Notes de cours de l'ISIMA, deuxième année
http://www.isima.fr/~leborgne

Méthode de Newton–Raphson appliquée aux EDP non linéaires traitées par éléments finis

Gilles Leborgne

28 mars 2016

Table des matières

1 Méthode de Newton–Raphson

1.1 Fonction différentiable

Soit E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés de même dimension. Soit U un ouvert dans E_1 (non vide).

Soit $F : U \to E_2$ une fonction donnée supposée différentiable (on dit aussi dérivable). C.à.d., pour tout $u \in U$, il existe une application linéaire $L_u : E_1 \to E_2$ telle que, dans un voisinage ouvert de u :

$$F(u+w) = F(u) + L_u.w + o(||w||_{E_1}). \tag{1.1}$$

(Dans un voisinage ouvert de u signifie : pour $u \in U$ donné, $\exists r > 0$ t.q. $\forall w \in B_{E_1}(0,r)$, on a (1.1), où $B_{E_1}(0,r)$ est la boule ouverte de E_1 de centre 0 et de rayon r.)

Et on note $L_u =^{\text{noté}} dF(u) =^{\text{noté}} F'(u)$. Donc :

$$F(u+w) = F(u) + F'(u).w + o(||w||_{E_1}). \tag{1.2}$$

Conséquence de (1.2) : pour $u \in U$ (et h désignant un réel) :

$$\forall z \in E, \quad F(u+hz) = F(u) + h\,F'(u).z + o(h), \tag{1.3}$$

puisque la linéarité de $L_u = F'(u)$ donne $F'(u).(hz) = h\,F'(u).z$. Et donc, pour $u \in U$ et $z \in E_1$:

$$F'(u).z = \frac{F(u+hz) - F(u)}{h} + o(1), \tag{1.4}$$

d'où :

$$F'(u).z = \lim_{h\to 0} \frac{F(u+hz) - F(u)}{h}, \tag{1.5}$$

appelée différentielle (ou dérivée) de F en u le long de z.

1.2 Partie affine (linéarisation)

À $u \in U$ fixé, la partie affine de développement limité (1.2) est donnée par la fonction affine $\varphi_u : E \to F$ définie par, pour tout $w \in E$:

$$\varphi_u(w) = F(u) + F'(u).w. \tag{1.6}$$

Et φ_u est appelée approximation de F au premier ordre au voisinage de u. Ainsi (1.2) s'écrit :

$$F(u+w) = \varphi_u(w) + o(||w||_E). \tag{1.7}$$

Et la fonction affine φ_u est appelée la linéarisé de F au voisinage de u (attention au vocabulaire : la linéarisée est une fonction affine !).

1.3 Résolution de $F(u) = 0$ par la méthode de Newton–Raphson

But : pour une fonction $F : U \subset E_1 \to E_2$ donnée, trouver un zéro u de F, c.à.d. $u \in U$ t.q. :

$$F(u) = 0. \tag{1.8}$$

1.3.1 Première étape

Méthode de Newton–Raphson. Soit $u_0 \in U$. But : trouver un vecteur $w_1 \in E_1$ t.q. :

$$u = u_0 + w_1 \quad \text{est solution de (1.8)}, \tag{1.9}$$

c.à.d. t.q. :

$$F(u_0 + w_1) = 0. \tag{1.10}$$

On se sert de l'approximation affine φ_{u_0} de F, cf. (1.6) et (1.7) : on commence par chercher $w \in E_1$ solution de :

$$\varphi_{u_0}(w_1) = 0, \tag{1.11}$$

c.à.d. $w \in E_1$ solution de :

$$F(u_0) + F'(u_0).w_1 = 0. \tag{1.12}$$

Donc $w_1 \in E_1$ est solution du problème linéaire (linéaire car $L_{u_0} = F'(u_0)$ est linéaire) :

$$F'(u_0).w_1 = -F(u_0). \tag{1.13}$$

Une fois w_1 calculé, on pose :

$$u_1 = u_0 + w_1. \tag{1.14}$$

Fin de la première étape.

On espère que u_1 est plus proche que u_0 de la vraie solution u au sens :

$$||F(u_1)||_{E_2} < ||F(u_0)||_{E_2}. \tag{1.15}$$

Faire un dessin. (Si F est affine, alors $F(u_0 + w_1) = \varphi_{u_0}(w_1)$, et u_1 est un solution de (1.8).)

1.3.2 Itérations

Puis on itère : à partir de u_1, trouver $w_2 \in E_1$ solution du problème linéaire (comme pour (1.13)) :

$$F'(u_1).w_2 = -F(u_1). \tag{1.16}$$

Une fois w calculé, on pose :

$$u_2 = u_1 + w_2. \tag{1.17}$$

Schéma itératif : pour u_k donné, trouver $w_{k+1} \in E$ t.q. :

$$F'(u_k).w_{k+1} = -F(u_k), \tag{1.18}$$

et poser :

$$u_{k+1} = u_k + w_{k+1}. \tag{1.19}$$

On a créé la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dont on espère qu'elle converge vers une solution u de (1.8).

1.3.3 Calcul de $F'(u_k)$

Pour résoudre (1.18), il reste à calculer $F'(u_k).w$: on se sert de (1.5).

1.4 Exemples en dimension finie

1.4.1 En dimension finie 1

Exemple 1.1 Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(x) = x^2 - 1$. Dessiner. Cette fonction s'annule (en $x = \pm 1$). On veut appliquer la méthode de Newton–Raphson pour trouver numériquement un x t.q. $F(x) = 0$.

Initialisation : on prend $x_0 > 1$ (ou $x_0 < -1$), avec donc $F(x_0) > 0$. On prend un tel x_0 car F est strictement convexe, faire un dessin (dans le cas F strictement concave, on considère $-F$).

La dérivée de F est $F'(x) = 2x$.

La 1ère itération : on cherche $\delta x \in \mathbb{R}$ t.q. $F'(x_0).\delta x = -F(x_0)$, soit $2x_0\,\delta x = -(x_0^2 - 1)$. D'où $\delta x = -\frac{x_0^2-1}{2x_0}$: c'est le point d'intersection de la tangente $\delta x \to \varphi_{x_0}(x) = F(x_0) + F'(x_0).\delta x$ avec l'axe $y = 0$ (= l'axe des x).

D'où $x_1 = x_0 + \delta x = x_0 - \frac{x_0^2-1}{2x_0}$. Puis on itère : $x_{k+1} = x_k + \delta x = x_k - \frac{x_k^2-1}{2x_k}$. ▟

1.4.2 En dimension finie 2

Exemple 1.2 Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3 \\ F_2(x, y) = 4x^2 + 5y^2 - 6 \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La différentielle (ou dérivée) de F en $\vec{x}_0$ est l'application linéaire $dF(\vec{x}_0) = F'(\vec{x}_0) : \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \to F'(\vec{x}_0).\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ représentée par sa matrice jacobienne (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$) :

$$[F'(\vec{x}_0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 4y_0 \\ 8x_0 & 10y_0 \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Initialisation : on prend $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ t.q. $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$ pour que $[F'(\vec{x}_0)]$ soit inversible, et t.q. $F(\vec{x}_0) > 0$ au sens : $F_1(\vec{x}_0) > 0$ et $F_2(\vec{x}_0) > 0$.

1ère itération : on cherche $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ t.q. $F'(\vec{x}_0).\vec{w} = -F(\vec{x}_0)$. En notant $[\vec{w}] = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de $\vec{w}$ dans la base canonique, on a :

$$[F'(\vec{x}_0)].[\vec{w}] = -[F(\vec{x}_0], \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} 2x_0w_1 + 4y_0w_2 = -F_1(\vec{x}_0) \\ 8x_0w_1 + 10y_0w_2 = -F_2(\vec{x}_0) \end{cases} \tag{1.21}$$

On calcule $\vec{w}$, on pose $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{w}$, puis on itère.

Interprétation : les fonctions $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, composantes de F, ont leurs plans tangents en $\vec{x}_0$ donnés par :

$$z_i(\vec{w}) = F_i(\vec{x}_0) + \frac{\partial F_i}{\partial x}(\vec{x}_0)w_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y}(\vec{x}_0)w_2, \qquad i = 1, 2. \tag{1.22}$$

L'intersection du plan tangent z_i avec le plan $z = 0$ est la droite d'équation $(1.21)_i$ (ligne i du système (1.21)).

Et l'intersection de ces deux droites est la solution $\vec{w}$ du problème matriciel (1.21). ▟

1.4.3 Vers la dimension infinie

En dimension finie $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ avec n "grand", on applique la démarche de l'exemple précédent quand E_2 est muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{E_2}$. Reprenons l'exemple précédent dans $\mathbb{R}^2$: résoudre l'équation dite "formulation forte" :

$$F'(\vec{x}_0).\vec{w} = -F(\vec{x}_0), \tag{1.23}$$

équivaut à (immédiat) résoudre l'équation dite "formulation faible" :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \qquad (F'(\vec{x}_0).\vec{w}, \vec{v})_{\mathbb{R}^2} = -(F(\vec{x}_0), \vec{v})_{\mathbb{R}^2}, \tag{1.24}$$

soit :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \qquad b(\vec{w}, \vec{v}) = \ell(\vec{v}), \tag{1.25}$$

où $b(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire $(\vec{w}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to b(\vec{w}, \vec{v}) = (F'(\vec{x}_0).\vec{w}, \vec{v})_{\mathbb{R}^2}$, et ℓ la forme linéaire $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \to \ell.\vec{v} = -(F(\vec{x}_0), \vec{v})_{\mathbb{R}^2}$.

Comme ce problème (1.25) est linéaire en $\vec{v}$, il suffit de considérer, parmi tous les $\vec{v}$ dans (1.25), uniquement deux vecteurs $\vec{v}$ formant une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi (1.25) équivaut à : si $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, trouver $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant aux deux équations :

$$b(\vec{w}, \vec{a}_i) = \ell(\vec{a}_i), \quad i = 1, 2. \tag{1.26}$$

Et $\vec{w}$ est connu si on connaît ses deux composantes sur la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, donc (1.26) est un système de deux équations à deux inconnues. Dans $\mathbb{R}^2$ la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ choisie est souvent la base canonique.

C'est la démarche appliquée lorsqu'on établie la formulation variationnelle en éléments finis. Et lorsqu'on approxime la formulation variationnelle dans un espace V_h de dimension finie, on s'est ramené à $\mathbb{R}^n$, à cette différence près : on ne dispose pas de base canonique (on est dans un espace de fonction qui n'est pas un produit cartésien d'espaces de dimension 1). Ainsi (1.26) s'écrira : si $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de V_h, trouver $w \in V_h$ t.q. :

$$b(w, v_i) = \ell(v_i), \quad i = 1, , ..., n, \tag{1.27}$$

qui donne un système de n équations à n inconnues (les composantes de w). Voir (3.1).

2 Exemple : problème EDP non-linéaire en 1-D

2.1 Problème initial

Résoudre le problème de Dirichlet homogène dans $]0,1[$ (voir cours d'éléments finis) : pour $f \in E_2 = L^2(]0,1[)$, trouver $u \in E_1 = H_0^1(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$ (où donc $u(0) = u(1) = 0$) t.q. :

$$-u'' + c_1 u + c_3 u^3 = f, \tag{2.1}$$

où $c_1 \geq 0$ et $c_3 \geq 0$.

Quand $c_3 = 0$, on retrouve le problème linéaire usuel.

Pour résoudre le problème (2.1) par la méthode de Newton–Raphson, on a envie de poser :

$$F(u) = -u'' + c_1 u + c_3 u^3 - f, \tag{2.2}$$

avec $F : E_1 \to E_2$. Et on cherche alors $u \in E_1$ tel que

$$F(u) = 0. \tag{2.3}$$

Mais pour chercher une solution numérique "affine par morceaux" par la méthode des éléments finis P_1, la forme (2.1) de ce problème (2.3) est inadaptée : une fonction u affine par morceau n'est pas deux fois dérivable, et donc u'' n'existe pas au sens des fonctions, donc F dans (2.2) n'existe pas au sens des fonctions. On utilise :

2.2 Problème variationnel

Formulation variationnelle de (2.1) : pour $f \in L^2(]0,1[)$, trouver $u \in H_0^1(]0,1[)$ t.q. formellement :

$$(-u'' + c_1 u + c_3 u^3, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2}, \tag{2.4}$$

où $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ est le produit scalaire de $L^2(]0,1[)$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + c_1 \int_0^1 u(x)v(x)\,dx + c_3 \int_0^1 u^3(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,$$

soit, trouver $u \in H_0^1(]0,1[)$ t.q. :

$$b(u, v) = (f, v)_{L^2}. \tag{2.5}$$

On a posé :

$$\begin{cases} b(\cdot,\cdot) = a(\cdot,\cdot) + a_N(\cdot,\cdot), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + c_1 \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = (u',v')_{L^2} + c_1(u,v)_{L^2}, \\ a_N(u,v) = c_3 \displaystyle\int_0^1 u^3(x)v(x)\,dx = c_3(u^3, v)_{L^2}, \end{cases} \tag{2.6}$$

$a(\cdot,\cdot)$ pour la partie bilinéaire usuelle, et $a_N(\cdot,\cdot)$ pour la partie non bilinéaire (non linéaire en la première variable).

Si $c_3=0$, alors $a_N(\cdot,\cdot)=0$, et on utilise directement la méthode des éléments finis pour les problème linéaires (c'est le cas $b(\cdot,\cdot)$ bilinéaire).

Si $c_3\neq 0$, alors $b(\cdot,\cdot)$ n'est pas linéaire en sa première variable : on va linéariser $b(\cdot,\cdot)$ en sa première variable, en utilisant la méthode de Newton–Raphson.

La formulation formelle (2.5) a un sens dans $H_0^1(]0,1[)$. Le problème s'écrit rigoureusement :

$$\text{trouver } u\in H_0^1(]0,1[) \text{ t.q. } \forall v\in H_0^1(]0,1[),\quad b(u,v)=(f,v)_{L^2}. \tag{2.7}$$

2.3 Le problème $F_v(u)=0$ pour tout v

On écrit le problème (2.5) sous la forme : trouver $u\in H_0^1(]0,1[)$ t.q. $\forall v\in H_0^1(]0,1[)$:

$$F_v(u)=0, \tag{2.8}$$

où $F_v : H_0^1(]0,1[)\to\mathbb{R}$ est définie par :

$$F_v(u)=b(u,v)-(f,v)_{L^2}. \tag{2.9}$$

Ici F_v n'est pas affine en u quand $b(\cdot,\cdot)$ n'est pas linéaire en u (quand $c_3\neq 0$).

2.4 Les itérations de Newton–Raphson

Ainsi les itérations du schéma (1.18) s'écrivent : connaissant u_k, trouver w tel que :

$$\forall v\in H_0^1(]0,1[),\quad F_v'(u_k).w=-F_v(u_k), \tag{2.10}$$

puis poser $u_{k+1}=u_k+w$, et itérer.

2.5 Calcul de $F_v'(u).w$

Pour résoudre (2.10), il faut calculer les $F_v'(u_k).w$. Avec (1.5) on a :

$$\begin{aligned}
F_v'(u_k).w &= \lim_{h\to 0}\frac{F_v(u_k+hw)-F_v(u_k)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(b(u_k+hw,v)-(f,v)_{L^2})-(b(u_k,v)-(f,v)_{L^2})}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a(u_k+hw,v)-a(u_k,v)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{a_N(u_k+hw,v)-a_N(u_k,v)}{h},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

cf. (2.5), (2.6) et (2.9). On a, ayant $a(\cdot,\cdot)$ linéaire par rapport à la première variable :

$$a(u_k+hw,v)-a(u_k,v)=h\,a(w,v)=h(w',v')_{L^2}+c_1h(w,v)_{L^2}, \tag{2.12}$$

et :

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(u_k+hw,v)-a(u_k,v)}{h}=(w',v')_{L^2}+c_1(w,v)_{L^2}. \tag{2.13}$$

Et on a, pour $x\in\Omega$:

$$\begin{aligned}
(u_k(x)+hw(x))^3 &= u_k(x)^3+3u_k(x)^2hw(x)+3u_k(x)h^2w^2(x)+u_k(x)h^3w^3(x)\\
&= u_k^3(x)+3hu_k^2(x)w(x)+o(h),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

d'où :

$$a_N(u_k+hw,v)-a_N(u_k,v)=3h(u_k^2w,v)_{L^2}+o(h), \tag{2.15}$$

d'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{a_N(u_k+hw,v)-a_N(u_k,v)}{h}=3c_3(u_k^2w,v)_{L^2}. \tag{2.16}$$

Finalement :

$$F_v'(u_k).w=\underbrace{(w',v')_{L^2}+c_1(w,v)_{L^2}}_{\text{partie usuelle bilinéaire}}+\underbrace{3c_3(u_k^2w,v)_{L^2}}_{\text{partie due au terme non linéaire}}. \tag{2.17}$$

2.6 Calcul de la solution

Il s'agit de résoudre (2.10) en se servant de (2.17). Ici, dès que $c_1, c_3 \geq 0$, on a $F'_v(u_k)$ inversible, et le problème est bien posé : on peut appliquer le théorème de Lax–Milgram, puisque le membre de droite dans (2.17) est une forme bilinéaire en $\vec{w}, \vec{v}$, et que $3c_3(u_k^2 w, w)_{L^2} = c_3 \int_0^1 u_k^2(x) w^2(x)\,dx \geq 0$ quand $c_3 \geq 0$, donc que $F'_v(u_k).v \geq ||v'||^2_{L^2} = ||v||^2_{H^1_0(]0,1[)}$ quand $c_1 \geq 0$, voir cours d'éléments finis.

3 Résolution par éléments finis

3.1 Problème approché

On se place dans un sous-espace $V_h \subset H^1_0(]0,1[)$ de dimension finie, exemple $V_h = P_1$, dans lequel on dispose d'une base $(\varphi_i)_{i=1,...,n}$.

Le problème (2.5) est modifié en le problème approché : trouver $u_h \in V_h$ t.q. :

$$\forall v_h \in V_h, \quad b(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2}. \tag{3.1}$$

Ce problème étant linéaire en v_h, et (φ_i) étant une base de V_h, (3.1) équivaut à :

$$\forall i = 1, ..., n, \quad b(u_h, \varphi_i) = (f, \varphi_i)_{L^2}, \tag{3.2}$$

système de n équations, où les n inconnues sont les n composantes de u_h sur la base (φ_i).

3.2 Problème itératif

Application de la méthode de Newton–Raphson (1.18) : on réécrit (3.2) sous la forme, cf. (2.9) :

$$\forall i = 1, ..., n, \quad F_{\varphi_i}(u_h) = 0, \qquad \text{où} \qquad F_{\varphi_i}(u_h) = b(u_h, \varphi_i) - (f, \varphi_i)_{L^2}. \tag{3.3}$$

La k-ème itération de la méthode de Newton–Raphson (1.18)s'écrit alors : $u_k \in V_h$ étant donné, trouver $w_h \in V_h$ solution du système de n équations :

$$\forall i = 1, ..., n, \qquad F'_{\varphi_i}(u_k).w_h = -F_{\varphi_i}(u_k). \tag{3.4}$$

Soit, avec (2.17), $u_k \in V_h$ étant donné, trouver $w_h \in V_h$ solution du système de n équations :

$$(w'_h, \varphi'_i)_{L^2} + c_1(w_h, \varphi_i)_{L^2} + 3c_3(u_k^2 w_h, \varphi_i)_{L^2} = -b(u_k, \varphi_i) + (f, \varphi_i)_{L^2}, \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.5}$$

Et trouver w_h consiste à trouver ses n composantes $\gamma_j \in \mathbb{R}$ sur la base (φ_i) :

$$w_h = \sum_{j=1}^n \gamma_j \varphi_j. \tag{3.6}$$

Le problème (3.5) devient donc : trouver $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\forall i = 1, ..., n$:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j (\varphi'_j, \varphi'_i)_{L^2} + c_1 \sum_{j=1}^n \gamma_j (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2} + 3c_3 \sum_{j=1}^n \gamma_j (u_k^2 \varphi_j, \varphi_i)_{L^2} = -b(u_k, \varphi_i) + (f, \varphi_i)_{L^2}, \tag{3.7}$$

problème de n équations (pour $i = 1, ..., n$) aux n inconnues les γ_j.

Soit : trouver $\vec{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ t.q. :

$$A_k.\vec{\gamma} = \vec{D}_k, \tag{3.8}$$

où :

$$A_k = K + M + N_{u_k} \quad \text{matrice } n \times n, \tag{3.9}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&K = [K_{ij}] = [(\varphi'_j, \varphi'_i)_{L^2}] \quad \text{(matrice de rigidité)},\\
&M = [M_{ij}] = [(\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}] \quad \text{(matrice de masse)},\\
&N_{u_k} = [N_{u_k ij}] = [(3c_3 u_k^2 \varphi_j, \varphi_i)_{L^2}] \quad \text{(matrice due au terme linéarisé)},\\
&\vec{D}_k = \begin{pmatrix} -b(u_k, \varphi_1) + (f, \varphi_1)_{L^2} \\ \vdots \\ -b(u_k, \varphi_n) + (f, \varphi_n)_{L^2} \end{pmatrix} \quad \text{(vecteur membre de droite)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La résolution du problème matriciel (3.8) donne $\vec{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ donc $w_h = \sum_{i=1} \gamma_j \varphi_j$.

Puis on forme $u_{k+1} = u_k + w_h \in V_h$.

Et on itère jusqu'à un critère d'arrêt.