operatorname{div} 0)$: on a $\operatorname{div}(\Delta \vec{u}) = 0$ dans $L^2(\Omega)$ car $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ et $\operatorname{div}(\Delta \vec{u}) = \Delta(\operatorname{div} \vec{u})$ au sens des distributions (vérification immédiate). Donc $\Delta \vec{u} \in H(\operatorname{div})$ et $\operatorname{div}(\Delta \vec{u}) = 0$. Par contre, il n'y a aucune raison pour que $\Delta \vec{u}$ soit dans $H(\operatorname{div} 0, 0)$, i.e. que $\Delta \vec{u} \perp \operatorname{grad}(H^1(\Omega))$: il faudrait $\Delta \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui n'est pas le cas en général (condition aux limites non satisfaite par \vec{u}). ■

Remarque 3.70 Sur la décomposition de l'espace $L^2(\Omega)^n$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

Cette remarque est donnée comme introduction à la décomposition de $L^2(\Omega)^n$ et peut-être considérée indépendamment du problème de Stokes. On considère les cas de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 pour un ouvert Ω 1-régulier et simplement connexe.

1 - Commençons par \mathbb{R}^2 . Pour une fonction scalaire $\varphi \in H^1(\Omega)$, son rotationnel est défini par :

$$\operatorname{rot}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} \varphi,$$

le vecteur gradient tourné de $\pi/2$. On a alors :

$$H(\operatorname{div} 0, 0) = \operatorname{rot}(H_0^1(\Omega)),$$

i.e. l'opérateur $\vec{\operatorname{rot}}$ est surjectif de $H_0^1(\Omega)$ dans $H(\operatorname{div} 0, 0)$. On sait en effet que si \vec{v} est tel que $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ alors \vec{v} est un rotationnel et réciproquement. De plus ayant $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a φ nul au bord et donc si \vec{t} est le vecteur tangent, on a $\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{t} = 0$ ou encore $\operatorname{rot} \varphi \cdot \vec{n} = 0$. Donc l'image de $H_0^1(\Omega)$ par $\vec{\operatorname{rot}}$ est bien dans $H(\operatorname{div} 0, 0)$. Et pour \vec{v} donné dans $H(\operatorname{div} 0, 0)$, il faut trouver un antécédent par $\vec{\operatorname{rot}}$: on prend la solution du problème trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$(\vec{\operatorname{rot}} \varphi, \vec{\operatorname{rot}} \psi)_{L^2} = (\vec{v}, \vec{\operatorname{rot}} \psi)_{L^2} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

(On a trivialement $(\vec{\operatorname{rot}} \varphi, \vec{\operatorname{rot}} \psi)_{L^2} = (\vec{\nabla} \varphi, \vec{\nabla} \psi)_{L^2}$ et l'intégration par partie donne l'équation satisfaite par φ à savoir $-\Delta \varphi = \operatorname{rot} \vec{v}$ au sens des distributions.)

Et cela donne la décomposition très utile pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 1-régulier et simplement connexe :

$$L^2(\Omega)^n = \operatorname{rot}(H_0^1(\Omega)) \oplus \vec{\nabla}(H^1(\Omega)).$$

Donc, si $\vec{f} \in L^2(\Omega)^2$ il existe $p \in H^1(\Omega)$ et $\varphi \in \operatorname{rot}(H_0^1(\Omega))$ tels que :

$$\vec{f} = \vec{\nabla} p + \vec{\operatorname{rot}} \varphi,$$

et de plus p (à une constante près) et φ sont uniques et donnés comme solutions de :

$$(\vec{\nabla} p, \vec{\nabla} q)_{L^2} = (\vec{f}, \vec{\nabla} q)_{L^2} \quad \forall q \in H^1(\Omega),$$

et (puis) de :

$$(\vec{\operatorname{rot}} \varphi, \vec{\operatorname{rot}} \psi)_{L^2} = (\vec{f} - \vec{\nabla} p, \vec{\operatorname{rot}} \psi)_{L^2} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Pour des résultats plus complets, on renvoie à Girault et Raviart [7].

2 - Pour \mathbb{R}^3 : le rotationnel d'une fonction vectorielle $\vec{\varphi}$ est donné de façon usuelle par $\operatorname{rot} \vec{\varphi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\varphi}$.

Si $\vec{v} \in H(\operatorname{div})$ est tel que $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ alors \vec{v} dérive d'un rotationnel : $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{\varphi}$. Ce $\vec{\varphi}$ est loin d'être unique : on peut le choisir par exemple tel que $\operatorname{div} \vec{\varphi} = 0$ (condition de jauge) :

$$\forall \vec{v} \in L^2(\Omega)^3 \text{ t.q. } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad : \quad \exists \vec{\varphi} \in H^1(\Omega)^3 \text{ t.q. } \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{\varphi} \text{ et } \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0,$$

admis : voir Girault et Raviart [7]. Et si Ω est simplement connexe, il en existe un et un seul qui satisfait de plus :

$$\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = 0.$$

C'est la solution du problème (au sens des distributions) :

$$\begin{cases} -\Delta \vec{\varphi} = \operatorname{rot} \vec{v} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On vient de voir que $H(\operatorname{div} 0, 0)$ est isomorphe au rotationnel de l'ensemble des $\vec{\varphi}$ ainsi définis : donc tout

$\vec{f} \in L^2(\Omega)^3$ à une décomposition orthogonale du type :

$$\vec{f} = \vec{\nabla}p + \text{rot}\vec{\varphi},$$

avec $p \in H^1(\Omega)$ et $\vec{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$ où q est déterminé à une constante près par $\Delta p = \text{div}\vec{f}$ et $\vec{\varphi}$ par le système ci-dessus avec $\vec{v} = \vec{f} - \vec{\nabla}p$. \blacksquare

3.12 * Régularité des solutions faibles

On regarde ici le cas de la régularité pour un domaine Ω 1-régulier dans le cas du Laplacien :

Théorème 3.71 Soit Ω un ouvert 1-régulier borné de \mathbb{R}^n . Alors si $f \in L^2(\Omega)$, la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.89)$$

appartient à $H^2(\Omega)$. De plus :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où $C > 0$ ne dépend que de Ω . Même résultat pour le problème de Neumann posé dans $H^1(\Omega)$, ainsi que pour un opérateur elliptique général (à la place du Laplacien).

Preuve. Pour la démonstration complète, avec extensions du résultat, on renvoie à Brezis [3]. On ne donne ici qu'une idée de la démonstration dans le cas du problème de Dirichlet (3.89).

Il s'agit de montrer que pour la solution u on a en fait $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

1- On commence par regarder le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ (ouvert non borné, mais qui n'a pas de problème aux frontières). Dans ce cas, on montre que $H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$ et que le problème de Dirichlet est bien posé. Soit u sa solution. On note $Du = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (pour simplifier les notations). On utilise la méthode des translations : on pose :

$$D_h u(\vec{x}) = \frac{u(\vec{x} + h\vec{e}_i) - u(\vec{x})}{h}$$

où \vec{e}_i est le i -ème vecteur de base. Dans (3.89) on prend

$$v(\vec{x}) = D_{-h} D_h u \quad (= \frac{u(\vec{x} + h\vec{e}_i) - 2u(\vec{x}) + u(\vec{x} - h\vec{e}_i)}{h^2})$$

(approximation de la dérivée seconde) qui est bien dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ car u l'est. Et (3.89) donne :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\vec{\nabla}(D_h u)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |D_h u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(D_{-h} D_h u) \, dx$$

et donc :

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|D_{-h} D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Dès qu'on aura montré que, pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $h \in \mathbb{R}$ on a :

$$\|D_{-h} v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\vec{\nabla}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(voir lemme suivant) on aura :

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Et donc en particulier $\|D_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Et cela implique effectivement $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Voir lemme suivant. \blacksquare

Lemme 3.72 On note τ_h l'opérateur de translation défini sur $L^2(\Omega)$ par $(\tau_h u)(\vec{x}) = u(\vec{x} + \vec{h})$ presque partout. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$,
- (ii) Il existe une constante $c > 0$ (qui dépend de u) telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $i = 1, \dots, n$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

- (iii) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|\vec{h}|_{\mathbb{R}^n}$$

Et on peut prendre $C = \|\vec{\nabla}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Preuve. Montrons que (i) \Rightarrow (iii). C'est une généralisation de la formule des accroissements finis. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et on pose pour \vec{x} et \vec{h} donnés dans \mathbb{R}^n , pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$v(t) = u(\vec{x} + t\vec{h})$$

D'où $v'(t) = \vec{h} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x} + t\vec{h})$ et :

$$\tau_h u(\vec{x}) - u(\vec{x}) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t) dt = \int_0^1 \vec{h} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x} + t\vec{h}) dt$$

D'où, avec l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\tau_h u(\vec{x}) - u(\vec{x})|^2 \leq |\vec{h}|^2 \int_0^1 |\vec{\nabla} u(\vec{x} + t\vec{h})|^2 dt$$

puis :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h u(\vec{x}) - u(\vec{x})|^2 dx &\leq |\vec{h}|^2 \int_{t=0}^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\vec{\nabla} u(\vec{x} + t\vec{h})|^2 dt dx \\ &\leq |\vec{h}|^2 \int_{t=0}^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\vec{\nabla} u(\vec{y})|^2 dt dy = |\vec{h}|^2 \|\vec{\nabla} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

Montrons que (iii) \Rightarrow (ii). On prend $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et on a avec (iii) (et Cauchy–Schwarz) :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h u - u) \varphi dx \right| \leq C |h| \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Et on conclut en remarquant que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(\vec{x} + h\vec{e}_i) - u(\vec{x})) \varphi(\vec{x}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x}) (\varphi(\vec{x} - h\vec{e}_i) - \varphi(\vec{x})) dx$$

et en passant à la limite quand $h \rightarrow 0$.

Montrons que (ii) \Rightarrow (i). La forme linéaire :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

est continue pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ d'après (ii). Et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On peut alors prolonger cette application dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ en une application linéaire et continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (prolongement par continuité). Le théorème de représentation de Riesz dit qu'il existe un vecteur $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$(g, \varphi)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D'où $u \in H^1(\mathbb{R})$. ▀

2- Suite de la démonstration du théorème : cas Ω borné dans \mathbb{R}^n . On renvoie à Brézis [3] (démonstration technique) : idée = à l'intérieur, à l'aide d'une partition de l'unité on se ramène au cas précédent (en prolongeant la fonction par 0 sur \mathbb{R}^n). Et idée = à l'extérieur, on se ramène au cas du demi-espace \mathbb{R}_+^n (délicat, voir Brézis).

Deuxième partie

Approximations variationnelles

Il s'agit de résoudre numériquement un problème sous forme variationnelle : sachant que la solution cherchée n'est pas représentable en général sous une forme fonctionnelle explicite simple (comme une fonction polynôme ou exponentielle ou sinusoïdale ou...), on cherche une solution approchée par morceaux. I.e. on va découper le domaine Ω sur lequel on cherche la solution, et sur chaque morceau on va chercher à approcher la solution par une fonction simple (de type polynomiale par exemple).

On commence par donner le cadre abstrait qui nous assurera de l'existence de solutions approchées.

4 Approximation variationnelle abstraite

4.1 Le problème variationnel abstrait

Dans V un espace de Hilbert, il s'agit de résoudre (3.22) :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (4.1)$$

où ℓ est une forme linéaire donnée (forces extérieures imposées), et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire donnée (qui décrit les propriétés du matériau). Si on ne connaît pas la solution $u \in V$ explicitement, on essaie de trouver une fonction approchée u_h dans un sous-espace V_h de dimension finie n , solution du problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (4.2)$$

Si on connaît une base $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n}$ de V_h , alors (4.2) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Et pour connaître u_h sur V_h il suffit de connaître ses composantes u_h^j sur la base, i.e. notant :

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_h^j \varphi_j, \quad u_h^j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

il suffit de connaître les réels u_h^j . Le problème (4.2) s'écrit donc comme le système matriciel :

$$\begin{cases} \text{trouver les } u_h^j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n, \text{ tels que :} \\ \sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_h^j = \ell(\varphi_i), \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.5)$$

On note alors :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{h1} \\ \vdots \\ u_{hn} \end{pmatrix}, \quad A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}, \quad a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_n) \end{pmatrix},$$

et il s'agit de trouver \vec{u} tel que :

$$A \cdot \vec{u} = \vec{f}. \quad (4.6)$$

C'est un système matriciel $n * n$ qu'on peut résoudre dès que A est inversible. Une fois \vec{u} trouvé, la fonction solution est donnée par (4.4).

On supposera que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et α -coercive sur V , et que $\ell(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V . Dans ces conditions, le problème (4.1) est bien posé (théorème de Lax–Milgram), et la matrice A sera inversible et bien conditionnée.

4.2 Conformité

Hypothèse de conformité. On suppose dans ce cours que $V_h \subset V$ avec V_h sous-espace de Hilbert muni de la norme induite par V . On dit dans ce cas que V_h est une approximation conforme de V .

Dans ces conditions, $a(\cdot, \cdot)$ est également une forme bilinéaire continue et α -coercive sur V_h , et ℓ est une forme linéaire continue sur V_h . Et le problème (4.2) est bien posé indépendamment de h .

Remarque 4.1 Il n'est pas suffisant de vérifier que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V_h : on obtiendrait uniquement dans ce cas que $a(v_h, v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|^2$ pour tout $v_h \in V_h$. Et il se pourrait que α_h tende vers 0 avec h . Par contre, vérifier que $a(\cdot, \cdot)$ est coercif sur V implique avec la conformité que $\alpha_h \geq \alpha$ quel que soit h , et donc α_h ne peut pas tendre vers 0, et le problème est bien posé indépendamment de h :

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha_h} \|\ell\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|. \quad (4.7)$$

Et $\|u_h\|_V$ dépend alors continûment de $\|\ell\|$ indépendamment de h . ▀

4.3 Convergence de u_h vers u

On note u la solution du problème continu (4.1) et u_h la solution du problème discret (4.2). La question est de savoir si $\|u - u_h\|$ est ‘petit’, et de mesurer ce ‘petit’.

Ici on ne dispose que de la norme $\|\cdot\|_V$ et ce sera donc $\|u - u_h\|_V$ qu'on pourra mesurer. On a le résultat suivant, qui donne l'erreur d'approximation a priori :

Théorème 4.2 *Si $V_h \subset V$ (conformité), si $\|a\|$ est la norme de $a(\cdot, \cdot)$ et α sa constante de coercivité sur V , alors :*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \quad (4.8)$$

i.e. $\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} d(u, V_h)$ où $d(u, V_h)$ est la distance de u à V_h .

Preuve. Ayant supposé $V_h \subset V$ (approximation conforme), il vient à partir de (4.1) (valable donc pour tout $v_h \in V_h$) et de (4.2) :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.9)$$

Et donc :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h + v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Et puisque V_h est un espace vectoriel, c'est équivalent à :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \quad (4.10)$$

Puis la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ et sa continuité donnent :

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq \|a\| \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V, \quad \forall w_h \in V_h, \quad (4.11)$$

ce qui est le résultat annoncé. \blacksquare

Remarque 4.3 V étant un Hilbert, V_h étant un sous-espace de dimension finie, V_h est fermé et donc $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ est atteint : il existe $u_{0h} \in V_h$ tel que $d(u, V_h) = \|u - u_{0h}\|_V$. Et $u_{0h} = \Pi_{V_h} u$ est la projection V -orthogonale de u sur V_h . On rappelle que cette projection est définie par $(u_{0h}, v_h)_V = (u, v_h)_V$ pour tout $v_h \in V_h$.

Dans le cas où $a(\cdot, \cdot)$ est de plus symétrique (bilinéaire continu coercif), $a(\cdot, \cdot) = {}^{\text{noté}} (\cdot, \cdot)_a$ définit un produit scalaire et u_h est alors la projection de u par rapport à ce produit scalaire puisque la conformité donne $a(u - u_h, v_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$, cf (4.9), i.e. $(u, v_h)_a = (u_h, v_h)_a$ pour tout $v_h \in V_h$. En particulier, si $a(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_V$ est le produit scalaire, alors $(u - u_h, v_h)_V = 0$, et la solution u_h est donnée par la projection de u sur V_h pour le produit scalaire initial de V . \blacksquare

Remarque 4.4 En augmentant la dimension de V_h , on peut espérer s'approcher ‘aussi près que souhaité’ de u . Ce sera possible quand les V_h sont tous inclus dans un espace W dense dans V , i.e. on se contente d'espaces V_h qui sont tous du même type, par exemple tous inclus dans W espace des fonctions continues qui sont affines par morceaux, car on sait que W est dense dans $H^1(\Omega)$.

On aura alors $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - \Pi_{V_h} u\|_V = 0$, notation usuelle pour les éléments finis signifiant que, lorsque le pas de discrétisation h tend vers 0, alors V_h (dont la dimension tend alors vers ∞) sera ‘à la limite’ dense dans V et donc dense à la limite dans V . \blacksquare

Remarque 4.5 Si de plus $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors on a une meilleure approximation a priori :

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{\|a\|}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (4.12)$$

En effet, comme $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique on a aussi, avec la conformité (4.9) :

$$a(w_h, u - u_h) = 0, \quad \forall w_h \in V_h. \quad (4.13)$$

Et donc (4.10) s'écrit aussi, pour tout $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - v_h, u - v_h) + a(v_h - u_h, u - v_h) \\ &= a(u - v_h, u - v_h) + a(v_h - u_h, u - u_h) + a(v_h - u_h, u_h - v_h). \end{aligned} \quad (4.14)$$

On a $a(v_h - u_h, u - u_h) = 0$ et $a(v_h - u_h, u_h - v_h) \leq 0$, d'où $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq \|a\| \|u - v_h\|_V^2$ pour tout $v_h \in V_h$. \blacksquare

4.4 Rapidité de la convergence

On suppose que Ω est ouvert dans \mathbb{R}^n , et que Ω est partitionné en N_{el} sous-domaines K_i (les éléments ou mailles) :

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i \quad \text{où} \quad \forall i, j, \quad \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset.$$

On note h_i le diamètre des K_i (i.e. le diamètre de la plus petite boule contenant K_i) et on note $h = \max(h_i)$ le diamètre de la plus grande maille.

On suppose que l'approximation choisie est conforme, et quelle converge : i.e. que l'espace V_h d'approximation tend vers V quand h tend vers 0, i.e. pour $u \in V$ quelconque :

$$d(u, V_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

où $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ (i.e. V_h est dense à la limite dans V).

Question : à quelle vitesse l'erreur $\|u - u_h\|_V$ tend-elle vers 0 ? On reformule cette question sous la forme :

On dispose d'une triangulation \mathcal{T}_1 qui induit un espace d'approximation V_{h_1} et d'une triangulation \mathcal{T}_2 qui induit un espace d'approximation V_{h_2} et on note h_1 et h_2 les tailles respectives de la plus grande maille de \mathcal{T}_1 et de \mathcal{T}_2 . On suppose le maillage \mathcal{T}_2 deux fois plus fin que le maillage \mathcal{T}_1 : $h_2 = h_1/2$. Alors que peut-on dire de $d(u, V_{h_2})$ par rapport à $d(u, V_{h_1})$? En particulier :

$$\text{si } h_2 \leq \frac{h_1}{2} \quad \text{a-t-on} \quad d(u, V_{h_2}) \leq \frac{d(u, V_{h_1})}{\beta} \quad \text{et que vaut } \beta?$$

On montrera que dans les cas envisagés ici (problèmes elliptiques d'ordre 2), prendre $V_h = P_1$ (sous-espace des fonctions continues sur Ω et affines par morceaux) divisera l'erreur par $\beta = 2$ si le maillage est deux fois plus fin. On dit alors que la méthode d'approximation est d'ordre h , ce qui signifie que :

$$\|u - u_h\|_V = O(h), \tag{4.15}$$

ou encore :

$$\|u - u_h\|_V \leq c_1 h, \tag{4.16}$$

(à l'aide de (4.8)) où $c_1 > 0$ est une constante indépendante de h .

De même une approximation quadratique, i.e., prendre $V_h = P_2$ (sous-espace des fonctions continues sur Ω et polynomiales de degré 2 par morceaux) donnera $\beta = 4 = 2^2$, i.e. une erreur d'approximation quadratique ou d'ordre h^2 : $\|u - u_h\|_V = O(h^2)$.

Et de manière générale, une approximation par des fonctions continues sur Ω polynomiales de degrés k par morceaux donnera une erreur d'approximation d'ordre h^k : $\|u - u_h\|_V = O(h^k)$, ou encore :

$$\|u - u_h\|_V \leq c_k h^k, \tag{4.17}$$

où $c_k > 0$ est une constante indépendante de h .

Ces résultats sont tous basés sur les inégalités d'interpolation, inégalités qui 'mesurent' la quantité $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$, i.e. en donne une borne supérieure, dont une interprétation est qu'une fonction polynomiale peut approcher d'autant mieux une fonction quelconque que son degré est élevé.

Il semble donc souhaitable de prendre une approximation polynomiale d'ordre élevé. Cependant la mise en œuvre (programmation) sera plus délicate et pourra s'avérer être d'un coût plus élevé (matrice à inverser 'plus grosse' et 'moins creuse', et de plus c_k est généralement $\gg c_1$) pour un gain en précision inutile (par rapport à la précision cherchée ou bien par rapport à la précision du modèle donné par $a(\cdot, \cdot)$).

4.5 Méthode de Ritz-Galerkin

Soit V est un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne (orthonormale) de V . On construit le sous-espace de V :

$$V_h = V_m = \text{Vect}\{(e_i)_{1 \leq i \leq m}\} \tag{4.18}$$

engendré par les m premiers vecteurs de base.

On cherche alors une solution $u_m \in V_m$ au problème :

$$a(u_m, v_m) = \ell(v_m), \quad \forall v_m \in V_m. \tag{4.19}$$

Le problème étant bien posé lorsque le théorème de Lax-Milgram est satisfait, il admet une unique solution $u_m \in V_m$. On montre alors :

$$\|u - u_m\|_V \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \tag{4.20}$$

En effet, tout élément s'écrivant $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i e_i$, sa projection sur V_m est $p_m = \sum_{i=1}^m u_i e_i$ et le théorème d'approximation donne le résultat puisque $\|u - p_m\|_V \rightarrow 0$. Cette convergence résulte de $\|u\|_V^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty$ si $u \in V$, d'où on déduit que $\|u - p_m\|_V = \sum_{i=m+1}^{\infty} |u_i|^2 \rightarrow 0$.

Et $\frac{\|a\|}{\alpha} \|u - p_m\|_V$ majore $\|u - u_m\|_V$, cf (4.8), qui tend donc vers 0 quand m tend vers ∞ .

Noter que la solution approchée trouvée est la solution “tronquée” : on oublie les composantes de u qui sont d’indice $\geq m$.

Nous n’utiliserons pas cette méthode dans la suite du cours, car on ne connaît pas en général de base hilbertienne de V . Les méthodes décrites (base non hilbertienne, et sous espaces V_m non inclus dans V_{m+l} pour $l \in \mathbb{N}^*$) sont néanmoins souvent appelés méthodes de Galerkin.

5 Introduction aux éléments finis 1-D

Dans ce paragraphe, on ne s’occupe que de la technique d’approximation, et pas des problèmes mathématiques de caractère ‘bien posé’.

5.1 Triangulation

On se place dans l’intervalle $\Omega =]a, b[$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, donnons-nous $n+1$ points $(x_i)_{i=0, n}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Et considérons la partition (triangulation) $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[$, partition qui vérifie $\bar{\mathcal{T}} = [a, b]$. (Par exemple, posant $]a, b[=]0, 1[$, $h = \frac{1}{n}$ et $x_i = \frac{i}{n} = ih$, la partition est constituée de n intervalles égaux).

Définition 5.1 La partition \mathcal{T} est appelée triangulation ou maillage de Ω . Les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ formant \mathcal{T} sont appelés éléments ou mailles de Ω .

5.2 P_0 espace des fonctions constantes par morceaux

5.2.1 Base de P_0

Une fonction constante par morceaux sur la partition $\bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[$ est une fonction $f_h = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_h(x) = c_i$ est constante sur le i -ème intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On appelle $P_0 = P_0(\mathcal{T})$ l’ensemble des fonctions constantes par morceaux sur $\bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[$. Il est immédiat que P_0 est un sous espace vectoriel de l’ensemble des fonctions $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$: toute combinaison linéaire de fonctions constantes par morceaux est une fonction constante par morceaux.

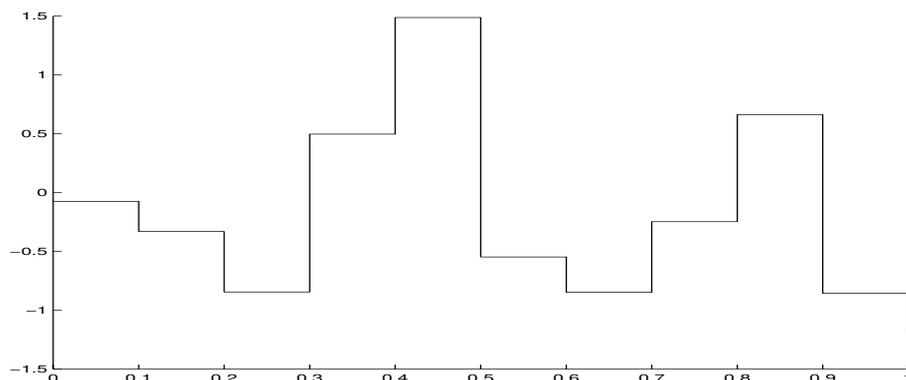


FIGURE 5.1 – Une fonction de P_0 sur $]0, 1[$, pour la triangulation $\bigcup_{i=1}^{10}]\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}[$.

Cet espace P_0 admet une base simple formée des n fonctions $\varphi_i = 1_{]x_{i-1}, x_i[}$ (fonctions caractéristiques de $]x_{i-1}, x_i[$) : les φ_i sont constantes par morceaux définies pour $1 \leq i \leq n$ par :

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = 1 \text{ pour } x \in]x_{i-1}, x_i[, \\ \varphi_i(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (5.1)$$

On montre effectivement que ces fonctions forment une base de P_0 :

1- $(\varphi_i)_{i=1,n}$ est une famille libre car si $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j = 0$, i.e. si :

$$\forall x \in [a, b], \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x) = 0, \quad (5.2)$$

alors en particulier au point $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ on obtient $\alpha_i = 0$, et ce pour tout i , et donc les α_i sont tous nuls.

2- Et c'est une famille génératrice : si f_h est dans P_0 , elle est caractérisée par ses valeurs aux points $\frac{x_{j-1}+x_j}{2}$ (milieu des intervalles). Et on a :

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[, \quad f_h(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x) \quad \text{où} \quad c_i = f_h\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

(Le membre de droite est bien constant par morceaux comme combinaison linéaire de fonctions constantes par morceaux.) Donc $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de P_0 et pour $f_h \in P_0$ les $c_j = f_h\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)$ sont les composantes de f_h sur cette base.

Remarque 5.2 Les fonctions φ_i définies ne permettent pas de connaître la valeur d'une fonction $f_h \in P_0$ aux n points x_i : les f_h ne sont donc définies que presque partout sur $[a, b]$. Elles ont été définies volontairement de cette façon car on aura uniquement besoin de savoir si f_h a un sens au sens de l'intégration (i.e. si f_h est définie presque partout). Pour des applications plus classiques, on peut définir les φ_i comme valant $1_{[x_{i-1}, x_i]}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $\varphi_n = 1_{[x_{n-1}, x_n]}$, par exemple. ■

5.2.2 Approximation L^2 d'une fonction $f \in L^2(]0, 1[)$ par une fonction P_0

Maintenant, soit $f \in L^2(]a, b[)$ une fonction quelconque qu'on souhaite approximer par une fonction $f_h \in P_0$. Un choix possible et usuel est de prendre f_h le plus près possible de f au sens de l'énergie ('des moindres carrés'), i.e., disant sur L^2 d'un produit scalaire, de prendre pour f_h la projection de f sur P_0 au sens de $L^2(]a, b[)$:

$$f_h \in P_0 \quad \text{caratérisée par :} \quad \forall \varphi_h \in P_0, \quad (f_h, \varphi_h)_{L^2} = (f, \varphi_h)_{L^2},$$

ou encore $f - f_h \in P_0^\perp$ au sens L^2 , ou encore f_h réalise le minimum :

$$\|f - f_h\|_{L^2} = \inf_{v_h \in P_0} \|f - v_h\|_{L^2} = d(f, P_0).$$

(où $d(\cdot, \cdot)$ est la distance associée à la norme : $d(f, v_h) = \|f - v_h\|_{L^2}$). P_0 est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc est convexe et fermé donc f_h existe et est unique (c'est la projection de f sur P_0). Disant d'une base $(\varphi_i)_{i=1,n}$ de P_0 , la projection $f_h \in P_0$ est caractérisée par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad (f_h, \varphi_i)_{L^2} = (f, \varphi_i)_{L^2}. \quad (5.4)$$

Puisque $f_h \in P_0$, f_h est caractérisée par ses composantes $(c_j)_{j=1,\dots,n}$ sur sa base :

$$f_h(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x).$$

Et on connaît f_h quand on connaît ses composantes c_j . Et (5.4) donne :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n c_j (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2} = (f, \varphi_i)_{L^2} \stackrel{\text{noté}}{=} f_i.$$

Donc les c_j sont solutions du système matriciel :

$$M \cdot \vec{c} = \vec{f} \quad \text{où} \quad M = [M_{ij}] = [(\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}]_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Ici, le calcul est simple car les φ_i sont 2 à 2 orthogonales (leurs supports sont disjoints), et on trouve immédiatement $M = \text{diag}(x_i - x_{i-1})$ (matrice diagonale de termes diagonaux les réels $x_i - x_{i-1}$). Et puisque

$$f_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = (x_i - x_{i-1}) \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{où} \quad \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx,$$

on en déduit que $c_i = \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}$ (valeur moyenne de f sur $]x_{i-1}, x_i[$).

Et donc la fonction " $f_h(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}} \varphi_i(x)$ " est la meilleure approximation de f au sens L^2 (fonction définie presque partout sur $[a, b]$).

5.2.3 Approximation $H^1(\Omega)$ d'une fonction $f \in H^1(\Omega)$ par une fonction P_0

Ce n'est pas possible! En effet, une fonction $f_h \in P_0$ est une fonction en escalier, et donc sa dérivée est une somme de masses de Dirac. Or les masses de Dirac ne sont pas des fonctions, en particulier $\delta_a \notin L^2(\Omega)$. Et donc une fonction en escalier n'est pas dans $H^1(\Omega)$.

Or pour considérer l'approximation de $f \in H^1(\Omega)$ au sens $H^1(\Omega)$, il faut chercher $f_h \in P_0$ tel que $\|f - f_h\|_{H^1(\Omega)} = \min\{\|f - g_h\|_{H^1(\Omega)} : g_h \in P_0\}$. Mais ayant $f \in H^1(\Omega)$ et $g_h \notin H^1(\Omega)$, on a $f - g_h \notin H^1(\Omega)$ et donc $\|f - g_h\|_{H^1(\Omega)}$ n'a aucun sens.

Les éléments finis P_0 ne permettent pas de calculer une approximation au sens $H^1(\Omega)$. C'est pourtant ce qu'il faut faire quand on veut trouver une solution approchée du problème :

$$-\Delta u + u = f, \quad \text{et C.L.}$$

En effet, la formulation variationnelle est de la forme : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (f, v)_{L^2}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

La formulation variationnelle approchée est de la forme : trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$(u_h, v_h)_{H^1(\Omega)} = (f, v_h)_{L^2}, \quad \forall v_h \in V_h,$$

avec $V_h \subset H^1(\Omega)$, pour pouvoir faire le calcul d'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ (cas des éléments finis conformes).

La démarche est la même pour une approximation dans $H_0^1(\Omega)$, considérant dans ce cas les conditions aux limites de Dirichlet.

Les éléments finis P_0 ne sont donc pas suffisants.

5.3 P_1 espace des fonctions continues qui sont affines par morceaux

5.3.1 Base de P_1

Une fonction continue sur $[a, b]$ affine par morceaux sur la partition $\bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[$ est une fonction $f_h = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue sur $[a, b]$ et telle que $f_h(x)$ est affine sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On appelle $P_1 = P_1(\mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux sur \mathcal{T} . Il est immédiat que P_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$: toute combinaison linéaire $\sum_{j=1}^m c_j f_j$ (avec $m \in \mathbb{N}$, les $c_j \in \mathbb{R}$ et les $f_j \in P_1$) est continue comme somme (finie) de fonctions continues et est affine par morceaux comme somme (finie) sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de fonctions affines.

On considère les $n - 1$ fonctions continues φ_i sur $[a, b]$ définies par (fonctions chapeaux), pour $1 \leq i \leq n - 1$:

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \text{ pour } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \varphi_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \text{ pour } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \varphi_i(x) = 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \quad (5.5)$$

On ajoute les 'demi-chapeaux' (aux extrémités de $[a, b]$) :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 - \frac{x - a}{x_1 - a} \text{ pour } x \in [a, x_1], \\ \varphi_0(x) = 0 \text{ sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = 1 - \frac{b - x}{b - x_{n-1}} \text{ pour } x \in [x_{n-1}, b], \\ \varphi_n(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (5.6)$$

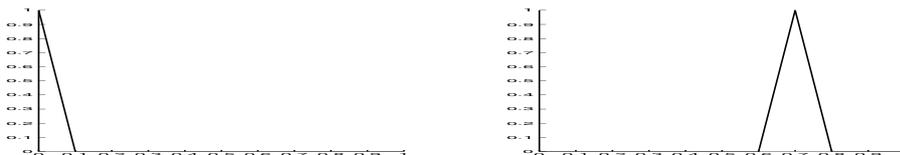


FIGURE 5.2 – Les fonctions de base demi-chapeau φ_0 et chapeau φ_7 sur $]a, b[=]0, 1[$, pour la triangulation

$$\bigcup_{i=1}^{10} \left] \frac{i-1}{10}, \frac{i}{10} \right[.$$

Proposition 5.3 $(\varphi_i)_{i=0, \dots, n}$ est une base de P_1 .

Preuve. C'est une famille libre car si $\sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j = 0$, i.e. si :

$$\forall x \in [a, b], \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x) = 0, \quad (5.7)$$

alors au point x_i on obtient $\alpha_i = 0$, et ce pour tout i , et donc les α_i sont tous nuls. C'est une famille génératrice : si f_h est une fonction continue affine par morceaux sur $\bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$, elle est caractérisée par ses valeurs $f_h(x_j)$ aux points x_j . Et on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad f_h(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x), \quad \text{où pour } i = 1, \dots, n : \quad c_i = f_h(x_i) \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

En effet, posant $g(x) = \sum_{j=0}^n f_h(x_j) \varphi_j(x)$, on a $g \in P_1$ (continue sur $[a, b]$ et affine par morceaux car combinaison linéaire de fonctions continues et affines par morceaux), et $g(x_i) = f_h(x_i)$ pour tout i , donc $g = f$. ■

5.3.2 Approximation L^2 d'une fonction $f \in L^2(]a, b[)$ par une fonction P_1

Maintenant, soit f une fonction de L^2 qu'on souhaite approximer par une fonction $f_h \in P_1$. Un choix possible et usuel est de prendre f_h le plus près possible de f au sens de l'énergie, i.e., f_h est la projection de f sur P_1 au sens de $L^2(]a, b[)$:

$$f_h \in P_1 \quad \text{caratérisée par :} \quad \forall \varphi \in P_1, \quad (f_h, \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad (5.9)$$

(i.e. $(f - f_h, \varphi)_{L^2} = 0$ pour tout $\varphi \in P_1$, i.e. $f - f_h \in P_1^\perp$ au sens L^2), i.e., (φ_i) étant une base et un produit scalaire étant bilinéaire :

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad (f_h, \varphi_i)_{L^2} = (f, \varphi_i)_{L^2}. \quad (5.10)$$

Calcul : puisque $f_h \in P_1$, f_h est caractérisée par ses composantes $(c_j)_{j=0, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sur sa base :

$$f_h(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x). \quad (5.11)$$

Et (5.10) donne :

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n c_j (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2} = (f, \varphi_i)_{L^2}. \quad (5.12)$$

Donc, notant $f_i = (f, \varphi_i)_{L^2}$, les c_j sont solutions du système matriciel :

$$M \cdot \vec{c} = \vec{f} \quad \text{où} \quad M = [(\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}]_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc d'inverser ce système pour connaître \vec{c} , et donc f_h avec (5.11).

Attention, les φ_i ne sont pas 2 à 2 orthogonales ! Par exemple, considérant le cas de la partition de $]a, b[=]0, 1[$ donnée par $x_i = \frac{i}{n}$, il vient :

$$(\varphi_0, \varphi_1)_{L^2} = (\varphi_{i-1}, \varphi_i)_{L^2} = \int_0^1 \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx = \int_0^h \frac{h-x}{h} \frac{x}{h} dx = \frac{h}{6} \neq 0.$$

Et puisque, pour $i = 1, \dots, n-1$:

$$\|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \varphi_1(x)^2 dx = 2 \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{2h}{3}$$

et que $\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{h}{3}$ (calcul similaire), la matrice M à inverser est tridiagonale :

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = [(\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}]_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice de masse.

Exemple 5.4 L'approximation P_1 de $f(x) = x(x-1)$ dans $L^2(]0,1[)$ est donnée figure 5.3. ▀

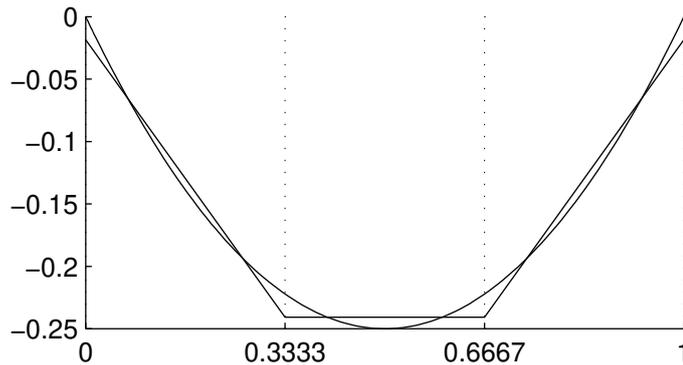


FIGURE 5.3 – La fonction $f_h \in P_1$ pour $n = 3$ la plus proche de $f(x) = x(x-1)$ au sens $L^2(]0,1[)$. Noter que les valeurs $f_h(x_i)$ sont différentes des $f(x_i)$: la solution f_h est optimale au sens L^2 .

Remarque 5.5 Méthode de “Mass lumping”. On verra que l'approximation par des éléments finis P_1 est une méthode d'ordre 1 : précision de l'ordre de h . Il est donc inutile dans les intégrations “ $\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx$ ” d'obtenir une précision d'ordre ≥ 2 . En particulier, pour les calculs des $(\varphi_{i-1}, \varphi_i)_{L^2}$, une méthode d'ordre 1 comme la méthode des trapèzes est suffisante. Cette méthode s'écrit de manière générique :

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = (\beta - \alpha) \frac{F(\alpha) + F(\beta)}{2}.$$

Et ici on obtient trivialement : $(\varphi_{i-1}, \varphi_i)_{L^2} \simeq 0$ et $\|\varphi_i\|_{L^2}^2 \simeq h$. Et donc :

$$M \simeq hI.$$

Cela simplifiera grandement les calculs. ▀

5.3.3 Approximation $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ par une fonction P_1

(Démarche du paragraphe précédent.) Une fonction P_1 est dans $H^1(\Omega)$, et donc, si $u \in H^1(\Omega)$, pour tout $u_h \in P_1$ le terme $\|u - u_h\|_{H^1}$ a un sens. Et la meilleure approximation au sens $H^1(\Omega)$ de u par un élément $u_h \in P_1$ est donnée par :

$$(u_h, v_h)_{H^1} = (u, v_h)_{H^1}, \quad \forall v_h \in H^1(\Omega). \quad (5.13)$$

(Ou encore $(u - u_h) \perp V_h$ au sens $H^1(\Omega)$, i.e. u_h projection orthogonale de u sur P_1 au sens $H^1(\Omega)$.) Soit

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad (u_h, \varphi_i)_{H^1} = (u, \varphi_i)_{H^1}. \quad (5.14)$$

Et $u_h \in P_1$ est caractérisée par ses composantes $(c_j)_{j=0, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sur sa base :

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x). \quad (5.15)$$

Donc (5.14) donne : les c_j sont solutions de

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n c_j (\varphi_j, \varphi_i)_{H^1} = (u, \varphi_i)_{H^1}, \quad (5.16)$$

i.e.

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n ((\varphi_j', \varphi_i')_{L^2} + (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}) c_j = (u', \varphi_i')_{L^2} + (u, \varphi_i)_{L^2}, \quad (5.17)$$

soit $\sum_{j=0}^n (\int_{\Omega} \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) + \varphi_j(x) \varphi_i(x) d\Omega) c_j = \int_{\Omega} u'(x) \varphi_i'(x) + u(x) \varphi_i(x) d\Omega$, i.e. solution du système matriciel :

$$(R + M) \vec{c} = \vec{f} \quad (5.18)$$

où :

$$R = [(\varphi_j', \varphi_i')_{L^2}]_{0 \leq i, j \leq n}, \quad M = [(\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}]_{0 \leq i, j \leq n}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

où $f_i = (u', \varphi_i')_{L^2} + (u, \varphi_i)_{L^2}$. La matrice R est appelée matrice de rigidité.

La matrice R , qui est $(n+1) * (n+1)$, n'est pas diagonale, mais elle est bande (et même tridiagonale). On a vu que la matrice de masse M est également tridiagonale, et donc il est facile 'd'inverser' $M + R$. D'où \vec{c} , d'où u_h . 'Inverser' signifie ici résoudre le système par une méthode numérique (comme la méthode LU), le calcul de l'inverse coûtant trop cher.

Exemple 5.6 Montrer que la matrice R est donnée par, pour la triangulation de $]a, b[=]0, 1[$ donnée par $\bigcup_{i=0}^n]ih, (i+1)h[$ où $h = \frac{1}{n}$:

$$R = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

En déduire la matrice R_0 correspondant au problème dans $H_0^1(\Omega)$ (i.e. si $u \in H_0^1(\Omega)$, on souhaite trouver une solution $u_h \in P_1 \cap H_0^1(\Omega)$).

Réponse : il y a maintenant $n-1$ fonctions de base les $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, et la matrice R_0 se déduit de la matrice R en supprimant les premières et dernières lignes et colonnes. ■

Remarque 5.7 Comme pour le calcul de M , on peut utiliser la méthode de Mass lumping, cf remarque 5.5. Mais pour le calcul de R , on intègre des fonctions constantes, et la méthode de Mass lumping est une méthode exacte qui donne pour résultat la matrice R calculée ci-dessus! ■

Exemple 5.8 La matrice $A = hR_0$ a pour valeurs propres les $\lambda_j = 2(1 - \cos(j\frac{2\pi}{n}))$ associées aux vecteurs propres les $\vec{x}^{(j)}$ de composante $x_i^{(j)} = \sin(ij\frac{2\pi}{n})$. Pour le voir, vérifier que la matrice $C = 2I - A$ a pour valeurs propres les $2 - \lambda_j$ associées aux vecteurs propres les $\vec{x}^{(j)}$. En particulier la plus grande valeur propre de A est d'ordre $O(1)$ et la plus petite valeur propre est donnée pour $j = 1$ (ou $j = n-1$) et est d'ordre $O(\frac{4\pi^2}{n^2}) = O(h^2)$. Le conditionnement de la matrice A est donc d'ordre $O(\frac{1}{h^2}) = O(n^2)$, et R_0 a bien sûr le même conditionnement : cela semble mauvais (le conditionnement dégénère en n^2), mais heureusement dégénère suffisamment lentement pour pouvoir traiter des problèmes de relativement grande taille (à saturation de la mémoire ordinateur). ■

5.4 P_2 espace des fonctions continues qui sont quadratiques par morceaux

5.4.1 Base de P_2

Une fonction continue sur $[a, b]$ quadratique (ou parabolique) par morceaux sur la partition \mathcal{T} est une fonction $f_h = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ telle que $f_h(x)$ est quadratique sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On appelle P_2 l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ qui sont quadratiques par morceaux sur $\bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[$.

Une fonction quadratique (parabole) est du type $a + bx + cx^2$ et sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ une telle fonction est déterminée par trois points. On choisit comme point supplémentaire le point milieu :

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

Et on choisit une base sur $[x_{i-1}, x_i]$: les trois fonctions de degré 2 qui valent 1 en un point et 0 sur les deux autres points sont définies par :

$$\begin{aligned} \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \varphi_{i-1}(x) &= \frac{(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_{i-\frac{1}{2}})(x_{i-1} - x_i)} \\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i-1})(x_{i-\frac{1}{2}} - x_i)} \\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \varphi_i(x) &= \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-\frac{1}{2}})} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Il faut prolonger ces fonctions sur tout $]a, b[$ de telle sorte qu'elles soient continues : $\varphi_{i-\frac{1}{2}}$ est prolongée par 0 à l'extérieur de $[x_{i-1}, x_i]$, alors que φ_i est définie par " $\varphi_{(i+1)-1}$ " sur $[x_i, x_{i+1}]$ et par 0 ailleurs (même construction dans l'autre sens pour φ_i). Voir figure 5.4.

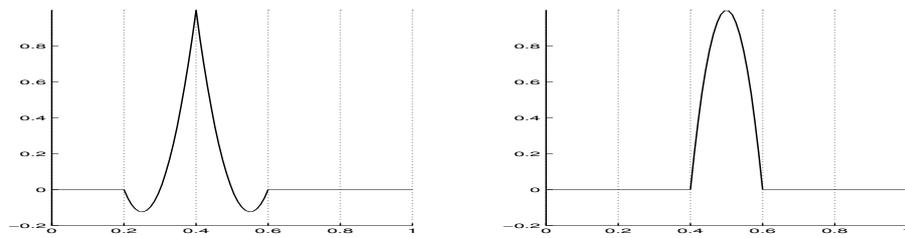


FIGURE 5.4 – Les fonctions de base (continues) φ_3 et $\varphi_{3+\frac{1}{2}}$ sur $]a, b[=]0, 1[$, pour la triangulation $\bigcup_{i=1}^5]\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}[$.

Au total on a défini $2n+1$ points (les $n+1$ points x_i et les n points milieux $x_{i-\frac{1}{2}}$), et $2n+1$ fonctions associées. Et il est immédiat de vérifier que ces $2n+1$ fonctions forment une base de P_2 (exercice).

5.4.2 Approximation L^2 d'une fonction $f \in L^2(]a, b[)$ par une fonction P_2

La démarche est la même que précédemment : soit f une fonction de L^2 qu'on souhaite approximer par une fonction $f_h \in P_2$. On choisit f_h le plus près possible de f au sens de l'énergie (des moindres carrés) : i.e., f_h est la projection de f sur P_2 au sens de $L^2(]a, b[$:

$$f_h \in P_2 \quad \text{caractérisée par :} \quad \forall \varphi \in P_2, \quad (f_h, \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2}$$

i.e., $f - f_h \in P_2^\perp$ au sens L^2 , ou encore avec la base $(\varphi_{\frac{i-1}{2}})_{i=1, \dots, 2n+1}$:

$$\forall i = 1, \dots, 2n+1, \quad (f_h, \varphi_{\frac{i-1}{2}})_{L^2} = (f, \varphi_{\frac{i-1}{2}})_{L^2} \quad (5.22)$$

Et f_h est caractérisée par ses composantes sur sa base. Notons $f_h(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j \varphi_{\frac{j-1}{2}}(x)$ avec les $c_j \in \mathbb{R}$. Alors f_h est connu dès que ses composantes c_j sont connues. Et (5.22) donne :

$$\forall i = 1, \dots, 2n+1, \quad \sum_{j=1}^{2n+1} c_j (\varphi_{\frac{i-1}{2}}, \varphi_{\frac{j-1}{2}})_{L^2} = (f, \varphi_{\frac{i-1}{2}})_{L^2}$$

Donc, notant $f_i = (f, \varphi_{\frac{i-1}{2}})_{L^2}$, les c_j sont solutions du système matriciel :

$$M \cdot \vec{c} = \vec{f} \quad \text{où} \quad M = [(\varphi_{\frac{i-1}{2}}, \varphi_{\frac{j-1}{2}})_{L^2}], \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{2n+1} \end{pmatrix}$$

Il suffit donc d'inverser ce système pour connaître les c_j donc f_h . Attention, les $\varphi_{\frac{i-1}{2}}$ ne sont pas 2 à 2 orthogonales et la matrice M est 5-diagonales.

5.4.3 Approximation $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ par une fonction P_2

La démarche est la même que pour les éléments finis P_1 . Exercice.

5.5 Éléments finis de Lagrange P_k

5.5.1 Définition d'un Élément fini de Lagrange

On peut bien sûr généraliser les paragraphes précédents aux fonctions continues sur Ω qui sont polynomiales de degré k . En vue de la généralisation au cas de \mathbb{R}^n , $n > 1$, on est amené à définir un élément fini en 1-D :

Définition 5.9 Un élément fini de type Lagrange est un triplet (K, Σ, P) se composant de :

1. un intervalle $K = [\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ (compact d'intérieur non vide),
2. un ensemble $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ de N points distincts (degrés de libertés),
3. un espace $P = \text{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ de fonctions définies sur K , de dimension finie N .

Définition 5.10 Pour un élément fini (K, Σ, P) de type Lagrange, on dit que Σ est P -unisolvant si et seulement si :

$$\forall (c_i) \in \mathbb{R}^N, \quad \exists ! p \in P, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad p(a_i) = c_i \quad (5.23)$$

Dans ce cas, l'élément fini est dit de Lagrange.

Définition 5.11 Et on appelle fonctions de base les N fonctions φ_i de P qui satisfont :

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Exemple 5.12 Soit $x_1 > 0$. Le triplet $([0, x_1], \{\frac{x_1}{2}\}, \text{Vect}\{1_{[0, x_1]}\})$ constitué de l'intervalle $[0, x_1]$, du point milieu $\frac{x_1}{2}$ et de l'espace vectoriel constitué des fonctions constantes est un élément fini de Lagrange appelé élément fini P_0 . La fonction de base est la fonction constante = 1. ■

Exemple 5.13 Soit $x_1 > 0$. Le triplet $([0, x_1], \{0, 1\}, \text{Vect}\{(1 - \frac{x}{x_1}), \frac{x}{x_1}\})$ constitué de l'intervalle $[0, x_1]$, des points extrémités 0 et x_1 et de l'espace vectoriel constitué des fonctions affines est un élément fini de Lagrange appelé élément fini P_1 . Les deux fonctions de base ont été explicitement données. ■

Exemple 5.14 Soit $x_1 > 0$. Le triplet $([0, x_1], \{0, \frac{x_1}{2}, x_1\}, \text{Vect}\{\text{fonctions quadratiques}\})$ constitué de l'intervalle $[0, x_1]$, des points 0, $\frac{x_1}{2}$, x_1 et de l'espace vectoriel constitué des fonctions quadratiques est un élément fini de Lagrange appelé élément fini P_2 . Les trois fonctions de base sont données dans un paragraphe précédent. ■

Exemple 5.15 Construire un élément fini P_3 de Lagrange, et donner ses fonctions de base.

(Réponse : sur l'intervalle $[a, b]$ avec les points c et d tels que $a < c < d < b$ on trouvera $\varphi_1(x) = \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$, puis φ_2, φ_3 et φ_4 par permutation circulaire.) ■

De manière générale, étant donné un élément fini (K, Σ, P) , une fonction $p_h \in P$ sera connue dès qu'on connaîtra ses composantes c_j sur la base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N} : p_h(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Et P sera unisolvant dès que :

$$(\forall x \in \Omega, \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) = 0) \implies (c_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N). \quad (5.24)$$

5.5.2 Opérateur d'interpolation Π_K

On se donne un élément fini de Lagrange $E = (K, \Sigma, P)$. Si $v \in C^0(K)$ (fonction continue sur K), alors la propriété d'unisolvance nous dit qu'il existe une unique fonction $p_v \in P$ tel que :

$$p_v(a_j) = v(a_j), \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

cette fonction étant donnée par $p_v(x) = \sum_{i=1}^N c_j \varphi_j(x)$ où $c_j = v(a_j)$ pour tout j , les φ_j étant les fonctions de base.

Définition 5.16 On appelle opérateur de P -interpolation sur Σ l'application :

$$\begin{aligned} \Pi_K : C^0(K) &\longrightarrow P \\ v &\longrightarrow \Pi_K(v) = p_v \end{aligned} \quad (5.25)$$

Et Π_K étant trivialement linéaire, on notera également $\Pi_K(v) = \Pi_K v$.

5.5.3 Base de la méthode des éléments finis et éléments finis C^0

Ayant défini un élément fini, on définira la méthode des éléments finis en associant des éléments finis :

Soit \mathcal{T} est une triangulation de $\Omega =]0, 1[$ en les intervalles $I_i =]x_{i-1}, x_i[$ pour $1 \leq i \leq n$. On se donne n éléments finis $E_i = (\bar{I}_i, \Sigma_i, P_i)$ et on considère la famille d'éléments finis $\bigcup E_i$.

Définition 5.17 On appelle opérateur de P -interpolation sur \mathcal{T} , où interpolé, un opérateur $\Pi_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow P_k$ tel que :

$$\Pi_h(v)|_{K_i} = \Pi_{K_i}(v), \quad \forall K_i \in \mathcal{T} \quad (5.26)$$

Définition 5.18 On se donne un opérateur de P -interpolation Π_h . La famille d'éléments finis $\bigcup (K_i, \Sigma_i, P_i)$ est de classe C^m pour $m \geq 0$ si l'interpolé $\Pi_h v$ choisi est de classe $C^m(\bar{\Omega})$ pour tout $v \in C^m$. Et la famille est dite de classe C^{-1} si l'interpolé $\Pi_h u$ est P_0 par morceaux.

Exemple 5.19 Vérifier que les éléments finis P_1 et P_2 définis précédemment sont de classe C^0 . Et que l'élément fini P_0 est de classe C^{-1} . ■

Une fonction $\Pi_h(v)$ est entièrement déterminée si on connaît une base (de fonctions) de $\Pi_h(C^0(\Omega))$. Une telle base de fonctions est donnée par raccordement C^m des fonctions de base sur chaque élément fini.

Exemple 5.20 Pour les éléments finis P_0 , il n'y a pas de condition de raccordement, et donc les fonctions de base de $\Pi_h(C^0(\Omega))$ sont les fonctions indicatrices $1_{]x_{i-1}, x_i[}$. ■

Exemple 5.21 Pour les éléments finis P_1 : sur chaque élément on a défini deux fonctions affines de base. Sur deux éléments adjacents, $K_{i-1} =]x_{i-1}, x_i[$ et $K_i =]x_i, x_{i+1}[$, l'interpolé d'une fonction continue f qui est nulle à l'extérieur de ces deux éléments (i.e. nulle sur $\mathbb{R} - [x_{i-1}, x_{i+1}]$) doit être une fonction continue. Et la fonction $\Pi_h f$ ne peut être que combinaison linéaire des fonctions $\varphi_{x_i, K_{i-1}}$ (2ième fonction de base sur K_{i-1}) et φ_{x_i, K_i} (1ère fonction de base sur K_i), toutes les autres fonctions de base étant nulles en tout point autre que x_i :

$$\Pi_h f(x) = \alpha \varphi_{x_i, K_{i-1}}(x) + \beta \varphi_{x_i, K_i}(x)$$

Ici les fonctions de base $\varphi_{x_i, K_{i-1}}$ et φ_{x_i, K_i} on été prolongées par 0 à l'extérieur respectivement de K_{i-1} et K_i . De la continuité de $\Pi_h f$ on déduit que $\alpha = \beta$. En effet, $\Pi_h f(x_i-) = \alpha$ et $\Pi_h f(x_i+) = \beta$.

Et on retrouve les fonctions annoncées en début de chapitre, à savoir les fonctions chapeaux (voir paragraphe 5.3.1). Et ces fonctions chapeaux forment une base de $\Pi_h(C^0)$. ■

Exemple 5.22 Procédant de même, montrer que pour les éléments finis P_2 , on retrouve les fonctions de base de $\Pi_h(C^0)$ données paragraphe 5.4.1. ■

5.6 Approximation de problèmes elliptiques aux limites du second degré en dimension 1

5.6.1 Avec conditions aux limites de Dirichlet

Le problème Soit le problème de Dirichlet homogène suivant, sur un intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(]a, b[) : \\ \int_a^b \chi(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b \mu(x) u(x) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx \end{array} \right. \quad (5.27)$$

pour $f \in L^2(]a, b[)$ et χ et μ deux fonctions bornées sur $]a, b[$. Ce problème s'interprète comme trouver $u \in H_0^1(]a, b[)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\chi(x) \frac{du(x)}{dx}) + \mu(x) u(x) = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{array} \right. \quad (5.28)$$

les conditions aux limites étant essentielles, contenues dans la définition de l'espace $H_0^1(]a, b[)$. Les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites dès que par exemple χ et μ sont des fonctions bornées sur $]a, b[$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \quad \forall x \in]a, b[, \quad \alpha \leq \chi(x) \leq \beta, \\ \forall x \in]a, b[, \quad \mu(x) \geq 0, \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Si on ne connaît pas de solution analytique à ce problème, on cherche une solution approchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que, pour tout } v_h \in V_h : \\ \int_a^b \chi(x) u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_a^b \mu(x) u_h(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \end{array} \right. \quad (5.30)$$

où V_h est un sous espace de $H_0^1(]a, b[)$ de dimension finie. La conformité $V_h \subset H_0^1(]a, b[)$ indique que le théorème de Lax-Milgram est satisfait dans V_h et donc que ce problème approché est bien posé.

Approximation par éléments finis P_1 et problème matriciel associé

On partitionne l'intervalle $[a, b]$: $[a, b] = \bigcup_{i=1}^n]x_{i-1}, x_i[$ où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On cherche une solution dans l'espace P_1 : on prend la base $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n-1}$ des fonctions affines par morceaux et continues sur $[a, b]$ définies par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) et donnée dans le paragraphe 5.3.1 (les fonctions chapeaux).

Ici on ce n'est pas P_1 qui nous intéresse, mais le sous-espace de P_1 donné par $V_h = P_1 \cap H_0^1(\Omega)$ (les fonctions de P_1 qui s'annulent au bord). Et il est immédiat de voir que cet espace V_h est engendré par les $n-1$ fonctions $(\varphi_i)_{i=1, n-1}$.

Pour connaître $u_h \in V_h$ solution de (5.30) il suffit de connaître ses composantes $u_h^j \in \mathbb{R}$ sur la base $(\varphi_j)_{j=0, \dots, n-1}$:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} u_h^i \varphi_i(x), \quad \forall x \in]a, b[\quad (5.31)$$

Sa dérivée est donnée par, sur $]a, b[$:

$$u_h'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} u_h^i \varphi_i'(x) \quad (5.32)$$

On a un problème à $n-1$ inconnues les $u_h^j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, \dots, n-1$, qui est résolu à l'aide des $n-1$ équations indépendantes données par (5.30) où v_h est choisi égal à φ_i pour $i = 1, \dots, n-1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que, pour tout } i = 1, \dots, n-1 : \\ \int_a^b \chi(x) u_h'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_a^b \mu(x) u_h(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \end{array} \right. \quad (5.33)$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u_h^j)_{1 \leq j \leq n-1} \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que, pour tout } i = 1, \dots, n-1 : \\ \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_a^b \chi(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_a^b \mu(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \right) u_h^j = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Sous forme matricielle cela s'écrit : trouver $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{h1} \\ \vdots \\ u_{hn-1} \end{pmatrix}$ tel que :

$$A \cdot \vec{u} = \vec{f} \quad (5.35)$$

où $A = [a_{ij}]$ et $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_a^b \chi(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_a^b \mu(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx, & i, j = 1, \dots, n-1 \\ f_i &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx, & i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Il reste maintenant à résoudre le système $(n-1) * (n-1)$ matriciel $A \cdot \vec{u} = \vec{f}$.

5.6.2 Avec conditions aux limites de Neumann

Le problème Le problème est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(]a, b[) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(]a, b[) : \\ \int_a^b \chi(x) u'(x) v'(x) dx + \int_a^b \mu(x) u(x) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx + g(b)v(b) - g(a)v(a) \end{array} \right. \quad (5.37)$$

pour $f \in L^2(]a, b[)$. Ce problème s'interprète comme : trouver $u \in H^1(]a, b[)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\chi(x) u'(x)) + \mu(x) u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a, b[\\ u'(a) = g(a), \quad u'(b) = g(b) \quad (\text{condition aux limites}) \end{array} \right. \quad (5.38)$$

les conditions aux limites étant naturelles, provenant de l'intégration par parties. Les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites dès que par exemple χ et μ sont des fonctions continues sur $[a, b]$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \quad \forall x \in]a, b[, \quad \alpha \leq \chi(x) \leq \beta, \\ \exists \alpha_0 > 0, \quad \forall x \in]a, b[, \quad \mu(x) \geq \alpha_0. \end{array} \right. \quad (5.39)$$

(On ne peut pas se contenter de $\mu(x) \geq 0$, sinon le problème n'est pas elliptique (ou coercif) dans $H^1(]a, b[)$.)

Si on ne connaît pas de solution analytique à ce problème, on cherche une solution approchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que, pour tout } v_h \in V_h : \\ \int_a^b \chi(x) u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_a^b \mu(x) u_h(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \end{array} \right. \quad (5.40)$$

où V_h est un sous-espace de $H^1(]a, b[)$ de dimension finie.

Approximation par éléments finis P_1 et problème matriciel associé

On se place dans $V_h = P_1$. Pour connaître $u_h \in V_h$ solution de (5.40) il suffit de connaître ses composantes $u_h^j \in \mathbb{R}$ sur la base $(\varphi_j)_{j=0,\dots,n}$:

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^n u_h^i \varphi_i(x), \quad \forall x \in]a, b[\quad (5.41)$$

On a un problème à $n + 1$ inconnues les $u_h^j \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, \dots, n$, qui est résolu à l'aide des $n + 1$ équations indépendantes données par (5.40) où v_h est successivement remplacé par les φ_i pour $i = 0, \dots, n$. On obtient ainsi le système à résoudre :

$$A \cdot \vec{u} = \vec{f}$$

où $A = [a_{ij}]$ et $\vec{f} = (f_i)$ sont donnés comme pour le problème de Dirichlet mais avec cette fois les indices i et j qui varient de 0 à n .

5.7 Remarques

5.7.1 Convergence ponctuelle

Dans le cas 1-D, on a un résultat remarquable (et exceptionnel) : pour le problème de Dirichlet « $-u'' = f$ » avec C.L. de Dirichlet homogène, la solution approchée $u_h \in P_1$ vérifie $u_h(x_i) = u(x_i)$. (Noter qu'en 1-D les fonctions $u \in H^1(\Omega)$ sont continues, et donc la valeur ponctuelle $u(x_i)$ a un sens, et ce n'est plus vrai dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$.)

En effet, au sens des distributions on a :

$$\langle u_h', \varphi_i' \rangle = -\langle f, \varphi_i \rangle = \langle u', \varphi_i' \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

ce qui donne au sens des distributions (définition de la dérivation au sens $\mathcal{D}'(\Omega)$) :

$$\langle u_h, \varphi_i'' \rangle = \langle u, \varphi_i'' \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

avec $\varphi_i'' = \frac{1}{h}\delta_{x_{i-1}} - \frac{1}{2h}\delta_{x_i} + \frac{1}{h}\delta_{x_{i+1}}$ (calcul immédiat). Ce qui donne effectivement $R \cdot \vec{c} = R \cdot \vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur de composantes $u(x_i)$, et donc $\vec{c} = \vec{u}$.

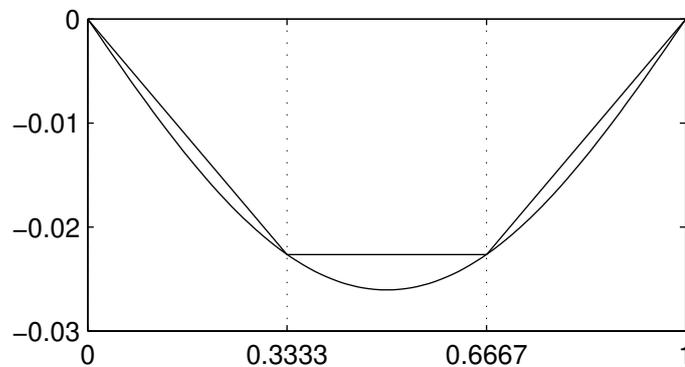


FIGURE 5.5 – Solution approchée $u_h \in P_1 \cap H_0^1(]0, 1])$ de $-u'' = -2$ avec $u(0) = u(1) = 0$. La solution analytique u est connue et vaut $u = x(x-1)$.

5.7.2 Approximation numérique des intégrales

Pour des fonctions χ , μ et f quelconques, on ne peut pas trouver la valeur exacte des intégrales définissant a_{ij} et f_i . On utilise alors une approximation numérique. On renvoie à des ouvrages tels que ‘Analyse numérique pour ingénieurs’ d’André Fortin [5], où au poly de première année (www.isima.fr/leborgne).

5.7.3 Assemblage

Le calcul des a_{ij} et f_i se fait usuellement, lors de l'écriture du programme de résolution, par assemblage des intégrales élémentaires faciles à calculer $\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\cdot) dx$ pour $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}\chi_{k-\frac{1}{2},i,j} &= \int_{x=x_{k-1}}^{x_k} \chi(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \\ \mu_{k-\frac{1}{2},i,j} &= \int_{x=x_{k-1}}^{x_k} \mu(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \\ f_{k-\frac{1}{2},i} &= \int_{x=x_{k-1}}^{x_k} f(x) \varphi_i(x) dx\end{aligned}\tag{5.42}$$

et ce uniquement lorsque $i = j$ ou $i = j \pm 1$, et si $k = i$ ou j ou $k - 1 = i$ ou j , sinon les intégrales sont nulles. On effectue ensuite l'assemblage (on assemble les termes élémentaires) :

$$\begin{aligned}a_{ij} &= \sum_{k=1}^n \chi_{k-\frac{1}{2},i,j} + \mu_{k-\frac{1}{2},i,j} \\ f_i &= \sum_{k=1}^n f_{k-\frac{1}{2},i}\end{aligned}\tag{5.43}$$

ce bien sûr en ne sommant que sur les termes non nuls a priori. L'algorithme typique d'assemblage consiste à calculer les :

$$\begin{aligned}a_{ij}(k) &= \chi_{k-\frac{1}{2},i,j} + \mu_{k-\frac{1}{2},i,j} \\ f_i(k) &= f_{k-\frac{1}{2},i}\end{aligned}\tag{5.44}$$

et de sommer : $a_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ij}(k)$ et $f_i = \sum_{k=1}^n f_i(k)$.

Pratiquement, on fait le changement de variable permettant de se ramener à l'intervalle $]0,1[$: avec $t = \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} = t(x)$, i.e. $x = (x_k-x_{k-1})t+x_{k-1} = x(t)$:

$$\begin{aligned}f_{k-\frac{1}{2},i} &= \int_{x=x_{k-1}}^{x_k} f(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{t=0}^1 f((x_k-x_{k-1})t+x_{k-1}) \varphi_i((x_k-x_{k-1})t+x_{k-1}) (x_k-x_{k-1}) dt \\ &= (x_k-x_{k-1}) \int_{t=0}^1 f((x_k-x_{k-1})t+x_{k-1}) \widehat{\varphi}_i(t) dt\end{aligned}$$

où $\widehat{\varphi}_i(t)$ est la fonction de base sur $]0,1[$ correspondant à φ_i : $\widehat{\varphi}_i(t) = \varphi_i(x(t))$. Par exemple, si on prend des éléments P_1 , les fonctions de base sont les fonctions chapeaux, et il n'y aura que 2 fonctions de base à prendre en compte :

$$\widehat{\varphi}_1(t) = 1 - t \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_2(t) = t$$

D'où l'algorithme d'assemblage pour le membre de droite par exemple :

```
% subroutine d'assemblage du membre de droite
% F = vecteur membre de droite
% f(x) = fonction donnée du problème
% nel= nombre d'éléments (intervalles ou triangles ou de mailles en général)
% k = numéro repérant l'intervalle (ou la maille) qu'on regarde
% x1 = absmin(k) : si k=]x1,x2[
% ix1 = numéro du point x1 = k, si la numérotation va de 1 à nt+1
% x2 = absmax(k) : si k=]x1,x2[
% ix2 = numéro du point x2 = k+1, si la numérotation va de 1 à nt+1
% integ1(g) = intégrale de la fonction g sur ]0,1[
% phibase1(t)=1-t
% phibase2(t)=t
```

```

F=0          %initialisation de F à 0
for k=1:nel  % on parcourt les éléments (intervalles)
    x1 = absmin(k)
    ix1 = k
    x2 = absmax(k)
    ix2 = k+1
    g1(t) = (x2-x1)*f((x2-x1)t+x1)*phibase1(t)
    g2(t) = (x2-x1)*f((x2-x1)t+x1)*phibase2(t)
    F(ix1) = F(ix1)+integ(g1)    % on ajoute le terme correspondant à la
    F(ix2) = F(ix2)+integ(g2)    % fonction de base du noeud ix1 ou ix2.
end

```

6 * Exemple d'éléments finis généraux : ceux de classe C^1

Les éléments finis de Lagrange ne sont pas les seuls éléments finis. Heureusement, car les éléments finis de Lagrange ne sont pas toujours adaptés au problème à traiter. On s'intéresse ici uniquement au cas 1-D, le cas n -D procédant de la même démarche.

6.1 Une motivation : problème elliptique de degré 4

Ce cours est basé sur la résolution de problème elliptique de degré 2, i.e. l'opérateur considéré est un opérateur différentiel dont les plus hauts termes de dérivation sont des dérivées d'ordre 2.

Cependant, le théorème de Lax–Milgram est applicable pour des opérateurs différentiels d'ordre quelconque, à partir du moment où les hypothèses sont vérifiées. D'ailleurs, ce théorème ne fait pas intervenir explicitement d'opérateurs différentiels !

Ainsi on peut traiter des problèmes de type plaques encastrées :

$$-\Delta^2 u = f, \quad u|_{\Gamma} = 0 = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma},$$

où $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ est un opérateur d'ordre 4, appelé bilaplacien. La formulation variationnelle est immédiate : par intégration par parties on obtient immédiatement :

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v : v|_{\Gamma} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma}.$$

Si on cherche $u \in V$ où $V = H^2(\Omega) \cap \{v : v|_{\Gamma} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma}\}$, on montre que V est un Hilbert pour le produit scalaire $(u, v)_b = (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$, Cet Hilbert étant noté $H_0^2(\Omega)$. En particulier, on pourra appliquer le théorème de Lax–Milgram dans cet Hilbert.

Maintenant, si on cherche une solution approchée conforme, il faut trouver un sous espace de dimension finie $V_h \subset V$. Or les éléments finis de type Lagrange P_1 , P_2 ou P_3 ne sont pas inclus dans V : des dérivées secondes sont des masses de Dirac et donc ne sont pas des fonctions, donc pas des fonctions L^2 , donc pas des éléments de $H^2(\Omega)$.

Il faut alors définir des éléments finis de classe C^1 .

6.2 Généralisation de la notion de degré de liberté

La notion de degrés de libertés est triviale quand pour l'élément fini (K, Σ, P) les éléments de Σ sont constitués de N points distincts : il y a N degrés de libertés, un pour chaque point.

Le problème est qu'on peut préférer imposer des conditions sur les fonctions $p \in P$ qui ne soient pas des valeurs ponctuelles mais des dérivées : c'est une manière très simple d'obtenir des éléments finis de classe C^1 , permettant ainsi d'avoir des conditions de raccordement C^1 'naturelles' entre les éléments finis. Et dans ce cas, la seule considération de valeurs ponctuelles n'est guère pratique.

Par exemple, au point a_1 on peut vouloir imposer à la fois $p(a_1)$ et $p'(a_1)$. La notion de points ne convient plus pour définir un degré de liberté : on fait jouer à a_1 deux rôles : à a_1 est associé deux degrés de liberté.

Ce qui fait que pour être général, on ne définit pas Σ comme un ensemble de points sur lesquels sont définies les fonctions de P , mais on définit Σ comme un ensemble de fonctionnelles agissant sur les fonctions de P .

Généralisation de la définition des éléments finis dans le cas Lagrange. Dans le cas des éléments finis de Lagrange, on définit simplement :

$$K =]a, b[, \quad \Sigma = \{\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_N}\}, \quad P = \{\text{fonctions polynomiales de degré } N-1\}.$$

Et on trouve $\delta_{a_i}(p) = p(a_i)$ et ainsi le caractère unisolvant définit plus haut sous la forme plus générale :

Définition 6.1 Pour un élément fini (K, Σ, P) , on dit que Σ est P -unisolvant si et seulement si :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^N, \quad \exists ! p \in P, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \delta_{a_i}(p) = \alpha_i \quad (6.1)$$

Et on retrouve immédiatement le cas des éléments finis de type Lagrange.

Exemple d'éléments finis non Lagrange.

Exemple 6.2 Dans le cas où on souhaite connaître les dérivées aux bords, on définit par exemple :

$$K =]a, b[, \quad \Sigma = \{\delta_a, \delta'_a, \delta_b, \delta'_b\}, \quad P = \{\text{fonctions polynomiales de degré 3}\}.$$

Ainsi on dispose de 4 degrés de liberté, les 4 fonctionnelles de Σ . Autrement dit, au point a est associé deux degrés de liberté, ainsi qu'au point b . (Exercice facile : vérifier le caractère unisolvant.)

(Les éléments finis de Lagrange ne permettent pas de considérer ce cas.) ▀

6.3 Exemple d'éléments finis de classe C^1

On considère une triangulation \mathcal{T} d'un intervalle $\Omega =]a, b[$, et la famille d'éléments finis $\bigcup E_i$, chaque $E_i = (K_i, \Sigma_i, P_i)$ étant constituée d'éléments finis de l'exemple 6.2.

6.3.1 Construction d'un élément fini

Les 4 fonctions de base d'un élément fini sont données par, sur un segment $K = [c, d]$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(c) &= 1, & \varphi_2(c) &= 0, & \varphi_3(c) &= 0, & \varphi_4(c) &= 0, \\ \varphi'_1(c) &= 0, & \varphi'_2(c) &= 1, & \varphi'_3(c) &= 0, & \varphi'_4(c) &= 0, \\ \varphi_1(d) &= 0, & \varphi_2(d) &= 0, & \varphi_3(d) &= 1, & \varphi_4(d) &= 0, \\ \varphi'_1(d) &= 0, & \varphi'_2(d) &= 0, & \varphi'_3(d) &= 0, & \varphi'_4(d) &= 1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Et on rappelle que si un polynôme p est tel qu'en un point x_0 on ait $p(x_0) = p'(x_0) = 0$, alors x_0 est une racine double et ce polynôme est de la forme $p(x) = (x - x_0)^2 q(x)$. Donc φ_1 et φ_2 , de degré 3, sont de la forme :

$$\varphi_1(x) = (x - d)^2(a_1x + b_1), \quad \varphi_2(x) = (x - c)(x - d)^2 a_2,$$

Et on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - d)^2}{(c - d)^2} \left(2 \frac{x - c}{d - c} + 1 \right), & \varphi'_1(x) &= \frac{6(x - d)(x - c)}{(d - c)^3}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - d)^2}{(c - d)^2} (x - c), & \varphi'_2(x) &= \frac{(x - d)(3x - 2c - d)}{(d - c)^2}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

d'où $\varphi_3, \varphi'_3, \varphi_4$ et φ'_4 en inversant c et d , cf. (6.2).

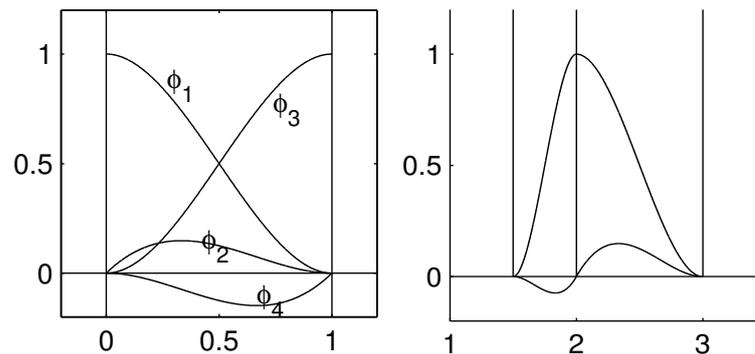


FIGURE 6.1 – Les fonctions de base P_3 sur l'élément fini $(]0, 1[, \Sigma, P_3)$, et des fonctions de base P_3 de $\Pi_h(C^1)$ correspondant à une partition contenant $]1.5, 2[\cup]2, 3[$.

Exercice 6.3 Montrer que sur l'intervalle $[c, d] = [0, 1]$ un calcul direct donne :

$$\widehat{\varphi}_1(x) = (x - 1)^2(2x + 1), \quad \widehat{\varphi}_2(x) = (x - 1)^2x, \quad \widehat{\varphi}_3(x) = x^2(3 - 2x), \quad \widehat{\varphi}_4(x) = x^2(x - 1),$$

où $\widehat{\varphi}_3(x) = \widehat{\varphi}_1(1 - x)$ (symétrie par rapport à l'axe vertical $x = \frac{1}{2}$) et $\widehat{\varphi}_4(x) = -\widehat{\varphi}_2(1 - x)$ (on commence par $\widehat{\varphi}_2$ transformée en $\alpha(y) = -\widehat{\varphi}_2(-y)$ par symétrie autour de l'origine avec $y \in [-1, 0]$ puis on translate pour obtenir $\varphi_4(x) = \alpha(x - 1)$ avec $x \in [0, 1]$).

Puis que sur un intervalle $]c, d[$ quelconque, on doit trouver :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \widehat{\varphi}_1\left(\frac{x-c}{d-c}\right), & \varphi_3(x) &= \widehat{\varphi}_3\left(\frac{x-c}{d-c}\right), \\ \varphi_2(x) &= (d-c)\widehat{\varphi}_2\left(\frac{x-c}{d-c}\right), & \varphi_4(x) &= (d-c)\widehat{\varphi}_4\left(\frac{x-c}{d-c}\right).\end{aligned}$$

(Par exemple $\varphi_2'(x) = \widehat{\varphi}_2'\left(\frac{x-c}{d-c}\right)$ et en $x=c$ la pente vaut 1.) ▀

6.3.2 Construction d'un maillage éléments finis de classe C^1

On définit alors les éléments finis de classe C^1 par la réunion d'éléments finis donnés dans l'exemple 6.2, et tels que $\Pi_h(C^1) \subset C^1$. Voir figure 6.1 pour les graphes des fonctions de base d'un élément fini de ce type et pour les fonctions de base de $\Pi_h(C^1)$.

7 Introduction aux éléments finis 2-D

Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f \in L^2(\Omega)$ quelconque, il n'existe pas en général de solution analytique au problème de trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

On cherche alors une solution approchée u_h dans un espace de dimension finie $V_h \subset H^1(\Omega)$ (solution qu'on puisse programmer) telle que u_h soit 'proche' de u .

On va approximer u par une fonction u_h définie simplement par morceaux sur une partition de Ω . On donne ici les cas simples où une partition de Ω est constituée de triangles ou de quadrangles.

On définit alors également l'espace P_0 des fonctions constantes par morceaux sur chaque triangle, espace dont une base est immédiate (constituée des fonctions qui sont nulles partout sauf sur un triangle où elles valent 1). Ces fonctions P_0 ne sont pas suffisantes pour un problème à résoudre de type laplacien.

On s'intéresse maintenant à des bases moins immédiates à visualiser.

7.1 Triangles et base de P_1

On suppose que $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i$ forme une partition de Ω , les K_i étant des triangles du type de la figure 7.1. Et N_{el} désigne le nombre d'éléments K_i de la partition.

L'espace P_1 est constitué des fonctions continues sur Ω et affines par morceaux, i.e., affines sur chaque triangle K_i . Localement, i.e. dans un triangle K_i , une telle fonction est donc de la forme, si $\vec{x} = (x, y)$:

$$f_h(\vec{x}) = ax + by + c$$

Définition 7.1 On appelle noeud un point sommet d'un triangle (de manière générale un noeud est un élément du treillis, voir paragraphe 9.3.2).

Donnons une base simple de P_1 : celle constituée des fonctions chapeaux : elles valent 1 en un noeud et 0 sur les autres noeuds, voir figure 7.1.

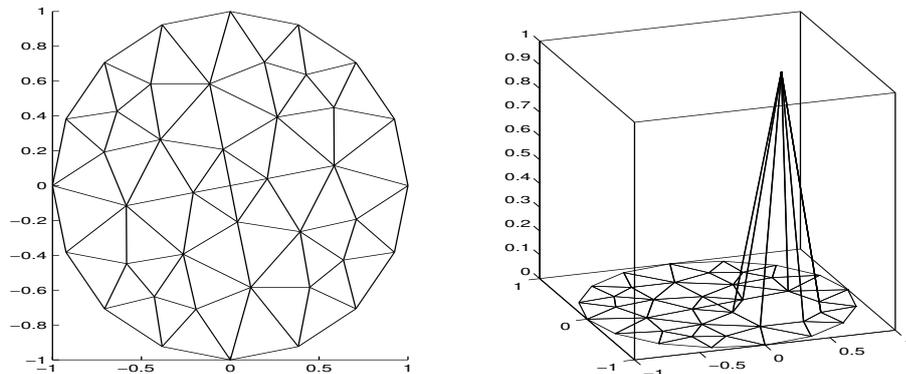


FIGURE 7.1 – Une fonction chapeau en 2-D

Il est clair que, si N est le nombre de noeuds, les N fonctions chapeaux ainsi construites forment une base de P_1 : c'est une famille libre car $\sum_j c_j \varphi_j = 0$, i.e. $\sum_j c_j \varphi_j(\vec{x}) = 0$ pour tout \vec{x} , implique $c_i = 0$ (prendre $\vec{x} = \vec{x}_i$ position d'un noeud), et c'est une famille génératrice car toute fonction $f_h \in P_1$ s'écrit :

$$f_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(\vec{x}) \quad \text{où} \quad c_i = f_h(\vec{x}_i)$$

(le membre de droite est une combinaison linéaire de fonctions continues qui sont affines par morceaux, et est bien une fonction continue qui est affine par morceaux.)

Remarque 7.2 Par trois points distincts passe un seul plan : soit f_h une fonction P_1 : localement, i.e. dans un triangle K_i , f_h s'écrit $f_h(\vec{x}) = ax + by + c$. Si on connaît ses valeurs $f_1 = f_h(\vec{x}_1)$, $f_2 = f_h(\vec{x}_2)$ et $f_3 = f_h(\vec{x}_3)$ aux sommets \vec{x}_1 , \vec{x}_2 et \vec{x}_3 d'un triangle K , alors a , b et c sont solutions du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

très rapide à résoudre, et donc f_h est très facile à calculer. ▀

7.2 Triangles et base de P_2

On considère toujours la partition $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i$ de Ω (partition composée de triangles).

L'espace P_2 est constitué des fonctions continues et polynomiales de degré 2 par morceaux, i.e., parabolôïde sur chaque triangle. Localement, i.e. dans un triangle K_i , une telle fonction est de la forme, si $\vec{x} = (x, y)$:

$$f_h(\vec{x}) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

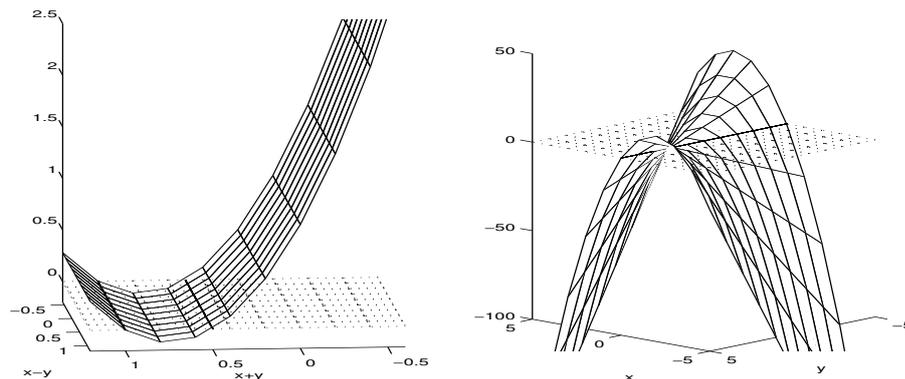


FIGURE 7.2 – La fonction $\varphi(x, y) = 2 * (1 - x - y) * (0.5 - x - y)$ dans les axes tourné de 45° , et la fonction $\psi(x, y) = 4 * x * (1 - x - y)$, dont les restrictions au triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ constitueront deux fonctions de base.

Définition 7.3 On appelle noeud de la triangulation soit un point sommet de triangle soit un point milieu de côté d'un triangle.

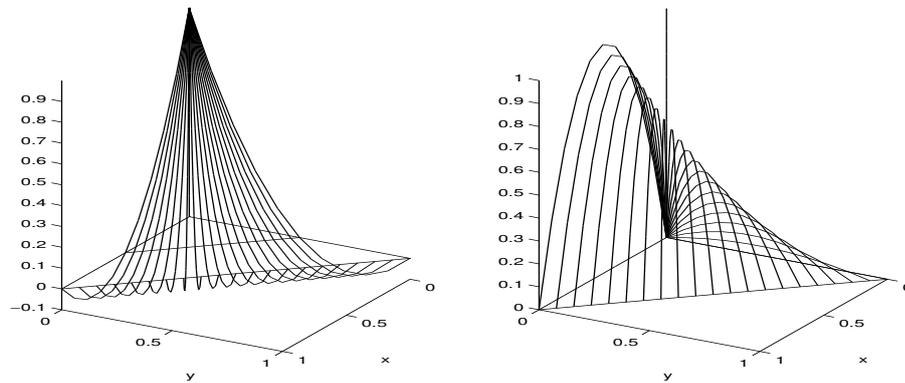
En particulier, si on connaît ses valeurs $f_i = f(\vec{x}_i)$, aux noeuds \vec{x}_i (définissant les 3 sommets et les 3 milieux des cotés du triangle), on connaît f_h . Il suffit pour cela de résoudre un système de 6 équations aux 6 inconnues les a, b, \dots, f . Les \vec{x}_i sont appelés les noeuds.

Donnons une base simple de P_2 : celle constituée des fonctions qui valent 1 en un noeud et 0 sur les autres noeuds, voir figure 7.3.

Il est clair que, si N est le nombre de noeuds, les N fonctions ainsi construites forment une base de P_2 : c'est une famille libre car $\sum_j c_j \varphi_j(\vec{x}) = 0$ pour tout \vec{x} implique $c_i = 0$ (prendre $\vec{x} = \vec{x}_i$ position d'un noeud), et c'est une famille génératrice car toute fonction $f_h \in P_1$ s'écrit :

$$f_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(\vec{x}) \quad \text{où} \quad c_i = f_h(\vec{x}_i)$$

(le membre de droite est une combinaison linéaire de fonctions continues sur Ω quadratiques par morceaux et est donc bien continu sur Ω quadratique par morceaux.)

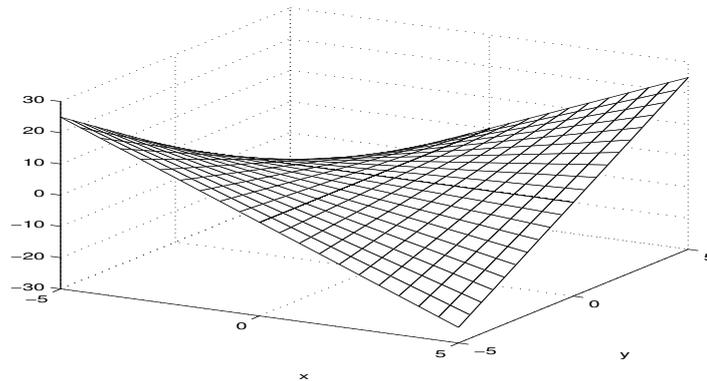
FIGURE 7.3 – Deux fonctions de base P_2 .

7.3 Quadrangles et base de Q_1

Au lieu de considérer une partition de Ω par des triangles, on peut considérer une partition par des quadrangles. Par exemple, sur le carré $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ partitionné en $\bigcup [x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$, on obtient une généralisation naturelle du cas 1-D.

On souhaite choisir une base simple de fonctions continues. Il est naturel de les prendre linéaires sur chaque coté du quadrangle K et de les définir à l'aide des 4 sommets de K . Le plus simple est donc de les prendre bilinéaire sur un quadrangle K (on ne peut pas faire passer un plan par 4 points en général, i.e., on ne peut donc pas choisir de fonctions affines), i.e. de la forme, si $\vec{x} = (x, y)$:

$$f_h(\vec{x}) = a + bx + cy + dxy$$

FIGURE 7.4 – La fonction Q_1 (réglée) $f_h = xy$.

On appelle Q_1 l'ensemble des fonctions continues sur Ω qui sont bilinéaires par morceaux. Et les fonctions qui forment une base de Q_1 sont celles qui valent 1 en un noeud et 0 sur les autres noeuds. Voir figure 7.5.

On vérifie immédiatement que l'ensemble de ces fonctions forment une base de Q_1 .

Exemple 7.4 Sur le carré $[0, 1]^2$, les fonctions de base sont $\varphi_1(x, y) = (1 - x)(1 - y)$, $\varphi_2(x, y) = x(1 - y)$, $\varphi_3(x, y) = xy$ et $\varphi_4(x, y) = (1 - x)y$. ■

7.4 Quadrangles et base de Q_2

Ω est partitionné en quadrangles K , et on veut approcher toute fonction continue par une fonction biquadratique par morceaux sur chaque quadrangle. On note Q_2 l'espace des fonctions biquadratiques par morceaux. Une fonction de Q_2 est de la forme :

$$f_h(\vec{x}) = a + bx + cx^2 + dy + exy + fx^2y + gy^2 + hxy^2 + ix^2y^2$$

On définit les noeuds de Q_2 comme étant les 9 points suivants : les 4 sommets du quadrangle K , les 4 milieux des cotés et le centre (intersection des diagonales). On vérifie que les fonctions Q_2 qui localement sur chaque K valent 1 en un noeud et 0 sur les autres noeuds forment une base de Q_2 .

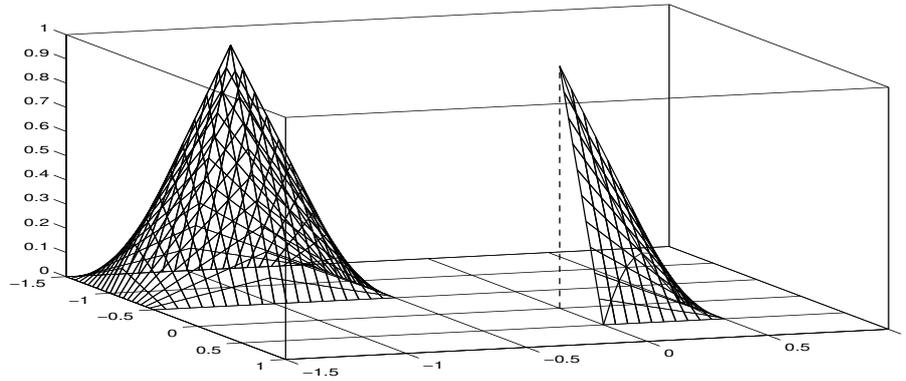


FIGURE 7.5 – Une fonction de base Q_1 (chapeau bilinéaire par morceaux) et $1/4$ d’une fonction de base (restriction à un quadrangle). Ici $\Omega = \text{le carré }]-1.5, 1]^2$ a été partitionné en 25 carrés.

7.5 Résolution de problèmes elliptiques du second degré

7.5.1 Résolution de ‘ $-\Delta u = f$ ’ dans $H_0^1(\Omega)$

Maintenant, le problème (7.1) est équivalent à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$(\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{L^2} = (f, v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (7.2)$$

Soit $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ un sous-espace de dimension finie N . Par exemple, $V_h = P_k \cap H_0^1(\Omega)$ ou $Q_k \cap H_0^1(\Omega)$, pour $k = 1, 2$ (ensembles des fonctions P_k ou Q_k qui s’annulent au bord).

Chercher une solution approchée de (7.2) dans V_h consiste à chercher une fonction $u_h \in V_h$ telle que :

$$(\vec{\nabla} u_h, \vec{\nabla} \varphi_i)_{L^2} = (f, \varphi_i)_{L^2}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (7.3)$$

où les φ_i sont les fonctions de base de V_h . Et chercher $u_h \in V_h$ revient à chercher ses composantes dans la base (φ_i) , i.e., chercher les constantes $(c_j)_{j=1, N} \in \mathbb{R}^N$ telles que :

$$u_h = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j,$$

(ou encore, pour tout $\vec{x} \in \Omega$, $u_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(\vec{x})$). Et par substitution dans (7.3), les c_j sont solutions du système matriciel à N équations et N inconnues :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \sum_{j=1}^N (\vec{\nabla} \varphi_j, \vec{\nabla} \varphi_i)_{L^2} c_j = (f, \varphi_i)_{L^2} \quad (7.4)$$

Ou encore, notant $\vec{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$, le vecteur \vec{c} est solution du système matriciel :

$$R \cdot \vec{c} = \vec{f}$$

où $R = [R_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N}$ la matrice de rigidité, et $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ la donnée sont définis par :

$$R_{ij} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \varphi_j(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i(\vec{x}) dx, \quad f_i = \int_{\Omega} f(\vec{x}) \varphi_i(\vec{x}) dx$$

La résolution de ce système donne \vec{c} , i.e. les c_j , et donc u_h .

Il ‘suffit’ maintenant de prouver que la solution approchée u_h est une ‘bonne’ approximation de la solution u du problème (7.1) ou de son équivalent (7.2).

7.5.2 Résolution des problèmes elliptiques du second ordre

On remplace l’opérateur $-\Delta$ par un opérateur $-\text{div}(A \cdot \vec{\nabla}) + a$, et les conditions de Dirichlet ci-dessus par des conditions au limites adéquat, et on procède de même que dans la section précédente ou que dans le cas des éléments finis en 1-D.

8 Coordonnées barycentriques

8.1 Simplexe et coordonnées barycentriques dans \mathbb{R}^n

8.1.1 Définition d'un n -simplexe (simplexe dans \mathbb{R}^n)

Rappel : un ensemble E est un espace affine ssi, $P \in E$ étant un point, il existe un espace vectoriel \vec{E} tel que $E = P + \vec{E}$ où $P + \vec{E} = \{Q \in E : \exists \vec{e} \in \vec{E}, Q = P + \vec{e}\}$ (le sens de $Q = P + \vec{e}$ est $\overrightarrow{PQ} = \vec{e}$). On dit que E et \vec{E} sont associés, et on pose $\dim E = \stackrel{\text{déf}}{=} \dim \vec{E}$.

Rappel : un sous-ensemble K d'un espace affine \mathcal{A} est convexe ssi pour tous points $A, B \in K$ le segment :

$$[A, B] \stackrel{\text{déf}}{=} \{C \in \mathcal{A} : \exists t \in [0, 1] \text{ t.q. } C = A + t\overrightarrow{AB}\} \quad (8.1)$$

est entièrement dans K .

Rappel : l'enveloppe convexe d'un ensemble est le plus petit convexe contenant cet ensemble (c'est l'intersection de tous les convexes contenant cet ensemble).

Exemple 8.1 Dans \mathbb{R} le plus petit convexe contenant les points (les réels) distincts A_1 et A_2 est le segment $[A_1, A_2]$ (donc l'intervalle $[A_1, A_2]$ si $A_1 < A_2$ et l'intervalle $[A_2, A_1]$ sinon).

Dans \mathbb{R}^2 le plus petit convexe contenant trois points A_1, A_2, A_3 non alignés est le triangle de sommets les trois points.

Dans \mathbb{R}^3 le plus petit convexe contenant quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 non dans un même plan est le tétraèdre de sommets les quatre points. \blacksquare

Notons $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ l'espace vectoriel associé à l'espace affine \mathbb{R}^n . Rappel (faire un dessin) :

- Un hyperplan (vectoriel) dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ de dimension $n-1$.
- Un hyperplan (affine) dans l'espace affine \mathbb{R}^n est un sous-ensemble $H = O + \vec{H}$ de \mathbb{R}^n où $O \in H$ et $\dim \vec{H} = n-1$.

Lemme 8.2 1- Si $P \in O + \vec{H}$, alors $O \in P + \vec{H}$. Et $O + \vec{H} = P + \vec{H}$.

2- Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soit P_1, \dots, P_N dans l'espace affine \mathbb{R}^n , soit $\vec{V} = \text{Vect}\{\overrightarrow{P_1P_j}, j = 1, \dots, N\}$ le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ engendré par les $\overrightarrow{P_1P_j}$. Le sous-espace affine $P_1 + \vec{V}$ est le plus petit espace affine contenant tous les P_j pour $j = 1, \dots, N$.

3- Dans l'espace affine \mathbb{R}^n , les points A_1, \dots, A_{n+1} ne sont pas dans un même hyperplan ssi $(\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_{n+1}})$ est une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$.

Preuve. 1- Soit $O, P \in H$. On a $P \in O + \vec{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \in \vec{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{PO} \in \vec{H} \Leftrightarrow O \in P + \vec{H}$.

Soit $H_O = O + H$ et soit $H_P = P + H$. Si $A \in H_P$, i.e. si $\overrightarrow{PA} \in \vec{H}$, alors $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \in \vec{H}$, donc $\overrightarrow{OA} \in \vec{H}$ car $\overrightarrow{PO} \in \vec{H}$, donc $A \in H_O$, donc $H_P \subset H_O$, et de même $H_O \subset H_P$, d'où l'égalité.

2- On a $P_j = P_1 + \overrightarrow{P_1P_j} \in P_1 + \vec{V}$, donc tous les P_j sont dans $P_1 + \vec{V}$. Et si un autre espace affine $A + \vec{W}$ contient tous les P_j , alors il contient P_1 , donc $A + \vec{W} = P_1 + \vec{W}$ et $\overrightarrow{P_1P_j} \in \vec{W}$, donc $\vec{V} \subset \vec{W}$, donc $P_1 + \vec{V} \subset P_1 + \vec{W}$. Donc $P_1 + \vec{V}$ est le plus petit espace affine contenant les P_j .

3- A_1, \dots, A_{n+1} sont dans $A_1 + \vec{H}$ où $\vec{H} = \text{Vect}\{\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_{n+1}}\}$. Et $\dim \vec{H} > n-1$ ssi les n vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ sont indépendants. \blacksquare

Définition 8.3 Dans l'espace affine \mathbb{R}^n , un ensemble K est un n -simplexe ssi il existe $n+1$ points $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ non situés dans un même hyperplan tels que K est l'enveloppe convexe contenant ces points. Les A_j sont alors appelés les sommets du n -simplexe, et on note $K = (A_1, \dots, A_{n+1})$.

Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$, un sous-ensemble \vec{K} est un n -simplexe ssi il existe n vecteurs $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n+1} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ indépendants tels que \vec{K} est le plus petit convexe contenant les \vec{a}_i pour $i = 2, \dots, n+1$. Les \vec{a}_j sont alors appelés les sommets du n -simplexe, et on note $\vec{K} = (\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n+1})$.

(Donc si $O \in \mathbb{R}^n$, si les $A_i \in \mathbb{R}$ sont définis par $O = A_1$ et $\overrightarrow{OA_i} = \vec{a}_i$ pour tout $i = 2, \dots, n+1$, alors $\vec{K} = (\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n+1})$ est n -simplexe dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ ssi $K = (A_1, \dots, A_{n+1})$ est un n -simplexe dans \mathbb{R}^n .)

Exemple 8.4 Dans \mathbb{R} : un 1-simplexe est un segment (non dégénéré).

Dans \mathbb{R}^2 : un 2-simplexe est un triangle (non dégénéré).

Dans \mathbb{R}^3 : un 3-simplexe est un tétraèdre (non dégénéré). \blacksquare

8.1.2 Définition des coordonnées barycentriques

Dans l'espace affine \mathbb{R}^n on choisit un point O , appelé origine, et dans l'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ on choisit la base canonique notée $(\vec{e}_i^{(n)})_{i=1,\dots,n}$. Ainsi l'espace affine \mathbb{R}^n est muni du repère $(O, (\vec{e}_i^{(n)})_{i=1,\dots,n})$, et un point $P \in \mathbb{R}^n$ sera repéré par son "vecteur position"

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} \stackrel{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i^{(n)}, \quad (8.2)$$

la matrice colonne représentant le vecteur dans la base canonique. On dit aussi que \vec{x} est un point... alors que c'est un vecteur (vecteur bi-point).

Soit un n -simplexe de sommets $A_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n+1$. On note, pour $j = 1, \dots, n+1$:

$$\vec{a}_j = \overrightarrow{OA_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Définition 8.5 Relativement au simplexe considéré, les coordonnées barycentriques d'un point P repéré par le vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OP} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ sont les $n+1$ réels $\lambda_1(\vec{x}), \dots, \lambda_{n+1}(\vec{x})$, notés $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \vec{a}_j = \vec{x}, \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \end{array} \right\}, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \begin{pmatrix} \vec{a}_j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

On a ainsi défini les $n+1$ "fonctions barycentriques" $\lambda_i : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \rightarrow \lambda_i(\vec{x}) \end{array} \right\}$ qui à un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ associe ses $n+1$ coordonnées barycentriques. Et l'isobarycentre du simplexe considéré est le point P repéré par $\vec{x}_{\text{isobarycentre}} = \overrightarrow{OP} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ dont les coordonnées barycentriques sont toutes égales, donc toutes égales à $\frac{1}{n+1}$:

$$\vec{x}_{\text{isobarycentre}} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \vec{a}_j. \quad (8.5)$$

(La définition des λ_i est indépendante du choix de l'origine O choisie, voir corollaire 8.7.)

8.1.3 Ecriture matriciel et calcul des coordonnées barycentriques

Notons, pour $j = 1, \dots, n$ (utilisation implicite de la base canonique $(\vec{e}_i^{(n+1)})_{i=1,\dots,n+1}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$) :

$$\vec{b}_j = \begin{pmatrix} \vec{a}_j \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \\ b_{n+1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (8.6)$$

où on a utilisé (8.3), et donc où $b_{ij} = a_{ij}$ et $b_{n+1,j} = 1$ pour tout i, j , et notons :

$$B = \left(\begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_{n+1} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \vec{a}_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad (8.7)$$

la matrice dont la j -ème colonne est le "vecteur colonne" \vec{b}_j . Ainsi (8.4) s'écrit : Pour $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ donné, trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ t.q.

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \vec{b}_j = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad B \cdot \vec{\lambda}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \vec{\lambda} : \begin{cases} \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}} \\ \vec{x} \rightarrow \vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\vec{x}). \end{cases} \quad (8.8)$$

Proposition 8.6 Si les points A_j pour $j = 1, \dots, n+1$ forment un n -simplexe, alors la matrice B donnée en (8.7) est inversible, et donc le "vecteurs colonnes" $\vec{b}_j \in \overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$ forment une base dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$. Et, pour $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$, les $\lambda_i = \lambda_i(\vec{x})$ sont donnés par

$$\lambda(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{\lambda} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Preuve. On a $\det B = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_{n+1} - \vec{a}_1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, en retranchant la première colonne aux autres. D'où en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\det B = (-1)^n \det \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_2 - \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{n+1} - \vec{a}_1 \end{pmatrix} \right) = (-1)^n \det \left(\begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1 A_2} & \cdots & \overrightarrow{A_1 A_{n+1}} \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\det B \neq 0$, car les vecteurs colonnes sont indépendants (les A_j forment un n -simplexe). \blacksquare

Corollaire 8.7 Les coordonnées barycentriques λ_i d'un P ne dépendent pas de l'origine O du repère : si O et \tilde{O} sont deux points dans \mathbb{R}^n , si $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ et $\tilde{x} = \overrightarrow{\tilde{O}P}$, si $\vec{a}_j = \overrightarrow{OA_j}$ et $\tilde{a}_j = \overrightarrow{\tilde{O}A_j}$ pour $i = 1, \dots, n+1$, si $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n+1}$ donnée par (8.4), et si les $\tilde{\lambda}_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j \tilde{a}_j, \\ 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j, \end{array} \right\}, \quad \text{alors } \tilde{\lambda}_j = \lambda_j, \quad \forall j = 1, \dots, n+1. \quad (8.10)$$

(Ce qui permet de prendre $O = A_1$ pour simplifier.) Et on note aussi, quand $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$:

$$\lambda_j = \lambda_j(\vec{x}) = \lambda_j(P), \quad \forall j = 1, \dots, n+1. \quad (8.11)$$

Preuve. On note \tilde{B} la matrice définie à partir des \tilde{a}_i , cf. (8.7). Donc (8.8) donne $\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j \tilde{b}_j = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\tilde{O}P} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\tilde{O}O} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{OP} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overrightarrow{OO} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \overrightarrow{OA_j} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j) \overrightarrow{OO} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \overrightarrow{OA_j} \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \tilde{b}_j$, et (\tilde{b}_i) est une base, donc $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ pour tout j . \blacksquare

8.1.4 Les fonctions coordonnées barycentriques = les fonctions P_1 de base

Définition 8.8 La fonction "coordonnées barycentriques" $\vec{\lambda}$ (à valeurs vectorielles) est définie par (8.9) :

$$\vec{\lambda} : \begin{cases} \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^{n+1}} \\ \vec{x} \mapsto \vec{\lambda}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (8.12)$$

(Utilisation implicite des bases canoniques de $\overline{\mathbb{R}^n}$ et $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$.)

Les fonctions coordonnées barycentriques sont les $n+1$ fonctions $\lambda_i : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ composantes de $\vec{\lambda}$.

On note aussi $\tilde{\vec{\lambda}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto \tilde{\vec{\lambda}}(P) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\lambda}(\vec{x}) \end{cases}$ quand $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ (grâce à (8.10) et (8.11) : ne dépend pas du choix de O dans \mathbb{R}^n). Et on abuse des notations en notant $\tilde{\vec{\lambda}} = \vec{\lambda}$ (comme en (8.11)).

Proposition 8.9 La fonction $\vec{\lambda}$ est une fonction affine :

$$\vec{\lambda}(\vec{x}) = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{pmatrix} + B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Donc, les fonctions coordonnées barycentriques $\lambda_i : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ sont affines : notant $B^{-1} = {}^{no\acute{t}e} [\gamma_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n+1 \\ j=1, \dots, n+1}}$, pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a, pour tout $i = 1, \dots, n+1$:

$$\lambda_i(\vec{x}) = \gamma_{i1}x_1 + \cdots + \gamma_{in}x_n + \gamma_{i,n+1}. \quad (8.14)$$

Preuve. (8.13) n'est autre que (8.12) (distributivité du produit matriciel). D'où (8.14). \blacksquare

Proposition 8.10 La fonction $\vec{\lambda}$ envoie les sommets \vec{a}_i du simplexe sur les vecteurs de base canonique de $\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$: pour tout $j = 1, \dots, n+1$:

$$\vec{\lambda}(\vec{a}_j) = \vec{e}_j^{(n+1)}, \quad \text{soit} \quad \vec{\lambda}(\vec{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1^{(n+1)}, \dots, \vec{\lambda}(\vec{a}_{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_{n+1}^{(n+1)}. \quad (8.15)$$

Soit, pour tout $i, j = 1, \dots, n+1$:

$$\lambda_i(\vec{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (8.16)$$

Donc, se restreignant au n -simplexe $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+1})$, on a $\lambda_i = \varphi_i$ la i -ème fonction chapeau de base d'un élément fini P_1 sur le simplexe $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+1})$: on a φ_i est affine et $\varphi_i(\vec{a}_j) = \delta_{ij}$.

Preuve. (8.8) donne, pour $j = 1, \dots, n+1$:

$$B \cdot \lambda(\vec{a}_j) = \begin{pmatrix} \vec{a}_j \\ 1 \end{pmatrix} = (\vec{b}_j) = B \cdot \vec{e}_j^{(n+1)} = \text{“colonne } j \text{ de } B” . \quad (8.17)$$

Et B est inversible, d'où $\vec{\lambda}(\vec{a}_j) = \vec{e}_j^{(n+1)}$, i.e. (8.15). D'où $\lambda_i(\vec{a}_j) = \delta_{ij}$, i.e. (8.16). \blacksquare

Et (8.17) indique que B est la matrice de l'endomorphisme de $\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$ qui envoie la base canonique $(\vec{e}_j^{(n+1)})$ vers la base (\vec{b}_j) .

8.1.5 Exemples

Exemple 8.11 Dans \mathbb{R} et deux points distincts A_1 et A_2 , notant $a_1 = A_1 - 0 = A_1$ et $a_2 = A_2 - 0 = A_2$, les coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 d'un $x \in \mathbb{R}$ sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2. \end{cases} \quad (8.18)$$

Ici $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. on a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc pour $x = -1$ on a $\vec{\lambda}(-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit $\lambda_1(-1) = 2$ et $\lambda_2(-1) = -1$. Faire un dessin. Et les coordonnées barycentriques de $x = 2$ sont $\lambda_1(2) = -1$ et $\lambda_2(2) = 2$, soit $\vec{\lambda}(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. \blacksquare

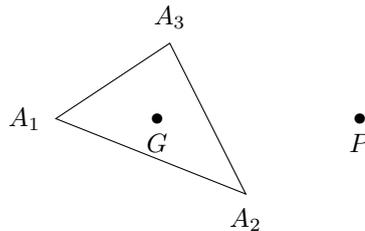


FIGURE 8.1 – Voir exemple 8.12. Triangle de base (A_1, A_2, A_3) . Le point P a pour de coordonnées barycentriques $(\lambda_1(P), \lambda_2(P), \lambda_3(P)) = (-1, 1, 1)$. Plongé dans \mathbb{R}^3 , si on applique une force verticale -1 en A_1 , une force verticale $+1$ en A_2 et en A_3 , alors le point P est le point du plan (Oxy) où on doit “mettre le doigt” pour que le triangle reste en équilibre à l’horizontale. Et G est l’isobarycentre, i.e. le point tel que $\lambda_1(G) = \lambda_2(G) = \lambda_3(G)$, soit donc $(\lambda_1(G), \lambda_2(G), \lambda_3(G)) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: si on met le doigt sous ce point, le triangle reste à l’équilibre quand la même force verticale est appliquée en A_1, A_2 et A_3 .

Exemple 8.12 Dans \mathbb{R}^2 et trois points non alignés A_1, A_2, A_3 , voir figure 8.1, les coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ d'un $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sont donnés par :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13}, \\ x_2 = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23}, \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{cases} \quad (8.19)$$

système de 3 équations aux 3 inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ici $B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. \blacksquare

Exemple 8.13 Dans \mathbb{R}^2 , on considère le simplexe (triangle) formé de $\vec{a}_1 = (1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1)$ et $\vec{a}_3 = (1, 2)$. Les coordonnées barycentrique de $\vec{x} = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$ sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$: on a $\vec{\lambda}(2, 3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (résolution facile de (8.19)). Et les coordonnées barycentriques de $\vec{x} = \vec{a}_1 \in \mathbb{R}^2$ sont trivialement données par $\vec{\lambda}(\vec{a}_1) = \vec{\lambda}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, et plus généralement les coordonnées barycentriques des sommets $\vec{x} = \vec{a}_i$ sont trivialement données par $\vec{\lambda}(\vec{a}_i) = \vec{e}_i$ où $(\vec{e}_i)_{i=1,2,3}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . Par exemple $\vec{a}_2 = 0\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ donne bien $\vec{\lambda}(\vec{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^3$. ■

8.1.6 Interprétation “massive” des coordonnées barycentriques

Les λ_j s’interprètent comme des “masses” (positives ou négatives) mises aux points \vec{x}_j , où ici on suppose que la somme $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_i$ des masses vaut $1 = \frac{100}{100} = 100\%$ (la masse totale vaut 1).

Et \vec{x} est la position du centre de gravité de la distribution des masses λ_j aux points \vec{x}_j .

Si aux points \vec{x}_j on met les masses $m_j > 0$, si la masse totale $m = \sum_i m_i$ est $\neq 1$, alors posant $\lambda_i = \frac{m_i}{m}$ (pourcentage de la masse totale), on retrouve (8.4) sous la forme :

$$m\vec{x} = \sum_{j=1}^{n+1} m_j \vec{a}_j, \quad \text{avec} \quad m = \sum_{j=1}^{n+1} m_j, \quad (8.20)$$

équation usuelle de la position du centre de gravité (ici pour $n+1$ points).

Pour $n+k$ masses relatives λ_j aux points \vec{a}_j , le centre de gravité est toujours défini par $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n+k} \lambda_j \vec{a}_j$. Mais, pour \vec{x} fixé, le problème “trouver les $n+k$ λ_j t.q. $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n+k} \lambda_j \vec{a}_j$ ” admet une infinité de solutions : la famille $(\vec{a}_j)_{j=1, \dots, n+k}$ est liée dans \mathbb{R}^{n+1} (pour $k \geq 2$).

(En probabilité $\lambda_i = p_i$ est la probabilité d’apparition de \vec{a}_i , la probabilité totale est $1 = 100\% = \sum_i p_i$ avec ici $p_i \geq 0$ pour tout i .)

8.1.7 Théorème de Thalès dans \mathbb{R}^2

Si $P \in \mathbb{R}^2$, on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses coordonnées barycentriques.

Pour $c \in \mathbb{R}$, on note :

$$\{\lambda_1 = c\} \stackrel{\text{déf}}{=} \{P \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1(P) = c\} \quad (8.21)$$

l’ensemble des points $P \in \mathbb{R}^2$ dont la première coordonnée barycentrique vaut c .

On note $PQ \stackrel{\text{déf}}{=} \|\overrightarrow{PQ}\|$ la distance euclidienne entre deux points P et Q .

Théorème 8.14 (Théorème de Thalès.) Soit un triangle $(A_1 A_2 A_3)$ non dégénéré.

L’ensemble $\{\lambda_1 = c\}$ est une droite parallèle au côté $(A_2 A_3)$ du triangle, faire un dessin.

Soit B_2 un point sur la droite $(A_1 A_2)$ et B_3 un point sur la droite $(A_1 A_3)$. On a :

$$(B_2 B_3) \text{ est parallèle à } (A_2 A_3) \Leftrightarrow \frac{A_1 B_2}{A_1 A_2} = \frac{A_1 B_3}{A_1 A_3} \Leftrightarrow \frac{A_1 B_2}{A_1 B_3} = \frac{A_1 A_2}{A_1 A_3}. \quad (8.22)$$

Et résultat similaire par permutation circulaire sur les indices 1, 2, 3.

Et l’ensemble $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \lambda_i(\vec{x}) \geq 0, \forall i = 1, 2, 3\}$ est le 2-simplexe (A_1, A_2, A_3) (le triangle).

Preuve. On cherche $\{\lambda_1 = c\}$. Soit $P \in \{\lambda_1 = c\}$. Donc $\overrightarrow{OP} = c\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \lambda_3\overrightarrow{OA_3}$, avec $c + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, donc $\lambda_2 = 1 - c - \lambda_3$, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= c\overrightarrow{OA_1} + (1 - c - \lambda_3)\overrightarrow{OA_2} + \lambda_3\overrightarrow{OA_3} \\ &= \lambda_3(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_2}) + (1 - c)(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \overrightarrow{OA_1} \\ &= \lambda_3\overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{OM_c}, \quad \text{où} \quad \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OA_1} + (1 - c)\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{OA_2} + c\overrightarrow{A_2 A_1}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Donc P est sur la droite $\mathcal{D} = M_{1c} + \text{Vect}\{\overrightarrow{A_2 A_3}\}$ (de vecteur directeur $\overrightarrow{A_2 A_3}$ passant par M_{1c}).

Et si $P \in \mathcal{D}$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_c} + \alpha\overrightarrow{A_2 A_3}$, donc $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + (1 - c)\overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha\overrightarrow{A_2 A_3} = c\overrightarrow{OA_1} + (1 - c)\overrightarrow{OA_2} + \alpha\overrightarrow{OA_3} - \alpha\overrightarrow{OA_2}$, donc $\lambda_1(P) = c$: tous les points de \mathcal{D} vérifient $\lambda_1(P) = c$.

Donc $\{\lambda_1 = c\} = \mathcal{D}$, et c’est une droite parallèle à $(A_2 A_3)$.

En particulier la droite $\{\lambda_1 = 0\}$ est la droite (A_2A_3) puisque $M_0 = A_2$.

Calcul similaire pour l'ensemble $\{\lambda_i = c\}$, $i = 2, 3$: droite parallèle au côté opposé à A_i .

Puis B_2 est sur (A_1A_2) , donc t.q. $\overrightarrow{A_1B_2} = \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2}$ où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Puis B_3 est sur (A_1A_3) , donc t.q. $\overrightarrow{A_1B_3} = \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3}$ où $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Donc $\overrightarrow{B_2B_3} = \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3} - \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} = (\alpha_2 - \alpha_3) \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_2A_3}$.

Donc (B_2B_3) est parallèle à (A_2A_3) ssi $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, i.e. $\alpha_2 = \alpha_3 = \text{noté } \alpha$, i.e. ssi B_2 et B_3 sont donnés par $\overrightarrow{A_1B_2} = \alpha \overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1B_3} = \alpha \overrightarrow{A_1A_3}$, i.e. ssi $\frac{A_1B_2}{A_1A_2} = \frac{A_1B_3}{A_1A_3} (= \alpha)$, i.e. ssi (8.22).

Puis la droite $\{\lambda_1 = 0\}$ passe par le point $M_{10} = A_2$, et la droite $\{\lambda_1 = c\}$ passe par le point $M_{1c} = A_2 + c \overrightarrow{A_2A_1}$ du côté de A_1 par rapport à la droite $\{\lambda_1 = 0\}$ pour tout $c \geq 0$. Donc l'ensemble $\{\lambda_1 \geq 0\}$ est le demi-plan limité par la droite $\lambda_1 = 0$ et contenant le triangle. Même raisonnement pour les droites $\{\lambda_i = c \geq 0\}$: donc l'intersection des trois demi-plans $\{\lambda_i \geq 0\}$ est le triangle (A_1, A_2, A_3) . \blacksquare

8.1.8 Théorème de Thalès dans \mathbb{R}^n

Pour $c \in \mathbb{R}$, on note :

$$\{\lambda_i = c\} = \{P \in \mathbb{R}^n : \lambda_i(P) = c\}. \quad (8.24)$$

l'ensemble des points $P \in \mathbb{R}^n$ dont la i -ème coordonnée barycentrique vaut c .

Théorème 8.15 Pour $c \in \mathbb{R}$ et $i \in [1, n+1]_{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\{\lambda_i = c\}$ est un hyperplan de \mathbb{R}^n .

Soit $i \in [1, n+1]_{\mathbb{N}}$ fixé. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, les hyperplans $\{\lambda_i = c\}$ sont parallèles entre-eux : il sont tous parallèles à $\{\lambda_i = 0\}$.

L'hyperplan $\{\lambda_i = c\}$ passe par les points M_{c_j} , pour tout $j \in [1, n+1]_{\mathbb{N}} - \{i\}$, tels que :

$$\overrightarrow{OM_{c_j}} = \overrightarrow{OA_i} + (1-c) \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{OA_j} + c \overrightarrow{A_jA_i}, \quad (8.25)$$

donc $\frac{\|\overrightarrow{A_jM_{c_j}}\|}{\|\overrightarrow{A_jA_i}\|} = c$: ces points M_{c_j} sont tous situés à une même distance relative de A_i et A_j pour $j \neq i$ (Thalès).

En particulier $\{\lambda_i = 0\}$ est l'hyperplan qui passe par tous les A_j pour $j \neq i$ (car le poids sur A_i est ici nul et A_i n'a donc pas d'influence sur la position du centre de gravité). Et $\{\lambda_i = 1\}$ est l'hyperplan parallèle à $\{\lambda_i = 0\}$ qui passe par A_i .

Preuve. On applique (8.14) : $\{\lambda_i = c\}$ est l'ensemble des \vec{x} t.q. $\gamma_{i1}x_1 + \dots + \gamma_{in}x_n = c - \gamma_{i,n+1}$, i.e. c'est un hyperplan de \mathbb{R}^n perpendiculaire au vecteur $(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in})$, vecteur est indépendant de c : pour i fixé, tous les hyperplans $\{\lambda_i = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, sont bien parallèles.

Point particulier de $\{\lambda_i = c\}$: pour $j \neq i$ fixé on choisit $\lambda_j = 1-c$ et on prend $\lambda_k = 0$ pour tout $k \neq i, j$: on obtient le point particulier $c\vec{a}_i + (1-c)\vec{a}_j = \vec{a}_j + c(\vec{a}_i - \vec{a}_j) \in \{\lambda_i = c\}$. On a obtenu (8.25). \blacksquare

Corollaire 8.16 Si on note K le n -simplexe de sommets les $(A_j)_{j=1, \dots, n+1}$, alors K est l'intersection de tous les demi-espaces $\{\lambda_i \geq 0\}$:

$$K = \{P \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(P) \geq 0, \forall j = 1, \dots, n+1\}. \quad (8.26)$$

Donc K est l'ensemble des points dont toutes les coordonnées barycentriques sont positives.

Preuve. Pour i fixé, on a $\lambda_i(A_i) = 1 \geq 0$ et $\lambda_i(A_j) = 0$ pour $j \neq i$, cf. (8.16), donc tous les A_j (pour $j = 1, \dots, n+1$) sont dans le demi-espace $\{\lambda_i \geq 0\}$, donc tous les points de K sont dans le demi-espace $\{\lambda_i \geq 0\}$ (car K est le plus petit convexe contenant les A_j). C'est vrai pour tout j , donc $K \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} \{\lambda_i \geq 0\} = \{\vec{x} : \lambda_i(\vec{x}) \geq 0, \forall i = 1, \dots, n+1\}$. \blacksquare

Exemple 8.17 Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , l'hyperplan (droite ou plan) de coordonnées barycentriques vérifiant $\lambda_1(\vec{x}) = \frac{1}{3}$ est l'hyperplan parallèle au côté de K opposé à \vec{a}_1 situé à une distance relative $\frac{2}{3}$ de \vec{a}_1 .

Par exemple dans \mathbb{R}^2 , $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + (\frac{2}{3} - \lambda_2)\vec{a}_3 = (\frac{1}{3}\vec{a}_1 + \frac{2}{3}\vec{a}_3) + \lambda_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_3)$ pour λ_2 décrivant \mathbb{R} est sur la droite passant par $\frac{1}{3}\vec{a}_1 + \frac{2}{3}\vec{a}_3$ de direction $\vec{a}_2 - \vec{a}_3$. Faire un dessin.

Par exemple dans \mathbb{R}^3 , $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + (\frac{2}{3} - \lambda_2 - \lambda_3)\vec{a}_4 = (\frac{1}{3}\vec{a}_1 + \frac{2}{3}\vec{a}_4) + \lambda_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_4) + \lambda_3(\vec{a}_3 - \vec{a}_4)$ pour λ_2 et λ_3 décrivant \mathbb{R} est dans le plan passant par $\frac{1}{3}\vec{a}_1 + \frac{2}{3}\vec{a}_4$ engendré par les directions $\vec{a}_2 - \vec{a}_4$ et $\vec{a}_3 - \vec{a}_4$. Faire un dessin. \blacksquare

Remarque 8.18 Le théorème de Carathéodory s'énonce à l'aide des coordonnées barycentriques : "Dans un espace affine de dimension n , l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble F est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de toute famille de $n+1$ points de F ". \blacksquare

Remarque 8.19 La relation (8.14) est en fait une relation qui décrit les fonctions affines $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: ces fonctions sont de la forme :

$$f(\vec{x}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_{n+1}, \quad f \in \text{Vect}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\}, \quad (8.27)$$

espace vectoriel de fonctions de dimension $n+1$, les λ_i étant les fonctions barycentriques (affines).

On vérifie effectivement que f sous la forme (8.27) peut être écrite $f = \alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}$, la relation entre les α_i et les c_i étant donnée par $f(\vec{a}_j) = \alpha_j$, i.e. par $c_1a_{1j} + \dots + c_na_{nj} + c_{n+1} = \alpha_j$ pour $j = 1, \dots, n+1$ qui n'est autre que $B.\vec{c} = \vec{\alpha}$ (et B est inversible).

Et dans le cadre d'un simplexe, la base $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ de l'ensemble des fonctions affines est plus "naturelle" (les fonctions de base λ_i jouent toutes le même rôle) que la base $(\pi_1, \dots, \pi_n, 1_{\mathbb{R}^n})$ qui a permis d'écrire $f = c_1\pi_1 + \dots + c_n\pi_n + c_{n+1}1_{\mathbb{R}^n}$ dans (8.27), où $\pi_i : \vec{x} \rightarrow x_i$ est la projection sur la i -ème coordonnée) et $1_{\mathbb{R}^n} : \vec{x} \rightarrow 1$ la fonction constante égale à 1. \blacksquare

9 Méthode des éléments finis

9.1 Cadre

On se place dans un ouvert Ω de l'espace \mathbb{R}^n (principalement dans \mathbb{R}^2 dans ce cours). On cherchera une approximation u_h d'une fonction scalaire u , et pour cela on considère une partition de Ω en sous-ensembles compacts K_i :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i, \quad \bigcap_{i=1}^{N_{el}} K_i = \emptyset \quad (9.1)$$

(où $N_{el} \in \mathbb{N}$ est le nombre d'éléments K_i .) On supposera de plus les K_i de forme 'simple' : en 2-D se seront soit des triangles, soit des quadrangles. On suppose donc que l'ouvert Ω est polygonal, et s'il ne l'est pas, on ne tiendra pas compte de l'erreur qui consiste à l'approcher par un polygone.

9.2 Définition d'un élément fini (de Lagrange)

On note de manière générique K un des K_i , et on regarde ce qui se passe sur un K donné.

Définition 9.1 Un élément fini de type Lagrange est un triplet (K, Σ, P) se composant de :

1. un compact K d'intérieur non vide,
2. un ensemble $\Sigma = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N\}$ de N points distincts (N degrés de liberté),
3. un espace $P = \text{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ de dimension finie N de fonctions définies sur K .

Remarque 9.2 On renvoie au paragraphe 6.2 pour la notion générale de degrés de liberté. Ici, on ne considérera que le cas où les degrés de libertés sont (identifiables à) des points distincts dans K , ce pour simplifier. \blacksquare

Définition 9.3 Pour un élément fini de type Lagrange (K, Σ, P) , on dit que Σ est P -unisolvant si et seulement si :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^N, \quad \exists ! p \in P, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad p(\vec{a}_i) = \alpha_i. \quad (9.2)$$

Dans ce cas, l'élément fini est dit de Lagrange. Nous ne considérerons que des éléments finis de Lagrange, appelés simplement éléments finis.

Et l'élément fini est donc unisolvant ssi étant donné une base $(\psi_j)_{j=1, N}$ de P :

$$(\forall \vec{x} \in K, \quad \sum_{j=1}^N c_j \psi_j(\vec{x}) = 0) \implies (c_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N). \quad (9.3)$$

Définition 9.4 Les N fonctions φ_i de P qui satisfont :

$$\varphi_i(\vec{a}_j) = \delta_{ij} \quad (9.4)$$

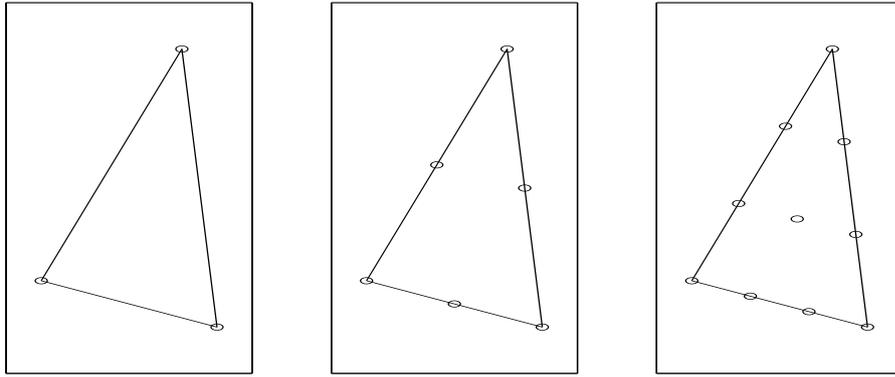
sont appelées fonctions de base de Lagrange de l'élément fini.

Si on dispose de la base de P constituée des fonctions de base, alors le caractère unisolvant est automatiquement vérifié.

Exemple 9.5 Dans \mathbb{R}^2 un élément fini P_0 est constitué du triplet $(K, \Sigma = \{\vec{a}_0\}, P = \text{Vect}\{\varphi_0 \equiv 1\})$: un ouvert triangulaire K , un point intérieur, et l'espace vectoriel des fonctions constantes.

La notation P_0 fait référence à une interpolation par des polynômes de degré 0, les constantes. \blacksquare

Exemple 9.6 Dans \mathbb{R}^2 un élément fini P_1 est constitué du triplet $(K, \Sigma, P) = (K, \Sigma, P_1)$ où : K est le triangle (non dégénéré) de sommets $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, $\Sigma = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ l'ensemble constitué des sommets de K , et $P = \overset{\text{noté}}{=} P_1 = \text{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ l'ensemble des fonctions affines, les φ_i étant les fonctions affines de base, cf. (9.4). \blacksquare

FIGURE 9.1 – Représentation d'un élément fini P_1 , d'un élément fini P_2 et d'un élément fini P_3 .

Exemple 9.7 Dans \mathbb{R}^2 un élément fini P_2 est constitué du triplet $(K, \Sigma, P) = (K, \Sigma, P_2)$ où : K est le triangle (non dégénéré) de sommets $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, $\Sigma = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6\}$ l'ensemble constitué des sommets de K et $\vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6$ sont les points milieux des côtés, et $P = \text{noté } P_2 = \text{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ l'ensemble des fonctions quadratiques, les φ_i étant les fonctions quadratiques de base, cf. (9.4). ■

Exemple 9.8 Un élément fini Q_1 est constitué du triplet $(K, \Sigma, P) = (K, \Sigma, P_2)$ où : K est le quadrangle (convexe non dégénéré) des sommets $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, $\Sigma = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ l'ensemble constitué des sommets de K , et $P = \text{noté } Q_1 = \text{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ l'ensemble des fonctions bilinéaires, les φ_i étant les fonctions bilinéaires de base, cf. (9.4). ■

9.3 Éléments finis simpliciaux

9.3.1 Définition de P_k

On note P_k l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k dans \mathbb{R}^n , i.e. pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$, on a $p \in P_k$ s'il existe des constantes $\alpha_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{R}$ telles que :

$$p(\vec{x}) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (9.5)$$

En particulier, P_0 est l'ensemble des constantes, P_1 l'ensemble des applications affines... On montre par récurrence que la dimension de P_k est $\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$.

Pour $n = 2$, c'est la règle du triangle de Pascal qui dit entre autre que $\dim P_k = 1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \binom{2+k}{k} = \binom{2+k-1}{k-1} + \binom{2+k-1}{k} = \sum_{l=0}^k \binom{l+1}{l}$. Et $\dim P_1 = 3$, et $\dim P_2 = 6$ par exemple (dans \mathbb{R}^2).

Et de manière générale, dans \mathbb{R}^n , $\dim P_k = \sum_{l=0}^k \binom{n-1+l}{l} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$.

9.3.2 Σ_k treillis principal d'ordre k

Étant donné un simplexe K de \mathbb{R}^n défini par ses sommets $(\vec{a}_j)_{j=1, \dots, n+1}$, le treillis principal d'ordre k est l'ensemble des points définis à l'aide des coordonnées barycentriques par :

$$\text{pour } k \geq 1, \quad \Sigma_k = \left\{ \vec{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \vec{a}_j \in \mathbb{R}^n : \lambda_j \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\} \quad (9.6)$$

et :

$$\Sigma_0 = \{\text{l'isobarycentre}\} = \left\{ \vec{x}_0 = \frac{1}{n+1} (\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{n+1}) \right\} \quad (9.7)$$

En particulier, Σ_1 est l'ensemble des sommets \vec{a}_j , et Σ_2 l'ensemble des points constitués des sommets et des milieux des côtés.

Et le nombre de points du treillis est donné par :

$$\text{card} \Sigma_k = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \quad (9.8)$$

(calcul combinatoire.)

Pour l'élément fini P_1 , P_2 ou P_3 , les treillis ont été représentés figure 9.1.

9.3.3 Élément fini n -simplexe de type (k)

Lemme 9.9 (K, Σ_k, P_k) , constitué du simplexe K , du treillis Σ_k et de l'ensemble P_k , est un élément fini (de Lagrange), appelé élément fini n -simplexe de type (k) .

Preuve. Il faut vérifier l'unisolvançe. Puisque $\dim P_k = \text{card} \Sigma_k$, il suffit d'exhiber les fonctions de base. Si $k = 0$ alors $p_0(\vec{x}) = 1$ définit la base (p_0) .

Si $k \geq 1$ alors les points du treillis sont définis par, notant $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \geq 0$:

$$\vec{a}_\mu = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \vec{a}_j \quad \text{où} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 1 \quad (9.9)$$

On leur associe les fonctions :

$$p_\mu(\vec{x}) = C_\mu \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \geq \frac{1}{k}}}^{n+1} \prod_{i=0}^{k\mu_j-1} \left(k\lambda_j(\vec{x}) - \frac{i}{k} \right) \quad (9.10)$$

où les $\lambda_j(\vec{x})$ sont les coordonnées barycentriques de \vec{x} . On vérifie que $p_\mu(\vec{a}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ lorsque la constante de normalisation C_μ vaut $C_\mu = \prod_{j=1}^{n+1} ((k\mu_j)!).$ \blacksquare

9.3.4 Exemples de 2-simplexes de type k , simplexe de référence

On se place dans \mathbb{R}^2 . Le simplexe \widehat{K} de référence est défini par ses sommets $\widehat{a}_1 = (0, 0)$, $\widehat{a}_2 = (1, 0)$ et $\widehat{a}_3 = (0, 1)$.

Tout point $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ de \widehat{K} est donné par ses coordonnées barycentriques $(\lambda_1(\widehat{x}), \lambda_2(\widehat{x}), \lambda_3(\widehat{x}))$ où $0 \leq \lambda_i(\widehat{x}) \leq 1$ et $\lambda_1(\widehat{x}) + \lambda_2(\widehat{x}) + \lambda_3(\widehat{x}) = 1$.

Élément fini P_0 Le 2-simplexe $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_0, P_0)$ de type 0 est appelé élément fini de référence P_0 . Le treillis $\widehat{\Sigma}_0$ est constitué de l'isobarycentre \vec{x}_0 de coordonnées barycentriques $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (i.e. $\vec{x}_0 = \frac{1}{3}\widehat{a}_1 + \frac{1}{3}\widehat{a}_2 + \frac{1}{3}\widehat{a}_3$). Et la fonction de base est la constante $\varphi_0(\widehat{x}) \equiv 1$.

Élément fini P_1 Le 2-simplexe de type 1 $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_1, P_1)$ est appelé élément fini de référence P_1 . Les sommets \widehat{a}_i de \widehat{K} constituent le treillis Σ_1 . Et les fonctions de base sont données par les coordonnées barycentriques :

$$\begin{cases} \varphi_1(\widehat{x}) = \lambda_1(\widehat{x}) = 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 \\ \varphi_2(\widehat{x}) = \lambda_2(\widehat{x}) = \widehat{x}_1 \\ \varphi_3(\widehat{x}) = \lambda_3(\widehat{x}) = \widehat{x}_2 \end{cases} \quad (9.11)$$

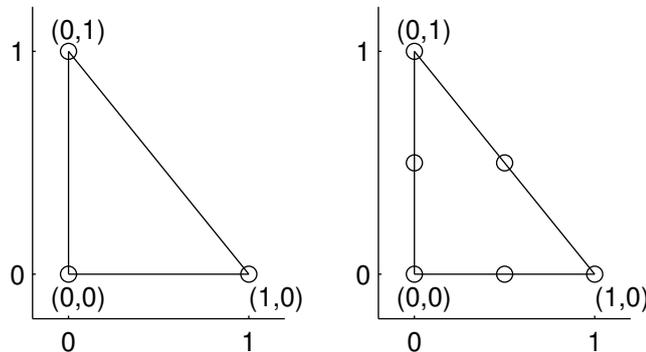


FIGURE 9.2 – Représentation des éléments finis P_1 et P_2 de référence.

Élément fini P_2 Le 2-simplexe de type 2 $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_2, P_2)$ est appelé élément fini de référence P_2 . Les sommets \widehat{a}_i de \widehat{K} et les milieux \widehat{a}_{ij} des \widehat{a}_i et \widehat{a}_j constituent le treillis Σ_2 .

Et les 3 premières fonctions de base sont données par :

$$\varphi_i(\widehat{x}) = 2\lambda_i(\widehat{x}) \left(\lambda_i(\widehat{x}) - \frac{1}{2} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.12)$$

On vérifie qu'elles valent 1 en \widehat{a}_i et 0 sur le côté de \widehat{K} d'équation $\lambda_i(\widehat{x}) \equiv 0$ (côté opposé à \widehat{a}_i) et sur la droite d'équation $\lambda_i(\widehat{x}) \equiv \frac{1}{2}$ (parallèle au côté précédent).

Les 3 autres fonctions de base sont données par :

$$\varphi_{ij}(\widehat{x}) = 4\lambda_i(\widehat{x})\lambda_j(\widehat{x}), \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (9.13)$$

On vérifie qu'elles valent 1 au milieu \widehat{a}_{ij} de \widehat{a}_i et \widehat{a}_j (de coordonnées barycentriques par exemple pour \widehat{a}_{12} valant $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$), et 0 sur les 2 côtés opposés de coordonnées barycentriques $\lambda_i(\widehat{x}) = \lambda_j(\widehat{x}) \equiv 0$.

Autres éléments finis de référence non simplexe

Élément fini Q_1 L'élément fini quadrangulaire $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_1, Q_1)$, où \widehat{K} est le carré $[0, 1]^2$ de sommet formant le treillis $\widehat{\Sigma}_1$ et d'espace de fonctions Q_1 bilinéaires, est appelé élément fini de référence Q_1 . Et les fonctions de base sont données dans la base cartésienne par :

$$\begin{cases} \varphi_1(\widehat{x}) = (1 - \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2) \\ \varphi_2(\widehat{x}) = \widehat{x}_1(1 - \widehat{x}_2) \\ \varphi_3(\widehat{x}) = \widehat{x}_1\widehat{x}_2 \\ \varphi_4(\widehat{x}) = (1 - \widehat{x}_1)\widehat{x}_2 \end{cases} \quad (9.14)$$

Élément fini Q_2 Le 2-simplexe de type 2 $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_2, Q_2)$ où \widehat{K} est le carré $[0, 1]^2$, les points sommets plus les milieux des côtés plus le centre forment le treillis, et Q_2 est l'espace des fonctions biquadratiques, est appelé élément fini de référence Q_2 .

9.4 Famille d'éléments finis

On vient de regarder un élément fini (K, Σ, P) .

On regarde maintenant une réunion $\bigcup_{i=1}^{N_{el}} (K_i, \Sigma_i, P_i)$ d'éléments finis tel que le domaine Ω soit partitionné en $\bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i$. On se limite ici au cas des éléments finis de Lagrange, et les degrés de libertés sont donc assimilés à des points (i.e. les Σ_i sont des ensembles de points).

9.4.1 Introduction

On s'intéresse à une partition $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1, N_{el}} K_i$ où tous les K_i sont associés à des triplets (K_i, Σ_i, P_i) définissant des éléments finis. Le cas simple correspond au cas où tous les éléments finis (K_i, Σ_i, P_i) sont comparables au sens suivant :

On se donne un élément fini de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ et une application bijective bicontinue $F : \widehat{K} \rightarrow K$. Et on construit le triplet (K, Σ, P) par :

$$K = F(\widehat{K}), \quad \Sigma = \{\widehat{a}_i = F(\widehat{a}_i), \widehat{a}_i \in \widehat{\Sigma}\}, \quad P = \{p = \widehat{p} \circ F^{-1}, \widehat{p} \in \widehat{P}\} \quad (9.15)$$

Proposition 9.10 Si $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ est un élément fini et si F est bijective bicontinue alors (K, Σ, P) est un élément fini. Et si les $(\widehat{\varphi}_j)$ sont les fonctions de base de $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$, alors les (φ_j) données par :

$$\varphi_j(\vec{x}) = \widehat{\varphi}_j \circ F^{-1}(\vec{x}) \quad (9.16)$$

sont les fonctions de base de (K, Σ, P) .

Preuve. Il suffit de vérifier que (K, Σ, P) vérifie le critère d'unisolvance. F étant bijective, il vient $\text{card}\Sigma = \text{card}\widehat{\Sigma} = \text{dim}\widehat{P} = \text{dim}P$. Puis les (φ_j) sont indépendantes et de plus constituent les fonctions de base puisque :

$$\varphi_i(\vec{a}_j) = \widehat{\varphi}_i \circ F^{-1}(\vec{a}_j) = \widehat{\varphi}_i(\widehat{a}_j) = \delta_{ij}$$

Et au nombre de N , elles forment une base de P . ▀

9.4.2 Famille d'éléments finis affines-équivalents

Définition 9.11 Deux éléments finis $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ et (K, Σ, P) sont dits équivalents s'il existe une application bicontinue F comme ci-dessus.

Définition 9.12 Ils sont de plus dits affines-équivalents si l'application F est affine (par exemple, cas des éléments finis (K, Σ, P) où K est un simplexe), ou affine par rapport à chaque variable (par exemple, cas 2-D des éléments finis Q_k).

Définition 9.13 La famille d'éléments finis $\bigcup (K_i, \Sigma_i, P_i)$ est dite famille d'éléments finis affines équivalents si tous les (K_i, Σ_i, P_i) sont affines équivalents à un même élément fini $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$.

Remarque 9.14 Par exemple, un maillage d'un domaine de \mathbb{R}^2 par des triangles K_i produit une famille d'éléments finis (K_i, Σ_{2i}, P_2) qui sont affines équivalents dès qu'il existe des applications F_i affines de l'élément fini de référence $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_2, P_2)$ vers l'élément fini (K_i, Σ_{2i}, P_2) .

Attention, l'application F_i est bien de degré 1 et est une transformation purement géométrique de \widehat{K} dans K_i et n'a aucun rapport avec les Σ ou P (de degré k en général). F_i est donc entièrement déterminée par la donnée de \widehat{K} et de K , et plus simplement par leurs sommets respectifs : $F_i(\widehat{a}_j) = \vec{a}_j$ pour $j = 1, 2, 3$, où F_i de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est de la forme :

$$F_i(\widehat{x}) = F_i(\widehat{x}, \widehat{y}) = \begin{pmatrix} F_{1i}(\widehat{x}, \widehat{y}) \\ F_{2i}(\widehat{x}, \widehat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

avec F_i affine :

$$F_i(\widehat{x}, \widehat{y}) = A_i \cdot \vec{x} + \vec{b}_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & \beta_{1i} \\ \alpha_{2i} & \beta_{2i} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_i = \begin{pmatrix} \gamma_{1i} \\ \gamma_{2i} \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Donc :

$$\begin{aligned} F_{1i}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \alpha_{1i}\widehat{x} + \beta_{1i}\widehat{y} + \gamma_{1i} \\ F_{2i}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \alpha_{2i}\widehat{x} + \beta_{2i}\widehat{y} + \gamma_{2i} \end{aligned}$$

Et les α , β et γ sont déterminés par les $F_{1i}(\widehat{a}_j) = \text{abscisse de } \vec{a}_j$ et $F_{2i}(\widehat{a}_j) = \text{ordonnée de } \vec{a}_j$. ▀

Exercice 9.15 Montrer que si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est affine, i.e. $F(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ avec A matrice $n * n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, alors F est inversible ssi A est inversible, et F^{-1} est alors affine : $F^{-1}(\vec{y}) = A^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{b})$.

Réponse. Supposons A inversible. Alors $\vec{y} = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ donne $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} - A^{-1} \cdot \vec{b}$.

On pose $G(\vec{y}) = A^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{b})$.

On a $G(F(\vec{x})) = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{b} - \vec{b}) = \vec{x}$, ainsi que $F(G(\vec{y})) = A \cdot (A^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{b})) + \vec{b} = \vec{y}$, donc F est inversible d'inverse G .

Supposons A non inversible, donc non injective, donc il existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ t.q. $A \cdot \vec{x} = \vec{0} = A \cdot \vec{0}$. Donc $F(\vec{x}) = F(\vec{0})$, donc F non injective : donc F est non inversible. ▀

Théorème 9.16 Pour tout $k \geq 0$, deux éléments finis n -simplexes de type (k) sont affines équivalents.

Preuve. Notons $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_k, P_k)$ et (K, Σ_k, P_k) deux tels éléments finis. Un point \vec{x} de K et un point \widehat{x} de \widehat{K} sont définis par leurs coordonnées barycentriques :

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \vec{a}_j, \quad \widehat{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \widehat{\lambda}_j \widehat{a}_j \quad (9.18)$$

soit avec les notations précédentes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \vdots \\ \widehat{x}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{B} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \widehat{\lambda}_n \\ \widehat{\lambda}_{n+1} \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

On définit l'application $F : \widehat{x} \rightarrow \vec{x}$ où \vec{x} et \widehat{x} ont mêmes coordonnées barycentriques, i.e. :

$$F(\widehat{x}) = \vec{x} \iff \widehat{\lambda}_j = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (9.20)$$

Dans ce cas on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = B \cdot (\widehat{B})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \vdots \\ \widehat{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc F est l'application affine donnée par $F(\widehat{x}) = \vec{x} = C \cdot \widehat{x}$ où

$C = B \cdot (\widehat{B})^{-1}$. Cette matrice est de plus inversible car K et \widehat{K} sont des simplexes, et on vérifie que $F(\widehat{K}) = K$ puis $F(\widehat{\Sigma}_k) = \Sigma_k$, puis que P_k est transformé en lui-même par une application affine.

Donc les éléments finis sont affines équivalents. ▀

9.5 Maillage éléments finis : triangulation de Ω

9.5.1 Triangulation

On se limite au cas 2-D. Le cas 3-D (ou plus) s'écrivant de manière similaire.

Soit une partition de Ω : $\bar{\Omega} = \mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i$ où les K_i sont des compacts de \mathbb{R}^n (partition donc telle que $\bigcap_{i=1}^N \overset{\circ}{K}_i = \emptyset$).

Définition 9.17 La partition $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i$ est appelée triangulation si tous les K_i sont des triangles (ou des rectangles) tels que : l'intersection de deux de ces triangles est soit vide, soit réduite à un sommet, soit réduite à une arête commune et entière (voir figures 9.3 et 9.4).

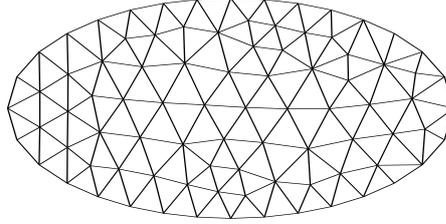


FIGURE 9.3 – Exemple de triangulation

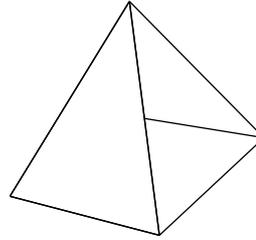


FIGURE 9.4 – Exemple de situation locale interdite dans une triangulation

9.5.2 Opérateur d'interpolation sur K

On considère un élément fini (K, Σ, P) et une fonction $v \in C^0(K)$ (une fonction continue quelconque définie sur K). Alors il existe un unique élément $p_v \in P$ tel que :

$$p_v(\vec{a}_j) = v(\vec{a}_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (9.21)$$

(critère d'unisolvance.) A partir des fonctions de base $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ de l'élément fini il est immédiat que p_v est défini par :

$$p_v(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N v(\vec{a}_j) \varphi_j(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (9.22)$$

(le vérifier pour les $\vec{x} = \vec{a}_j$.) D'où la :

Définition 9.18 On appelle opérateur de P -interpolation sur Σ l'application :

$$\begin{aligned} \Pi_K : C^0(K) &\longrightarrow P \\ v &\longrightarrow \Pi_K(v) = \Pi_K v \end{aligned} \quad (9.23)$$

où $\Pi_K v$ est la fonction de P définie par :

$$\Pi_K v(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N v(\vec{a}_j) \varphi_j(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in K \quad (9.24)$$

Et $\Pi_K v$ est appelé P -interpolé de Lagrange de v sur Σ .

Et on a le théorème d'interpolation :

Théorème 9.19 Soient $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ et (K, Σ, P) deux éléments finis affines-équivalents par la bijection F . Si $\widehat{\Pi}$ est l'opérateur de \widehat{P} -interpolation sur $\widehat{\Sigma}$, alors l'opérateur Π de P -interpolation sur Σ est caractérisé par :

$$\Pi_K(v) = \widehat{\Pi}(v \circ F) \circ F^{-1} \quad \text{soit} \quad \Pi_K(v) \circ F = \widehat{\Pi}(v \circ F) \quad (9.25)$$

Preuve. On a

$$\Pi_K(v) \circ F(\widehat{x}) = (\Pi_K v)(F(\widehat{x})) = \sum_j v(F(\widehat{a}_j)) \varphi_j(F(\widehat{x})) = \sum_j (v \circ F)(\widehat{a}_j) \widehat{\varphi}_j(\widehat{x}) = \widehat{\Pi}(v \circ F)(\widehat{x}). \quad \text{Ou encore :}$$

$$\Pi_K v(\vec{x}) = \sum_j v(\vec{a}_j) \varphi_j(\vec{x}) = \sum_j (v \circ F)(\widehat{a}_j) \widehat{\varphi}_j(\widehat{x}) = \widehat{\Pi}(v \circ F)(\widehat{x}) = \widehat{\Pi}(v \circ F) \circ F^{-1}(\vec{x}). \quad \blacksquare$$

Notation. On note $\widehat{v} = v \circ F$, i.e., $\widehat{v}(\widehat{x}) = v \circ F(\widehat{x})$ pour tout $\widehat{x} \in \widehat{K}$. Ou encore $v(\vec{x}) = \widehat{v} \circ F^{-1}(\vec{x})$. Et on note, grâce au théorème précédent :

$$\widehat{\Pi}(v) = \widehat{\Pi}(\widehat{v}) = \Pi(v) \circ F \quad (9.26)$$

Soit $v \in C^0(\bar{\Omega})$, soit $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{mt} K_i$ une triangulation de $\bar{\Omega}$ associé à une famille d'éléments finis (K_i, Σ_i, P_k) , et soit $\Pi_K v \in P$ son interpolé sur (K_i, Σ_i, P_k) .

9.5.3 Opérateur d'interpolation sur \mathcal{T}

Définition 9.20 On appelle opérateur de P -interpolation sur \mathcal{T} , où interpolé, un opérateur $\Pi_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow P_k$ tel que :

$$\Pi_h(v)|_{K_i} = \Pi_{K_i}(v), \quad \forall K_i \in \mathcal{T} \quad (9.27)$$

Un tel opérateur qui est défini localement, n'est pas unique. On peut par exemple prendre un opérateur qui doit discontinu entre deux K_i , ou tel que $\Pi_h(v)$ soit $C^0(\Omega)$, ou $C^m(\Omega)$ (quand c'est possible) :

9.6 Éléments finis de classe C^m , exemple P_1

Définition 9.21 La famille d'éléments finis $\bigcup(K, \Sigma, P)$ à laquelle on a associé un opérateur d'interpolation Π_h est dit de classe C^m pour $m \geq 0$ si on a choisi un interpolé Π_h tel que $\Pi_h u$ soit de classe $C^m(\Omega)$ pour tout $u \in C^m(\Omega)$.

Exemple 9.22 Éléments finis P_1 -continus : on prend une triangulation \mathcal{T} (maillage) du type de la figure 9.3. Sur chaque K de la triangulation, on prend l'élément fini (K, Σ, P_1) où Σ est constitué des sommets de K et P_1 est l'espace des fonctions affines.

On prend pour opérateur Π_h l'opérateur dont l'image est donné par l'espace des fonctions continues $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont P_1 par morceaux, i.e. φ est continue sur $\bar{\Omega}$ et $\varphi|_K \in P_1$ pour tout $K \in \mathcal{T}$.

On obtient ainsi une famille d'éléments finis C^0 . \blacksquare

Remarque 9.23 Pour la famille de l'exemple ci-dessus, on note n_p le nombre de points de la triangulation, i.e., le nombre de points de $\bar{\Omega}$ qui définissent un sommet de K .

Une base de l'espace $\Pi_h(C^0(\Omega))$ (espace d'approximation des fonctions) est donnée par les fonctions $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n_p}$, fonctions chapeaux, qui valent 1 en un point \vec{a}_i du maillage, 0 sur les autres points \vec{a}_j , et qui sont affines par morceaux, voir paragraphe 7.1.

Noter qu'on n'aura pas à exhiber explicitement les fonctions de bases φ_i : elles seront données implicitement par morceaux (sur chaque K ayant pour sommet le point \vec{a}_i) par $\varphi_i(\vec{x}) = \widehat{\varphi}_i(F_K^{-1}(\vec{x}))$, où F_K est la bijection affine qui permet de passer de \widehat{K} à K . \blacksquare

9.7 Méthode des éléments finis, exemple 2-D, éléments finis P_1

9.7.1 Résolution d'un problème elliptique aux limites approché 2-D

Soit $\bar{\Omega}$ un domaine polygonal avec la triangulation $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i$, les K_i étant des triangles. On s'intéresse au problème du laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \text{grad} u_h \cdot \text{grad} v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (9.28)$$

où $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions éléments finis P_1 -continues, fonctions affines sur chaque K_i et continues sur Ω , qui de plus sont nulles sur $\partial\Omega = \Gamma$ (le problème de Dirichlet est posé dans $H_0^1(\Omega)$ et on suppose $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ (conformité)).

Ce problème, étant vrai pour tout $v_h \in V_h$, est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \text{grad} u_h \cdot \text{grad} \varphi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega, \quad \forall i = 1, \dots, n_p \end{array} \right. \quad (9.29)$$

où n_p est le nombre de fonctions (chapeaux) de base, i.e. ici, le nombre de points intérieurs à Ω (les sommets des K_i).

On dispose de n_p équations (pour $i = 1, \dots, n_p$), et les inconnues sont les n_p composantes u_{hj} de u_h sur la base $(\varphi_j)_{j=1, \dots, n_p}$:

$$u_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n_p} u_{hj} \varphi_j(\vec{x}) \quad (9.30)$$

Le problème consiste donc à résoudre le système matriciel ($n_p * n_p$) : trouver $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{h1} \\ \vdots \\ u_{hn_p} \end{pmatrix}$ tel que :

$$[R_{ij}] \cdot \vec{u} = \vec{f} \quad (9.31)$$

où $[R_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n_p}$, la matrice de rigidité, et $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n_p} \end{pmatrix}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \int_{\Omega} \text{grad} \varphi_j \cdot \text{grad} \varphi_i \, d\Omega \\ f_i &= \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega \end{aligned} \quad (9.32)$$

9.7.2 Calcul des fonctions de base

On appelle éléments finis P_1 -continus, ou plus simplement P_1 la famille d'éléments finis de classe C^0 du paragraphe précédent.

L'élément de référence est $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, P_1)$ avec \widehat{K} de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Les fonctions de base sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\varphi}_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 \\ \widehat{\varphi}_2(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \widehat{x}_1 \\ \widehat{\varphi}_3(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \widehat{x}_2 \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Notons (K, Σ, P_1) un quelconque des (K_i, Σ_i, P_1) où K a pour sommets les points $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ et $C = (c_1, c_2)$. L'application affine F_K permettant de passer de $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, P_1)$ à (K, Σ, P_1) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x} = F_K(\vec{\widehat{x}}) = F_K(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \begin{pmatrix} F_{1K}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \\ F_{2K}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \widehat{x}_1 + \beta_1 \widehat{x}_2 + \gamma_1 \\ \alpha_2 \widehat{x}_1 + \beta_2 \widehat{x}_2 + \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

(6 inconnues) est définie par (6 équations) :

$$F_K(0, 0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad F_K(1, 0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad F_K(0, 1) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = F_{K1}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = (b_1 - a_1)\widehat{x}_1 + (c_1 - a_1)\widehat{x}_2 + a_1 \\ x_2 = F_{K2}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = (b_2 - a_2)\widehat{x}_1 + (c_2 - a_2)\widehat{x}_2 + a_2 \end{array} \right\} = A + \widehat{x}_1 \overrightarrow{AB} + \widehat{x}_2 \overrightarrow{AC} \quad (9.36)$$

(On vérifie que les fonctions affines F_K transforment bien les fonctions de base $\widehat{\varphi}_i(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ en des fonctions de base P_1 les $\varphi_i(x_1, x_2)$.)

La matrice jacobienne de la transformation, matrice représentant dF_K , vaut :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{K1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{K1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_{K2}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{K2}}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1} \right) \quad \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2} \right) \right) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \left(\left(\overrightarrow{AB} \right) \quad \left(\overrightarrow{AC} \right) \right) \quad (9.37)$$

Et le jacobien de la transformation, déterminant de la matrice jacobienne, vaut :

$$J_K = (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) \quad (9.38)$$

d'où

$$|J_K| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 2\mathcal{A} \quad (9.39)$$

où \mathcal{A} est l'aire de l'élément triangulaire K .

Comme on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

on a immédiatement :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{J_K} \begin{pmatrix} c_2 - a_2 & -(c_1 - a_1) \\ -(b_2 - a_2) & b_1 - a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix},$$

i.e. :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = F_K^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{J_K} \begin{pmatrix} (c_2 - a_2)x_1 + (a_1 - c_1)x_2 + c_1a_2 - c_2a_1 \\ (a_2 - b_2)x_1 + (b_1 - a_1)x_2 + b_2a_1 - b_1a_2 \end{pmatrix}, \quad (9.40)$$

soit :

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{1}{J_K} (\vec{x} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}), \\ \hat{x}_2 = \frac{1}{J_K} (-\vec{x} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}). \end{cases} \quad (9.41)$$

9.7.3 Calcul d'intégrales, assemblage

Il s'agit de calculer des intégrales du type :

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\Omega \quad (9.42)$$

qui sont les prototypes pour les calculs de $\int_{\Omega} \varphi_j(\vec{x}) \varphi_i(\vec{x}) d\Omega$ et de $\int_{\Omega} \text{grad}\varphi_j(\vec{x}) \cdot \text{grad}\varphi_i(\vec{x}) d\Omega$.

On commence par écrire :

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f(\vec{x}) dK \quad (9.43)$$

L'opération qui consiste à sommer les intégrales élémentaires \int_K est appelée assemblage. L'algorithme est similaire au cas 1-D donné paragraphe 5.7.3.

9.7.4 Calcul des termes élémentaires

Pour calculer $\int_K f(\vec{x}) dK$, on se ramène à l'élément de référence par changement de variables :

$$\int_{\vec{x} \in K} f(\vec{x}) dK = \int_{\hat{x} \in \hat{K}} f(F_K(\hat{x})) |J_K(\hat{x})| d\hat{K} \quad (9.44)$$

où J_K est le déterminant de la matrice jacobienne de F_K . Pour les éléments finis triangulaires, $J_K(\hat{x}) = J_K$ est indépendant de \hat{x} , et :

$$\int_{\vec{x} \in K} f(x_1, x_2) dK = \int_{\hat{x} \in \hat{K}} f(F_{K1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2), F_{K2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) |2\mathcal{A}| d\hat{K} \quad (9.45)$$

Exemple 9.24 Par exemple on obtient pour les fonctions de base :

$$\int_{\vec{x} \in K} \varphi_i(x_1, x_2) dK = \int_{\hat{x} \in \hat{K}} \hat{\varphi}_{i_{\hat{K}}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) |2\mathcal{A}| d\hat{K} = \frac{\mathcal{A}}{3} \quad (9.46)$$

où \mathcal{A} est l'aire de K , et $i_{\hat{K}}$ l'indice 1, 2 ou 3 de la fonction de base de l'élément de référence correspondant au nœud i par l'application F . \blacksquare

Exemple 9.25 Pour la matrice de masse :

$$\int_{\vec{x} \in K} \varphi_i^2(x_1, x_2) dK = \int_{\hat{x} \in \hat{K}} \hat{\varphi}_{i_{\hat{K}}}^2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) |2\mathcal{A}| d\hat{K} = \frac{\mathcal{A}}{6} \quad (9.47)$$

et pour $i \neq j$:

$$\int_{\vec{x} \in K} \varphi_i(x_1, x_2) \varphi_j(x_1, x_2) dK = \int_{\hat{x} \in \hat{K}} \hat{\varphi}_{i_{\hat{K}}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \hat{\varphi}_{j_{\hat{K}}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) |2\mathcal{A}| d\hat{K} = \frac{\mathcal{A}}{12} \quad (9.48)$$

\blacksquare

Pour calculer $\int_K \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} dK$, on commence par écrire par exemple :

$$f(\vec{x}) = g(\widehat{\vec{x}}) = (g \circ F_K^{-1})(\vec{x}) \quad (9.49)$$

où $g = f \circ F_K$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial \widehat{x}_1} \frac{\partial \widehat{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial \widehat{x}_2} \frac{\partial \widehat{x}_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial \widehat{x}_1} \frac{\partial (F_K^{-1})_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial \widehat{x}_2} \frac{\partial (F_K^{-1})_2}{\partial x_1} \quad (9.50)$$

Et l'intégrale élémentaire vaudra :

$$\int_K \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} dK = \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} \left[\frac{\partial (f \circ F_K)(\widehat{\vec{x}})}{\partial \widehat{x}_1} \frac{\partial (F_K^{-1})_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial (f \circ F_K)(\widehat{\vec{x}})}{\partial \widehat{x}_2} \frac{\partial (F_K^{-1})_2(\vec{x})}{\partial x_1} \right] |J_K| d\widehat{K} \quad (9.51)$$

soit, dès que K et \widehat{K} ont la même orientation, $|J_K| = J_K$ et avec (9.40) :

$$\int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} dK = \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} \left[\frac{\partial (f \circ F_K)(\widehat{\vec{x}})}{\partial \widehat{x}_1} (c_2 - a_2) + \frac{\partial (f \circ F_K)(\widehat{\vec{x}})}{\partial \widehat{x}_2} (a_2 - b_2) \right] d\widehat{K} \quad (9.52)$$

Exemple 9.26 Par exemple, avec (9.33) :

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial \varphi_1(\vec{x})}{\partial x_1} dK &= \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} \left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_1(\widehat{\vec{x}})}{\partial \widehat{x}_1} (c_2 - a_2) + \frac{\partial \widehat{\varphi}_1(\widehat{\vec{x}})}{\partial \widehat{x}_2} (a_2 - b_2) \right] d\widehat{K} \\ &= \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} [-(c_2 - a_2) - (a_2 - b_2)] d\widehat{K} = \frac{b_2 - c_2}{2} \end{aligned} \quad (9.53)$$

De même, $\int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial \varphi_2(\vec{x})}{\partial x_1} dK = \frac{c_2 - a_2}{2}$, $\int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial \varphi_3(\vec{x})}{\partial x_1} dK = \frac{a_2 - b_2}{2}$, et
 $\int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial \varphi_1(\vec{x})}{\partial x_2} dK = \frac{c_1 - b_1}{2}$, $\int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial \varphi_2(\vec{x})}{\partial x_2} dK = \frac{a_1 - c_1}{2}$, $\int_{\vec{x} \in K} \frac{\partial \varphi_3(\vec{x})}{\partial x_2} dK = \frac{b_1 - a_1}{2}$. ▀

Exemple 9.27 Et :

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x} \in K} \text{grad} \varphi_1 \cdot \text{grad} \varphi_1 dK &= \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} \frac{\|\vec{BC}\|^2}{J_K} d\widehat{K} = \frac{\|\vec{BC}\|^2}{4A} \\ \int_{\vec{x} \in K} \text{grad} \varphi_2 \cdot \text{grad} \varphi_2 dK &= \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} \frac{\|\vec{AC}\|^2}{J_K} d\widehat{K} = \frac{\|\vec{AC}\|^2}{4A} \\ \int_{\vec{x} \in K} \text{grad} \varphi_3 \cdot \text{grad} \varphi_3 dK &= \int_{\widehat{\vec{x}} \in \widehat{K}} \frac{\|\vec{AB}\|^2}{J_K} d\widehat{K} = \frac{\|\vec{AB}\|^2}{4A} \end{aligned} \quad (9.54)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x} \in K} \text{grad} \varphi_1 \cdot \text{grad} \varphi_2 dK &= -\frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{4A} \\ \int_{\vec{x} \in K} \text{grad} \varphi_2 \cdot \text{grad} \varphi_3 dK &= -\frac{\vec{BA} \cdot \vec{CA}}{4A} \\ \int_{\vec{x} \in K} \text{grad} \varphi_1 \cdot \text{grad} \varphi_3 dK &= -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{CB}}{4A} \end{aligned} \quad (9.55)$$

▀

9.7.5 Calcul des termes de bord

La prise en compte des conditions aux limites de Neumann (ou de Dirichlet sous forme faible) demande le calcul de :

$$\int_{\Gamma} g(\vec{x}) d\Gamma,$$

où g est une fonction intégrable. On suppose que Γ est une ligne polygonale. Soit un segment \vec{AB} composant cette ligne. Soit $\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le paramétrage donné par $\vec{r}(t) = A + t\vec{AB}$. On a $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) dt = \vec{AB} dt$ et l'élément de longueur est donné par $dl = |\vec{AB}| dt$ où $|\vec{AB}|$ est la longueur du segment \vec{AB} . On a

$$\int_A^B g(\vec{x}) d\Gamma = \int_{t=0}^1 g(\vec{r}(t)) |\vec{AB}| dt = |\vec{AB}| \int_{t=0}^1 g(\vec{r}(t)) dt.$$

Cas $g(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$. Si i est l'indice d'un point intérieur à Ω , alors φ_i est identiquement nulle sur Γ et l'intégrale est nulle.

Si i est l'indice d'un point A du bord, dans $\int_{\Gamma} g(\vec{x}) d\Gamma$ seuls les termes $\int_A^B \varphi_i(\vec{x}) d\Gamma$ pour A, B sur le bord adjacents à A_i sont (éventuellement) non nuls. On a par exemple

$$\int_A^B \varphi_i(\vec{x}) d\Gamma = |AB| \int_{t=0}^1 \varphi_i(\vec{r}(t)) dt = |AB| \int_{t=0}^1 \widehat{\varphi}_i(\widehat{\vec{r}}(t)) dt$$

où $\widehat{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\vec{e}_1$ avec \vec{e}_1 premier vecteur de base.

On doit prendre B est " juste après " A dans le sens trigonométrique (car Γ est parcouru dans le sens trigonométrique), et on a les deux cas, lorsque le bord est en bijection avec le côté $((0,0), (1,0))$ du simplexe de référence : avec φ_i qui vaut 1 en A et 0 aux autres sommets :

$$\int_A^B \varphi_i(\vec{x}) d\Gamma = |AB| \int_{t=0}^1 \widehat{\varphi}_1(\widehat{\vec{r}}(t)) dt = |AB| \int_{t=0}^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}|AB|,$$

et avec φ_i qui vaut 1 en B et 0 aux autres sommets :

$$\int_A^B \varphi_i(\vec{x}) d\Gamma = |AB| \int_{t=0}^1 \widehat{\varphi}_2(\widehat{\vec{r}}(t)) dt = |AB| \int_{t=0}^1 t dt = \frac{1}{2}|AB|.$$

Exemple 9.28 Montrer que :

$$\int_A^B \varphi_i(\vec{x}) \varphi_j(\vec{x}) d\Gamma = \begin{cases} \frac{1}{3}|AB| & \text{si } i = j \text{ et ?} \\ \frac{1}{6}|AB| & \text{si } i \neq j \text{ et ?} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

■

9.8 Un résultat d'approximation et de convergence dans les Sobolev

9.8.1 Un résultat d'approximation dans les Sobolev : cas $\Omega = K$

Le but est de mesurer a priori l'erreur commise en approchant le problème posé dans V en un problème posé dans V_h (dans les exemples donnés $V \subset H^1(\Omega)$ et $V_h = P_k$). On rappelle que l'erreur est majorée comme :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} d(u, V_h) \quad (9.56)$$

On s'intéresse donc ici à la valeur de $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$.

On regarde d'abord le cas d'un élément fini (on verra ensuite le cas d'une famille d'éléments finis) : soit Ω tel que $\overline{\Omega} = K$, où K est le domaine d'un élément fini (K, Σ_k, P_k) , avec la notation usuelle $P_k =$ ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k . Il est usuel de se servir de l'opérateur d'interpolation : $\Pi_K : v \in C^0(K) \rightarrow \Pi_K v = v_h \in P_k$ où par définition $v_h(\vec{a}_i) = v(\vec{a}_i)$ en tout point du treillis Σ_k .

L'équation (9.56) donne en particulier :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \|u - \Pi_K u\|_V \quad (9.57)$$

et on aura borné a priori l'erreur $\|u - u_h\|_V$ dès qu'on aura 'mesurer' $\|u - \Pi_K u\|_V$ (même si on obtient pas le résultat optimal).

On note $|\cdot|_{H^m(K)}$ la semi-norme définie sur $H^m(K)$ à l'aide de son carré par :

$$|v|_{H^m(K)}^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=m} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^\alpha} \right|^2 d\Omega \quad (9.58)$$

(Par rapport à $\|\cdot\|_{H^m}$ on ne garde que les termes de dérivation d'ordre m .)

Et on rappelle que l'espace quotient $H^m(K)/P_\ell$ est l'ensemble des classes d'équivalences $\dot{v} = \{v + p : p \in P_\ell\}$. Cet ensemble permet de caractériser les fonctions définies à un polynôme de degré ℓ près : deux fonctions v et w qui sont telles que $v - w$ est un polynôme de degré ℓ appartiennent à la même classe. Cet espace est normé à l'aide de la norme quotient, si $v \in \dot{v}$:

$$\|\dot{v}\|_{H^m(K)/P_\ell} = \inf_{p \in P_\ell} \|v + p\|_{H^m} \quad (9.59)$$

On rappelle que $H^m(K)/P_\ell$ est l'ensemble fondamental quand on veut non pas comparer deux fonctions mais comparer leurs dérivées d'ordre $\ell + 1$, car ces dérivées sont indépendantes de la partie polynomiale de degré $\leq \ell$

(dont la dérivée à l'ordre ℓ est nulle) de ces fonctions. En ce qui concerne les problèmes elliptiques du second ordre, on regardera en particulier les espaces H^m/P_0 , i.e. les espaces de fonctions où les fonctions sont définies à une constante près, une constante n'intervenant pas dans le calcul de $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\text{grad}u - \text{grad}u_h\|_{L^2(\Omega)}$.

On admet alors le théorème suivant :

Théorème 9.29 *Pour K partie compacte connexe régulière de \mathbb{R}^n , la semi-norme $|\cdot|_{H^{\ell+1}(K)}$ définit une norme sur $H^{\ell+1}(K)/P_\ell$ équivalente à la norme quotient $\|\cdot\|_{H^{\ell+1}(K)}$. En particulier :*

$$\exists c > 0, \quad \forall \hat{v} \in H^{\ell+1}(K)/P_\ell, \quad \forall v \in \hat{v}, \quad \|\hat{v}\|_{H^{\ell+1}(K)/P_\ell} \leq c|v|_{H^{\ell+1}(K)} \quad (9.60)$$

Preuve. Admis, voir par exemple Raviart–Thomas [14]. Démonstration à l'aide de l'injection compacte de $H^1(K)$ dans $L^2(K)$, voir cours de 3ème année.

(Intuition pour la validité de ce résultat : la norme de \hat{v} est indépendante de tout polynôme d'ordre ℓ contenue dans \hat{v} et “donc” (!) de toutes les dérivées d'ordre inférieure ou égal à ℓ . Mais le “donc” n'est pas du tout trivial.) \blacksquare

On en déduit le théorème suivant, avec k degré maximum du polynôme d'interpolation de P_k :

Théorème 9.30 *Il existe une constante c_K qui dépend de l'élément fini (K, Σ_k, P_k) telle que, si $k \geq 1$:*

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad \begin{cases} \|v - \Pi_K v\|_{L^2(K)} \leq c_K |v|_{H^{k+1}(K)} \\ \|\text{grad}(v - \Pi_K v)\|_{L^2(K)} \leq c_K |v|_{H^{k+1}(K)} \end{cases} \quad (9.61)$$

et de manière plus générale, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq k + 1$:

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq c_K |v|_{H^{k+1}(K)} \quad (9.62)$$

Preuve. En effet, $v - \Pi_K v = (v + p) - \Pi_K(v + p)$ pour tout $p \in P_k$ (puisqu'alors $p = \Pi_K p$). D'où :

$$\|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq c_1 \|v + p\|_{H^{k+1}(K)}, \quad \forall p \in P_k \quad (9.63)$$

où $c_1 = \|I - P_K\|_{L(H^{k+1}(K), H^m(K))}$. Cela a un sens dès que $k + 1 \geq m$. Il suffit d'appliquer le théorème précédent pour obtenir le résultat. \blacksquare

9.8.2 Résultat d'approximation : cas $\Omega = K$ affine équivalent à \hat{K}

On se fixe un élément fini (K, Σ_k, P_k) qu'on suppose affine équivalent à l'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, P_k)$. On note $F_K = F : \hat{K} \rightarrow K$ l'application affine correspondante, qu'on écrit sous la forme :

$$\vec{x} = F(\vec{\hat{x}}) = B \cdot \vec{\hat{x}} + \vec{c} \quad (9.64)$$

avec donc B matrice inversible d'ordre n (matrice $2 * 2$ dans \mathbb{R}^2).

On note :

$$\begin{aligned} h_K &= \text{diamètre de } K \\ \rho_K &= \text{rondeur de } K \end{aligned} \quad (9.65)$$

où h_K est le diamètre du cercle circonscrit à K (plus petit cercle contenant K) et ρ_K le diamètre du cercle inscrit dans K (plus grand cercle contenu dans K).

On a alors (avec $\|B\| = \sup_{\|\vec{\hat{x}}\|=1} \|B\vec{\hat{x}}\|$) :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K} \quad (9.66)$$

En effet, $\|B\| \leq \frac{1}{\rho_{\hat{K}}} \sup_{\|\vec{\hat{x}}\|=\rho_{\hat{K}}} \|B\vec{\hat{x}}\|$, et B étant linéaire, $\sup_{\|\vec{\hat{x}}\|=\rho_{\hat{K}}} \|B\vec{\hat{x}}\| \leq h_K$ par définition de h_K , puisque

$B(\vec{\hat{y}} - \vec{\hat{x}}) \leq h_k$ dès que $\|\vec{\hat{y}} - \vec{\hat{x}}\| \leq \rho_{\hat{K}}$ (avec ici $\vec{\hat{y}} = \vec{0} \in \hat{K}$).

On a alors le résultat d'approximation a priori suivant :

Théorème 9.31 *Il existe une constante C qui ne dépend que de l'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, P_k)$ telle que :*

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad \begin{cases} \|v - \Pi_K v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^{k+1} |v|_{H^{k+1}(K)} \\ \|\text{grad}(v - \Pi_K v)\|_{L^2(K)} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K} |v|_{H^{k+1}(K)} \end{cases} \quad (9.67)$$

et de manière plus générale, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq k + 1$:

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{k+1}(K)} \quad (9.68)$$

Preuve. Admis, voir par exemple Raviart–Thomas [14]. Idée : par un premier changement de variable on trouve :

$$|v - \Pi_K v|_{H^m(K)} \leq c_1 (|\det B|)^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\|^m \underbrace{|\widehat{v} - \widehat{\Pi}_K v|_{H^m(\widehat{K})}}_{\leq c_{\widehat{K}} |\widehat{v}|_{H^{k+1}(\widehat{K})}} \quad (9.69)$$

De même on aura :

$$|\widehat{v}|_{H^{k+1}(\widehat{K})} \leq c_2 (|\det B^{-1}|)^{\frac{1}{2}} \|B\|^{k+1} |v|_{H^{k+1}(K)} \quad (9.70)$$

d'où avec le théorème d'interpolation précédent :

$$|v - \Pi_K v|_{H^m(K)} \leq c(\widehat{K}, m, k+1) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{k+1}(K)} \quad (9.71)$$

où $c(\widehat{K}, m, k+1)$ est une constante qui ne dépend pas de F . ▀

En particulier, il vient pour une interpolation par des éléments finis P_1 , sachant que $\|u\|_{H^1} = (|u|_{H^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \leq |u|_{H^1} + \|u\|_{L^2}$ (les normes étant positives) :

$$\forall v \in H^2(K), \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^1(K)} \leq C(h_K + \frac{h_K}{\rho_K}) h_K |v|_{H^2(K)} \quad (9.72)$$

et $C_h = C(h_K + \frac{h_K}{\rho_K})$ restera borné à condition que $\frac{h_K}{\rho_K}$ reste borné : il ne faut pas que les mailles s'aplatissent.

9.8.3 Maillage régulier et convergence de la méthode des éléments finis

Définition 9.32 On dit que le maillage est régulier ou que la triangulation est régulière si :

$$\exists \sigma > 0 \quad (\text{rapport de forme}) \quad \text{tel que} \quad \forall K \in \mathcal{T} \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

Cette condition interdit les mailles triangulaires trop 'aplaties' (interdit les triangles presque dégénérés).

On déduit alors du théorème précédent :

Théorème 9.33 Si le maillage élément fini est régulier, alors il existe une constante C indépendante de h telle que, pour une interpolation par des éléments finis P_k de classe $H^1(\Omega)$:

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \quad \begin{cases} \|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{k+1} |v|_{H^{k+1}(\Omega)} \\ \|\text{grad}(v - \Pi_h v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^k |v|_{H^{k+1}(\Omega)} \end{cases} \quad (9.73)$$

et de manière plus générale, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq k+1$, pour une interpolation par des éléments finis P_k de classe $H^m(\Omega)$:

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad \|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq C h^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(K)} \quad (9.74)$$

En particulier, il vient pour une interpolation par des éléments finis P_1 :

$$\forall v \in H^2(K), \quad \|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 h |v|_{H^2(K)} = O(h) \quad (9.75)$$

où C_1 est une constante indépendante de h . Et pour des éléments finis P_2 :

$$\forall v \in H^2(K), \quad \|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 h^2 |v|_{H^2(K)} = O(h^2) \quad (9.76)$$

où C_2 est une constante indépendante de h .

Preuve. C'est un corollaire du théorème précédent. Démontrons par exemple la deuxième inégalité de (9.73) : par linéarité de l'intégration on a :

$$\begin{aligned} \|\text{grad}(v - \Pi_h v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \|\text{grad}(v - \Pi_h v)\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega = \sum_K \int_K \|\text{grad}(v - \Pi_h v)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dK \\ &= \sum_K \|\text{grad}(v - \Pi_h v)\|_{L^2(K)}^2 \leq \sum_K C^2 \left(\frac{h_K^{k+1}}{\rho_K}\right)^2 |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \\ &\leq \sum_K C^2 \sigma^2 (h_K^k)^2 |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \leq C^2 \sigma^2 h^2 \sum_K |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \end{aligned} \quad (9.77)$$

où $h = \max_{K \in \mathcal{T}}(h_K)$, ce qui est le résultat souhaité. La démonstration générale est laissée au lecteur. ▀

Remarque 9.34 Dans le cas des éléments finis P_1 , si la solution u du problème $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in V$ est $H^2(\Omega)$ régulière, alors si le maillage régulier est raffiné 2 fois, l'erreur faite sur u en calculant u_h est divisée par 2.

Dans le cas des éléments finis P_2 , si la solution u est $H^3(\Omega)$ régulière, alors prendre un maillage deux fois plus fin divise l'erreur par 4. Cependant la matrice de rigidité a une plus grande largeur de bande et le calcul coûte plus cher dans un premier temps (avant raffinement éventuel).

Par contre, si la solution u est seulement $H^2(\Omega)$, l'erreur $\|\text{grad}u - \text{grad}u_h\|_{L^2(\Omega)}$ est seulement bornée par $Ch\|u\|_{H^2}$ (a priori), et il n'y a pas de gain avec les éléments finis P_2 par rapport à une approximation par des éléments finis P_1 . ■

Remarque 9.35 C'est un résultat de convergence a priori : on sait a priori que la méthode des éléments finis converge si on prend un maillage régulier.

On dispose également de résultats de convergence a posteriori permettant entre autre de construire automatiquement des 'maillages adaptatifs', maillages qui sont raffinés là où l'erreur (calculée a posteriori) est la plus grande. Voir par exemple Verfürth [21]. ■

A Quelques rappels sur les formes et applications linéaires continues

C'est l'aspect normé des espaces vectoriels qui nous intéresse ici.

On notera K le corps \mathbb{R} des réels ou \mathbb{C} des complexes, et les espaces vectoriels considérés sont définis sur le corps K .

A.1 Application continue

Une application f d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$ est continue en $x_0 \in E$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

Ou encore, si $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\|_F = 0$ dans \mathbb{R} , i.e. si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ dans F .

Et une application f est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.

Remarque A.1 La continuité dépend de la norme choisie (en dimension infinie, toutes les normes ne sont pas équivalentes, voir remarque 1.21). ■

Remarque A.2 La continuité peut être plus facile à visualiser si on pense à ce qu'est une fonction discontinue ('qui a un saut') : une fonction est discontinue en un point x_0 si :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \text{ et } \|f(x) - f(x_0)\|_F \geq \varepsilon.$$

■

A.2 Applications et formes linéaires

On se donne deux espaces vectoriels E et F sur un même corps K .

On rappelle qu'une application $L : E \rightarrow F$ est linéaire si, pour tous $x, y \in E$ et tout $\alpha \in K$:

$$L(x + y) = L(x) + L(y), \quad \text{et} \quad L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Une forme linéaire ℓ sur un espace vectoriel E est une application linéaire à valeurs dans K : $\ell : E \rightarrow K$.

Dans la suite on se contentera de rappeler ce qui se passe lorsque le corps $K = \mathbb{R}$.

A.3 Forme linéaire continue et sa norme

On se donne un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$. On prouve (le faire) qu'une forme linéaire $\ell(\cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si elle est continue au voisinage de 0, ou encore si elle est bornée sur la boule unité, ou sur la sphère unité :

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in E, \quad |\ell(v)| \leq c\|v\|_E.$$

Cela s'écrit encore :

$$\exists c > 0, \quad \sup_{0 \neq v \in E} \ell\left(\frac{v}{\|v\|_E}\right) \leq c.$$

Quand ℓ est continue, on note $\|\ell\|_{E'} \in \mathbb{R}$ la plus petite des constantes c . Donc :

$$\|\ell\|_{E'} = \sup_{0 \neq v \in E} \ell\left(\frac{v}{\|v\|_E}\right) = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\|_E=1}} |\ell(v)|. \quad (\text{A.1})$$

Cette constante dépend de la norme choisie dans E . Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $\|\ell\|_{E'} = \|\ell\|$. Donc $\|\ell\| \in \mathbb{R}$ est la plus petite constante telle que :

$$\forall v \in E, \quad |\ell(v)| \leq \|\ell\| \|v\|_E. \quad (\text{A.2})$$

Remarque A.3 Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ (dimension finie), on peut représenter ℓ par un vecteur \vec{a} tel que (théorème de représentation de Riesz) :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \ell(\vec{x}) = \vec{a}^t \cdot \vec{x} = (\vec{a}, \vec{x})_2$$

où $(\vec{a}, \vec{x})_2 = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ est le produit scalaire (euclidien) de \mathbb{R}^n et $\vec{a}^t = (a_1, \dots, a_n)$ est la matrice ligne $1 \times n$

transposée de la matrice $n \times 1$ colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ représentant le vecteur \vec{a} dans la base euclidienne. (Pour la démonstration, voir paragraphe 3.4.1.)

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\ell(\vec{x})| \leq \|\vec{a}\|_2 \|\vec{x}\|_2$, d'où, la norme choisie sur \mathbb{R}^n étant la norme euclidienne :

$$\|\ell\| = \|\vec{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$$

(\leq immédiate et égalité pour $\vec{x} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$).

■

A.4 Normes sur \mathbb{R}^n

On peut démontrer que toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes (cas de la dimension finie). Les plus

usitées sont, si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la notation générique d'un vecteur de \mathbb{R}^n dans la base canonique :

1. La norme euclidienne qui dérive du produit scalaire euclidien $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{A.3})$$

La boule unité correspondante est représentée par une boule (!).

2. La norme de la somme :

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{A.4})$$

La boule unité correspondante est représentée par un 'losange'.

3. La norme du sup :

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1}^n (|x_i|) \quad (\text{A.5})$$

La boule unité correspondante est représentée par un cube (ou un hypercube).

Donnons des constantes permettant de montrer que ces normes sont équivalentes. D'une part :

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_2$$

En effet, l'inégalité de gauche provient de $\|\vec{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left| \sum_{i=1}^n |x_i| \right|^2$. Et l'inégalité de droite provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (le produit scalaire est inférieur au produit des normes) :

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n (1 \cdot |x_i|) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

D'autre part :

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty$$

(trivial.)

A.5 Application linéaire continue de E dans \mathbb{R}^n

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé et L une application linéaire de E dans \mathbb{R}^n . On note :

$$L : v \in E \implies L(v) = \begin{pmatrix} \ell_1(v) \\ \vdots \\ \ell_n(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

les ℓ_i étant des formes linéaires de E dans \mathbb{R} pour $i = 1, \dots, n$ (trivial).

On dit que L est continue de E dans \mathbb{R}^n si :

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in E, \quad \|L(v)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c\|v\|_E$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ est une norme dans \mathbb{R}^n . On note $\|L\|$ la plus petite constante c satisfaisant à cette inégalité :

$$\|L\| = \sup_{v \neq 0, v \in E} \frac{\|L(v)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|v\|_E} \quad (\text{A.6})$$

Elle dépend de la norme choisie dans E et de celle choisie dans \mathbb{R}^n .

Cas $E = \mathbb{R}^m$: Si chaque ℓ_i est représentée par le vecteur \vec{a}_i :

$$\ell_i(\vec{x}) = \vec{a}_i^t \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m,$$

et si on se donne une base de \mathbb{R}^m , notant $\vec{a}_i = (a_{ij})$ et $\vec{x} = (x_j)$ les composantes respectives de \vec{a}_i et \vec{x} dans cette base, on a :

$$\ell_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Donc, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$:

$$L(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{où} \quad A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}. \quad (\text{A.7})$$

L est une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n qu'on peut représenter par une matrice $A = [a_{ij}]$, chaque ligne correspondant aux formes linéaires ℓ_i .

Et :

$$\|L(\vec{x})\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\ell_i(\vec{x})|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\|\ell_i\| \|\vec{x}\|_2)^2} \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \|\ell_i\|^2} \right) \|\vec{x}\|_2$$

D'où, pour $\vec{x} \neq 0$:

$$\frac{\|L(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

On note :

$$\|L\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \quad (\text{A.8})$$

(norme de Frobenius) et on obtient l'inégalité utile :

$$\|L\| \leq \|L\|_2 \quad (\text{A.9})$$

(Il n'y a pas égalité en général, prendre $L = I$ identité de \mathbb{R}^n : $\|I\| = 1$ et $\|I\|_2 = \sqrt{n}$.)

A.6 Valeurs propres de matrices

On se donne une application linéaire L de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n et on se donne une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ de \mathbb{R}^m et une base $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ de \mathbb{R}^n . On peut alors associer une matrice A à L , cette matrice étant définie par les valeurs $L(\vec{e}_j)$ sur la base (\vec{f}_i) (une application linéaire est parfaitement définie par les images des vecteurs de base) : on pose, pour tout $j = 1, \dots, m$:

$$L(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{f}_i,$$

et la matrice A est la matrice $n * m$ des $[a_{ij}]$. En particulier la j -ème colonne $(a_{ij})_{i=1, \dots, n}$ est l'image de \vec{e}_j (j -ème vecteur de base). Et un vecteur \vec{x} s'écrivant $\vec{x} = \sum_{j=1}^m x_j \vec{e}_j$, on obtient :

$$L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) \vec{f}_i = A \vec{x}.$$

Une matrice A étant donnée, un scalaire λ est valeur propre ssi la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible, i.e. si λ est tel que $\det(A - \lambda I) = 0$. (En particulier si A n'est pas inversible, alors $\lambda = 0$ est valeur propre.) Et si λ est

valeur propre, alors il existe $\vec{v} \neq 0$ tel que $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ (ou encore \vec{v} et 0 ont même image et donc $A - \lambda I$ n'est pas injective, et donc n'est pas bijective). Donc, à une valeur propre λ est toujours associée un vecteur propre \vec{v} :

$$\lambda \text{ valeur propre} \iff \exists \vec{v} \neq 0 : A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

La matrice transposée de A est la matrice B définie par :

$$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (B\vec{y}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{y}, A\vec{x})_{\mathbb{R}^m}$$

On note $B = A^t$. Noter que B est connue si on connait dès qu'on connaît l'image des vecteurs de base $(B\vec{f}_j)$, et on vérifie immédiatement que si $A = [a_{ij}]$ (matrice $n * m$) alors $A^t = [a_{ji}]$ (matrice $m * n$).

Une matrice est symétrique quand $m = n$ et quand $A^t = A$. On rappelle que quand une matrice est réelle et symétrique, alors cette matrice est diagonalisable dans une base orthonormée :

$$A \text{ symétrique réelle} \Rightarrow \begin{cases} \exists(\lambda_i)_{1, \dots, n} \in \mathbb{R}, \exists(\vec{v}_i)_{1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n : \\ \forall i, j = 1, \dots, n, (\vec{v}_i, \vec{v}_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \text{ et } A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i. \end{cases}$$

(Voir par exemple Strang [19].) On peut alors écrire :

$$D = P^{-1}AP$$

où P est une matrice orthonormée (dont les colonnes sont des vecteurs deux à deux orthogonaux) et D une matrice diagonale, de termes diagonaux les valeurs propres. Ayant $AP = PD$, il est immédiat que les colonnes de P sont formées des vecteurs propres de A : en effet, pour un produit matriciel AB , si les \vec{b}_j sont les vecteurs colonnes de B , il est immédiat de vérifier que la matrice AB a pour colonnes les vecteurs $A\vec{b}_j$.

Et on a, pour A matrice symétrique réelle de valeurs propres les λ_i , avec $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} \|A\vec{x}\|$:

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} (\lambda_i).$$

En effet, si (\vec{v}_i) est une base orthonormale formée des vecteurs propres de A relatifs aux valeurs propres λ_i , alors décomposant un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sur cette base comme $\vec{x} = \sum x_i \vec{v}_i$ un calcul immédiat de $\sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} \|A\vec{x}\|$ donne le résultat.

Par contre, ce résultat est faux si A n'est pas symétrique : considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le vecteur unitaire $\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour lequel on $\|A\vec{x}\| = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1$.

De plus si A est une matrice positive, i.e. telle que :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, (A\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$$

Alors toutes ses valeurs propres sont positives : prendre un couple "valeur propre - vecteur propre" noté (λ, \vec{v}) qui donne $0 \leq (A\vec{v}, \vec{v}) = \lambda \|\vec{v}\|^2$.

Exemple A.4 Montrer que :

$$A \text{ symétrique positive} \Rightarrow \inf_{\|\vec{x}\|=1} (A\vec{x}, \vec{x}) \geq \min_{i=1, \dots, n} (\lambda_i).$$

Réponse : notant $Q = P^{-1} = P^t$, on a $(A\vec{x}, \vec{x}) = (Q^t D Q \vec{x}, \vec{x}) = (D Q \vec{x}, Q \vec{x})$ et notant $\vec{y} = Q \vec{x}$ il vient $(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum_i \lambda_i \vec{y}_i^2$. Comme Q est une matrice orthogonale, on a $\|\vec{y}\| = 1$ dès que $\|\vec{x}\| = 1$ et l'inf sur les $\|\vec{x}\| \leq 1$ est donné par l'inf sur les $\|\vec{y}\| \leq 1$, d'où le résultat. \blacksquare

Exemple A.5 Montrer que pour une matrice A quelconque $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1, \|\vec{y}\|=1} |(A\vec{x}, \vec{y})|_{\mathbb{R}^n}$. Et que si A est symétrique alors $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} |(A\vec{x}, \vec{x})|_{\mathbb{R}^n}$.

Réponse : à \vec{x} fixé, $\sup_{\|\vec{y}\|=1} |(A\vec{x}, \vec{y})|_{\mathbb{R}^n}$ est donné pour $\vec{y} = \frac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}$ (appliquer Cauchy-Schwarz et montrer que le y proposer donne l'égalité), et donc $\sup_{\|\vec{y}\|=1} |(A\vec{x}, \vec{y})|_{\mathbb{R}^n} = \|A\vec{x}\|$. Comme $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$ on a le résultat.

Puis si A est symétrique :

$$4(A\vec{x}, \vec{y}) = (A(\vec{x} + \vec{y}), \vec{x} + \vec{y}) - (A(\vec{x} - \vec{y}), \vec{x} - \vec{y})$$

avec $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$ (identité du parallélogramme). D'où :

$$\begin{aligned} 4(A\vec{x}, \vec{y}) &\leq \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \left(A \left(\frac{\vec{x} + \vec{y}}{\|\vec{x} + \vec{y}\|} \right), \frac{\vec{x} + \vec{y}}{\|\vec{x} + \vec{y}\|} \right) + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \left(A \left(\frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right), \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) \\ &\leq 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \sup_{\|\vec{z}\|=1} (A\vec{z}, \vec{z})_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \blacksquare

Exemple A.6 Montrer que pour une matrice A quelconque, $\|A\| = \sqrt{\|A^t A\|}$, et $A^t A$ étant symétrique, en déduire que $\|A\| = \max_{i=1, \dots, n}(\sqrt{\lambda_i})$, les λ_i étant ici les valeurs propres de $A^t A$.

Réponse : on a $\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) = (A^t A\vec{x}, \vec{x})$ avec $A^t A$ symétrique, d'où avec l'exercice précédent, $\|A\|^2 = \|A^t A\|$. ■

Exemple A.7 Montrer que pour A matrice quelconque, on a $\min(A\vec{x}, \vec{x}) = \min(\frac{1}{2}(A + A^t)\vec{x}, \vec{x})$.

Réponse : on a $(\frac{1}{2}(A + A^t)\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) + \frac{1}{2}(A^t\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x})$, et le produit scalaire étant symétrique, on en déduit le résultat. ■

Remarque A.8 On aura besoin de calculer $\|A\|$ et $\min_{\|\vec{x}\| \leq 1}(A\vec{x}, \vec{x})$. Si on dispose d'un code de calculs de valeurs propres, on pourra s'en servir pour appliquer les résultats des exercices ci-dessus. Sinon, soit on calculera ces valeurs de manière exacte, soit, si ces calculs sont un peu long, on pourra se contenter d'estimations : par exemple, pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on pourra utiliser simplement : $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1, \|\vec{y}\|=1}(A\vec{x}, \vec{y})$, avec $(A\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 + x_2)y_1 + x_2y_2 = (x_1y_1 + x_2y_2) + x_2y_1 \leq 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$, donne $\|A\| \leq 2$. Ce calcul est très rapide, alors que le calcul des valeurs propres de $A^t A$ est facile mais plus long. ■

Exercice A.9 Montrer que si A est symétrique, i.e. $A^T = A$, si $\lambda \neq \mu$, si \vec{x} et \vec{y} sont vecteurs propres de A de valeurs propres respectives λ et μ , alors $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Réponse. On a $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$, d'où $\lambda(\vec{x}, \vec{y}) = \mu(\vec{x}, \vec{y})$, d'où $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ si $\lambda \neq \mu$. ■

Exercice A.10 Montrer que si A est symétrique réelle, alors iA est hermitienne.

Réponse. Soit $B = iA$. On a $B^T = -iA^T = -iA = \overline{iA}$ car A est réelle, et $B^T = \overline{B}$: B est hermitienne. ■

B Rappels d'intégration

B.1 Intégration de fonctions rationnelles

1 - Dans \mathbb{R} , l'intégrale $\int_0^1 r^\alpha dr$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.

2 - Dans \mathbb{R}^n , si $r = |\vec{x}|$ est la longueur de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, et notant $B_1 = \{r \leq 1\}$ la boule unité, l'intégrale $\int_{B_1} r^\alpha dr$ est convergente si et seulement si $\alpha > -n$.

Pour le prouver, on se ramène au cas précédent par changement de variable : on passe en coordonnées sphériques pour obtenir :

$$\int_{B_1} r^\alpha dr = \int_{\partial B_1} \int_0^1 r^\alpha r^{n-1} dr d\Gamma$$

qui converge dès que $\alpha + n - 1 > -1$.

B.2 Intégration par parties dans \mathbb{R}

Dans \mathbb{R} , pour une fonction f dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on a :

$$\int_a^b f'(x) dx = [f]_a^b \quad (= f(b) - f(a))$$

Pour des fonctions f et g dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sachant $(fg)' = f'g + fg'$ on en déduit :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx = [fg]_a^b \quad (= f(b)g(b) - f(a)g(a))$$

souvent utilisé sous la forme :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

B.3 Opérateurs différentiels usuels dans \mathbb{R}^n

Soit (\vec{e}_i) une base euclidienne dans \mathbb{R}^n . Soit Ω un ouvert dans \mathbb{R}^n .

L'opérateur gradient $\vec{\nabla} : \begin{pmatrix} C^1(\Omega, \mathbb{R}) & \rightarrow & C^0(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & \vec{\nabla} f \end{pmatrix}$ est défini par, pour tout $\vec{x} \in \Omega$,

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n, \quad [\vec{\nabla} f(\vec{x})]_{|e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

(Ici f est une fonction à valeurs scalaires).

L'opérateur divergence $\text{div} : \begin{pmatrix} C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) & \rightarrow & C^0(\Omega, \mathbb{R}) \\ \vec{f} & \mapsto & \text{div} \vec{f} \end{pmatrix}$ est défini par, pour tout $\vec{x} \in \Omega$,

$$\text{div} \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{x}) \in \mathbb{R}.$$

(Ici \vec{f} est une fonction à valeurs vectorielles).

On rappelle que l'opérateur laplacien $\Delta : \begin{pmatrix} C^2(\Omega, \mathbb{R}) & \rightarrow & C^0(\Omega, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \Delta f \end{pmatrix}$ est défini par, pour tout $\vec{x} \in \Omega$,

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x}) = \text{div}(\vec{\nabla} f)(\vec{x}) \in \mathbb{R}.$$

(Ici f est une fonction à valeurs scalaires).

Et pour Ω borné et 1-régulier de frontière Γ (Γ est compact et localement représentable par une fonction C^1), on note $\vec{n} : \begin{pmatrix} \Gamma & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$ la fonction vecteur normal extérieur (ou sortant) à Ω en $\vec{x} \in \Gamma$. Quand $\vec{n} = \sum_i n_i \vec{e}_i$, sa i -ème composante n_i est appelée le i -ème cosinus directeur.

Pour $\vec{x} \in \Omega$ et $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur en \vec{x} , on définit $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} : C^1(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\Omega, \mathbb{R})$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}(\vec{x})) - f(\vec{x})}{h}).$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x})$ est la dérivée de f en \vec{x} suivant la direction $\vec{v}(\vec{x})$. En particulier on note $\frac{\partial}{\partial x_i} =^{\text{déf}} \frac{\partial}{\partial \vec{e}_i}$ la dérivée dans la direction \vec{e}_i .

En particulier, pour $\vec{x} \in \Gamma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}) \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{n}(\vec{x})) - f(\vec{x})}{h}).$$

B.4 Intégration par parties dans \mathbb{R}^n

Dans \mathbb{R}^n , pour un domaine borné 1-régulier Ω de frontière Γ , pour une fonction f dans $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on a le théorème de Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma. \quad (\text{B.1})$$

Cette formule indique que la variation dans la direction i de f est égale au flux qui s'en échappe dans la direction i (formule usuelle de conservation). Pour des fonctions f et g dans $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on en déduit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) g(\vec{x}) d\Omega + \int_{\Omega} f(\vec{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\vec{x}) g(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma,$$

souvent utilisé sous la forme dite d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) g(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\vec{x}) g(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma - \int_{\Omega} f(\vec{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega. \quad (\text{B.2})$$

Attention, ne pas oublier le i -ème cosinus directeur $n_i(x)$ (toujours ≤ 1) : l'intégration dans la direction i dans \mathbb{R}^n se comporte par analogie avec le cas de l'intégration dans \mathbb{R} comme une intégration sur une portion de surface unitaire orthogonale à la direction i . Or Γ n'est pas en tout point une surface orthogonale à la direction i (on a supposé Ω borné). Et donc, l'unité de surface qu'il faut considérer est $n_i(\vec{x}) d\Gamma$ et non $d\Gamma$.

On en déduit la formule de la divergence ou formule de Gauss ou formule d'Ostrogradski, pour $\vec{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \, d\Gamma. \quad (\text{B.3})$$

Et, pour $\vec{f} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\Omega} \Delta f(\vec{x}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}) \, d\Gamma \quad (= \int_{\Gamma} \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \, d\Gamma)$$

Et, pour $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\int_{\Omega} \Delta f(\vec{x}) g(\vec{x}) - f(\vec{x}) \Delta g(\vec{x}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}) g(\vec{x}) - \frac{\partial g}{\partial n}(\vec{x}) f(\vec{x}) \, d\Gamma \quad (\text{B.4})$$

Exemple : dans \mathbb{R}^2 sur le trapèze Ω délimité par les points $((0, 0), (10, 0), (9, 1), (0, 1))$ appliquer la formule d'intégration par parties (B.1) pour $i = 1$ pour la fonction $u(x, y) = 1$ puis pour la fonction $u(x, y) = y(1 - y)$. Faire un dessin. Si on oublie n_1 on montre que $\sqrt{2} = 1$.

Ces fonctions correspondent à la formule de conservation de la masse donnée par la formule de Gauss pour le vecteur vitesse $\vec{v} = (u, 0)$ correspondant à l'écoulement d'un fluide dans un tuyau horizontal avec ou sans frottement (appliquer directement la formule de Gauss (B.3) pour retrouver ce résultat). Et la conservation de la masse ne dépend pas du fait que les extrémités du tuyau Ω soient orthogonales ou non au tuyau.

C Triangulation et relation d'Euler–Poincaré

(Ce paragraphe a été pris dans le livre de Nédélec [13] pages 104-105 auquel on renvoie pour les démonstrations complètes.)

Si Ω est un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 , on dit que Ω est partitionné en triangles si $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n T_i$, où les T_i sont tous des triangles compacts tels que $\overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\overset{\circ}{T}$ désigne l'intérieur de T .

On appelle triangulation de Ω une partition de Ω telle que pour $i \neq j$, $T_i \cap T_j$ est soit égal à \emptyset , soit égal à un côté tout entier de T_i et T_j .

Proposition C.1 Soit une triangulation $\bigcup_{i=1}^n T_i$ donnée de Ω . On note n_t le nombre de triangles, n_s le nombre de sommets, et n_c le nombre de côtés. On a :

$$n_t + n_s - n_c = 1$$

(relation d'Euler–Poincaré.)

Preuve. Si $n_t = 1$, la relation est vraie. On se donne 2 triangulations adjacentes, avec l'hypothèse $n_{t_1} + n_{s_1} - n_{c_1} = 1$ et $n_{t_2} + n_{s_2} - n_{c_2} = 1$ (notations immédiates). La triangulation somme des deux vérifie $n_t + n_s - n_c = n_{t_1} + n_{s_1} - n_{c_1} + n_{t_2} + n_{s_2} - n_{c_2} - r$ où r est le nombre de sommets et côtés comptés 2 fois, correspondant aux sommets et côtés sur la ligne d'adjacence des triangulations. Comme il y a 1 sommet de plus que de côtés sur une ligne, on a $r = 1$, d'où $n_t + n_s - n_c = 1 + 1 - 1 = 1$. \blacksquare

On note h_i le diamètre d'un triangle T_i (i.e. le diamètre du plus petit cercle contenant T_i), et $h = \max(h_i)$.

Proposition C.2 Si le nombre de côtés du bord est en $\frac{1}{h}$ lorsque h tend vers 0, asymptotiquement nous avons :

$$n_t \simeq 2n_s \quad \text{et} \quad n_c \simeq 3n_s$$

Preuve. Il s'agit de compter la somme des angles intérieurs : il y a n_t triangles donc la somme des angles de la triangulation est πn_t , et il y a de l'ordre de n_s sommets intérieurs et donc la somme des angles de la triangulation est de l'ordre de $2\pi n_s$. D'où $n_t \simeq 2n_s$ et avec la relation d'Euler–Poincaré on obtient $n_c \simeq 3n_s$. \blacksquare

Pour les polygones en 2-D ou pour les polyèdres en 3-D, on renvoie à Ern et Guermond [6].

On trouvera de multiples références dans les ouvrages ci-dessous.

Références bibliographiques

- 1 Abramowitz M., Stegun I.A. : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, Applied Math. Series #55. Dover Publications (1965).
- 2 Brenner S.C., Scott L.R. : *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Text in Applied Mathematics, Springer-Verlag.
- 3 Brézis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson (1983).
- 4 Ciarlet P.G. : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland (1977).
- 5 Fortin A. : *Analyse numérique pour ingénieurs*. Éditions de l'École Polytechnique de Montréal (1995).
- 6 Ern A., Guermond J.L. : *Elements finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, mathématiques et applications 36 (2002).
- 7 Girault, V., Raviart, P. A. : *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag (1986).
- 8 Guichardet A. : *Intégration. Analyse hilbertienne*. Cours de l'École Polytechnique, édition 1983.
- 9 Johnson C. : *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press (1987).
- 10 Joly P. : *Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis*. Collection mathématiques et applications, Ellipses (1990).
- 11 Lions J.L. : cours de l'École Polytechnique, promotion 1970.
- 12 nečas J. : *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*. Springer 2012 (1967).
- 13 Nédélec J.C. : *Méthode des éléments finis*. Mathématiques et applications n°7. Ellipses (1991).
- 14 Raviart P.A., Thomas J.M. : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson (1983).
- 15 Rudin W. : *Analyse réelle et complexe*. Masson (1995).
- 16 Sainsaulieu L. : *Calcul scientifique*. Masson (1996).
- 17 Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E. : *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson (1983).
- 18 Schwartz L. : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Collection enseignement des sciences, Hermann (1993).
- 19 Strang G. : *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace (1988).
- 20 Strang G., Fix J.F. : *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press (1973).
- 21 Verfürth R. : *A review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques*. Wiley (1996).