Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, deuxième année
http://www.isima.fr/leborgne

Complément : espaces de Sobolev fractionnaires

Gilles LEBORGNE

13 août 2007

Table des matières

1 Espaces de Sobolev H^s pour $s \in \mathbb{R}$

1.1 Introduction

Références : principalement Lions et Magenes [4], et cours de l'Ecole Polytechnique de Goulaouic [2] et de Goulaouic et Meyer [3]. Prérequis : cours de distribution, voir cours de 2ème année ou par exemple Schwartz [5] ou [2] ou [3].

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions définies sur Ω, et on note $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que pour $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ t.q. } |\alpha| \leq m\},$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ quand $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et où $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$. Et $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Les espaces H^m pour m entier ne sont pas suffisant pour obtenir des résultats optimaux pour les théorèmes de traces comme $u \in H^1(\Omega) \to u_{|\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Par exemple le facteur $\frac{1}{2}$ est nécessaire pour contrôler les termes à ajouter dans le cadre d'une stabilisation de la condition inf-sup : Cf. Nitsche [?], Pitkäranta [?], Barbosa et Hughes [?], qui proposent une stabilisation optimale par des termes de type $h^{\frac{1}{2}}||.||$. On utilise pour cela l'estimation inverse :

$$\exists c > 0, \quad \forall v_h \in V_h, \quad h^{\frac{1}{2}}\ ||\frac{\partial v_h}{\partial n}{}_{|\Gamma}||_{L^2(\Gamma)} \leq c\ ||\vec{\text{grad}} v_h||_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2}$$

quand le maillage est quasi-uniforme, et "$V_h = P_k$-continues" (avec $k \geq 1$), où on rappelle que $\frac{\partial v_h}{\partial n} =^{\text{déf}} \vec{\text{grad}} v_h.\vec{n}$ sur Γ.

On va caractériser les espaces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et obtenir en particulier la continuité de la seconde application trace $\gamma_1 : u \in H^1(\Omega) \to \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad ||\frac{\partial v}{\partial n}{}_{|\Gamma}||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c\ ||\vec{\text{grad}} v||_{L^2(\Omega)}.$$

1.2 Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$

On se sert du fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ici on est dans l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, et il n'y a pas de problème de bord (problème dû à Γ).

On rappelle que pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) =^{\text{noté}} L^2(\mathbb{R}^n)$ ou bien $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) =^{\text{noté}} L^2(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier $\hat{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée par exemple par $\hat{u}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{x}.\vec{\xi}} u(\vec{x})\, dx$, et on a alors $u(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+i\vec{x}.\vec{\xi}} \hat{u}(\vec{\xi})\, d\xi$ (formule d'inversion).

On rappelle que, par transformée de Fourier, la dérivation $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ est transformée en l'expression algébrique $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(\vec{\xi}) = i\xi_k \hat{u}(\vec{\xi})$. Ainsi $u \in H^m(\Omega)$ équivaut à $|\hat{u}(\vec{\xi})\vec{\xi}^\alpha| \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ t.q. $\alpha \leq m$, où $\vec{\xi}^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^n \xi_k^{\alpha_k}$, et donc :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 |\vec{\xi}^\alpha|^2 \, d\xi < \infty \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\},$$

Ou de manière équivalente :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 (1 + ||\vec{\xi}||^2)^m \, d\xi < \infty\}. \tag{1.3}$$

Exercice 1.1 Montrer qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que
$c_1(1 + ||\vec{\xi}||^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} (\vec{\xi}^\alpha)^2 \leq c_2(1 + ||\vec{\xi}||^2)^m$.
En déduire (1.3).

Définition 1.2 Pour $s \in \mathbb{R}$ (positif ou négatif), on note :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}' : \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 (1 + ||\vec{\xi}||^2)^s \, d\xi < \infty\}.$$

On le munit du produit scalaire :

$$(u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\vec{\xi}) \overline{\hat{v}(\vec{\xi})} (1 + ||\vec{\xi}||^2)^s \, d\xi.$$

(Les transformées de Fourier sont à valeurs complexes, d'où l'emploi du conjugué.) Ainsi $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert (voir Goulaouic [2] et remarque suivante).

Remarque 1.3 Si on note $\omega_s(\vec{\xi}) = (1 + ||\vec{\xi}||^2)^s$ (un "poids") et si on note :

$$L^2_{\omega_s}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \int_\Omega |u(\vec{\xi})|^2 \omega_s(\vec{\xi}) \, d\xi < \infty\},$$

alors $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hilbert des distributions tempérées $v \in \mathcal{S}'$ dont la transformée de Fourier $\hat{v} = u$ appartient à $L^2_{\omega_s}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.4 *Le dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$ (l'ensemble des formes linéaires continues sur $H^s(\mathbb{R}^n)$) est l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ (pour la dualité $\langle ., . \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$).*

Preuve. On applique la remarque précédente : par Fourier il s'agit de montrer que le dual de $L^2_{\omega_s}(\mathbb{R}^n)$ est $L^2_{\omega_{-s}}(\mathbb{R}^n)$ dans la dualité $\langle ., . \rangle_{L^2, L^2}$.

Théorème 1.5 *(Théorème de Sobolev.) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s > k + \frac{n}{2}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est continûment plongé (injection canonique continue) dans $B^k(\mathbb{R}^n)$ espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k ; $H^s(\mathbb{R}^n)$ est inclu dans $C^k(\mathbb{R}^n)$; et de plus :*

$$\lim_{||\vec{x}|| \to \infty} |D^\alpha u(\vec{x})| = 0 \quad \textit{pour tout} \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n) \textit{ et } |\alpha| \leq k.$$

(Toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ est bornée, continue et s'annule à l'infini, de même que ses dérivées jusqu'à l'ordre k, quand $s > k + \frac{n}{2}$.)

Preuve. Montrons que

$$\exists c > 0, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad ||\widehat{D^\alpha u}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $||D^\alpha u||_\infty \leq ||\widehat{D^\alpha u}||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ on aura le caractère injection canonique continue, puis $\widehat{\widehat{D^\alpha u}}$ est continue, donc $D^\alpha u$ est continue, puis $D^\alpha u$ s'annule à l'infini car $\widehat{D^\alpha u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (voir début du cours sur les transformées de Fourier, poly distributions).

On a avec Cauchy–Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u}(\vec{\xi}) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\vec{\xi}^\alpha \hat{u}(\vec{\xi})| \, d\xi \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\vec{\xi}^{2\alpha}}{(1+\vec{\xi}^2)^s} \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\vec{\xi}^2)^s |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} = c||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

où $c = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\vec{\xi}^{2\alpha}}{(1+\vec{\xi}^2)^s} \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 1.6 On a : si $k, \ell \in \mathbb{N}$ et $k > \ell$ alors $H^k(\mathbb{R}^n) \subset H^\ell(\mathbb{R}^n)$. De même on a : si $s, t \in \mathbb{R}$ et $s > t$ alors $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^t(\mathbb{R}^n)$. Voir Goulaouic [2]. ∴

Remarque 1.7 Pour la masse de Dirac en $\vec{0}$, on a $\delta_{\vec{0}} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ssi $s < -\frac{n}{2}$. Ainsi dans $\mathbb{R}$ on a $\delta_0 \in H^{-1}(\mathbb{R})$, et dans $\mathbb{R}^2$ on a $\delta_{\vec{0}} \notin H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. ∴

1.3 Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n{}_+)$ pour $s \in \mathbb{R}$

On introduit un ouvert avec bord Γ, le "demi-espace supérieur" $\mathbb{R}^n_+$:

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+ = \{(\vec{x}, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \text{ t.q. } z > 0\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Et donc $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

On note (application trace "sur le plan horizontal", i.e. application "restriction au bord") :

$$\gamma_0 : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \varphi & \to \varphi(.,0), \end{cases} \tag{1.5}$$

i.e. $\gamma_0(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ est donnée par $\gamma_0(\varphi)(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, 0)$.

Théorème 1.8 *Pour $s > \frac{1}{2}$, l'application γ_0 se prolonge par continuité et densité en une application (encore notée γ_0) :*

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^s(\mathbb{R}^n) & \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \varphi & \to \varphi(.,0), \end{cases}$$

application linéaire continue qui de plus est surjective. De plus il existe un relèvement R_0 : $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ qui est bicontinu (bijectif continu d'inverse continu), et qui vérifie donc $\gamma_0 \circ R_0 = I$ (identité de $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$).

En particulier $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire, continue et surjective (cas $s = 1$).

(N.B. : le résultat est faux pour $s = \frac{1}{2}$.)

Preuve. La linéarité est immédiate. Pour la continuité, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$, il suffit de montrer :

$$\exists c > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad ||\gamma_0 \varphi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c\, ||\varphi||_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Notons $\mathcal{F}_z$ la transformée de Fourier partielle : $\mathcal{F}_z(\varphi)(\vec{x}, \eta) = \int_{z \in \mathbb{R}} e^{-iz\eta} \varphi(\vec{x}, z)\, dz$, de transformée inverse donnant $\varphi(\vec{x}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \in \mathbb{R}} \mathcal{F}_z \varphi(\vec{x}, \eta)\, d\eta$. D'où :

$$||\gamma_0 \varphi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} | \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\vec{\xi}, \eta)\, d\eta|^2 (1 + \vec{\xi}^2)^{s-\frac{1}{2}}\, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Et par Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\vec{\xi}, \eta)\, d\eta| &= |\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\vec{\xi}, \eta)(1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}} \frac{1}{(1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\, d\eta| \\ &\leq (\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\vec{\xi}, \eta)|^2 (1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^s\, d\eta)^{\frac{1}{2}} (\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^s}\, d\eta)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\vec{\xi}, \eta)|^2 (1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^s\, d\eta)^{\frac{1}{2}}\, g(\vec{\xi})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où $g(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^s}\, d\eta$. D'où, avec Fubini :

$$||\gamma_0 \varphi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \vec{\xi}^2)^{s-\frac{1}{2}} g(\vec{\xi})\; |\hat{\varphi}(\vec{\xi}, \eta)|^2 (1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^s\, d\xi d\eta \leq c\, ||\varphi||_{H^s(\Omega)}$$

où $c = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^s}\, dt$ car :

$$(1 + \vec{\xi}^2)^{s-\frac{1}{2}} g(\vec{\xi}) = (1 + \vec{\xi}^2)^{s-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\vec{\xi}^2+\eta^2)^s}\, d\eta = \frac{1}{(1+\vec{\xi}^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\frac{\eta^2}{1+\vec{\xi}^2})^s}\, d\eta = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^s}\, dt,$$

indépendant de $\vec{\xi}$.

Pour le caractère surjectif, il s'agit de construire un relévement $R_0 u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ quand $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. On pose :

$$R_0 u(\vec{x}, z) = \mathcal{F}_{\vec{x}}^{-1}(\varphi((1+\vec{\xi}^2)z)\hat{u}(\vec{\xi}))$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction qui vérifie $\varphi(0) = 1$. On a donc $\gamma_0(R_0 u) = u$ comme souhaité, et par transformée de Fourier on obtient :

$$||R_0 u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \, ||u||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

où c est une constante indépendante de u. ∎

Remarque 1.9 On dispose d'un isomorphisme "simple" de rélèvement $J : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^1_*(\mathbb{R}^n_+)$ un sous-espace de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ donné par :

$$H^1_*(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n_+) : \Delta u = u\} :$$

on pose $u = Jg$ la solution $u \in H^1_*(\mathbb{R}^n_+)$ qui vérifie (au bord) $u(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, ..., x_{n-1})$. Dans la démonstration précédente, on prend $\varphi(z) = e^{-z\sqrt{|\xi|^2+1}}$, et on vérifie que u est la solution cherchée : on veut vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u$, i.e. par transformée de Fourier partielle en $(x_1, ..., x_{n-1})$, en posant $v = \mathcal{F}_{\vec{x}} u$, que $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \vec{\xi}^2 v = v$ avec $v(\vec{\xi}, 0) = \hat{g}(\vec{\xi})$. Et la seule solution de cette équation différentielle ordinaire est $v = e^{-z\sqrt{|\xi|^2+1}}\hat{g}(\vec{\xi})$. ∎

On note (la k+1-ème application trace) :

$$\gamma_k : \begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) & \to \mathcal{D}(\Omega) \\ \varphi & \to \dfrac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(.,0), \end{cases} \tag{1.6}$$

i.e. $\gamma_k(\varphi) \in \mathcal{D}(\Omega)$ est donnée par $\gamma_k(\varphi)(\vec{x}, z) = \frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(\vec{x}, 0)$.

Corollaire 1.10 *Pour $s > \frac{1}{2}$ et pour $0 \leq k < s - \frac{1}{2}$, l'application γ_k se prolonge par continuité et densité en une application (encore notée γ_k) :*

$$\gamma_k : \begin{cases} H^s(\Omega) & \to H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \varphi & \to \dfrac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(.,0), \end{cases}$$

avec γ_k surjective. En particulier $\gamma_1 : u \in H^1(\Omega) \to \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire, continue et surjective où $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\text{grad}} u.\vec{n}$ avec $\vec{n}$ la normale extérieur à Ω qui vaut ici $(\vec{0}, -1)$ (vecteur normal unitaire "vers le bas").

Preuve. On applique le théorème de Sobolev 1.5 au théorème 1.8. ∎

1.4 Espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$

On considère un ouvert Ω régulier, i.e. suffisamment régulier pour que toute fonction $u \in H^m(\Omega)$ puisse être prolongée en une fonction $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.11 On reprend l'exemple de Goulaouic [2] : pour Ω quelconque on ne peut pas toujours prolonger une fonction $u \in H^m(\Omega)$ en une fonction $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \ 0 < y < x^4\}$ (faire un dessin). Soit $u(x, y) = \frac{1}{x^\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. On a $u \in H^2(\Omega)$, mais u n'est pas bornée et donc n'est pas dans $H^2(\mathbb{R}^n)$, cf théorème de Sobolev 1.5. ∎

Ensuite on se ramène au cas de $\mathbb{R}^n{}_+$ à l'aide d'une partition de l'unité (vour cours de distributions) : on prend Ω ouvert borné de bord Γ de classe C^m ; on peut alors recouvrir Ω par des ouverts $(\Omega_i)_{i=1,\dots,N}$ tels que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ et $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^N \Omega_i$, et tels que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ et on dispose de N difféomorphismes de classe C^m $\theta_i : \Omega_i \to B_i$ pour B_i un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{cases} \theta_i(\Omega_i \bigcap \Gamma) = \{(\vec{x}, z) \in B_i : z = 0\}, \\ \theta_i(\Omega_i \bigcap \Omega) = \{(\vec{x}, z) \in B_i : z > 0\}. \end{cases}$$

On se ramène ainsi localement à l'étude de $H^m({\mathbb{R}^n}_+)$, pour lequel on commence par montrer que toute fonction $u \in H^m({\mathbb{R}^n}_+)$ peut être prolongée en une fonction $Pu \in H^m(\mathbb{R}^n)$ (prolongement par "réflexion" après l'avoir fait pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ espace dense dans $H^m({\mathbb{R}^n}_+)$).

Pour pouvoir se ramener à $\mathbb{R}^n_+$ il faut montrer l'invariance de $H^s({\mathbb{R}^n}_+)$ par difféomorphisme :

Proposition 1.12 *Soit $s > 0$. Si Φ est un changement de variables (un difféomorphisme) d'un voisinage $\Omega_{\vec{a}}$ de $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ sur un voisinage $\Omega_{\vec{b}}$ de $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, et si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de $\vec{b}$, alors $f \circ \Phi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de $\vec{a}$.*

(Dire que "$f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de $\vec{b}$" signifie que $f \in \mathcal{S}'$ et qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\varphi(\vec{b}) \neq 0$ et tel que $\varphi f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.)

Preuve. On se sert du lemme suivant 1.13 (caractérisation de $H^s(\mathbb{R}^n)$ n'utilisant pas la transformée de Fourier car on ne sait pas calculer la transformée de Fourier de $f \circ \Phi$) et du changement de variables Φ dans (1.7) (idem avec (1.8)). On a, avec "$\tilde{\vec{x}} = \Phi(\vec{x})$" :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\tilde{\vec{x}}) - f(\tilde{\vec{y}})|^2}{||\tilde{\vec{x}} - \tilde{\vec{y}}||^{2(s+\frac{n}{2})}} \, d\tilde{x} d\tilde{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\Phi(\vec{x})) - f(\Phi(\vec{y}))|^2}{||\Phi(\vec{x}) - \Phi(\vec{y})||^{2(s+\frac{n}{2})}} |J_\Phi(\vec{x})| \, |J_\Phi(\vec{y})| \, dxdy.$$

Et avec f de la forme φf avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_b)$ tel que $\varphi(\vec{b}) \neq 0$, et avec $\Phi : \Omega_{\vec{a}} \to \Omega_{\vec{b}}$ difféomorphisme, on intègre en x, y sur $\Omega_{\vec{a}} \times \Omega_{\vec{a}}$, et il suffit de montrer qu'il existe $c > 0$ t.q. pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega_{\vec{a}}$:

$$c||\vec{x} - \vec{y}|| \leq ||\Phi(\vec{x}) - \Phi(\vec{y})||.$$

Mais Φ est un difféomorphisme, donc Φ^{-1} également, et $||\Phi^{-1}(\tilde{\vec{x}}) - \Phi^{-1}(\tilde{\vec{y}})|| \leq \frac{1}{c}||\tilde{\vec{x}} - \tilde{\vec{y}}||$ est vrai localement puisque $\Phi^{-1}(\tilde{\vec{x}}) - \Phi^{-1}(\tilde{\vec{y}}) = d(\Phi^{-1})(\tilde{\vec{y}}).(\vec{x} - \vec{y}) + o(||\vec{x} - \vec{y}||)$. ∎

Lemme 1.13 *(Caractérisation de $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > 0$.) Soit $s \in]0, 1[$. On a :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\vec{x}) - u(\vec{y})|^2}{||\vec{x} - \vec{y}||^{2(s+\frac{n}{2})}} \, dxdy < \infty\}, \qquad \forall |\alpha| = m,$$

et la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$ est équivalente à :

$$\Big(||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\vec{x}) - u(\vec{y})|^2}{||\vec{x} - \vec{y}||^{2(s+\frac{n}{2})}} \, dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Et si $s = m + \sigma$ où $m \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in]0, 1[$. On a :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^m(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(\vec{x}) - D^\alpha u(\vec{y})|^2}{||\vec{x} - \vec{y}||^{2(\sigma+\frac{n}{2})}} \, dxdy < \infty, \quad \forall |\alpha| = m\},$$

et la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$ est équivalente à :

$$\Big(||u||^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(\vec{x}) - D^\alpha u(\vec{y})|^2}{||\vec{x} - \vec{y}||^{2(\sigma+\frac{n}{2})}} \, dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

où $||u||_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ est la norme associée au produit scalaire donné dans (1.1).

Et la norme $||.||_s$ est équivalente à la norme donnée par (1.8).

Preuve. Traitons le cas $m = 0$, le cas $m \neq 0$ s'en déduisant. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Par translation des transformées de Fourier, on a :

$$\int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} |u(\vec{x}+\vec{y}) - u(\vec{x})|^2\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 |e^{i\vec{y}.\vec{\xi}} - 1|^2\, d\xi,$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\vec{x}) - u(\vec{y})|}{||\vec{x}-\vec{y}||^{2s+n}}\, dxdy &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\vec{x}+\vec{y}) - u(\vec{x})|}{||\vec{y}||^{2s+n}}\, dxdy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\vec{y}.\vec{\xi}} - 1|^2}{||\vec{y}||^{2s+n}}\, dy\Big)\, d\xi.\end{aligned}$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\vec{y}.\vec{\xi}} - 1|^2}{||\vec{y}||^{2s+n}}\, dy = C||\vec{\xi}||^{2s}, \tag{1.9}$$

voir exercice suivant 1.14, d'où $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, cf. exercice 1.1, et on en déduit que les normes sont équivalentes.

Exercice 1.14 Calculer C dans (1.9).

Réponse. Pour calculer C on passe en sphérique : soit $\vec{y} = r\vec{n}$ où $r = ||\vec{y}||$ et $\vec{n} \in S^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $d\sigma$ la mesure de Lebesgue sur la sphère unité. Ainsi l'élément de volume est $dy = r^{n-1}dr\, d\sigma$.

On définit λ tel que $\vec{y}.\vec{\xi} = r\lambda$, i.e. $\lambda = \vec{n}.\vec{\xi}$ (indépendant de r). On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\vec{y}.\vec{\xi}} - 1|^2}{||\vec{y}||^{2s+n}}\, dy = \int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{ir\lambda} - 1|^2}{r^{2s+1}}\, dr\, d\sigma.$$

On commence par le cas $\lambda > 0$. On fait le changement de variables $r \to u$ où $u = r\lambda$, d'où $du = \lambda\, dr$, et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{ir\lambda} - 1|^2}{r^{2s+1}}\, dr = \lambda^{2s}\int_{\mathbb{R}} |e^{iu} - 1|^2 \frac{du}{u^{2s+1}} = 4\lambda^{2s}\int_{\mathbb{R}} \sin^2\frac{u}{2}\, \frac{du}{u^{2s+1}}.$$

Si $\lambda < 0$ on pose $u = -r\lambda$ et comme $|e^{-iu} - 1| = |e^{iu} - 1|$ le résultat est conservé en prenant $|\lambda|$ au lieu de λ. Et si $\lambda = 0$ l'intégrale est nulle. D'où :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\vec{y}.\vec{x}} - 1|^2}{||\vec{y}||^{2s+n}}\, dy = \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{u^{2s+1}}\, du\Big)\int_{S^{n-1}} 4|\vec{n}.\vec{\xi}|^{2s} d\sigma = C|\vec{\xi}|^{2s}.$$

En effet, posant $\vec{\xi} = R\vec{n}_0$ où $R = ||\vec{\xi}||$, on a $\int_{S^{n-1}} |\vec{n}.\vec{\xi}|^{2s} d\sigma = \int_{S^{n-1}} R^{2s}|\vec{n}.\vec{n}_0|^{2s} d\sigma = R^{2s}\int_{S^{n-1}} |\vec{n}.\vec{e}_1|^{2s} d\sigma = R^{2s}C_0 = |\vec{\xi}|^{2s}C_0$.

Références bibliographiques

1 Brézis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson (1983).

2 Goulaouic C. : *Analyse fonctionnelle et calcul différentiel.* Ed. de l'Ecole Polytechnique, 1982.

3 Goulaouic C., Meyer Y. : *Analyse fonctionnelle et calcul différentiel.* Ed. de l'Ecole Polytechnique, 1984.

4 Lions J.L., Magenes E. : *Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol 1.* Dunod (1968).

5 Schwartz L. : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Collection enseignement des sciences, Hermann (1993).