Notes de cours de l'ISIMA, deuxième année, http://www.isima.fr/leborgne

Introduction à la théorie des Distributions

Gilles Leborgne

26 novembre 2024

Table des matières

Notation : $f := g$ signifie : "g étant donnée, on défini f par $f = g$" ; encore noté $f \overset{\text{déf}}{=} g$.

1 $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact

1.1 Somme et différence d'ensembles

1.1.1 Somme d'ensembles

Soit E un espace vectoriel. On rappelle que si $c \in E$ et A un sous-ensemble de E alors :

$$c + A \overset{\text{déf}}{=} \{y \in E : \exists x \in A \text{ t.q. } y = c + x\} \overset{\text{noté}}{=} \{c+x : \ x \in A\} = A + c \tag{1.1}$$

est le translaté de A du vecteur c. En particulier dans $\mathbb{R}$:

$$c + [a, b] = [a+c, b+d]. \tag{1.2}$$

Et si A et B sont deux sous-ensembles de E, alors :

$$A + B \overset{\text{déf}}{=} \{z \in E : \exists (x, y) \in A \times B \text{ t.q. } z = x+y\} \overset{\text{noté}}{=} \{x+y : \ x \in A, \ y \in B\} \tag{1.3}$$

Autrement dit :

$$A + B = \bigcup_{y \in B} (A + \{y\}) \qquad (= \bigcup_{x \in A} (\{x\} + B)). \tag{1.4}$$

En effet, si $z = x + y \in A + B$ alors $z \in A + y \in \bigcup_{y\in B}(A + \{y\})$. Et si $z \in \bigcup_{y\in B}(A + \{y\})$ alors il existe y t.q. $z \in A + \{y\} \subset A + B$.

Exemple 1.1 Montrer : dans $\mathbb{R}$ la somme de deux intervalles est un intervalle :

$$[a, b] + [c, d] = [a+c, b+d]. \tag{1.5}$$

Réponse. $\subset$. $z = x + y \in [a, b] + [c, d]$, donc $z \geqslant a + y \geqslant a + c$ et $z \leqslant x + d \leqslant b + d$, donc $z \in [a+c, b+d]$.

$\supset$. $z \in [a+c, b+d]$. Soit $\alpha, \beta \geqslant 0$ t.q. $z = a+c+\alpha = b+d-\beta$ où donc $a+c+\alpha \leqslant b+d$ et $b+d-\beta \geqslant a+c$; si $\alpha \leqslant b-a$ on pose $x = a+\alpha$, avec donc $x \in [a, b]$, puis on pose $y = z-x = c \in [c, d]$, donc $z = x + y \in [a, b] + [c, d]$; si $\alpha \geqslant b-a$ alors $b+d-\beta = z = a+c+\alpha \geqslant a+c+b-a = c+b$, donc $\beta \leqslant d-c$; on pose alors $y = d - \beta$, et donc $y \in [c, d]$, puis on pose $x = z-y = b \in [a, b]$, donc $z = x + y \in [a, b] + [c, d]$. ∴

Remarque 1.2 1- La somme de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé : exemple dans $\mathbb{R}$: soit $A = [2, \infty[_{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2\}$ (les entiers supérieurs ou égaux à 2), soit $B = \{x = -n + \frac{1}{n} : n \in A\}$. Alors A et B sont fermés (leurs complémentaires sont des ouverts) ; et $A + B \supset \{\frac{1}{n} : n \geqslant 2\}$ avec $0 \notin A + B$ et $0 \in \overline{A + B}$. Noter qu'ici A et B sont non bornés.

2- La somme $A + B$ de deux compacts d'un espace vectoriel E est un compact : soit $(z_n)_{\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{\mathbb{N}} \in (A+B)^{\mathbb{N}}$ une suite dans $A+B$. Comme A est compact, de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans A, et soit $x \in A$ la limite. Comme B est compact, de la suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(y_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ convergente dans B, et soit $y \in B$ la limite. D'où la suite extraite $(z_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers $x+y \in A + B$, donc converge dans $A + B$. ∴

1.1.2 Différence d'ensembles

Soit E un ensemble et $A \subset E$ (sous-ensemble).

$$E - A \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E : x \notin A\} \overset{\text{noté}}{=} \complement_E A \overset{\text{noté}}{=} A^C \tag{1.6}$$

est appelé le complémentaire de A dans E.

Exercice 1.3 Montrer que $(A^C)^C = A$.

Réponse. $x \in (A^C)^C$ ssi $x \notin A^C$ ssi $x \in A$. ∴

Exercice 1.4 Montrer que $A \subset B \iff B^C \subset A^C$.

Réponse. $\Rightarrow$. Supposons $A \subset B$: soit $x \in B^C$ donc $x \notin B$, donc $x \notin A$, donc $x \in A^C$.

$\Leftarrow$. Supposons $B^C \subset A^C$ donc $(A^C)^C \subset (B^C)^C$ d'après $\Rightarrow$, soit $A \subset B$. ∴

Soit A et B deux sous-ensembles de E.

$$A - B \overset{\text{déf}}{=} \{x \in A : x \notin B\} = A \bigcap B^C = A \bigcap (E - B) \overset{\text{noté}}{=} \complement_A B. \tag{1.7}$$

1.2 Support d'une fonction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ des sa norme euclidienne $||.||_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{noté}}{=} ||.||$. Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ on note :

$$B(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{y} - \vec{x}|| < r\} \tag{1.8}$$

la boule ouverte de centre $\vec{x}$ et de rayon r. (Dans $\mathbb{R}$ on a $B(x, r) =]x-r, x+r[$.)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (éventuellement $\mathbb{R}^n$ tout entier).

Soit $f = \Omega \to \mathbb{R}$. Notons :

$$\{f \neq 0\} = \{\vec{x} \in \Omega \;:\; f(\vec{x}) \neq 0\}. \tag{1.9}$$

Définition 1.5 On appelle support de f le fermé de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\text{supp}(f) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\{f \neq 0\}} \qquad (= \text{adhérence de } \{f \neq 0\}), \tag{1.10}$$

i.e., le plus petit fermé sur lequel $f(x) \neq 0$. Et on note $\text{supp}(f) = \text{supp}f$.

Exemple 1.6 Dans $\mathbb{R}$, la fonction de Heaviside $H_0 = 1_{[0,\infty[}$ ("unit step function") a pour support $\mathbb{R}_+$. Et la fonction $1_{]0,\infty[}$ a même support.

La fonction $id : x \to x$ a pour support $\mathbb{R}$: ici $\{f \neq 0\} = \mathbb{R}^*$ et $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}$.

Proposition 1.7 *On a :*

$$\vec{x} \in \text{supp}f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon), \quad f(\vec{y}) \neq 0. \tag{1.11}$$

Preuve. Comme $\text{supp}f = \overline{\{f \neq 0\}}$ on a :

$$\text{supp}f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists (\vec{x}_n)_{\mathbb{N}^*} \in \{f \neq 0\}^{\mathbb{N}^*} \text{ t.q. } \vec{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}\}.$$

Montrons $\Rightarrow$. Soit $\vec{x} \in \text{supp}f$, soit $(\vec{x}_n)_{\mathbb{N}^*} \in \{f \neq 0\}^{\mathbb{N}^*}$ t.q. $\vec{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}$: donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\vec{x}_n \in B(\vec{x}, \varepsilon)$: on prend $\vec{y} = \vec{x}_n$.

Montrons $\Leftarrow$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\vec{x}_n \in \{f \neq 0\}$ t.q. $\vec{x}_n \in B(\vec{x}, \frac{1}{n})$: on a construit une suite $(\vec{x}_n)_{\mathbb{N}^*}$ dans $\{f \neq 0\}$ qui converge vers $\vec{x}$, donc $\vec{x} \in \overline{\{f \neq 0\}} = \text{supp}f$.

Proposition 1.8 *On a :*

$$\vec{x} \notin \text{supp}f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall \vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon), \quad f(\vec{y}) = 0, \tag{1.12}$$

i.e. si $\vec{x} \notin \text{supp}f$ ssi f est nulle dans tout un voisinage ouvert de $\vec{x}$ (inutile d'étudier f sur $\mathbb{R}^n - \text{supp}f$).

Preuve. Négation de la proposition précédente.

Exercice 1.9 Montrer que si f et g sont deux fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$ alors :

$$\text{supp}(fg) \subset \text{supp}f \bigcap \text{supp}g, \tag{1.13}$$

inclusion qui peut être stricte.

Réponse. Il est équivalent de montrer $(\text{supp}f \bigcap \text{supp}g)^C \subset (\text{supp}(fg))^C$. Soit $x \in (\text{supp}f \bigcap \text{supp}g)^C$, i.e. $x \notin \text{supp}f \bigcap \text{supp}g$, i.e. $x \notin \text{supp}f$ et $x \notin \text{supp}g$. Donc, avec (1.12), $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ t.q. $\forall y \in B(x, \varepsilon_1)$, $f(y) = 0$, et $\forall y \in B(x, \varepsilon_2)$, $g(y) = 0$. Donc, posant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, $\forall y \in B(x, \varepsilon_2)$, on a $f(y)g(y) = 0 = (fg)(y)$, donc $x \notin \text{supp}(fg)$, cf. (1.12) donc $x \in (\text{supp}(fg))^C$.

Soit $f = 1_{\mathbb{R}_+^*}$ et $g = 1_{\mathbb{R}_-}$: on a $\text{supp}f = \mathbb{R}_+$ et $\text{supp}g = \mathbb{R}_-$, donc $\text{supp}f \bigcap \text{supp}g = \{0\}$. Avec $fg = 0$ et donc $\text{supp}(fg) = \emptyset$: ici l'inclusion est stricte.

1.3 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact

Définition 1.10 On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles $\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}) = C^\infty(\Omega)$ à support compact :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega) &= \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \ : \ \mathrm{supp}(\varphi) \text{ compact dans } \Omega\} \\ &= \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \ : \ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega, \ \mathrm{supp}(\varphi) \text{ borné}\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

(On rappelle que le support $\mathrm{supp}\varphi$ est, par définition, toujours fermé.)

$\mathcal{D}(\Omega)$ est aussi appelé l'espace des fonctions infiniment lisses à support compact (appellation anglophone 'infinitly smooth').

Notons $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$ le bord de l'ouvert Ω.

Lemme 1.11 *Soit $K \subset \Omega$ avec K compact. On a $d(K, \partial\Omega) > 0$, i.e. (notant $\varepsilon = d(K, \partial\Omega)$ par exemple) :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad K + B(\vec{0}, \varepsilon) \subset \Omega. \tag{1.15}$$

Preuve. On a $K + B(\vec{0}, \varepsilon) = \bigcup_{\vec{x}\in K} \vec{x} + B(\vec{0}, \varepsilon) = \bigcup_{\vec{x}\in K} B(\vec{x}, \varepsilon)$. Donc si (1.15) est faux, alors

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \vec{x} \in K$ t.q. $B(\vec{x}, \varepsilon) \not\subset \Omega$. En particulier :

prenant $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, il existe $\vec{x}_n \in K$ t.q. $B(\vec{x}_n, \frac{1}{n}) \notin \Omega$.

Comme K est compact, quitte à extraire une sous-suite, on a $(\vec{x}_n)$ convergente dans K. Soit $\vec{x}_\infty \in K$ la limite. En particulier $\vec{x}_\infty \in \Omega$ (car $K \subset \Omega$).

Puis notons $\vec{y}_n \in B(\vec{x}_n, \frac{1}{n})$ t.q. $\vec{y}_n \notin \Omega$: alors $\vec{y}_n$ converge aussi vers $\vec{x}_\infty$ car $||\vec{y}_n - \vec{x}_\infty|| \leqslant ||\vec{y}_n - \vec{x}_n|| + ||\vec{x}_n - \vec{x}_\infty|| \leqslant \frac{1}{n} + ||\vec{x}_n - \vec{x}_\infty||$. Comme $\mathbb{R}^n - \Omega$ est fermé (complémentaire d'un ouvert) $(\vec{y}_n)$ converge dans $\mathbb{R}^n - \Omega$. Donc $\vec{x}_\infty \in \mathbb{R}^n - \Omega$. Donc $\vec{x}_\infty \notin \Omega$, avec $\vec{x}_\infty \in \Omega$: absurde. Donc (1.15) est vrai. ∎

Proposition 1.12 *Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \mathrm{supp}\varphi + B(\vec{0}, \varepsilon) \subset \Omega. \tag{1.16}$$

En particulier si Ω est borné (et $\mathrm{supp}\varphi$ étant compact dans l'ouvert Ω) :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega, \quad \forall \vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon), \quad \varphi(\vec{y}) = 0, \tag{1.17}$$

i.e. φ est nulle dans Ω dans "toute une bande de largeur ε le long de $\partial\Omega$". Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$.

N.B. : on dit que φ est nulle dans un voisinage de l'infini quand φ est nulle "sauf sur un borné". Donc si Ω est non borné, on dit aussi que $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle au voisinage du bord (exemple, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on dit que φ est nulle dans un voisinage de l'infini).

Preuve. On applique le lemme 1.11 : ici $\mathrm{supp}(\varphi)$ est un compact dans Ω ouvert. D'où (1.16). ∎

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, notons $\tilde{\varphi}$ la fonction prolongeant φ par 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. la proposition précédente donne immédiatement : $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Notation : prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note $\tilde{\varphi} =^{\text{noté}} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.13 L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas vide (on va même voir qu'il est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, voir la suite). Par exemple la fonction (faire un dessin) :

$$\zeta(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{1-x^2}) = \exp(\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1})), & \forall x \in]-1,1[, \\ 0, & \forall x \notin]-1,1[, \end{cases} \tag{1.18}$$

dont le support est $[-1,1]$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Et pour tout polynôme P, on a $P\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a également $\zeta \in \mathcal{D}(]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[)$ pour tout $\varepsilon > 0$. ∎

Exemple 1.14 Plus généralement, on note, pour $a < b$:

$$\zeta_{ab}(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{x-a}), & \forall x \in]a,b[, \\ 0, & \forall x \notin]a,b[, \end{cases} \tag{1.19}$$

fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est $[a,b]$ et qui appartiennent à $\mathcal{D}(]a-\varepsilon, b+\varepsilon[)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ou encore la fonction $\xi_{ab}(x) = \tau_{\frac{a+b}{2}}\zeta(\frac{x}{\frac{b-a}{2}})$. ∎

Exemple 1.15 Et dans $\mathbb{R}^n$, considérer :

$$\zeta(\vec{x}) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-||\vec{x}||^2}), & \forall \vec{x} \in B(\vec{0},1), \\ 0, & \forall \vec{x} \notin B(\vec{0},1). \end{cases} \tag{1.20}$$

▲

Remarque 1.16 Si on se place dans un compact K de $\mathbb{R}^n$, on a tout simplement :

$$K \text{ compact} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(K) = C^\infty(K), \tag{1.21}$$

puisque les fonctions de $C^\infty(K)$ sont C^∞ et à support compact. On ne considèrera pas souvent ce cas : on verra qu'on devra souvent considérer $\mathcal{D}(\Omega)$ avec Ω ouvert pour ne pas avoir de problème avec le bord de Ω, les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ étant identiquement nulles dans un voisinage ouvert du bord de Ω, cf. proposition 1.12. ▲

1.4 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R})$

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on rappelle que :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable t.q. } \int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty\}, \tag{1.22}$$

et on note alors :

$$||f||_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{noté}}{=} ||f||_p. \tag{1.23}$$

Et, pour $p = \infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable t.q. } \sup_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty\}, \tag{1.24}$$

et on note alors :

$$||f||_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \overset{\text{noté}}{=} ||f||_\infty. \tag{1.25}$$

Et, pour $p \in [1,\infty]$, $(L^p(\Omega), ||.||_{L^p})$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet, voir cours d'intégration).

On rappelle que, pour $1 \leqslant p < \infty$, les fonctions de $L^p_{loc}(\Omega)$ (les fonctions localement L^p sur Ω) sont les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont mesurables et intégrables sur tout compact de Ω :

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable t.q. } \forall K \subset \Omega,\ K \text{ compact}, \int_K |f(x)|^p\,dx < \infty\}.$$

En particulier $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

Exemple 1.17 $\Omega =]0,\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$: on a $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $f \notin L^1(\Omega)$. ▲

Proposition 1.18 *Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.*

Et si $1 \leqslant p < \infty$ alors $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ (faux pour $p = \infty$).

Preuve. Inclusions : Si $1 \leqslant p < \infty$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si $K = \text{supp}\varphi$ alors φ est continu sur le compact K et donc $\int_\mathbb{R} |\varphi(x)|^p\,dx = \int_K |\varphi(x)|^p\,dx \leqslant ||\,|\varphi|^p\,||_\infty(\int_K dx) < \infty$. Et si $p = \infty$ c'est immédiat : les fonctions continues sur un compact sont bornées. Densité : voir prop. 2.34. ▲

2 Convolution et régularisation

2.1 Notations $\check{f}$ et $\tau_x f$

Définition 2.1 Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\check{f}(x) = f(-x). \tag{2.1}$$

Autrement dit $\check{f} = f \circ g$ où $g(x) = -x$.

(Le graphe de $\check{f}$ est le symétrique du graphe de f par rapport à "l'axe des y".)

Définition 2.2 Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $c \in \mathbb{R}$ on définit la translatée $\tau_c(f) =^{\text{noté}} \tau_c f$ de f par :

$$\tau_c f(x) = f(x-c). \tag{2.2}$$

Autrement dit $\tau_c f = f \circ h_c$ où $h_c(x) = x - c$.

(Le graphe de $\tau_c f$ est le translaté du graphe de f de c : en particulier $(\tau_c f)(c) = f(0)$.)

Exercice 2.3 Montrer que $\widecheck{\tau_c f}(t) = f(-t-c)$, et que $\tau_c \check{f}(t) = f(c-t)$

Réponse. Soit $g = \tau_c f$. On a $\check{g}(t) = g(-t) = f(-t-c)$. Et $\tau_c \check{f}(t) = \check{f}(t-c) = f(c-t)$.

Exercice 2.4 Montrer que :

$$\widecheck{\tau_c f} = \tau_{-c} \check{f}. \tag{2.3}$$

Autrement dit, les opérateurs $\check{}$ et τ_c ne commutent pas pour $c \neq 0$: $(\check{} \circ \tau_c)(f) = (\tau_{-c} \circ \check{})(f)$.

Réponse. $\widecheck{\tau_c f}(x) = \tau_c f(-x) = f(-x-c) = \check{f}(x+c) = \tau_{-c}\check{f}(x)$.

Proposition 2.5 *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $c \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathrm{supp}\check{f} = -\mathrm{supp}f, \qquad \mathrm{supp}(\tau_c f) = \mathrm{supp}f + c, \qquad \mathrm{supp}(\tau_c \check{f}) = -\mathrm{supp}f + c. \tag{2.4}$$

Immédiat sur un dessin. En particulier, si $\mathrm{supp}f \subset [a,b]$ où $a \leqslant b$, alors :

$$\mathrm{supp}(\check{f}) \subset [-b,-a], \qquad \mathrm{supp}(\tau_c f) \subset [a+c,b+c], \qquad \mathrm{supp}(\tau_c \check{f}) \subset [-b+c,-a+c]. \tag{2.5}$$

Preuve. Pour $\check{f}$: on a $\{x : \check{f}(x) \neq 0\} = \{x : f(-x) \neq 0\} = \{-y : f(y) \neq 0\}$, d'où, en prenant l'adhérence, $\mathrm{supp}\check{f} = -\mathrm{supp}f$.

Pour $\tau_c f$: on a $\{x : \tau_c f(x) \neq 0\} = \{x : f(x-c) \neq 0\} = \{y + c : f(y) \neq 0\}$, d'où, en prenant l'adhérence, $\mathrm{supp}\tau_c f = \mathrm{supp}f + c$.

2.2 Définition de la convolution

On rappelle que si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions (mesurables), alors $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée formellement par :

$$(f * g)(x) = \int_{t \in \mathbb{R}^n} f(t) g(x-t)\, dt = \int_{t \in \mathbb{R}^n} f(t) \tau_x \check{g}(t)\, dt, \tag{2.6}$$

intégrale qui dépend du paramètre x. En particulier, si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors pour chaque x on a $\tau_x \check{g} \in L^2(\mathbb{R})$ (car $\int_{t\in\mathbb{R}} |g(x-t)|^2\, dt = \int_{s \in \mathbb{R}} |g(s)|^2\, ds < \infty$), et donc :

$$(f * g)(x) = (f, \tau_x \check{g})_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Dans la suite, pour simplifier la présentation, on considèrera essentiellement le cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$.

Exemple 2.6 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = 1_{\mathbb{R}}$, on a $(f * 1_{\mathbb{R}})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt =$ constante, et donc l'application $f \to f * 1_{\mathbb{R}}$ est la fonction "aire sous la courbe f" (indépendante de x).

Exemple 2.7 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \Pi_k = k 1_{[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}]}$, on a $(f * g)(x) = k \int_{-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} f(x-t)\, dt =$ la "valeur moyenne de f à travers une fenêtre de largeur $\frac{1}{k}$ centrée en x". Dessin.

La "mesure" d'une fonction f à travers un appareil d'une certaine précision est une application de type $M_k : f \to M_k(f) = f * \Pi_k$, avec donc $M_k(f)(x)$ approchant $f(x)$, approximation d'autant meilleure que k est grand, i.e. que l'appareil est précis. L'appareil idéal (de précision parfaite) est $M_\infty : f \to M_\infty(f) = f(x)$, soit $M_\infty = \delta_0$, voir plus loin.

Proposition 2.8 *Quand elle est définie, l'opération $*$ est distributive et commutative :*

$$g * f = f * g, \qquad f * (g_1 + \lambda g_2) = f * g_1 + \lambda f * g_2, \tag{2.7}$$

d'où le nom de "produit" (commutatif) de convolution. Et on a :

$$\widecheck{f * g} = \check{f} * \check{g}, \qquad \text{et} \qquad \tau_a(f * g) = (\tau_a f) * g = f * (\tau_a g). \tag{2.8}$$

Et :

$$\begin{cases} (f \text{ et } g \text{ paires}) \text{ ou } (f \text{ et } g \text{ impaires}) \Rightarrow\ f * g \text{ paire}, \\ (f \text{ paire et } g \text{ impaire}) \text{ ou } (f \text{ impaire et } g \text{ paire}) \Rightarrow\ f * g \text{ impaire}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Preuve. $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\,du = (g*f)(x)$ donne la commutativité. Et la distributivité résulte de la distributivité de la multiplication de $\mathbb{R}$ et de la linéarité de l'intégrale.

Puis $(\check{f}*\check{g})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(-t)g(-x+t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(-x-u)\,du = (f*g)(-x)$.

Puis $\tau_a(f*g)(x) = (f*g)(x-a) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-a-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\tau_a g(x-t)\,dt = (f*\tau_a g)(x)$ et $f*g=g*f$.

Puis $(f*g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-x-t)\,dt$: si g est paire, alors $(f*g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(-u)g(x-u)\,dt$, d'où si f est paire alors $(f*g)(-x) = (f*g)(x)$, et si f est impaire alors $(f*g)(-x) = -(f*g)(x)$; et $f*g = g*f$. ▪

Proposition 2.9 *Pour $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la fonction convolée $f*g$ vérifie (quand elle a un sens) :*

$$\mathrm{supp}(f*g) \subset \overline{\mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g}. \tag{2.10}$$

Preuve. On a $(f*g)(x) = \displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{t\in \mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\check{g}} f(t)\tau_x\check{g}(t)\,dt$.

Cas simple : $\mathrm{supp}f = [a,b]$ et $\mathrm{supp}g = [c,d]$, avec $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$, donc $\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g = [a{+}c,b{+}d]$. Et $\mathrm{supp}\tau_x\check{g} = [-d{+}x,-c{+}x]$, donc $\mathrm{supp}f\bigcap\mathrm{supp}\tau_x\check{g} = [a,b]\cap[-d{+}x,-c{+}x]$, donne $\mathrm{supp}f\bigcap\mathrm{supp}\tau_x\check{g} = \varnothing$ ssi soit $a>-c{+}x$ soit $b<-d{+}x$, i.e. ssi $x<a{+}c$ ou $x>b{+}d$. Donc $\mathrm{supp}f\bigcap\mathrm{supp}\tau_x\check{g}=\varnothing$ dès que $x\notin[a{+}c,b{+}d]$, donc $\mathrm{supp}(f*g)\subset\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$.

Cas général : on a $(f*g)(x)=0$ dès que $\mathrm{supp}f\bigcap\mathrm{supp}\tau_x\check{g}=\varnothing$. Et $\exists t\in\mathrm{supp}f\bigcap\mathrm{supp}\tau_x\check{g}$ ssi $\exists t\in\mathrm{supp}f$ et $t\in x-\mathrm{supp}g$, i.e. ssi $\exists t\in\mathrm{supp}f$ et $x\in t+\mathrm{supp}g$ ($\subset\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$). Donc si $x\notin\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$ alors $\mathrm{supp}f\bigcap\mathrm{supp}\tau_x\check{g}=\varnothing$ donc $(f*g)(x)=0$. Donc $\{x:(f*g)(x)\neq0\}\subset\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$. D'où (2.10). ▪

Remarque 2.10 Rappel : la somme de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé : prendre $F=\mathbb{N}^*$ et $G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{-k+\frac{1}{k}\}$ qui donne $F+G=\{n-k+\frac{1}{k},\ k,n\in\mathbb{N}^*\}$. Ici $\mathbb{R}-F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n,n{+}1[$ et $\mathbb{R}-G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}]-k+\frac{1}{k},-k{+}1+\frac{1}{k-1}[$ sont des ouverts (union d'ouverts), donc F et G sont fermés, mais $F+G$ contient la suite $(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 0 dans $\mathbb{R}$, avec $0\notin F+G$, donc $F+G$ n'est pas fermé.

Rappel : la somme d'un compact et d'un fermé est un fermé : soit K compact et G fermé, soit (z_n) une suite dans $K+G$ qui converge vers z dans $\mathbb{R}$. Montrons que $z\in K+G$. On a $z_n=k_n+g_n$, et quitte à extraire une sous-suite, on a $k_n\to k$ dans K. Donc $g_n=z_n-k_n\in G$ converge vers $z-k$, avec G fermé, donc $g =^{\text{déf}} z-k\in G$, donc $z=k+g\in K+G$, donc $K+G$ est fermé. ▪

2.3 Stabilité par convolution : $L^1(\mathbb{R})*L^p(\mathbb{R})\subset L^p(\mathbb{R})$ pour $1\leqslant p\leqslant\infty$

Proposition 2.11 *Si $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ alors $|f|*|g|\in L^1(\mathbb{R})$ et $f*g\in L^1(\mathbb{R})$, avec :*

$$||f*g||_1\leqslant||f||_1||g||_1. \tag{2.11}$$

Preuve. On a, si ça a un sens :

$$\begin{aligned}||f*g||_{L^1} &= \int_{x\in\mathbb{R}}|(f*g)(x)|\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}}|\int_{t\in\mathbb{R}}f(x-t)g(t)\,dt|\,dx.\\ &\leqslant \int_{x\in\mathbb{R}}(\int_{t\in\mathbb{R}}|f(x-t)|\,|g(t)|\,dt)dx = \int_{x\in\mathbb{R}}(|f|*|g|)(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ la fonction $f\otimes g:(x,y)\to f(x)g(y)$ (fonction à variables séparées) est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Et on peut appliquer Fubini :

$$\infty > ||f||_{L^1}||g||_{L^1} = \int_{(y,t)\in\mathbb{R}^2}|f(y)|\,|g(t)|\,dtdy = \int_{(x,t)\in\mathbb{R}^2}|f(x-t)|\,|g(t)|\,dtdx,$$

où on a utilisé le changement de variable $F:(y,t)\in\mathbb{R}^2\to F(y,t)=\begin{pmatrix}x=F_1(y,t)=y{+}t\\ t=F_2(y,t)=t\end{pmatrix}$, difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, de jacobien $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial t}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial t}\end{pmatrix}(y,t) = \det\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=1$ qui donne $(dtdy)=|1|\,(dtdx)=(dtdx)$. D'où $||f*g||_{L^1}\leqslant||f||_{L^1}||g||_{L^1}<\infty$, i.e. (2.11). ▪

Exercice 2.12 Montrer (2.11) à l'aide du théorème d'intégration de Tonelli (cours d'intégration).

Réponse. Rappel de Tonelli : si la fonction $h:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}$ satisfait aux deux hypothèses :

$$\int_{y\in\Omega_2}|h(x,y)|\,dy<\infty \quad \text{p.p. } x \quad \text{et} \quad \int_{x\in\Omega_1}\Big(\int_{y\in\Omega_2}|h(x,y)|\,dy\Big)\,dx<\infty \tag{2.13}$$

alors $h \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, et alors on peut inverser l'ordre d'intégration (Fubini).

Ici on pose $h(t,x) = |f(t)|\,|g(x-t)|$ et on vérifie les hypothèses : commençant par intégrer en x à t fixé, il vient, à t fixé :

$$\int_{x\in\mathbb{R}} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dx = |f(t)|(\int_{x\in\mathbb{R}} |g(x-t)|\,dx) = |f(t)|(\int_{y\in\mathbb{R}} |g(y)|\,dy) \leqslant |f(t)|\,||g||_1 < \infty, \tag{2.14}$$

puis :

$$\int_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\,||g||_1\,dt \leqslant ||g||_1 \int_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \leqslant ||g||_1\,||f||_1 < \infty. \tag{2.15}$$

D'où le résultat. ▪

Exemple 2.13 $f(t) = g(t) = e^{-t}1_{\mathbb{R}_+}(t)$. On a $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 < \infty$, et $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Et $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t}1_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-(x-t)}1_{\mathbb{R}_+}(x-t)\,dt = \int_{t=0}^x e^{-t}e^{-(x-t)}1_{\mathbb{R}_+}(x)\,dt = \int_0^x e^{-x}1_{\mathbb{R}_+}(x)\,dt = xe^{-x}1_{\mathbb{R}_+}(x)$, intégrable sur $\mathbb{R}$, donc on a bien $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. ▪

Exercice 2.14 Montrer que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ sont positives et $f \leqslant g$, alors $f * h \leqslant g * h$.

Réponse. On a $(f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h(x-t)\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} g(t)h(x-t)\,dt = (h * g)(x)$. ▪

Remarque 2.15 L'inégalité (2.11) obtenue est une inégalité où à gauche on a de fait une intégrale double, cf. (2.12), alors qu'à droite on a un produit des deux intégrales simples.

En particulier, $||f * g||_1$ (calcul d'une intégrale double) n'a rien à voir avec le produit $||fg||_1$ (calcul d'une intégrale simple) qui en général n'a pas de sens pour f et g dans $L^1(\mathbb{R})$.

Par exemple, f et g données par $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}1_{]0,1]}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ (car $\int_0^1 |\frac{1}{\sqrt{t}}|\,dt = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2 < \infty$), mais $(fg)(t) = \frac{1}{t}1_{]0,1]}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors que $f * g$ donnée par $(f * g)(x) = \int_t \frac{1}{\sqrt{|t|}}\frac{1}{\sqrt{|x-t|}}\,dt$ est dans $L^1(\mathbb{R})$: cette fonction est définie p.p., et plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et n'est pas définie en x=0, mais ce n'est pas gênant puisque, ici, seul le caractère intégrable (au sens de Lebesgue) nous intéresse (notion de presque partout) : autrement dit on a $L^1(\mathbb{R}^*) = L^1(\mathbb{R})$ car $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ et l'ensemble singleton $\{0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue . En particulier, on a vu que $\int_{\mathbb{R}} |f * g|(x)\,dx \leqslant ||f||_1||g||_1 < \infty$. ▪

On rappelle que $g \in L^p(\mathbb{R})$ ssi $|g|^p \in L^1$, et qu'alors $||g||_p = (||\,|g|^p||_{L^1})^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$ est une norme dans $L^p(\mathbb{R})$, cf. cours intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.16 *Soit $p \in [1,\infty]$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, autrement dit $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, et on a :*

$$||f * g||_p \leqslant ||f||_1||g||_p. \tag{2.16}$$

Preuve. Le cas $p = 1$ vient d'être traité, et le cas $p = \infty$ est immédiat car alors $|(f * g)(x)| \leqslant ||g||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$. Supposons donc $1 < p < \infty$.

On va utiliser l'inégalité de Hölder : soit q l'exposant conjugué de p, donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; quand $\alpha \in L^q$ et $\beta \in L^p$ alors $\alpha\beta \in L^1(\mathbb{R})$ et $||\alpha\beta||_1 \leqslant ||\alpha||_q||\beta||_p$ (voir cours d'intégration). On a :

$$\int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)|g|(x-t)\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}} |f|^{\frac{1}{q}}(t)|f|^{\frac{1}{p}}(t)|g|(x-t)\,dt \tag{2.17}$$

On pose $\alpha = |f|^{\frac{1}{q}} \in L^q(\mathbb{R})$, donc $\alpha^q = |f| \in L^1(\mathbb{R})$.

À x fixé, on pose $\beta_x(t) = |f(t)|^{\frac{1}{p}}||g|(x-t)$, donc $\beta_x(t)^p = |f(t)||g|^p(x-t)$. Et $\int_{t\in\mathbb{R}} \beta_x(t)^p\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)\,|g|^p(x-t)\,dt = (|f| * |g|^p)(x)$ est bien défini car $|f| \in L^1(\mathbb{R})$, $|g|^p \in L^1(\mathbb{R})$, cf. (2.11). Donc $\beta_x \in L^p(\mathbb{R})$. Donc (Hölder) :

$$\begin{aligned}\int_{t\in\mathbb{R}} |f|^{\frac{1}{q}}(t)|f|^{\frac{1}{p}}(t)|g|(x-t)\,dt &\leqslant (\int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)\,dt)^{\frac{1}{q}}(\int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)|g|^p(x-t)\,dt)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||f||_1^{\frac{1}{q}}(|f| * |g|^p)(x)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc, avec (2.17) :

$$|(|f| * |g|)|^p(x) \leqslant ||f||_1^{\frac{p}{q}}\,|(|f| * |g|^p)(x)|. \tag{2.19}$$

D'où $|(f * g)|^p$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ avec :

$$||\,|f * g|^p||_1 \leqslant ||f||_1^{\frac{p}{q}}\,||f||_1\,||\,|g|^p||_1. \tag{2.20}$$

Comme $1 + \frac{p}{q} = p$, on a (2.16). (Démonstration similaire dans $\mathbb{R}^n$.) ▪

2.4 Dérivation et convolution

Proposition 2.17 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, si $g \in L^p(\mathbb{R})$ pour un $p \in [1,\infty]$, si g est dérivable dans $\mathbb{R}$, et si $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$ (i.e. g' est bornée), alors $f*g$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et :*

$$(f*g)' = f*g'. \tag{2.21}$$

Preuve. Les hypothèses indiquent que $f*g$ et $f*g'$ ont un sens.

(2.21) signifie $\dfrac{d}{dx}\Big(\displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\Big) = \displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(t)g(x-t)\Big)\,dt$. C'est vrai grâce au théorème de convergence dominée : l'intégrant $h(x,t) = f(t)g(x-t)$ est dérivable en x (car g l'est), de dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = f(t)g'(x-t)$, et $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant ||g'||_\infty |f(t)|$, avec $||g'||_\infty |f| \in L^1(\mathbb{R})$ fonction dominante intégrable indépendante de x. ∎

2.5 Stabilité de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ par convolution "bornée"

Le résultat suivant sera généralisé à la convolution des distributions.

Proposition 2.18 *Soit $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

1- Si supp$g$ est compact, alors $f*g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2- Si supp$f$ et supp$g$ sont tous deux limités à gauche (ou tous deux limités à droite), alors $f*g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

3- Les hypothèses $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ sont insuffisantes.

Preuve. Pour tout $\alpha < \beta$ on veut $f*g \in L^1([\alpha,\beta])$, i.e. $\int_{x=\alpha}^\beta (\int_{t=a}^b |g(t)f(x-t)|\,dt)\,dx < \infty$. On a :

$$\int_{x=\alpha}^\beta |(f*g)(x)|\,dx \leqslant \int_{x=\alpha}^\beta (\int_{t=a}^b |g(t)f(x-t)|\,dt)\,dx \tag{2.22}$$

1- g à support compact, donc il existe $a,b \in \mathbb{R}$ t.q. supp$(g) \subset [a,b]$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour inverser l'ordre des intégrations dans (2.22), appliquons le théorème de Fubini–Tonelli.

À t fixé, $\int_{x=\alpha}^\beta |g(t)f(x-t)|\,dx = |g(t)| \int_{x=\alpha}^\beta |f(x-t)|\,dx = |g(t)| \int_{x=\alpha-t}^{\beta-t} |f(y)|\,dy < \infty$ car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Et pour $t \in [a,b]$ on a $\alpha - t \geqslant \alpha - b$ et $\beta - t \leqslant \beta - a$, donc $\int_{x=\alpha-t}^{\beta-t} |f(y)|\,dy \leqslant \int_{x=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy$. Donc $\displaystyle\int_{t=a}^b \int_{x=\alpha}^\beta |g(t)f(x-t)|\,dxdt \leqslant \int_{t=a}^b |g(t)| \int_{x=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy\,dt = \int_{t=a}^b |g(t)|\,dt \int_{x=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy < \infty$ car $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Donc on peut échanger l'ordre des intégrations dans (2.22) :

$$\begin{aligned}\int_{x=\alpha}^\beta |(f*g)(x)|\,dx &\leqslant \int_{t=a}^b |g(t)| (\int_{x=\alpha}^\beta |f(x-t)|\,dx)\,dt = \int_{t=a}^b |g(t)| \int_{y=\alpha-t}^{\beta-t} |f(y)|\,dy\,dt \\ &\leqslant \int_{t=a}^b |g(t)| \int_{y=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy\,dt \leqslant ||g||_{L^1} \int_{y=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy < \infty.\end{aligned}$$

Vrai pour tout α,β, donc $f*g$ est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2- Supports limités à gauche : il existe $a,b \in \mathbb{R}$ t.q. supp$f \subset [a,\infty[$ et supp$g \subset [b,\infty[$. Donc, pour $x \in \mathbb{R}$, on a supp$\tau_x\check{g} \subset]-\infty,-b+x]$. Donc supp$f \bigcap$ supp$\tau_x\check{g} \subset [a,-b+x]$, et avec Fubini on a :

$$\begin{aligned}\int_{x=\alpha}^\beta |(f*g)(x)|\,dx &\leqslant \int_{x=\alpha}^\beta \int_{t=a}^{-b+x} |f(t)\tau_x\check{g}(t)|\,dt\,dx \leqslant \int_{x=\alpha}^\beta \int_{t=a}^{-b+\beta} |f(t)g(x-t)|\,dt\,dx \\ &= \int_{t=a}^{-b+\beta} \int_{x=\alpha}^\beta |f(t)g(x-t)|\,dx\,dt = \int_{t=a}^{-b+\beta} \int_{y=\alpha-t}^{\beta-t} |f(t)g(y)|\,dy\,dt \\ &\leqslant \int_{t=a}^{-b+\beta} \int_{y=\alpha+b-\beta}^{\beta-a} |f(t)g(y)|\,dy\,dt \leqslant \int_{t=a}^{-b+\beta} |(f(t)|\,dt \int_{y=\alpha+b-\beta}^{\beta-a} |g(y)|\,dy,\end{aligned}$$

fini car f et g sont $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Idem pour supports limités à droite.

3- On prend $f(t) = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = e^{-t}1_{\mathbb{R}_+}(t)$ donc $g \in L^1(\mathbb{R})$; alors $(f*g)(x) = \int_\mathbb{R} g(t)f(x-t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}e^{-(x-t)}\,dt = \int_0^\infty e^{-x}\,dt = \infty$. ∎

2.6 Régularisation par convolution

2.6.1 Régularisation d'une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

On rappelle que si Ω est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp} f \text{ compact}\}$, où le support de f, noté supp(f), est l'adhérence de l'ensemble $\{f \neq 0\} = \{\vec{x} \in \Omega \ : \ f(\vec{x}) \neq 0\}$. En particulier si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $f \in C^\infty(\Omega)$ et f est nulle en dehors d'un compact dans Ω.

Proposition 2.19 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.*
Si de plus supp$f$ *est compact alors $f * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Preuve. On pose $z = f * g$, i.e. $z(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} h(x,t)\,dt$ où $h(x,t) = f(t)g(x-t)$ pour $x, t \in \mathbb{R}$ (l'intégrant).

1- Cas simple $f \in L^1(\mathbb{R})$. 11- Soit t fixé ; $h_t : x \to h_t(x) := h(x,t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car g l'est. 12- $|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)| = |f(t)|\,||g^{(k)}||_\infty$, avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, donc h est dominée indépendamment de x par une fonction $L^1(\mathbb{R})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$: le thm de cvgce dominée donne le résultat.

2- Cas général $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, montrons que z est C^∞ au point x_0.

21- Comme 11-, donc, en particulier, h_t est C^∞ en x_0.

22- Domination indépendante de x dans un voisinage de x_0 : on considère l'intervalle $I =]x_0-1, x_0+1[$. On a $g(x-t) = 0$ quand $x-t \notin [a,b]$, donc quand $t-x \notin [-b,-a]$, donc quand $t \notin [x-b, x-a]$. Donc pour tout $x \in I$ on a $g(x-t) = 0$ quand $t \notin [x_0-1-b, x_0+1-a] \stackrel{\text{noté}}{=} J$ (borné). Donc $|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(t,x)| = |f(t)g(x-t)1_J(t)| \leqslant ||g^{(k)}||_\infty |f(t)1_J(t)|$. Ayant $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a $f1_J \in \mathcal{L}^1(J)$, domination indépendante de x dans I.

Donc, thm de cvgce dominée pour $z : x \in I \to z(x)$: la fonction z est C^∞ dans I, donc en particulier en x_0. Vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, donc $z = f * g$ est C^∞ dans $\mathbb{R}$.

3- Et si supp$f$ est borné, alors supp$(f * \varphi)$ est borné, cf. (2.10), donc $f * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ∴

Exercice 2.20 Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, si $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, si supp$f$ et supp$g$ sont tous deux limités à gauche (ou tous deux limités à droite), alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$. ∴

2.6.2 Suite régularisante ou approximation de l'identité

Définition 2.21 Une fonction intégrable f est dite de masse unité ssi $\int f(x)\,dx = 1$ (souvent défini avec l'hypothèse supplémentaire $f \geqslant 0$).

Définition 2.22 On appelle suite régularisante une suite $(\varphi_k)_{\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi_k(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{supp}(\varphi_k) \subset [-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}], \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\,dx = 1 \qquad \text{(masse unité)}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Définition similaire dans $\mathbb{R}^n$ où $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ est remplacé par la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{k}$.

(On verra que $(\varphi_k)_{\mathbb{N}^*}$ approxime la masse de Dirac au sens des distributions, et la masse de Dirac est l'identité du produit de convolution, d'où le nom "approximation de l'identité".)

Soit ζ la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\zeta(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{1-x^2}), & \forall x \in]-1,1[, \\ 0, & \forall x \notin]-1,1[. \end{cases} \tag{2.24}$$

On pose :

$$\gamma_1(x) = \frac{\zeta(x)}{||\zeta||_{L^1}}, \qquad \text{puis} \qquad \gamma_k(x) = k\,\gamma_1(kx), \quad k \geqslant 1. \tag{2.25}$$

Proposition 2.23 *La suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.*

Preuve. Comme $\zeta \geqslant 0$, on a $\gamma_1 \geqslant 0$.

Comme $\zeta \geqslant 0$ et ζ non identiquement nulle, on a $||\zeta||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |\zeta(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x)\,dx > 0$.

Donc $\int_{\mathbb{R}} \gamma_1(x)\,dx = \frac{1}{||\zeta||_{L^1}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(x)\,dx = \frac{1}{||\zeta||_{L^1}} ||\zeta||_{L^1} = 1$.

Donc $\int_{\mathbb{R}} \gamma_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} k\,\gamma_1(kx)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(y)\,dy = 1$.

Comme $\gamma_1 > 0$ et $k \geqslant 0$ on a $\gamma_k \geqslant 0$.

Et $\gamma_1(x) \neq 0$ ssi $k \in]-1,1[$. Donc $\gamma_k(x) \neq 0$ ssi $kx \in]-1,1[$. D'où supp$(\gamma_k) = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$. ∴

2.6.3 Régularisation C^∞ des fonctions $1_{[a,\infty]}$ et $1_{[a,b]}$

Soit (φ_k) une suite régularisante.

Proposition 2.24 *Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $b > a$: dès que k est assez grand, à savoir dès que $\frac{1}{k} \leqslant \frac{b-a}{2}$, $1_{[a,b]} * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et, pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 0 \leqslant (1_{[a,b]} * \varphi_k)(x) \leqslant 1, \\ (1_{[a,b]} * \varphi_k)(x) = 1 \text{ pour } x \in [a+\dfrac{1}{k}, b-\dfrac{1}{k}], \\ \operatorname{supp}(1_{[a,b]} * \varphi_k) = [a-\dfrac{1}{k}, b+\dfrac{1}{k}]. \end{cases} \tag{2.26}$$

On conserve ce résultat si on ouvre en a ou b. Cas particulier $(\varphi_k) = (\gamma_k)$ cf. (2.25) : de plus $\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{1}{2}$.

Et $1_{[a,\infty]} * \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifie, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 0 \leqslant (1_{[a,\infty]} * \varphi_k)(x) \leqslant 1, \\ (1_{[a,\infty]} * \varphi_k)(x) = 1 \text{ pour } x \in [a+\dfrac{1}{k}, \infty[, \\ \operatorname{supp}(1_{[a,\infty]} * \varphi_k) = [a-\dfrac{1}{k}, \infty[. \end{cases} \tag{2.27}$$

On conserve ce résultat si on ouvre en a (i.e. sur l'intervalle $]a,\infty[$).

Dans $\mathbb{R}^n$ avec K compact : la fonction $1_K * \varphi_k$ est également dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, avec $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, avec $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K + B(\vec{0}, \frac{1}{k})$, et avec $\varphi = 1$ sur $K - B(\vec{0}, \frac{1}{k})$, où $B(\vec{0}, \frac{1}{k})$ est la boule unité de centre $\vec{0}$ et rayon $\frac{1}{k}$.

Preuve. Cas $[a,b]$ (exercice pour $[a,\infty[$ et intervalles ouverts et semi-fermés). On a $\psi_k = 1_{[a,b]} * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, cf. prop. 2.19. On a $\operatorname{supp}\tau_x(\widetilde{1_{[a,b]}}) = [x-b, x-a]$ et $\operatorname{supp}\varphi_k = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, donc :

$$\psi_k(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} \varphi_k(t)\tau_x(\widetilde{1_{[a,b]}})(t)\,dt = \int_{t\in[x-b,x-a]\bigcap[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}]} \varphi_k(t)\,dt, \tag{2.28}$$

et la fonction φ_k est positive et $\int_\mathbb{R} \varphi_k = 1$. D'où $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$.

Et si $x-b > \frac{1}{k}$ ou si $x-a < -\frac{1}{k}$, alors $\psi_k(x) = \int_\varnothing ... = 0$, d'où $\operatorname{supp}(\psi_k) \in [a-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}]$.

Et si $x-b < -\frac{1}{k}$ et si $x-a > \frac{1}{k}$, alors $[x-b, x-a] \subset [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, donc $\psi_k(x) = 1$.

Cas particulier $(\varphi_k) = (\gamma_k)$: on a $\psi_k(a) = \int_{u\in[a-b,0]\bigcap[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}]} \gamma_k(u)\,du = \int_{u\in[\frac{-1}{k},0]} \gamma_k(u)\,du = \frac{1}{2}$, dès que $\frac{1}{k} < b-a$, car γ_k est paire et $\int_{u\in[\frac{-1}{k},\frac{1}{k}]} \gamma_k(u)\,du = 1$. Idem : $\psi_k(b) = \frac{1}{2}$.

Exercice dans $\mathbb{R}^n$. ∎

Exercice 2.25 Soit $f : x \in]0,\infty[\to f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Donner une fonction $g \in C^\infty([0,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = f(x)$ pour $x \geqslant 1$. Dessin.

Réponse. Troncature régulière de f : on pose $g = \psi f$ avec $g(0) = 0$ et $\psi = \varphi_{\frac{1}{4}} * 1_{[\frac{1}{2},\infty]}$ (régularisée C^∞ de $1_{[\frac{1}{2},\infty]}$, la fonction ψ valant 1 sur $[\frac{3}{4},\infty[$). ∎

Exercice 2.26 Donner une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f = \exp$ sur $[-1,1]$ et $0 \leqslant f \leqslant \exp$ sur $\mathbb{R}$, où $\exp : x \to e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction exponentielle.

Réponse. On "tronque de manière régulière" la fonction exp : on pose $g = 1_{[-2,2]} * \varphi_1$. Avec (2.26) on a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $g(x) = 1$ sur $[-1,1]$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Cette fonction g est notre fonction de "troncature régulière". On pose $f(x) = \exp(x)g(x)$: la fonction f convient, car produit de deux fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$, donc est $C^\infty(\mathbb{R})$, et $\operatorname{supp}g$ est borné, et trivialement $\operatorname{supp}f \subset \operatorname{supp}g$, donc $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ∎

Corollaire 2.27 *Soit $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $c < d \in \mathbb{R}$. Si $[c,d] \subset]a,b[$ alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ qui vaut 1 sur $[c,d]$, et telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. (Dessin).*

Dans $\mathbb{R}^n$: si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact tel que $K \subset \Omega$, alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 sur K et telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

Preuve. Soit (γ_k) une suite régularisante. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(c-a, b-d)$ (dessin), soit $e = c-\varepsilon$ et $f = d+\varepsilon$. Soit k t.q. $\frac{1}{k} \leqslant \frac{f-e}{2}$ et $\frac{1}{k} < \varepsilon$. La fonction $\varphi = 1_{[e,f]} * \varphi_k$ convient, cf. proposition précédente.

Dans $\mathbb{R}^n$: soit $K = \operatorname{supp}\varphi$ et soit $\varepsilon = d(K, \mathbb{R}^n-\Omega) > 0$ la distance de K à $\mathbb{R}^n-\Omega$. Soit $K_\varepsilon = K + \overline{B}(0, \frac{\varepsilon}{2})$... on continue comme précédemment avec la fonction $\varphi = 1_{K_\varepsilon} * \gamma_k$. ∎

Corollaire 2.28 *Soit (φ_k) une suite régularisante. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1- Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{1}{k} < r$, la fonction produit :

$$f_{r,k} \stackrel{\text{déf}}{=} f\,(1_{]x_0-r,x_0+r[} * \varphi_k), \tag{2.29}$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et est égale à f dans un voisinage de x_0. Plus précisément on a $f_{r,k} = f$ sur $]x_0{-}r{+}\frac{1}{k}, x_0{+}r{-}\frac{1}{k}[$ avec $\text{supp} f_{r,k} \subset]x_0{-}r{-}\frac{1}{k}, x_0{+}r{+}\frac{1}{k}[$.

De plus, si f est bornée, alors $||f - f_{r,k}||_\infty \leqslant ||f||_\infty$.

2- Plus généralement, soit $\varepsilon > 0$, et soit $f \in C^\infty([x_0{-}\varepsilon, x_0{+}\varepsilon])$. Alors pour $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{k} < r$, on a $f_{r,k} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f_{r,k} = f$ dans un voisinage de x_0. Plus précisément on a $f_{r,k} = f$ sur $]x_0{-}r{+}\frac{1}{k}, x_0{+}r{-}\frac{1}{k}[$ avec $\text{supp} f_{r,k} \subset]x_0{-}r{-}\frac{1}{k}, x_0{+}r{+}\frac{1}{k}[$.

3- De plus, si f est bornée, alors $||f_{r,k}||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)} \leqslant ||f||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)}$.

Ainsi que $||f - f_{r,k}||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)} \leqslant ||f||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)}$

Preuve. 1- Soit $\psi_{r,k} = 1_{]x_0-r,x_0+r[} * \varphi_k$. On a $\psi_{r,k} \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $f_{r,k} \in C^\infty(\mathbb{R})$.. Soit $I_- =]x_0{-}r{+}\frac{1}{k}, x_0{+}r{-}\frac{1}{k}[$ et soit $I_+ =]x_0{-}r{-}\frac{1}{k}, x_0{+}r{+}\frac{1}{k}[$. On a $\psi_{r,k} = 1$ dans I_-, donc $f_{r,k} = f$ dans I_- et $\psi_{r,k} = 0$ dans I_+, donc $f_{r,k} = 0$ dans $\mathbb{R} - I_+$. D'où 2-.

3- Et $0 \leqslant 1_{]x_0-r,x_0+r[} * \varphi_k \leqslant 1$, donc $0 \leqslant |f_{r,k}(x)| \leqslant |f(x)|$ et $|f(x) - f_{r,k}(x)| \leqslant |f(x)|$. ∎

Exercice 2.29 Soit f en escalier avec $\text{supp} f$ borné. Soit $(\varphi_k)_{\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante. Alors pour k assez grand on a $f * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $||f * \varphi_k||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ et $||f - f * \varphi_k||_\infty \leqslant ||f||_\infty$.

Réponse. Ici $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ avec $a_1 < ... < a_n$, $f = \sum_{i=1}^{n-1} c_i 1_{[a_i,a_{i+1}]}$. On prend $\frac{1}{k} \leqslant \min_i(\frac{a_{i+1}-a_i}{2})$. Et $f * \varphi_k$ vérifie les propriétés demandées (démarche de la prop. 2.24). ∎

2.7 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$

Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ (engendrée par les intervalles ouverts).

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante.

2.7.1 $1_{[a,b]}$ et convergence p.p. des régularisées

Proposition 2.30 *On a la convergence simple presque partout :*

$$\varphi_k * 1_{[a,b]} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1_{[a,b]} \quad \textit{presque partout.} \tag{2.30}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$, et $d(x) = \min(d(x, a), d(x, b)) > 0$ (dessin). Soit k t.q. $\frac{1}{k} < d(x)$, i.e. $k > \frac{1}{d(x)}$. On a $(\varphi_k * 1_{[a,b]})(x) = 1_{[a,b]}(x)$, cf. prop. 2.24, donc $|\varphi_k * 1_{[a,b]})(x) - 1_{[a,b]}(x)| \longrightarrow_{k\to\infty} 0$. D'où (2.30). ∎

2.7.2 $1_{[a,b]}$ et convergence L^p des régularisées pour $p \in [1, \infty[$

Proposition 2.31 *Pour $p \in [1, \infty[$ on a la convergence dans $L^p(\mathbb{R})$:*

$$\varphi_k * 1_{[a,b]} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1_{[a,b]} \quad \textit{dans } L^p(\mathbb{R}), \tag{2.31}$$

i.e. $||1_{[a,b]} - \varphi_k * 1_{[a,b]}||_{L^p(\mathbb{R})} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $p = \infty$ (cas $L^\infty(\mathbb{R})$) c'est faux.

On conserve ce résultat pour $g = \sum_{i=1}^n c_i\, 1_{[a_i,b_i]} \in L^p(\mathbb{R})$ fonction en escalier à support compact.

Preuve. Cas $p = 1$. On a $1_{[a,b]} = \varphi_k * 1_{[a,b]}$ sauf sur $K = [a{-}\frac{1}{k}, a{+}\frac{1}{k}] \bigcup [b{-}\frac{1}{k}, b{+}\frac{1}{k}]$ (pour $k > \frac{1}{2(b-a)}$) ensemble de longueur $|K| = \frac{4}{k}$ sur lequel $|1_{[a,b]}(x) - (\varphi_k * 1_{[a,b]})(x)| \leqslant 1$. Donc $||1_{[a,b]} - \varphi_k * 1_{[a,b]}||_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \displaystyle\int_K dx = \frac{4}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cas $1 < p < \infty$. Calcul similaire avec $|(1_{[a,b]}(x) - \varphi_k * 1_{[a,b]}(x))^p| \leqslant 1$, et même conclusion.

Cas $p = \infty$. Comme $\varphi_k * g \in C^0(\mathbb{R})$, on a $||\varphi_k * \varphi||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(\varphi_k * \varphi)(x)|$. Prenons la suite régularisante $\varphi_k = \gamma_k$, cf. (2.25). Soit $k > \frac{1}{2(b-a)}$. On a $(\varphi_k * 1_{[a,b]})(b) = \frac{1}{2}$, cf. (2.28). Donc $|1_{[a,b]}(b) - (\varphi_k * 1_{[a,b]})(b)| = \frac{1}{2}$, donc $||1_{[a,b]} - \varphi_k * 1_{[a,b]}||_\infty$ ne tend pas vers 0 quand $k \to \infty$. On ne converge pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Et une fonction en escalier est une somme finie de fonctions indicatrices d'intervalles. ∎

2.7.3 $C^0(K)$ est dense dans $L^p(K)$, pour $1 \leqslant p < \infty$

Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Soit $C^0(K) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}(f) \subset K\}$ (les fonctions continues à support compact dans K).

Proposition 2.32 *$C^0(K)$ est dense dans $L^p(K)$, pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}_K = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \cap K$ (la restriction de $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ à K. Soit $\mathcal{T}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}_K$ engendrée par les $A \in \mathcal{A}_K$ t.q. 1_A est limite d'une suite de fonctions $f_n \in C^0(K)$ t.q. $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ (où donc $||1_A - f_n||_{L^p} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$).

Montrons que $\mathcal{T}$ contient les ouverts de K : soit U un ouvert dans K ; soit $f_n : K \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \min(1, n\, d(t, U^c))$ où $d(t,U^c)$ est la distance de t au complémentaire de U. Les f_n sont continues (immédiat), forment une suite croissante (immédiat), et $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ (immédiat). Et $f_n \to 1_U$ dans $L^p(K)$ car $f_n(t) \longrightarrow_{n\to\infty} 1_U(t)$ pour presque tout $t \in K$ (convergence p.p.) et $|1_U(x) - f_n(x)|^p < 1$ (domination indépendante de n) : on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

Donc $\mathcal{T} = \mathcal{A}_K$ (= la tribu engendrée par les ouverts). Donc pour tout borélien $B \in \mathcal{A}_K$ la fonction 1_B est limite dans $L^p(K)$ d'une suite de fonctions $f_n \in C^0(K)$ t.q. $0 \leqslant f_n \leqslant 1$. Par linéarité, toute fonction étagée dans K est limite dans $L^p(K)$ d'une suite de fonctions $f_n \in C^0(K)$. Donc, par construction de $L^p(K)$, toute fonction $f \in L^p(K)$ est limite dans $L^p(K)$ d'une suite de fonctions $f_n \in C^0(K)$. ∎

2.7.4 $C^0_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leqslant p < \infty$

Soit $C^0_c(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}(f) \text{ compact}\}$ (les fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}$).

Proposition 2.33 *$C^0_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$, $(\int_{x\notin[-R,R]} |f(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Soit $f_R = 1_{[-R,R]}f$, donc $||f - f_R||_{L^p} = (\int_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_R(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Avec la proposition 2.32, ayant $f_R \in L^p([-R,R])$, soit $g_R \in C^0([-R,R]) \subset C^0_c(\mathbb{R})$ t.q. $||g_R - f_R||_{L^p} < \varepsilon$: on a $||f - g_R||_{L^p} \leqslant ||f - f_R||_{L^p} + ||f_R - g_R||_{L^p} < 2\varepsilon$. ∎

2.7.5 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $C^0_c(\mathbb{R})$ au sens $L^p(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

Proposition 2.34 *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (contenu dans $C^0_c(\mathbb{R})$) est dense dans $C^0_c(\mathbb{R})$ au sens $L^p(\mathbb{R})$: $\forall f \in C^0_c(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $||f - \varphi||_{L^p} < \varepsilon$. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $f \in C^0_c(\mathbb{R})$, soit $R > 0$ t.q. $\mathrm{supp}(f) \subset [-R,R]$. Donc f est uniformément continue sur $[-R,R]$, donc f est limite d'une suite de fonctions en escalier : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$, $\exists a_1,...,a_n,b_1,...,b_n \in [-R,R]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - \sum_{i=1}^n c_i\,1_{[a_i,b_i]}(x)| < \varepsilon$. Et pour k assez grand, $|\sum_{i=1}^n c_i\,1_{[a_i,b_i]}(x) - \sum_{i=1}^n c_i\,(\varphi_k * 1_{[a_i,b_i]})(x)| < \varepsilon$, donc $|f(x) - \sum_{i=1}^n c_i(\varphi_k * 1_{[a_i,b_i]})(x)| < 2\varepsilon$. Donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \sum_{i=1}^n c_i(\varphi_k * 1_{[a_i,b_i]})(x)|^p\,dx \leqslant (2\varepsilon)^p(2R)$, donc $||f - \sum_{i=1}^n c_i(\varphi_k * 1_{[a_i,b_i]})||_{L^p} \leqslant 2\varepsilon(2R)^{\frac{1}{p}}$.

Et les propositions 2.33 et 2.34 donnent : $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. ∎

Exercice 2.35 Rappel : montrer que $(C^0_b(\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach (résultat classique).

Réponse. C'est un espace vectoriel (immédiat : sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$). Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $C^0_b(\mathbb{R})$, donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m,n \geqslant N$, $||f_n - f_m||_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc, $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout x, et $\mathbb{R}$ complet, donc $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente vers un réel qu'on note $f(x)$, ce qui définit la fonction f, avec $|f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout x, donc $||f - f_N||_\infty \leqslant \varepsilon$. Et $|f(x)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leqslant ||f - f_N||_\infty + ||f_N||_\infty + \leqslant \varepsilon + ||f_N||_\infty$, pour tout x, avec $||f_N||_\infty < \infty$, donc f est bornée. Et $|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \leqslant 2||f - f_N||_\infty + |f_N(y) - f_N(x)|$, et on choisit $\eta > 0$ t.q. $|f_N(y) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout y t.q. $|y - x| < \eta$, donc $|f(y) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tout $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, donc f est continue en x, vrai pour tout x. ∎

2.8 Lemme de Lebesgue

Un résultat de convergence qu'on n'obtient pas avec le théorème de convergence dominée, et qui utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$:

Lemme 2.36 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\sin(tx)\,dx = 0$. Interprétation : dès que la fonction sinus "oscille assez vite" (i.e. t "assez grand") l'intégrale (valeur moyenne) est proche de 0 (dessin).*

Preuve. (Ici, à x fixé, $g_x(t) = f(x)\sin(tx)$ ne converge pas quand $t \to \infty$: passer à la limite sous le signe $\int$ n'a pas de sens.)

1- Pour $f = 1_{[a,b]}$, où $a < b$, on a $\int_a^b \sin(tx)\,dx = [-\frac{\cos(tx)}{t}]_{x=a}^b = \frac{\cos(ta)-\cos(tb)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2- Donc pour g en escalier on a $\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, comme somme finie d'intégrales convergeant vers 0. Donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists T_\varepsilon > 0$, $\forall t > T_\varepsilon$, $\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx < \varepsilon$.

3- Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (donc en particulier continue). Donc, pour $\varepsilon > 0$, $\exists g$ en escalier t.q. $||f-g||_{L^1} < \varepsilon$. Le 2- indique qu'il existe T_ε t.q. pour tout $t \geqslant T_\varepsilon$ on a $|\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx| < \varepsilon$. D'où, pour tout $t > T_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}|\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\sin(tx)\,dx| &\leqslant \int_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\,dx + |\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx| \\ &\leqslant ||f-g||_{L^1} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

4- Puis $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, d'où le résultat en reprenant la démarche du 3-. ∎

2.9 Partition de l'unité

2.9.1 $1_\mathbb{R}$ comme somme de régularisées (partition de l'unité de $\mathbb{R}$)

On rappelle que $\tau_c\varphi : x \to \tau_c\varphi(x) = \varphi(x-c)$.

Proposition 2.37 *(Partition de l'unité de $\mathbb{R}$.) Soit $(\gamma_n)_\mathbb{N}$ la suite régularisante paire donnée par (2.25). Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$, et on fixe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}$. On pose :*

$$\varphi = \gamma_n * 1_{[a,b]}, \tag{2.32}$$

la régularisée de $1_{[a,b]}$. En particulier $\varphi = 1$ sur $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ et $\mathrm{supp}\varphi = [a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$.

Soit $d = b-a$ (distance de a à b = largeur de l'intervalle $[a,b]$). On a :

$$\begin{cases} \varphi + \tau_d\varphi = 1 \quad \text{sur} \quad [a+\frac{1}{n}, b+d-\frac{1}{n}], \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(\varphi+\tau_d\varphi) = [a-\frac{1}{n}, b+d+\frac{1}{n}], \\ \tau_{-d}\varphi + \varphi = 1 \quad \text{sur} \quad [a-d+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}], \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(\tau_{-d}\varphi+\varphi) = [a-d-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}], \end{cases} \tag{2.33}$$

Faire un dessin. Et de même, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$ où $k < \ell$:

$$\tau_{kd}\varphi + \tau_{(k+1)d}\varphi + \dots + \tau_{(\ell-1)d}\varphi + \tau_{\ell d}\varphi = 1 \qquad \text{sur} \qquad [a+kd+\frac{1}{n}, b+\ell d-\frac{1}{n}], \tag{2.34}$$

et de support $[a+kd-\frac{1}{n}, b+\ell d+\frac{1}{n}]$. Et donc :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{kd}\varphi = 1_\mathbb{R}, \tag{2.35}$$

formule de partition de l'unité de $\mathbb{R}$ (la fonction constante $1_\mathbb{R}$).

Preuve. On reprend le calcul (2.28), avec $\mathrm{supp}(\tau_d 1_{[a,b]}) = \mathrm{supp}(1_{[a+d,b+d]})$. En particulier :

$$\varphi(x) = \int_{t\in[x-b,x-a]} \gamma_n(t)\,dt, \qquad \tau_d\varphi(x) = \varphi(x-d) = \int_{t\in[x-b-d,x-a-d]} \gamma_n(t)\,dt.$$

Et $d > 0$, donc :

$$\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = \int_{J_x} \gamma_n(t)\,dt, \qquad J_x = [x-b-d, x-a] \bigcap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

1- Si $x-a \leqslant -\frac{1}{n}$, soit $x \leqslant a-\frac{1}{n}$, alors $\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = 0$.
1'- Si $x-b-d \geqslant \frac{1}{n}$, soit $x \geqslant b+d+\frac{1}{n}$, alors $\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = 0$.
2- Si $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset [x-b-d, x-a]$, soit $-\frac{1}{n} \geqslant x-b-d$ et $\frac{1}{n} \leqslant x-a$, soit $x \in [a+\frac{1}{n}, b+d-\frac{1}{n}]$ alors $\varphi(x)+\tau_d\varphi(x) = 1$
3- Et dans les autres cas $0 \leqslant \varphi(x) + \tau_d\varphi(x) \leqslant 1$.
D'où $(2.33)_1$. Puis de même $(2.33)_2$. D'où (2.34) par récurrence, d'où (2.35). ∎

2.9.2 Partition de l'unité dans $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 2.38 *Soit K un compact contenu dans une réunion finie d'ouverts $\bigcup_{j=1}^m \Omega_j$. Alors il existe des compacts $K_j \subset \Omega_j$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^m \mathring{K}_j$.*

Preuve. Pour $x \in K$, soit $j_x \in [1,m]_\mathbb{N}$ t.q. $x \in \Omega_{j_x}$, et soit r_{j_x} t.q. $B(x, 2r_{j_x}) \subset \Omega_{j_x}$. Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, r_{j_x})$ et K compact, il existe un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} B(x_k, r_{j_{x_k}})$. On pose $K_j = \bigcup_{\substack{k=1,\dots,\ell \\ x_k\in\Omega_j}} \overline{B(x_k, r_{j_{x_k}})}$, réunion finie de compacts donc compact, et $K \subset \bigcup_{j=1}^m \mathring{K}_j$, avec $K_j \subset \bigcup_{\substack{k=1,\dots,\ell \\ x_k\in\Omega_j}} B(x_k, 2r_{j_{x_k}}) \subset \Omega_j$. ▪

Lemme 2.39 *Soit Ω un ouvert et soit un compact $K \subset \Omega$. Soit $f \in C^0(\Omega)$ t.q. $f_{|K} = 1$. Alors f est strictement positive dans un voisinage ouvert de K : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in K + B(0,\varepsilon)$, $f(x) > 0$.*

Exercice 2.40 Montrer à l'aide des suites que si K est compact dans Ω ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $K + B(0,\varepsilon) \subset \Omega$ (donc que K est à plus d'une distance ε du bord de Ω).

Réponse. Sinon, pour tout ε, en particulier $\varepsilon = \frac{1}{m}$, on a $(K{+}B(0,\frac{1}{m})) \cap (\mathbb{R}^n{-}\Omega) \neq \emptyset$. Donc il existe $x_m \in K$ et $z_m \in B(0,\frac{1}{m})$ t.q. $x_m + z_m \in (\mathbb{R}^n{-}\Omega)$. On a construit une suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers 0. Et on a construit une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans K, et comme K est compact, la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ a une sous-suite convergente $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans K ; notons $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_{m_k} \in K$. Donc la suite $(x_{m_k} + z_{m_k})_{\mathbb{N}^*}$ converge vers $x_\infty + 0 = x_\infty$; et $(x_{m_k} + z_{m_k})_{\mathbb{N}^*}$ est une suite dans le fermé $(\mathbb{R}^n{-}\Omega)$ (complémentaire d'un ouvert), donc sa limite $x_\infty \in \mathbb{R}^n{-}\Omega$. Avec $x_\infty \in \Omega$: absurde.

En particulier $x_\infty \in \Omega$ (car $K \subset \Omega$). ▪

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe $r > 0$ t.q le compact $K + \overline{B(0,r)} =^{\text{noté}} K_r$ est tout entier dans Ω . Soit $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{1}{N} < r$. Supposons le lemme faux, i.e. $\forall \varepsilon = \frac{1}{n}$ où $n > N$, $\exists x_n \in K + B(0,\frac{1}{n})$ t.q. $f(x_n) = 0$. On a construit une suite $(x_n)_{n>N}$ telle que $f(x_n) = 0$ pour tout n. Et $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ appartient au compact K_r, donc on peut extraire une sous suite convergente dans K_r, soit $x_\infty \in K_r$ la limite. Mieux, $x_\infty \in K$ car K est fermé : sinon $x_\infty \in \mathbb{R}^n - K$ ouvert, donc $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x_\infty, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - K$, donc $d(x_\infty, K) \geqslant \varepsilon$, absurde par construction de la suite (x_n). Et comme f est continue et $x_n \to x_\infty$, on a $f(x_\infty) = 0$. Et comme $x_\infty \in K$ on a $f(x_\infty) = 1$. Absurde car $x_\infty \in K \subset \Omega$: donc le lemme est vrai. ▪

Proposition 2.41 *(Partition de l'unité.) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ dont on considère un recouvrement fini $\bigcup_{j=1}^m \Omega_j \supset K$, les Ω_j étant des ouverts de $\mathbb{R}^n$.*

Il existe alors m fonctions $\chi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ telles que $0 \leqslant \chi_j \leqslant 1$ pour tout $j = 1, ..., m$ et :

$$\chi_1(x) + ... + \chi_m(x) = 1 \qquad \text{dans un voisinage ouvert de } K. \tag{2.36}$$

Preuve. On applique le lemme 2.38 : soit m compacts $K_j \subset \Omega_j$ t.q. $K \subset \bigcup_{j=1}^m \mathring{K}_j$.

Soit alors $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ une fonction qui vaut 1 sur K_j (une telle fonction existe d'après le corollaire 2.27). En particulier $\sum_{i=1}^m \psi_i$ est une fonction C^∞ strictement positive dans un voisinage ouvert de de K. On pose dans $\mathbb{R}^n$:

$$\chi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{i=1}^m \psi_i(x)}. \tag{2.37}$$

On vérifie immédiatement que les χ_j conviennent. ▪

2.10 $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ et résultat de "projection"

Lemme 2.42 *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. On suppose :*

$$\text{hypothèse :} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{2.38}$$

Alors, avec q le conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ quand $1 < p < \infty$:

$$\text{conclusion :} \quad \begin{cases} p = 1 : & \forall \psi \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ t.q. supp}\psi \text{ compact}, & \int_\mathbb{R} f(x)\psi(x)\,dx = 0, \\ p \in]1,\infty[: & \forall \psi \in L^q(\mathbb{R}) \text{ t.q. supp}\psi \text{ compact}, & \int_\mathbb{R} f(x)\psi(x)\,dx = 0, \\ p = \infty : & \forall \psi \in L^1(\mathbb{R}) \text{ t.q. supp}\psi \text{ compact}, & \int_\mathbb{R} f(x)\psi(x)\,dx = 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Preuve. Cas $p=1$. Soit ψ en escalier avec suppψ borné, i.e. $\exists k\in\mathbb{N}$, $\exists a_1,...,a_k,c_1,...,c_k\in\mathbb{R}$, $a_1<a_2<...<a_k$, $\psi=\sum_{i=1}^{k-1}c_i 1_{[a_i,a_{i+1}]}$. Soit (γ_n) une suite régularisante et soit $\psi_n =^{\text{déf}} \psi*\gamma_n$. On a $\psi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi_n(x)\longrightarrow_{n\to\infty}\psi(x)$ p.p., avec $||\psi-\psi_n||_\infty\leqslant||\psi||_\infty$, cf. exercice 2.29. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a_1,a_k]}(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

grâce au théorème de convergence dominée : notant $g(n,x)=(f1_{[a_1,a_k]})(x)(\psi(x)-\psi_n(x))$ l'intégrant, à x fixé $\psi(x)-\psi_n(x)\to0$ p.p. donne $g(n,x)\to0$, avec $|g(n,x)|\leqslant||\psi||_\infty|(f1_{[a_1,a_k]})(x)|$ majoration indépendante de n par une fonction intégrable. Donc $(2.39)_1$ est vraie pour les fonctions en escalier.

Soit $\psi\in L^\infty(\mathbb{R})$ à support borné. Soit $(e_n)_\mathbb{N}$ une suite de fonctions en escalier qui converge p.p. vers ψ, avec $(e_n(x))_\mathbb{N}$ croissante positive si $\psi(x)\geqslant0$ et $(e_n(x))_\mathbb{N}$ décroissante négative si $\psi(x)\leqslant0$ (voir cours d'intégration). Donc on a $||e_n||_\infty\leqslant||\varphi||_\infty<\infty$ pour tout n.

Comme $\exists a>0$ t.q. supp$\psi\subset[-a,a]$, quitte à remplacer les e_n par $e_n1_{[-a,a]}$, on peut considérer les (e_n) toutes à support dans $[-a,a]$. Et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi(x)-e_n(x))\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[-a,a]}(x)(\psi(x)-e_n(x))\,dx\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

grâce au théorème de convergence dominée : à x fixé $\psi(x)-e_n(x)\to0$ p.p., et $|f(x)(\psi(x)-e_n(x))|\leqslant||\psi||_\infty||f1_{[-a,a]}||_{L^1(\mathbb{R})}$ majoration indépendante de n par une fonction intégrable. Donc $(2.39)_1$ est vraie pour les fonctions bornées à support borné.

Cas $p\in]1,\infty[$. Soit q t.q. $\frac1p+\frac1q=1$.

Cas ψ en escalier avec suppψ borné : même suite (ψ_n) que précédemment : ici $f1_{[a_1,a_k]}\in L^p(\mathbb{R})$ et $\psi,\psi_n\in L^q(\mathbb{R})$ pour tout n (trivial). Et Hölder : $|\int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a_1,a_k]}(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx|\leqslant||f1_{[a_1,a_k]}||_{L^p}||\psi-\psi_n||_{L^q}\to0$.

Soit $\psi\in L^\infty(\mathbb{R})$ à support borné. Même suite (e_n) que précédemment. Et Hölder.

Cas $f\in L^\infty(\mathbb{R})$. Cas ψ en escalier avec suppψ borné : même suite (ψ_n) que précédemment : ici $f1_{[a_1,a_k]}\in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi,\psi_n\in L^1(\mathbb{R})$ pour tout n (trivial). Et : $|\int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a_1,a_k]}(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx|\leqslant||f1_{[a_1,a_k]}||_\infty||\psi-\psi_n||_{L^1}\to0$.

Soit $\psi\in L^1(\mathbb{R})$ à support borné. Même suite (e_n) que précédemment... ∎

Proposition 2.43 *Soit $1\leqslant p\leqslant\infty$, et soit $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. On a :*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad f=0\ p.p..\tag{2.40}$$

Preuve. $\Leftarrow$: trivial. C'est $\Rightarrow$ qu'il s'agit d'établir. Avec le lemme 2.42 :

Cas $p=1$: on prend $\psi(x)=0$ quand $x\notin]-k,k[$ et quand $f(x)=0$, et sinon $\psi(x)=1$ si $f(x)>0$ et $\psi(x)=-1$ si $f(x)<0$. Donc $\psi\in L^\infty(\mathbb{R})$ à support borné et $0=\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}|f(x)1_{]-k,k[}(x)|\,dx$. Comme $|f1_{]-k,k[}|\geqslant0$, on déduit $|f1_{]-k,k[}|=0$ p.p., voir cours d'intégration, donc $f1_{]-k,k[}=0$ donc $f=0$ sur $]-k,k[$, vrai pour tout k.

Cas $p\in]1,\infty[$: on prend $\psi(x)=0$ quand $x\notin]-k,k[$ et quand $f(x)=0$, et sinon $\psi(x)=f(x)^{p-1}$ si $f(x)>0$ et $\psi(x)=-|f(x)|^{p-1}$ si $f(x)<0$. Soit q le conjugué de p donné par $\frac1p+\frac1q=1$. On a $|\psi(x)|^q=|f(x)|^{q(p-1)}=|f(x)|$ pour $x\in]-k,k[$ et 0 ailleurs. Donc $\psi\in L^q(\mathbb{R})$. Avec $f1_{[-k,k]}\in L^p(\mathbb{R})$. Donc $(f1_{[-k,k]})\psi\in L^1(\mathbb{R})$ avec $(f1_{[-k,k]})\psi=|f|^p1_{[-k,k]}\geqslant0$ d'intégrale nulle, donc $f=0$ sur $[-k,k]$, vrai pour tout k.

Cas $p=\infty$: dual du cas $p=1$. On prend $\psi(x)=0$ quand $x\notin]-k,k[$ et quand $f(x)=0$, et sinon $\psi(x)=1$ si $f(x)>0$ et $\psi(x)=-1$ si $f(x)<0$. Comme $[-k,k]$ est borné et ψ borné, $\psi\in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\int_{\mathbb{R}} f1_{[-k,k]}\psi=0$, avec $f1_{[-k,k]}\psi=|f|1_{[-k,k]}\geqslant0$, donc $|f|1_{[-k,k]}=0$ p.p., donc $f=0$ sur $[-k,k]$, vrai pour tout k. ∎

3 Premières définitions et propriétés des distributions

3.1 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1 Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ, et on note :

$$\varphi_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\varphi\qquad\text{dans }\mathcal{D}(\Omega),\tag{3.1}$$

ssi :

$$\begin{cases} 1)\ \exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact, tel que } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K, \\ 2)\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad ||\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Donc les φ_n ont toutes un support inclus dans un même compact K, et convergent uniformément ainsi que toutes leurs dérivées.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|k| = k_1 + ... + k_n$.

Définition 3.2 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ, et on note :

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \qquad \text{dans } \mathcal{D}(\Omega), \tag{3.3}$$

ssi :

$$\begin{cases} 1)\ \exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact, tel que } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K, \\ 2)\ \forall k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n, \quad ||\dfrac{\partial^{|k|}\varphi_n}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}} - \dfrac{\partial^{|k|}\varphi}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Donc les φ_n ont toutes un support inclus dans un même compact K, et convergent uniformément ainsi que toutes leurs dérivées.

Dans la suite, pour simplifier les écritures, on regardera essentiellement le cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ (le cas 1-D), donc la convergence donnée en (3.2).

Proposition 3.3 *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit K le compact dans (3.2). Alors* $\mathrm{supp}\varphi \subset K$.

Preuve. On a $||\varphi - \varphi_n||_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$: soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$, $||\varphi - \varphi_n||_\infty < \varepsilon$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}-K$, comme alors $\varphi_n(x) = 0$, on a $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Vrai pour tout ε. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}-K$ on a $\varphi(x) = 0$. Donc $\{x : \varphi(x) \neq 0\} \subset K$, donc $\mathrm{supp}\varphi \subset \overline{K} = K$. ▪

Remarque 3.4 Cette notion de convergence sera suffisante un 'certain temps' : elle donnera la continuité des distributions comme limite : si $\varphi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, cf. (3.2), alors $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ sera un opérateur continu si $T(\varphi_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$.

En revanche, en particulier pour certaines propriétés des distributions à support compact, on aura besoin de regarder la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ (ses ouverts). Cette topologie est celle d'un espace métrique complet non normé (il n'y a pas de norme sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui le rende complet), et sera rapidement décrite plus loin. ▪

3.2 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$

3.2.1 Définition

Définition 3.5 Une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelée une distribution sur Ω.

L'ensemble des distributions sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\mathcal{D}'(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}_{\text{cont}}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R}). \tag{3.5}$$

C'est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$).

Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (i.e. T est une distribution sur Ω) ssi :

$$T : \left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{D}(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto T(\varphi) \end{array} \right\} \qquad \text{vérifie :}$$

1. linéarité : pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\varphi + \lambda\psi) = T(\varphi) + \lambda T(\psi), \tag{3.6}$$

2. continuité : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, T est continue en φ ; i.e. pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, cf. (3.2), la suite de réels $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi) \qquad (= T(\lim_{n\to\infty} \varphi_n), \tag{3.7}$$

soit encore $|T(\varphi_n) - T(\varphi)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (dans $\mathbb{R}$).

N.B. : une distribution est un instrument de mesure des fonctions : pour une fonction φ on obtient la valeur réelle $T(\varphi)$.

Remarque 3.6 La continuité (3.7) est la définition usuelle de la continuité en un point : une fonction F est continue en un point X ssi quelle que soit la suite (X_n) qui tend vers X on a $F(X_n) \longrightarrow_{n\to\infty} F(X)$, autrement dit ssi $\lim_{n\to\infty} F(X_n) = F(X) = F(\lim_{n\to\infty} X_n)$.

Ici les notations sont $F = T$, $X = \varphi$ et $X_n = \varphi_n$, et la notion φ_n tend vers φ est la notion de convergence définie en (3.2) (ou en (3.4)). ▪

Donc par définition d'une distribution (plus précisément le fait qu'une distribution soit continue par définition), on peut donc passer à la limite sous la distribution T, cf. (3.7) :

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\lim_{n\to\infty} \varphi_n) \qquad (= T(\varphi)). \tag{3.8}$$

dès que (φ_n) est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$, cf. (3.2).

Notation : la linéarité fait qu'on emploie le crochet de dualité : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle, \tag{3.9}$$

ou encore la notation abusive de l'intégrale (autre notation usuelle de la linéarité) :

$$T(\varphi) = \int T\varphi. \tag{3.10}$$

Attention : cette notation intégrale peut s'avérer dangereuse (voir plus loin la masse de Dirac δ_a définie par $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ et qui ne s'écrit pas comme une intégrale « $\int \delta_a \varphi$ »).

Donc par définition de la continuité des distributions T on peut passer à la limite sous le crochet : quand $(\varphi_n) \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, cf. (3.2) :

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \lim_{n\to\infty} \varphi_n \rangle \qquad (= \langle T, \varphi \rangle), \tag{3.11}$$

ou encore qu'on peut passer à la limite sous le signe $\int$:

$$\lim_{n\to\infty} \int T\varphi_n = \int T \lim_{n\to\infty} \varphi_n \qquad (= \int T\varphi). \tag{3.12}$$

3.2.2 L'exemple des distributions régulières T_f pour $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$

On considère $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et de sa mesure (usuelle) de Lebesgue.

Définition 3.7 Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On appelle distribution régulière associée à f : la fonctionnelle $T \overset{\text{noté}}{=} T_f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle T_f, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.13}$$

Proposition 3.8 *Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la fonctionnelle T_f définie en (3.13) est une distribution.*

(Interprétation : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le réel $T_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x)(f(x)\,dx) = \mu(f)$ est l'intégrale de φ pour la mesure μ de densité f, notation usuelle $d\mu(x) = f(x)\,dx$.)

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)1_{\mathrm{supp}\varphi}(x)\,dx$. La fonction $f\varphi 1_{\mathrm{supp}\varphi}$ est dominée par la fonction intégrable $||\varphi||_\infty f 1_{\mathrm{supp}\varphi}$ (car $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\mathrm{supp}\varphi$ est compact dans Ω). Donc (3.13) est bien défini.

La linéarité est triviale cf. (3.6) (c'est celle de l'intégrale).

Continuité de T_f : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_\mathbb{N}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cf. (3.2). On a, avec le compact K de (3.2) : $|T(\varphi) - T(\varphi_n)| = |\int_\Omega f(x)(\varphi - \varphi_n)(x))dx| = |\int_K f(x)(\varphi - \varphi_n)(x))dx| \leqslant ||\varphi - \varphi_n||_\infty \int_K |f(x)|dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, car $||\varphi - \varphi_n||_\infty \to 0$ et $f \in L^1(K)$. Donc T_f est continue en φ. Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. ▪

Définition 3.9 Généralisation : si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on appelle distribution régulière T_f la distribution donnée par (3.13). (En particulier vrai pour $f \in L^2_{loc}(\Omega)$.)

Proposition 3.10 *Pour $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ où $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la fonctionnelle T_f définie en (3.13) est bien une distribution.*

Preuve. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $K = \mathrm{supp}\varphi$ et $q \in [1, \infty]$, on a $\int_\Omega |\varphi|^q = \int_K |\varphi|^q \leqslant ||\varphi^q||_\infty |K| < \infty$, donc $\varphi \in L^q(\Omega)$.

Soit $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Le cas $p = 1$ a été traité dans la proposition précédente.

Cas $1 < p < \infty$. Soit q de conjugué de p, donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ on a $f \in L^p(K)$; et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\varphi \in L^q(K)$, donc $f\varphi \in L^1(K)$, donc $T_f(\varphi)$ est bien défini par (3.13). Et la linéarité de T_f est immédiate. Soit (φ_n) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, avec K compact t.q. $K \supset \mathrm{supp}(\varphi_n)$ pour tout n. Alors $||\varphi - \varphi_n||_q^q = \int_K (\varphi - \varphi_n)^q(x)\,dx \leqslant ||\varphi - \varphi_n||_\infty^q |K| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Donc, avec Hölder :

$$|\langle T_f, \varphi - \varphi_n \rangle| \leqslant \int_K |f\varphi| \leqslant ||f||_{L^p(K)} ||\varphi - \varphi_n||_{L^q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où la continuité de T_f sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Cas $p = \infty$. Alors $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant \int_K \sup_K |f(x)| \sup_K |\varphi(x)|\,dx \leqslant |K|\,||f||_{L^\infty(K)} ||\varphi||_{L^\infty} < \infty$, donc (3.13) est bien défini. Et la linéarité et la continuité sont immédiates. ∎

Notation abusive. Quand $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, on note abusivement (pour alléger l'écriture), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle T_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \overset{\text{noté}}{=} \langle T_f, \varphi \rangle \overset{\text{noté}}{=} \langle f, \varphi \rangle \overset{\text{noté}}{=} \int f\varphi \qquad (\text{donc } = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx). \tag{3.14}$$

On note donc abusivement $T_f = f$ au sens des distributions... et on dit qu'on "identifie" la distribution T_f à la fonction f...

Attention à cette identification : dans la notation $\langle f, \varphi \rangle$, l'objet f n'est pas considéré comme une fonction mais comme la distribution T_f régulière associée.

Exemple 3.11 La fonction constante $f = 1_\mathbb{R} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définit une distribution régulière qui à une fonction φ associe son aire sous la courbe : $T_{1_\mathbb{R}}(\varphi) = \displaystyle\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,dx \overset{\text{noté}}{=} \langle 1_\mathbb{R}, \varphi \rangle$. ∎

Exemple 3.12 La fonction échelon unité (= troncature à gauche en 0 = "unit step function") appelée fonction de Heaviside H_0 :

$$H_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x>0}, \\ 0 \text{ si x<0}, \end{cases} \tag{3.15}$$

définit une distribution régulière sur $\mathbb{R}$. Elle n'a pas été définie en $x = 0$ (donc définie uniquement presque partout), ce qui n'a aucune importance quand on s'intéresse à son caractère $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. On note alors $H_0(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ ou $H_0(x) = 1_{\mathbb{R}_+^*}$.

Considérer H_0 comme distribution régulière, c'est considérer la distribution régulière T_{H_0}, i.e. c'est considérer l'instrument de mesure $T_{H_0} : \varphi \to T_{H_0}(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x)\,dx \overset{\text{noté}}{=} \langle H_0, \varphi \rangle$. ∎

Proposition 3.13 *Soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ où $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On a :*

$$f = 0 \quad \textit{p.p. sur }]a, b[\qquad \Longleftrightarrow \qquad T_f = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathcal{D}(]a, b[). \tag{3.16}$$

Preuve. C'est une autre version de la proposition 2.43. ∎

3.2.3 L'exemple des masses de Dirac et de leurs dérivées

Définition 3.14 Soit $a \in \mathbb{R}$. La masse de Dirac $\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\delta_a(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \varphi(a) \overset{\text{noté}}{=} \langle \delta_a, \varphi \rangle. \tag{3.17}$$

Plus généralement, la masse de Dirac en a est définie sur toutes les fonctions continues en a, la valeur de $\varphi(a)$ étant alors parfaitement définie (ce qui n'est pas le cas d'une fonction définie presque partout en général).

Proposition 3.15 *δ_a est une distribution, mais n'est pas une distribution régulière.*

Preuve. La linéarité est immédiate. Continuité : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $(\varphi_n) \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En particulier $||\varphi - \varphi_n||_\infty \to 0$, soit $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0$, en particulier $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$. Donc $\delta_a(\varphi_n) \to \delta_a(\varphi)$, donc δ_a est continue au point $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc δ_a est une distribution.

Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle $\delta_a(\varphi) = \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{a\})$ on aurait $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = 0 = \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\,dx$. Et donc $f = 0$ presque partout sur $]a, b[\subset \mathbb{R}^*$ pour la mesure de Lebesgue, cf. proposition 3.13, donc sur $\mathbb{R}$. D'où $\delta_a = 0$. C'est faux, puisque $\delta_a(\zeta) = e^{-1} \neq 0$ (avec ζ donné en (1.18)). Donc δ_a n'est pas régulière. ∎

Exemple 3.16 Le peigne de Dirac $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définit une distribution. Le vérifier. Mais ce n'est pas une distribution régulière. ∎

Définition 3.17 La dérivée de la masse de Dirac δ'_a est définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$\delta'_a(\varphi) = -\varphi'(a) \overset{\text{noté}}{=} \langle \delta'_a, \varphi \rangle. \tag{3.18}$$

Et les dérivées successives de la masse de Dirac $\delta_a^{(k)}$ sont définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\delta_a^{(k)}(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^k \varphi^{(k)}(a) \overset{\text{noté}}{=} \langle \delta_a^{(k)}, \varphi \rangle. \tag{3.19}$$

Exercice 3.18 Vérifier que les $\delta_a^{(k)}$ sont des distributions mais ne sont pas régulières.

Réponse. Adapter la démonstration de la proposition 3.15. ∎

3.2.4 Autres exemples, et contre-exemples

Exemple 3.19 Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle $\sum_{k=0}^n \delta_0^{(k)}$ définit une distribution. ∎

Exemple 3.20 La fonctionnelle $T = \sum_{k=1}^\infty \delta_0^{(k)}$ ne définit pas une distribution : considérer une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut e^{-x} au voisinage de 0, cf. example 2.26, pour laquelle $\langle \sum_{k=1}^\infty \delta_0^{(k)}, \varphi \rangle = \sum_1^\infty 1 = \infty \notin \mathbb{R}$. ∎

Exemple 3.21 Si T n'est pas linéaire (exemple $T(\varphi) = \int_\mathbb{R} \varphi^2(x)\,dx$) alors ce n'est pas une distribution. ∎

Exemple 3.22 la fonctionnelle $\sum_{k=0}^\infty \delta_k^{(k)}$ définit une distribution. Le vérifier. ∎

Exemple 3.23 Dans $\mathbb{R}^n$ la masse de Dirac au point $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\delta_{\vec{a}}(\varphi) = \varphi(\vec{a})$. On vérifie que c'est bien une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Exemple 3.24 La fonction $x \to \frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$. Mais sa restriction à $]0, \infty[$ définit une distribution régulière dans $\mathcal{D}'(]0, \infty[)$. ∎

Exemple 3.25 Le produit de deux distributions n'est pas défini : en particulier la masse de Dirac au carré n'est pas une distribution (d'ailleurs on ne sait pas définir la masse de Dirac au carré).

Cas des distributions régulières : exemple : la fonction $x \to |x|^{-\frac{1}{2}}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ (elle est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$) alors que son produit par elle-même ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$. ∎

Exemple 3.26 Dans $\mathbb{R}^n$, le moment d'inertie par rapport à $\vec{x}_0$ d'une distribution à support compact est défini par :

$$I(\vec{x}_0) = \langle T, ||\vec{x} - \vec{x}_0||^2 \rangle. \tag{3.20}$$

Si $T = T_f$ est une distribution associée à une fonction f à support borné K, le moment d'inertie par rapport à $\vec{x}_0$ vaut :

$$I(\vec{x}_0) = \int_K f(\vec{x})\, ||\vec{x} - \vec{x}_0||^2 \, d\Omega. \tag{3.21}$$

Et si $T = \delta_{\vec{a}}$, alors $I(\vec{x}_0) = ||\vec{a} - \vec{x}_0||^2$, moment d'inertie par rapport à $\vec{x}_0$ d'une masse unité ponctuelle en $\vec{a}$. ∎

Exemple 3.27 Si $T = T_f$ est une distribution régulière avec $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ de support excluant $\vec{0}$, i.e. $f = 0$ dans un voisinage ouvert de $\vec{0}$, le potentiel Newtonien est défini au point $\vec{x}_0$ par :

$$U(\vec{x}_0) = \langle T_f, \frac{1}{||\vec{x}_0 - \vec{x}||} \rangle = \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{f(\vec{x})}{||\vec{x}_0 - \vec{x}||}\, d\Omega. \tag{3.22}$$

Et pour la masse de Dirac $\delta_{\vec{a}}$ et $\vec{x}_0 \neq \vec{a}$, il est défini par :

$$U(\vec{x}_0) = \langle \delta_{\vec{a}}, \frac{1}{||\vec{x}_0 - \vec{x}||} \rangle = \frac{1}{||\vec{x}_0 - \vec{a}||}, \tag{3.23}$$

inverse de la distance de $\vec{a}$ à $\vec{x}_0$. ∎

3.2.5 Restriction

Définition 3.28 Soit $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega \subset \Omega$. La restriction $T_{|\omega}$ est la distribution de $\mathcal{D}'(\omega)$ définie par :

$$\langle T_{|\omega}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega). \tag{3.24}$$

Il est immédiat de vérifier que $T_{|\omega}$ est bien une distribution sur ω (linéaire et continue).

3.2.6 Remarque pour la notation intégrale et écriture abusive $T(x)$

La propriété de linéarité de T fait qu'on peut utiliser formellement le signe de l'intégration (signe utilisé en cas de linéarité) :

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \int T\, \varphi \overset{\text{noté}}{=} \int T(x)\, \varphi(x)\, dx \overset{\text{noté}}{=} \langle T(x), \varphi(x) \rangle. \tag{3.25}$$

Mais attention, ce n'est qu'une notation formelle. En particulier $T(x)$ ne veut rien dire puisque un point $x \in \Omega$ n'appartient pas au domaine de définition de T : le domaine de définition de T est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, et uniquement $T(\varphi)$ a un sens pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Par exemple, $\delta_0(x)$ n'a aucun sens pour $x \in \mathbb{R}$, puisque δ_0 n'est pas une fonction sur $\mathbb{R}$ (mais sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). C'est $\delta_0(\varphi)$ qui a un sens, et vaut $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$, pour une fonction φ.

Cependant l'écriture abusive $\delta_0(x)$ sera utilisée dans l'expression $\langle \delta_0(x), \varphi(x) \rangle$, et permettra d'alléger les notations lorsque φ sera une fonction de plusieurs variables : on écrira :

$$\langle \delta_0(x), \varphi(x,y) \rangle \overset{\text{déf}}{=} \delta_0(\varphi_y) = \varphi_y(0) = \varphi(0,y) = \varphi(x,y)_{|x=0}, \tag{3.26}$$

où $\varphi_y : x \to \varphi_y(x) = \varphi(x,y)$. Et de même $\langle \delta_0(y), \varphi(x,y) \rangle =^{\text{déf}} \varphi(x,y)_{|y=0} = \varphi(x,0)$.

Pour être rigoureux, on doit d'abord définir à y fixé la fonction $\varphi_1 : x \to \varphi_1(x) \overset{\text{déf}}{=} \varphi(x,y)$ et à x fixé la fonction $\varphi_2 : y \to \varphi_2(y) \overset{\text{déf}}{=} \varphi(x,y)$ et écrire $\langle \delta_0, \varphi_1 \rangle = \varphi_1(0) = \varphi(0,y)$ dans le premier cas, et $\langle \delta_0, \varphi_2 \rangle = \varphi_2(0) = \varphi(x,0)$ dans le second cas.

Autrement dit (3.26) est une écriture abusive mais pratique (de même que (3.25)).

En cas de doute, on n'abuse pas des notations.

3.3 L'espace vectoriel $\mathcal{D}'(\Omega)$

Comme $\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{F}(\mathcal{D}(\Omega);\mathbb{R})$, on reprend les définitions de la somme interne et de la multiplication externe usuelle : pour deux distributions S et T et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, les distributions $(S+T)$ et (λT) sont définies par $(S+T)(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} S(\varphi) + T(\varphi)$ et $(\lambda T)(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \lambda(T(\varphi))$, soit avec les notations du crochet de dualité, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \langle S+T, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle, \\ \langle \lambda T, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \lambda \langle T, \varphi \rangle. \end{cases} \tag{3.27}$$

Proposition 3.29 *L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ muni des opérations + (addition interne) et . (multiplication externe) est un espace vectoriel. Il est noté $(\mathcal{D}'(\Omega),+,.)$, ou simplement $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathcal{D}(\Omega);\mathbb{R}),+,.)$ des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$: on vérifie facilement que les fonctionnelles $(S+T)$ et (λT) ainsi définies sont bien linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. ▪

Exercice 3.30 Montrer : si $T = T_f$ et $T = T_g$ sont deux distributions régulières et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$T_f + \lambda T_g = T_{f+\lambda g}. \tag{3.28}$$

Réponse. L'intégrale est linéaire. ▪

3.4 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (convergence faible)

Définition 3.31 On dit qu'une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge ssi elle converge simplement, i.e. ssi elle converge en tout point, i.e. ssi quelque soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, notant $r_n = \langle T_n, \varphi\rangle$, la suite de réels $(r_n)_{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$:

$$(T_n)_{\mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \exists r \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = r \overset{\text{noté}}{=} T(\varphi). \tag{3.29}$$

Cela définit alors la fonctionnelle $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ appelée limite de la suite (T_n) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et noté $T =^{\text{noté}} \lim_{n\to\infty} T_n$.

Théorème 3.32 *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui converge au sens (3.29). Alors la limite T défnie en (3.29) est une distribution sur Ω.*

Preuve. Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a (égalités dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi + \lambda\psi\rangle &\overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi + \lambda\psi\rangle = \lim_{n\to\infty} (\langle T_n, \varphi\rangle + \lambda\langle T_n, \psi\rangle) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle + \lambda \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \lambda\langle T, \psi\rangle,\end{aligned}$$

d'où la linéarité.

Continuité : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit (φ_k) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a $\lim_k\langle T, \varphi_k\rangle = \lim_k \lim_n\langle T_n, \varphi_k\rangle$. On admet qu'on peut inverser les signes limites (voir théorème de Banach–Steinhaus dans les espaces métriques complet).

D'où $\lim_k\langle T, \varphi_k\rangle = \lim_n \lim_k\langle T_n, \varphi_k\rangle = \lim_n\langle T_n, \lim_k \varphi_k\rangle = \lim_n\langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$. ∎

On note alors (convergence faible) :

$$T_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} T \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{3.30}$$

Donc : $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_n, \varphi\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle \quad \text{dans } \mathbb{R}, \tag{3.31}$$

i.e. ssi, pour φ quelconque (fixé), $|T_n(\varphi) - T(\varphi)| \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.33 La convergence (3.29) réécrite en (3.31) est la définition usuelle de la convergence simple des fonctions : une suite de fonctions (F_n) converge simplement vers F ssi pour tout X on a $F_n(X) \longrightarrow F(X)$. Ici les notations sont $F_n = T_n$ et $X = \varphi$. ∎

Remarque 3.34 Ici, les distributions T sont des fonctions qui agissent sur des fonctions, et pour cette raison sont appelées des fonctionnelles ; et la convergence simple (3.31) est alors appelée convergence faible. ∎

Exemple 3.35 Soit $(f_j)_{\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose de plus la suite dominée : il existe $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ t.q. $|f_j(x)| \leqslant g(x)$ presque partout. Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et que $f_j \rightharpoonup f$ au sens des distributions.

Réponse. Les fonction f_j et f ne sont pas des distributions. Donc ce qu'il faut comprendre est :

1- On considère les distributions régulières T_{f_j} et T_f.

2- Et il s'agit de montrer que $T_{f_j} \rightharpoonup T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, i.e. que $\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\varphi(x)\,dx \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fixé et K son support (compact). On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque $|f_j(x)\varphi(x)1_K(x)| \leqslant ||\varphi||_\infty |g(x)| 1_K(x)$ et $g1_K \in L^1(K)$. ∎

Exemple 3.36 Montrez que $\gamma_n \rightharpoonup \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, où γ_n est défini en (2.25) (approximation de δ_0).

Réponse. γ_n est une fonction et n'est pas une distribution. Donc ce qu'il faut comprendre est :

1- Comme les γ_n sont des fonctions $L^1(\mathbb{R})$, on considère les distributions régulières $T_n = T_{\gamma_n}$ associées.

2- Et il s'agit de montrer que $T_{\gamma_n} \rightharpoonup \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, i.e. (3.31), i.e. $\int_{\mathbb{R}} \gamma_n(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0)$. Le faire ; réponse : voir § suivant. ∎

3.5 Convergence vers la masse de Dirac

3.5.1 δ_a comme limite de fonctions portes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, et les “fonctions portes” $\Pi_{na}(x) = n\,1_{]a-\frac{1}{2n},a+\frac{1}{2n}[} = n\,H_{\frac{-1}{2n}+a} - nH_{\frac{1}{2n}+a}$ (centrées en a) :

$$\Pi_{na}(x) = n\,1_{]a-\frac{1}{2n},a+\frac{1}{2n}[}(x) = \begin{cases} n & \text{pour } x \in]a-\dfrac{1}{2n}, a+\dfrac{1}{2n}[, \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \tag{3.32}$$

dessin. Ce sont des fonctions $L^1(\mathbb{R})$ positives de masse 1 : $\int_{\mathbb{R}} \Pi_{na}(x)\,dx = 1$ $(= \int_{a-\frac{1}{2n}}^{a+\frac{1}{2n}} n\,dx)$.

Cette suite de fonctions ne converge pas vers une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$: cette fonction limite vaudrait 0 sur $\mathbb{R} - \{a\}$, et donc nulle presque partout, mais avec une masse égale à 1. (On remarque que $(\Pi_{na})_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R})$: pour a=0 par exemple, $||\Pi_n - \Pi_{2n,a}||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |\Pi_n(x) - \Pi_{2n}(x)|\,dx = 1 \not\to 0$, donc $(\Pi_n)_{\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R})$.)

Proposition 3.37 *$T_{\Pi_{na}}$ étant la distribution régulière associée à Π_{na}, on a :*

$$T_{\Pi_{na}} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_a \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \textit{noté} \quad \Pi_{na} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_a \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{3.33}$$

i.e., pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T_{\Pi_{na}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Pi_{na}(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle. \tag{3.34}$$

Preuve. $\langle T_{\Pi_{na}}, \varphi \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(a)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant N_\varepsilon$, $|\int_{\mathbb{R}} \Pi_{na}(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(a)| < \varepsilon$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |\int_{\mathbb{R}} \Pi_{na}(x)(\varphi(x) - \varphi(a))\,dx| < \varepsilon, \tag{3.35}$$

car $\int_{\mathbb{R}} \Pi_{na} = 1$, i.e. $|n \int_{a-\frac{1}{2n}}^{a+\frac{1}{2n}} (\varphi(x) - \varphi(a))\,dx| < \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: donc φ est continue en a, donc : $\exists \eta_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall x \in]a - \eta_\varepsilon, a + \eta_\varepsilon[$ on a $|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \varepsilon$, donc $\int_{a-\eta_\varepsilon}^{a+\eta_\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(a)|\,dx \leqslant 2\eta_\varepsilon\varepsilon$.

On prend $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $N_\varepsilon > \frac{1}{2\eta_\varepsilon}$, i.e. $\frac{1}{N_\varepsilon} < 2\eta_\varepsilon$, d'où (3.35). ▪

Et “symboliquement” (et abusivement), on note :

$$\text{notation symbolique :} \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta_a = 1 \qquad (= \int_{\mathbb{R}} \Pi_{na}), \tag{3.36}$$

bien que δ_a ne soit pas une fonction, et on dit que δ_a a “une masse” qui vaut 1.

Remarque 3.38 On aurait aussi bien pu utiliser les fonctions portes non centrées $\Pi_{na}(x) = n\,1_{a-]0,a+\frac{1}{n}[}$ au lieu des fonctions portes centrées (3.32) : même démarche et même résultat, écrit tout aussi abusivement :

$$n\,1_{]a,a+\frac{1}{n}[} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_a \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.37}$$

▪

Exercice 3.39 Montrer (3.33) à l'aide du théorème des accroissements finis.

Réponse. La démonstration de (3.34) n'utilise que le caractère C^0 de φ en 0, approche pertinente car δ_0 est plus généralement définie sur les fonctions continues en 0.

Ici δ_0 a été définie comme distribution, donc pour les $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$, donc il existe ξ_x entre 0 et $x \neq 0$ t.q. $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi_x)$ (théorème des accroissements finis). D'où $|\int_{\mathbb{R}} \Pi_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx| = |\int_{\mathbb{R}} x\Pi_n(x)\varphi'(\xi_x)\,dx| \leqslant ||\varphi'||_\infty n \int_{-1/2n}^{1/2n} |x|\,dx = 2||\varphi'||_\infty n \int_0^{1/2n} x\,dx = 2||\varphi'||_\infty n[\frac{x^2}{2}]_0^{1/2n} = ||\varphi'||_\infty \frac{1}{4n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. ▪

Exercice 3.40 Montrer que δ_0 est limite de la suite (f_n) des fonctions affines par morceaux données par $f_n(x) = n^2(x + \frac{1}{n})1_{]\frac{-1}{n},0[}(x) - n^2(x - \frac{1}{n})1_{]0,\frac{1}{n}[}(x)$ (fonction chapeau : dessin).

Réponse. (Remarque : f_n est paire, donc $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}}(-n^2)(x-\frac{1}{n})\,dx = -2n^2[\frac{(x-\frac{1}{n})^2}{2}]_0^{\frac{1}{n}} = 1$.) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}\langle T_{f_n},\varphi\rangle &= \int_{\frac{-1}{n}}^0 n^2(x+\frac{1}{n})\varphi(x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{n}} n^2(x-\frac{1}{n})\varphi(x)\,dx \\ &= n^2\int_{\frac{-1}{n}}^0 (x+\frac{1}{n})(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx - n^2\int_0^{\frac{1}{n}}(x-\frac{1}{n})(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + n^2\int_{\frac{-1}{n}}^0(x+\frac{1}{n})\varphi(0)\,dx - n^2\int_0^{\frac{1}{n}}(x-\frac{1}{n})\varphi(0)\,dx.\end{aligned}$$

On a $n^2\int_{\frac{-1}{n}}^0(x+\frac{1}{n})\varphi(0)\,dx - n^2\int_0^{\frac{1}{n}}(x-\frac{1}{n})\varphi(0)\,dx = n^2\varphi(0)(\frac{1}{2}[(x+\frac{1}{n})^2]_{\frac{-1}{n}}^0 - \frac{1}{2}[(x-\frac{1}{n})^2]_0^{\frac{1}{n}} = \varphi(0)$, et avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a φ continue en 0, donc, pour $\varepsilon > 0$ on a : $\exists \eta_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall x \in]-\eta_\varepsilon,\eta_\varepsilon[$ on a $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant \varepsilon$. Donc pour ε et le η_ε correspondant, on prend N_ε t.q. $\frac{1}{N_\varepsilon} < \eta_\varepsilon$, et pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ on a $|\langle T_{f_n},\varphi\rangle - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon n^2(\int_{\frac{-1}{n}}^0(x+\frac{1}{n})\,dx - \int_0^{\frac{1}{n}}(x-\frac{1}{n})\,dx) = \varepsilon n^2(\frac{1}{2}[(x+\frac{1}{n})^2]_{\frac{-1}{n}}^0 - \frac{1}{2}[(x-\frac{1}{n})^2]_0^{\frac{1}{n}}) = \varepsilon$. Donc $|\langle T_{f_n},\varphi\rangle - \varphi(0)| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. ▟

3.5.2 δ_a comme limite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On considère une suite régularisante $(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$, cf. (2.23). On a alors au sens des distributions :

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{3.38}$$

au sens $T_{\varphi_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_0$, i.e., pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \in \mathbb{R}$.

Démonstration similaire à la précédente (on a $\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n = 1$).

3.5.3 Convergence vers δ_a d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$ de masse unité qu'on concentre

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on note :

$$f_\lambda(x) = \lambda\, f(\lambda x). \tag{3.39}$$

En particulier $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ pour tout $\lambda > 0$ (on conserve la masse), immédiat.

Exemple : si $\text{supp}(f) \subset [-B,B]$ alors $\text{supp}(f_\lambda) \subset [-\frac{B}{\lambda},\frac{B}{\lambda}]$ car $f_\lambda(x) = 0$ dès que $\lambda x \notin [-B,B]$, i.e. dès que $x \notin [-\frac{B}{\lambda},\frac{B}{\lambda}]$: le support de f_λ se "concentre en 0" quand $\lambda > 1$.

Proposition 3.41 *Si :*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \qquad \textit{(masse unité)}, \tag{3.40}$$

alors :

$$f_\lambda \underset{\lambda\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_0 \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.41}$$

Preuve. (Convergence dominée.) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle T_{f_\lambda},\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda f(\lambda x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda})\,dy,$$

intégrale qui dépend du paramètre λ. On applique le théorème de convergence dominée : pour λ fixé quelconque, l'intégrant $h(\lambda,y) = f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda})$ vérifie $|h(\lambda,y)| \leqslant |f(y)|\,||\varphi||_\infty =^{\text{noté}} g(y)$, majoration indépendante de λ avec $g \in L^1(\mathbb{R})$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$. Et à y fixé on a $h(\lambda,y) \longrightarrow_{\lambda\to\infty} f(y)\varphi(0)$. D'où $\int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda})\,dy \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \varphi(0)$, et on a bien $\langle T_{f_\lambda},\varphi\rangle \longrightarrow_{\lambda\to\infty} \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle$. Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $T_{f_\lambda} \rightharpoonup_{\lambda\to\infty} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, qui est l'écriture non abusive de (3.41). ▟

3.6 Définitions d'opérations élémentaires sur les distributions

Les définitions sont fabriquées pour généraliser les opérations sur les fonctions.

3.6.1 Translation (changement d'origine)

Pour f une fonction localement sommable, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-a)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+a)\,dx. \tag{3.42}$$

On note $\tau_a f$ la translatée de f : '$\tau_a f(x) = f(x-a)$'. On a donc au sens des distributions :

$$\langle \tau_a f, \varphi\rangle = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{3.43}$$

au sens $\langle T_{\tau_a f}, \varphi\rangle = \langle T_f, \tau_{-a}\varphi\rangle$.

Définition 3.42 Pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la distribution translatée $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{3.44}$$

On vérifie immédiatement qu'effectivement $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (est une distribution). Et, avec des notations abusives, voir (3.25), on note :

$$\langle T(x-a), \varphi(x)\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{3.45}$$

Exemple 3.43 En particulier ;

$$\delta_a = \tau_a \delta_0. \tag{3.46}$$

car pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, : $\langle \tau_a\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \tau_{-a}\varphi\rangle = \tau_{-a}\varphi(0) = \varphi(0+a) = \varphi(a)$, soit encore avec des notations très abusives : $\delta_a(x) = \delta_0(x-a)$. Donc :

$\langle \delta_a, \varphi\rangle =^{\text{noté}} \langle \delta_a(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta_0(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle \delta_0(x), \varphi(x+a)\rangle = \varphi(x+a)_{|x=0} = \varphi(a)$.

On retrouve bien $\langle \delta_a, \varphi\rangle =^{\text{noté}} \langle \delta_a(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(x)_{|x=a} = \varphi(a)$. ▪

3.6.2 Transposition, notation $\check{T}$ et distribution paire ou impaire

Un changement de variable donne, pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(-x)\,dx, \qquad \text{soit} \qquad \langle \check{f}, \varphi\rangle = \langle f, \check{\varphi}\rangle, \tag{3.47}$$

où $\check{f}$ la fonction définie par $\check{f}(x) = f(-x)$. Sans abus de notation :

$$\langle T_{\check{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \check{\varphi}\rangle. \tag{3.48}$$

Définition 3.44 Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on note $\check{T}$ la distribution définie par :

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \check{\varphi}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{3.49}$$

On vérifie immédiatement qu'effectivement $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 3.45 1- Pour les distributions régulières T_f, vérifier que

11- si f est paire, i.e. si $\check{f} = f$ alors $(T_f)^\vee = T_f$,

12- si f est impaire, i.e. si $\check{f} = -f$ alors $(T_f)^\vee = -T_f$.

Réponse. 11- On veut montrer que $\langle (T_f)^\vee, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle$, i.e. $\langle (T_f), \check{\varphi}\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle$, i.e. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$, ce pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme f est paire, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(-x)\,dx$, ce pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait vérifier

12- On veut montrer que $\langle (T_f)^\vee, \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi\rangle$, i.e. $\langle (T_f), \check{\varphi}\rangle = -\langle T_f, \varphi\rangle$, i.e. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(-x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$, ce pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme f est impaire, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} -f(-x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(-x)\,dx$, ce pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait vérifier ▪

Définition 3.46 Et on appelle 'distribution paire' une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui satisfait telle que $\check{T} = T$. (Et on note alors très abusivement $T(-x) = T(x)$.)

Et on appelle 'distribution impaire' une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui satisfait telle que $\check{T} = -T$. (Et on note alors très abusivement $T(-x) = T(x)$.)

3.6.3 Changement d'unité

Exemple : on s'intéresse au prix d'une masse m. Exprimons m soit en lb = libra = pound, soit en kg = kilogramme. On a 1 kg = λ lb, où $\lambda \simeq 2,2$. Notons f le prix au lb et g le prix au kg, donc $f(\lambda) = g(1)$, et plus généralement : $f(\lambda x) = g(x)$ = prix en euros de $m = x$ kg. Le passage de f à g est un changement d'unité (sur l'espace de départ = ensemble de définition).

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a par changement de variables :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(\frac{x}{\lambda})\,\frac{1}{|\lambda|}dx. \tag{3.50}$$

Soit avec la notation du crochet de dualité et l'abus de notation (3.25) :

$$\langle f(\lambda x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\rangle. \tag{3.51}$$

Sans abus de notation pour une fonction générique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: posons :

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x), \tag{3.52}$$

et (3.51) s'écrit sans abus de notation :

$$\langle T_{f_\lambda}, \varphi\rangle = \langle T_f, \frac{1}{|\lambda|}\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle. \tag{3.53}$$

Définition 3.47 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On définit la distribution S par, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle S, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \frac{1}{|\lambda|}\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle \qquad (\overset{\text{noté}}{=} \langle T(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\rangle). \tag{3.54}$$

(On vérifie immédiatement que S est bien une distribution sur $\mathbb{R}$.)

On note abusivement $S(x) = T(\lambda x)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T(\lambda x), \varphi(x)\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\rangle, \tag{3.55}$$

notation abusive ou implicitement x est le nom de la "variable d'intégration".

Exemple 3.48 Pour $\lambda \neq 0$: pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\langle \delta_a(\lambda x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta_a(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{a}{\lambda})$, et donc :

$$\delta_a(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta_{\frac{a}{\lambda}}(x). \tag{3.56}$$

Donc $\langle \delta_a(\lambda x), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{a}{\lambda})$.

En particulier $\langle \delta_0(\lambda x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta_0(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\varphi(0)$. Donc $\delta_0(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta_0(x)$. ∴

3.6.4 'Multiplication' : par une fonction C^∞

On ne peut pas multiplier deux distributions entre elles. Par exemple la distribution T_f associée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ne peut pas être multipliée par elle-même : l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,\varphi(x)\,dx$ n'a pas de sens en général, ou encore la fonction $x \to \frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

Mais pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\psi(x)\big)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\big(\psi(x)\,\varphi(x)\big)\,dx, \tag{3.57}$$

et ce avec $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (car $\text{supp}(\psi\varphi) \subset \text{supp}\varphi$ et le produit de deux fonctions C^∞ est une fonction C^∞). Soit au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\langle f\psi, \varphi\rangle = \langle f, \psi\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{3.58}$$

Définition 3.49 Pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dès que $\psi \in C^\infty(\Omega)$ on définit la distribution $(\psi T) = (T\psi) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle T\psi, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \psi\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.59}$$

On vérifie immédiatement que $T\psi$ est bien une distribution sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.50 En fait la multiplication ψT a également un sens pour $\psi \in C^m$ sous la condition que T est d'ordre $\leqslant m$, voir annexe § 19.3 : par exemple si $f \in C^0(\mathbb{R})$, la distribution $f\delta_0$ est bien définie avec $f\delta_0 = f(0)\delta_0$ puisque la définition de δ_0 ne nécessite que la continuité d'ordre 0. Ici δ_0 est une distribution d'ordre 0 (une mesure de Radon).

On se servira souvent implicitement de ce résultat dans la suite. ▪

Exercice 3.51 1-Montrer : la masse de Dirac au carré "δ_0^2" "n'a pas de sens".

2- Que veut dire la notation $\int_{x\in\mathbb{R}} \delta(x-y)\delta(x-z)\,dx = \delta_{y-z}$ utilisée en mécanique quantique ?

Réponse. 1-Soit $\Pi_n = n1_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$ les fonctions portes de masse unité : on a $\Pi_n \rightharpoonup \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La distribution $\Pi_n^2 = n^2 1_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$ est bien définie (au sens $T_{\Pi_n^2}$ est bien définie car $\Pi_n^2 \in L^1(\mathbb{R})$). Et on a $\langle \Pi_n^2, \varphi\rangle \simeq n^2\varphi(0) \longrightarrow_{r\to\infty} \infty$ quand $\varphi(0) \neq 0$. Autrement dit $(\Pi_n^2)_{\mathbb{N}^*} = (n^2 1_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]})_{\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On ne peut donc pas définir une distribution δ_0^2 comme limite de la suite $(\Pi_n^2)_{\mathbb{N}^*}$.

De même la distribution $\Pi_n\delta_0$ est bien définie dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$: $\langle \Pi_n\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \Pi_n\varphi\rangle = (\Pi_n\varphi)(0) = n\varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$. Donc pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) \neq 0$ on a $\langle \Pi_n\delta_0, \varphi\rangle \to \infty \notin \mathbb{R}$: on ne peut donc pas définir une distribution δ_0^2 comme limite de la suite $(\Pi_n\delta_0)_{\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{D}'(]-1,1[)$.

2- Mécanique quantique : on note $F(y,z) = \int_{x\in\mathbb{R}} \delta(x-y)\delta(x-z)\,dx$. Le sens est donné par $\delta(x) \simeq \Pi_n(x)$ et $\delta_z(x) \simeq \Pi_n(x-z)$ pour n grand ($n \geqslant 10^{15}$ car $\frac{1}{n} < 10^{-15}$ = taille des plus petites particules élémentaires). Donc on s'intéresse réellement à $F_n(y,z) = \int_{x\in\mathbb{R}} \Pi_n(x-y)\Pi_n(x-z)\,dx$. L'intégrant est $f_n(x) = \Pi_n(x-y)\Pi_n(x-z) = n^2 1_{]y-\frac{1}{2n},y+\frac{1}{2n}[}(x) 1_{]z-\frac{1}{2n},z+\frac{1}{2n}[}(x) = n^2 1_{]y-\frac{1}{2n},y+\frac{1}{2n}[\cap]z-\frac{1}{2n},z+\frac{1}{2n}[}(x)$, donc $f_n(x) = 0$ si $|z-y| > \frac{1}{n}$. Et si $y \leqslant z \leqslant \frac{1}{n}$ alors $f_n(x) = n^2 1_{]z-\frac{1}{2n},y+\frac{1}{2n}[}$ et $F_n(y,z) = n^2(y+\frac{1}{2n}-(z-\frac{1}{2n})) = n^2(y-z+\frac{1}{n})$. Et si $z \leqslant y \leqslant \frac{1}{n}$ alors $F_n(y,z) = n^2(z-y+\frac{1}{n})$. Donc $F_n(y,z) \longrightarrow_{n\to\infty} \delta_{y-z}$ au sens des distributions, cf. exercice (3.40). Donc $\langle F_n(y,z), \varphi\rangle \longrightarrow_{n\to\infty} \varphi(y-z)$.

Donc en mécanique quantique $\int_{x\in\mathbb{R}} \delta(x-y)\delta(x-z)\,dx$ est la notation de la distribution δ_{y-z}. ▪

Exercice 3.52 Prove : $x\delta_a = a\delta_a$, and more generally $f\delta_a = f(a)\delta_a$ (if $f \in C^0$).

Réponse. $\langle x\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, x\varphi\rangle = a\varphi(a)$, and $\langle a\delta_a, \varphi\rangle = a\langle \delta_a, \varphi\rangle = a\varphi(a)$. ▪

3.6.5 δ_a est un "élément absorbant"

Pour la masse de Dirac δ_a, si $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \psi\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, \psi\varphi\rangle = \psi(a)\varphi(a) = \psi(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle \psi(a)\delta_a, \varphi\rangle, \tag{3.60}$$

et donc :

$$\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.61}$$

On voit ici le caractère "absorbant" de la masse de Dirac δ_a : la distribution $\psi\delta_a$ est "nulle là où δ_a l'est", et dans la distribution $\psi\delta_a$, seule la valeur de ψ en a intervient.

3.6.6 Conjugaison complexe

Pour les fonctions $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, quand cela a un sens, on a :

$$\int_\Omega \overline{f(x)}g(x)\,dx = \overline{\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx} \tag{3.62}$$

(Et dans $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, le produit scalaire est $(f,g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$, forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.)

Cette formule est conservée pour les distributions :

Définition 3.53 Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, la distribution conjuguée $\overline{T} \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}), \qquad \langle \overline{T}, \varphi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\langle T, \overline{\varphi}\rangle}, \tag{3.63}$$

où $\overline{\varphi} : x \to \overline{\varphi}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\varphi(x)}$.

Exercice 3.54 Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $f_\xi(x) = e^{-ix\xi}$, et T_{f_ξ} la distribution régulière associée. Montrer : $\overline{T_{f_\xi}} = T_{\overline{f_\xi}}$.

Réponse. $\langle \overline{T_{f_\xi}}, \varphi\rangle =^{\text{déf}} \overline{\langle T_{f_\xi}, \overline{\varphi}\rangle} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{-ix\xi}\overline{\varphi(x)}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} \varphi(x)e^{+ix\xi}\,dx = \widehat{\varphi}(-\xi)$, transformée de Fourier en $-\xi$. Et $\langle T_{\overline{f_\xi}}, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} \overline{f_\xi}(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{+ix\xi}\varphi(x)\,dx = \widehat{\varphi}(-\xi)$. ▪

4 Dérivation des distributions

4.1 Rappel : discontinuité de première espèce, de seconde espèce

Notations : limite à droite $f(a+) = \lim_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} f(a+h)$, et limite à gauche $f(a-) = \lim_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} f(a-h)$.

Définition 4.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ présente une discontinuité de première espèce en un point $a \in \mathbb{R}$ ssi elle n'est pas continue en a mais admet des limites finies $f(a-)$ et $f(a+)$ (à gauche et à droite de a). On appelle alors saut de f en a le réel $[f](a) = f(a+) - f(a-)$.

Exemple des fonctions dites affines par morceaux.
La dérivée de telles fonctions au sens des distributions fera apparaître $[f](a)\,\delta_a$.

Définition 4.2 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non continue en un point $a \in \mathbb{R}$ qui n'est pas discontinue de première espèce est dite discontinue de seconde espèce.

Les discontinuités de seconde espèce ne nous intéresseront pas dans la suite.

4.2 Définition et linéarité

4.3 Définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$, vérifiant supp$\varphi \subset]a,b[$, est également considérée comme une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (prolongement par 0 sur $\mathbb{R} - [a,b]$). Ainsi, si $f \in C^1([a,b])$, une intégration par parties donne :

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[), \tag{4.1}$$

puisque φ est nulle en a et b (le suppφ est compact dans $]a,b[$), et donc $[f\varphi]_a^b = 0$.

Au sens des distributions cela s'écrit :

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[), \tag{4.2}$$

encore noté (abusivement) $\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$.

Définition 4.3 Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, on définit alors la dérivée T' de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle T', \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} -\langle T, \varphi'\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.3}$$

Et plus généralement, on définit pour $m \in \mathbb{N}$, notant $T^{(m)} = (T^{(m-1)})'$:

$$\langle T^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)}\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{4.4}$$

appelée dérivée d'ordre m de T.

Définition 4.4 Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on note $f' =^{\text{déf}} (T_f)'$ sa dérivée au sens des distributions : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle f', \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle (T_f)', \varphi\rangle \qquad (= -\langle T_f, \varphi'\rangle \overset{\text{noté}}{=} -\langle f, \varphi'\rangle). \tag{4.5}$$

Proposition 4.5 *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (est une distribution), ainsi que $T^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Autrement dit, une distribution est dérivable à tout ordre.*

Preuve. Linéarité immédiate. Continuité car si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\varphi^{(m)} \in \mathcal{D}(\Omega)$. ∴

Définition 4.6 Dans $\mathbb{R}^n$: soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit sa i-ème dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par, pour $i = 1, ..., n$:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.6}$$

Et on vérifie immédiatement que cela fait bien de $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ une distribution pour tout i et que T est infiniment dérivable.

Exercice 4.7 Montrer que la formule de Schwarz $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}$ est toujours vraie au sens des distributions.

Réponse. $\langle \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial x_i}}{\partial x_j}, \varphi\rangle = -\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\varphi}{\partial x_j}\rangle = \langle T, \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{\partial x_i}\rangle = \langle T, \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\partial x_j}\rangle$, car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc $\varphi \in C^2$. ∴

4.4 Linéarité de la dérivation et passage à la limite

Proposition 4.8 *Pour toutes distributions S et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$(S + \lambda T)' = S' + \lambda T', \tag{4.7}$$

et donc l'opération de dérivation est une opération linéaire dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Et si (T_n) est une suite de distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors (T_n') est une suite de distribution qui converge vers $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$T_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} T \qquad \Longrightarrow \qquad T_n' \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} T'. \tag{4.8}$$

Preuve. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\langle (S + \lambda T)', \varphi \rangle = -\langle (S + \lambda T), \varphi' \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle - \lambda \langle T, \varphi' \rangle = \langle S' + \lambda T', \varphi \rangle. \tag{4.9}$$

Puis, $-\langle T_n', \varphi \rangle = \langle T_n, \varphi' \rangle \to \langle T, \varphi' \rangle - -\langle T', \varphi \rangle$, ce pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. ∎

4.5 Exemples

4.5.1 Exemple $H_a' = \delta_a$

Exercice 4.9 Soit $H_a = 1_{[a,\infty]}$ la fonction de Heaviside en a (unit-step function at a). Montrer que :

$$(T_{H_a})' = \delta_a, \quad \text{noté} \quad H_a' = \delta_a \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.10}$$

Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside .

Réponse. H_a n'est pas continue en a donc n'est pas dérivable en a. C'est $(T_{H_a})'$ qu'il s'agit de calculer, où T_{H_a} est la distribution régulière associée (a un sens car $H_a \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle (T_{H_a})', \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} -\langle T_{H_a}, \varphi' \rangle = -\int_a^\infty \varphi'(x) = -[\varphi(x)]_a^\infty = -(0 - \varphi(a)) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ implique $\varphi(\infty) = 0$. D'où $(T_{H_a})' = \delta_a$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. ∎

4.5.2 Exemple δ_a'

Exemple 4.10 La dérivée $\delta_a' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la masse de Dirac est donnée par, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \delta_a', \varphi \rangle \overset{(4.3)}{=} -\langle \delta_a, \varphi' \rangle = -\varphi'(a). \tag{4.11}$$

(Attention au signe.) ∎

Exercice 4.11 Montrer qu'avec $\delta_a = \tau_a \delta_0$ on retrouve (4.11).

Réponse. $\langle (\tau_a\delta_0)', \varphi \rangle = -\langle \tau_a \delta_0, \varphi' \rangle = -\langle \delta_0, \tau_{-a}\varphi' \rangle = -(\tau_{-a}\varphi')(0) = -\varphi'(0 - (-a)) = -\varphi'(a)$. ∎

4.5.3 Exemple $|x|' = -1_{\mathbb{R}_-} + 1_{\mathbb{R}_+}$

Exercice 4.12 Soit $f(x) = (x - a)1_{]a,\infty[}(x)$ (dessin), et on note $f = (x - a)1_{]a,\infty[}$. Montrer que

$$((x - a)1_{]a,\infty[})' = 1_{]a,\infty[} \quad (= H_a) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.12}$$

Donner le sens de (4.12), et vérifier (4.12). Faire un dessin.

Réponse. La fonction f n'est pas dérivable (en a). Cette fonction est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$; soit T_f la distribution régulière associée. Le sens de (4.12) est $(T_f)' = T_{1_{]a,\infty[}}$. Calculons $(T_f)'$: pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}\langle (T_f)', \varphi \rangle = &-\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = +\int_a^\infty (x - a)\varphi'(x)\,dx \\ = &\int_a^\infty \varphi(x)\,dx - [(x - a)\varphi(x)]_a^\infty = \langle T_{1_{]a,\infty[}}, \varphi \rangle - 0,\end{aligned}$$

car $\varphi(x) = 0$ pour x assez grand (à l'extérieur du support compact de φ. Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $(T_f)' = T_{1_{]a,\infty[}}$, i.e. (4.12). Dessin : là où elle est définie classiquement la dérivée vaut 0 sur $]-\infty, a[$ et $+1$ sur $]a, \infty[$. ∎

Exercice 4.13 La fonction $g : x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0 au sens classique (au sens des fonctions). On noter $g = |x|$. Montrer qu'elle est dérivable au sens des distributions, et que sa dérivée vaut :

$$(|x|)' = -H_0(-x) + H_0(x) = -1_{\mathbb{R}_-}(x) + 1_{\mathbb{R}_+}(x) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.13}$$

Donner le sens de (4.13), et vérifier (4.13). Faire un dessin.

Réponse. La fonction $g : x \to |x|$ n'est pas dérivable (en 0). Cette fonction est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$; soit T_g la distribution régulière associée. Le sens de (4.13) est $(T_g)' = -T_{1_{\mathbb{R}_-}} + T_{1_{\mathbb{R}_+}}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}\langle (T_{|x|})', \varphi\rangle &= -\langle T_{|x|}, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)\,dx = +\int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)\,dx - \int_0^\infty x\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 \varphi(x)\,dx + [x\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_0^\infty \varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]_0^\infty = \langle -T_{1_{\mathbb{R}_-}} + T_{1_{\mathbb{R}_+}}, \varphi\rangle + 0,\end{aligned}$$

comme souhaité. Dessin : là où elle est définie classiquement la dérivée vaut -1 sur $\mathbb{R}^*_-$ et $+1$ sur $\mathbb{R}^*_+$. ∴

Remarque 4.14 La fonction $|x|$ est elle-même la dérivée de la fonction "signe$(x)\frac{x^2}{2}$" (qui est dans $C^1(\mathbb{R})$) qui vaut $\frac{-x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}^-$ et $\frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$, et "signe$(x)\frac{x^2}{2}$" n'est donc pas $C^2(\mathbb{R})$. ∴

4.5.4 Autres exemples

Exercice 4.15 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, soit $a \in \mathbb{R}$ et soit sa primitive $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Montrer que $(T_F)' = T_{F'}$, i.e. que $(T_F)' = T_f$, écriture bien compatible avec $F' = f$.

Réponse. $-\langle T_F, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx = +\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx - [F(x)\varphi(x)]_{x=-\infty}^{\infty}$, avec terme de bord nul pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, d'où $\langle T_F', \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ∴

Exercice 4.16 (Généralisation.) Montrer, pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$(\check{\varphi})' = -\widetilde{(\varphi')}. \tag{4.14}$$

En déduire pour les distributions :

$$(\check{T})' = -\widetilde{(T')}. \tag{4.15}$$

En particulier si T est paire, alors T' est impaire ; et si T est impaire, alors T' est paire.

Réponse. $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ donne $(\check{\varphi})'(x) = -\varphi'(-x) = -\widetilde{(\varphi')}(x)$, soit donc $(\check{\varphi})' = -\widetilde{(\varphi')}$, i.e. (4.14).

D'où :

$\langle \widetilde{(T')}, \varphi\rangle = \langle T', \check{\varphi}\rangle = -\langle T, (\check{\varphi})'\rangle = -\langle T, -\widetilde{(\varphi')}\rangle = \langle T, \widetilde{(\varphi')}\rangle = \langle \check{T}, \varphi'\rangle = \langle -(\check{T})', \varphi\rangle$, i.e. (4.15).

Donc T paire : $\widetilde{(T')} = -(\check{T})' = -(T)' = -T'$; et T impaire : $\widetilde{(T')} = -(\check{T})' = -(-T)' = T'$. ∴

Exemple 4.17 Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\check{\delta}_0 = \delta_0, \qquad \check{\delta}_0' = -\delta_0', \tag{4.16}$$

i.e. la (distribution) masse de Dirac δ_0 est paire et sa dérivée est impaire.

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\langle \check{\delta}_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \check{\varphi}\rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$: la distribution δ_0 est paire. Donc sa dérivée est impaire. ∴

Remarque 4.18 La définition (4.3) exprime que la transformation $D_1 : T \to T'$ est la transposée de la transformation $D_2 : \varphi \to -\varphi'$ dans la dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$: $\langle D_1 T, \varphi\rangle = \langle T, D_2\varphi\rangle$. ∴

4.6 Dérivation de la masse de Dirac comme limite de fonctions

4.6.1 Dérivée de la masse de Dirac : dérivée des fonctions portes

Soit $\Pi_{na}(x) = n\, 1_{]-\frac{1}{2n}+a, \frac{1}{2n}+a[} = n\, H_{\frac{-1}{2n}+a} - nH_{\frac{1}{2n}+a}$ (dessin), où on rappelle que la fonction de Heaviside H_b est donnée par $H_b = 1_{]b,\infty[}$ (unit-step function comme en (3.32)).

On a $\Pi_{na} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_a$, cf. (3.33). Donc on a, cf. (4.8) :

$$(T_{\Pi_{na}})' \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_a', \quad \text{noté} \quad \Pi_{na}{}' \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_a' \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.17}$$

Exercice 4.19 Retrouver (4.17) en dérivant les Π_n.

Réponse. Les portes élémentaires $\Pi_n(x)$ cf. (3.32) s'écrivent à l'aide des fonctions de Heaviside :

$$\Pi_n(x) = n\,(H_{\frac{-1}{2n}}(x) - H_{\frac{1}{2n}}(x)) = -\frac{H_h(x) - H_{-h}(x)}{2h} \quad \text{où} \quad h = \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.18}$$

On en déduit par linéarité de la dérivée au sens des distributions :

$$(T_{\Pi_n})' = n\,(\delta_{\frac{-1}{2n}}(x) - \delta_{\frac{1}{2n}}(x)) = -\frac{\delta_h(x) - \delta_{-h}(x)}{2h} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{4.19}$$

i.e., pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, (avec $(h \to 0) \Leftrightarrow (n \to \infty)$) :

$$\langle (T_{\Pi_n})', \varphi\rangle = -\frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\varphi'(0). \tag{4.20}$$

On a bien $(T_{\Pi_n})' \rightharpoonup \delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, notée abusivement (4.17). ■

4.6.2 Dérivée de la masse de Dirac : presque comme une fonction

Proposition 4.20 *On a (attention au signe) :*

$$\delta_a' = -\lim_{h\to 0} \frac{\delta_{a+h} - \delta_a}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\delta_{a+\frac{h}{2}} - \delta_{a-\frac{h}{2}}}{h} \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.21}$$

(Signe $-$, voir dualité (4.3) et remarque 4.18.)

Preuve. $\frac{1}{h}\langle \delta_{a+h} - \delta_a, \varphi\rangle = \frac{1}{h}(\varphi(a+h) - \varphi(a)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \varphi'(a) = \langle -\delta_a', \varphi\rangle$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et donc $\frac{\delta_{a+h} - \delta_a}{h} \underset{h\to 0}{\rightharpoonup} -\delta_a'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Idem pour la seconde égalité. ■

Remarque 4.21 En électrostatique, $T = -\delta_0'$ représente un doublet, i.e. l'effet que donne les deux charges ponctuelles unitaires $+\delta_{-\frac{h}{2}}$ et $-\delta_{\frac{h}{2}}$ de signes opposés et distantes de h. Le doublet unité des électriciens est en fait orienté, par convention, de la charge $-$ vers la charge $+$ et vaut donc $-\delta_0'$ et non δ_0'. ■

4.6.3 Convergence vers δ_0' d'une suite de fonctions en escalier

On considère les fonctions en escalier impaires (faire un dessin) :

$$g_n = n^2 1_{[-\frac{1}{n},0[} - n^2 1_{[0,\frac{1}{n}[}. \tag{4.22}$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} x\,g_n(x)\,dx = -1. \tag{4.23}$$

La première égalité est triviale (g_n est impaire), et pour la seconde $x \to x\,g_n(x)$ est paire et $\int_0^{\frac{1}{n}} x(-n^2)\,dx = -n^2[\frac{x^2}{2}]_0^{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$.

Proposition 4.22 *On a :*

$$g_n \rightharpoonup \delta_0' \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.24}$$

au sens $T_{g_n} \rightharpoonup \delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où T_{g_n}.

Preuve. • 1ère démonstration. Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ on a le développement limité au premier ordre

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(0) + x\,\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et $\varepsilon(0) = 0$. Donc pour un $\beta > 0$ ("aussi petit que souhaité"), il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ on a $-\beta < \varepsilon(x) < \beta$. D'où :

$$\begin{aligned}\langle T_{g_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx &= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx + \varphi'(0)\int_{\mathbb{R}} x\,g_n(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,x\,\eta(x)\,dx \\ &= \varphi(0) \times 0 - \varphi'(0) \times 1 + n^2\int_{-\frac{1}{n}}^0 x\,\varepsilon(x)\,dx - n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\,\varepsilon(x)\,dx,\end{aligned}$$

avec $|n^2\int_0^{\frac1n} x\,\varepsilon(x)\,dx| \leqslant n^2\int_0^{\frac1n} x\,|\varepsilon(x)|\,dx \leqslant n^2\int_0^{\frac1n} x\,\beta\,dx \leqslant n^2\beta[\frac{x^2}{2}]_0^{\frac1n} \leqslant \frac{\beta}{2}$, même traitement pour $\int_{-\frac1n}^0$ ....

D'où $|\langle T_{g_n},\varphi\rangle + \varphi'(0) \leqslant \beta$ dès que n est assez grand, d'où $\langle T_{g_n},\varphi\rangle + \varphi'(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

• 2ème démonstration. On applique l'exercice 3.40 : on a $(T_{f_n})' = T_{g_n}$ (et on dit que $f_n' = g_n$ au sens des distributions), avec $T_{f_n} \rightharpoonup \delta_0$, donc $(T_{f_n})' \rightharpoonup \delta_0'$ cf. (4.8). ▪

Remarque 4.23 Avec la fonction de Heaviside on a $g_n = n^2(H_{\frac{-1}{n}} - H_0) - n^2(H_0 - H_{\frac1n}) = n^2H_{\frac{-1}{n}} - 2n^2H_0 + n^2H_{\frac{-1}{n}}$, donc $g_n = \frac{H_h - 2H_0 + H_{-h}}{h^2}$ avec $h = \frac1n$, et on aperçoit une approximation de la dérivée seconde de la fonction H_0 (qui n'est pas dérivable au sens classique). Effectivement, au sens des distributions on a $H_0' = \delta_0$ (au sens $(T_{H_0})' = \delta_0$), cf. (4.10), et donc $H_0'' = \delta_0'$ (au sens $(T_{H_0})'' = \delta_0'$). ▪

4.6.4 Convergence vers δ_0' d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On prend (γ_n) la suite donnée en (2.25), et donc (4.8) donne : Alors :

$$\gamma_n' \rightharpoonup \delta_0' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.25}$$

au sens $(T_{\gamma_n})' \rightharpoonup \delta_0'$. Et les γ_n étant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, il en est de même des γ_n'.

4.6.5 δ_0' n'est pas un “élément absorbant”

Attention : on verra que les dérivées de δ_a ne sont pas absorbantes : $\psi\delta_a' \neq \psi(a)\delta_a'$ en général.

Proposition 4.24 *Pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a :*

$$\psi\delta_a' = \psi(a)\delta_a' - \psi'(a)\delta_a. \tag{4.26}$$

(Formule $(\psi\delta_a)' = \psi'\delta_a + \psi\delta_a'$ puisqu'ici $(\psi\delta_a) = (\psi(a)\delta_a)$.)

Preuve. $\langle\delta_a'\psi,\varphi\rangle = \langle\delta_a',\psi\varphi\rangle = -\langle\delta_a,(\psi\varphi)'\rangle = -(\psi\varphi)'(a) = -\psi'(a)\varphi(a) - \psi(a)\varphi'(a) = -\psi'(a)\langle\delta_a,\varphi\rangle + \psi(a)\langle\delta_a',\varphi\rangle = \langle -\psi'(a)\delta_a + \psi(a)\delta_a',\varphi\rangle$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ▪

4.7 Formule de Leibniz

4.7.1 Dérivation d'ordre 1 d'un produit

Si $\varphi \in C^1(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$, alors :

$$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi', \tag{4.27}$$

dont on déduit que :

Proposition 4.25 *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ la distribution $(T\psi)'$ est donnée par :*

$$(T\psi)' = T'\psi + T\psi' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.28}$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc $\varphi' \in \mathcal{D}(\Omega)$. Et $\langle(T\psi)',\varphi\rangle = -\langle T\psi,\varphi'\rangle = -\langle T,\psi\varphi'\rangle = -\langle T,(\psi\varphi)' - \varphi\psi'\rangle = -\langle T,(\psi\varphi)'\rangle + \langle T,\varphi\psi'\rangle = \langle T',\psi\varphi\rangle + \langle T\psi',\varphi\rangle$. ▪

Exemple 4.26 Si $T = \delta_0$, alors on a, pour $\psi \in C^\infty(\Omega)$:

$$(\delta_0\psi)' = \delta_0'\psi + \delta_0\psi' = \psi(0)\delta_0'. \tag{4.29}$$

la dernière égalité car $\psi\delta_0 = \psi(0)\delta_0$. Vérification : $\langle\delta_0'\psi + \delta_0\psi',\varphi\rangle = \langle\delta_0',\psi\varphi\rangle + \langle\delta_0,\psi'\varphi\rangle = -(\psi\varphi)'(0) + \psi'(0)\varphi(0) = -\psi'(0)\varphi(0) - \psi(0)\varphi'(0) + \psi'(0)\varphi(0) = -\psi(0)\varphi'(0) = -\psi(0)\langle\delta_0,\varphi'\rangle = +\psi(0)\langle\delta_0',\varphi\rangle$. ▪

4.7.2 Formule de Leibniz

On rappelle que, pour les fonctions f et g dans $C^k(\Omega)$, le produit fg est dans $C^k(\Omega)$ et que sa dérivée à l'ordre k est donnée par :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(j)} g^{(k-j)}, \tag{4.30}$$

où $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!} = \binom{k}{j}$. Par exemple $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

Proposition 4.27 et notation. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ alors :*

$$(\psi T)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j T^{(j)} \psi^{(k-j)} \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.31}$$

Preuve. Ayant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la distribution ψT est bien définie.

Par récurrence : vrai pour $k = 1$, puis :

$(T\psi)^{(k+1)} = ((T\psi)^k)' = \sum_{j=0}^k C_k^j (T^{(j)}\psi^{(k-j)})'$ par hypothèse de récurrence et linéarité de la dérivée. D'où $(T\psi)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^k C_k^j T^{(j+1)}\psi^{(k-j)} + \sum_{j=0}^k C_k^j T^{(j)}\psi^{(k-j+1)}$, où on a utilisé la formule de Leibniz à l'ordre 1. D'où, avec décalage d'indice sur la première somme :

$(T\psi)^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} T^{(j)}\psi^{(k-j+1)} + \sum_{j=0}^k C_k^j T^{(j)}\psi^{(k-j+1)}$, soit :

$(T\psi)^{(k+1)} = C_{k+1}^0 T^{(k+1)}\psi^{(0)} + \sum_{j=1}^k (C_k^{j-1} + C_k^j) T^{(j)}\psi^{(k-j+1)} + C_k^0 T^{(0)}\psi^{(k+1)}$.

Puis $C_k^j + C_k^{j-1} = C_{k+1}^j$ (triangle de Pascal : $\frac{k!}{j!(k-j)!} + \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} = \frac{(k+1)!}{j!(k-j)!}$). D'où :

$(T\psi)^{(k+1)} = T^{(k+1)}\psi^{(0)} + \sum_{j=1}^k C_{k+1}^j T^{(j)}\psi^{(k-j+1)}) + T^{(0)}\psi^{(k+1)}$, i.e. (4.31). ∎

4.8 Dérivation successives d'une fonction C^k tronquée

Dans le cas simple d'une fonction tronquée, on a une formule (équivalente) plus simple que la formule de Leibniz : on se sert du fait que δ_a est absorbant (voir paragraphe 3.6.5) : $f\delta_a = f(a)\delta_a$. On note $H_a = 1_{[a,\infty[}$ la fonction de Heaviside en a.

Proposition 4.28 *Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors fH_a est dérivable au sens des distributions avec :*

$$(T_{fH_a})' = T_{f'H_a} + f(a)\delta_a, \tag{4.32}$$

et on note :

$$(fH_a)' = f'H_a + f(a)\delta_a. \tag{4.33}$$

Plus généralement, si $f \in C^k(\mathbb{R})$, alors, pour $j \in [1,k]_\mathbb{N}$:

$$(T_{fH_a})^{(j)} = T_{f^{(j)}H_a} + f^{(j-1)}(a)\delta_a + f^{(j-2)}(a)\delta_a' + \dots + f(a)\delta_a^{(j-1)}, \tag{4.34}$$

$(= T_{f^{(j)}H_a} + \sum_{i=0}^{j-1} f^{(j-i)}(a)\delta_a^{(j)})$, et on note :

$$(fH_a)^{(j)} = T_{f^{(j)}H_a} + f^{(j-1)}(a)\delta_a + f^{(j-2)}(a)\delta_a' + \dots + f(a)\delta_a^{(j-1)}. \tag{4.35}$$

Preuve. Cas $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle (T_{fH_a})', \varphi\rangle = -\int_a^\infty f(x)\varphi'(x)\,dx = +\int_a^\infty f'(x)\varphi(x)\,dx - [f(x)\varphi(x)]_a^\infty = \langle T_{f'H_a}, \varphi\rangle + f(a)\varphi(a),$$

soit (4.32). Puis récurrence : $(T_{fH_a})^{(i+1)} = (T_{f^{(i)}H_a} + f^{(i-1)}(a)\delta_a + f^{(i-2)}(a)\delta_a' + \dots + f(a)\delta_a^{(i-1)})'\dots$ ∎

Exercice 4.29 Montrer qu'au sens des distributions, quand $f \in C^1(\mathbb{R})$, la fonction $f1_{[a,b]}$ pour $a < b$ (fonction f tronquée à gauche en a et à droite en b) se dérive dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ comme :

$$(f1_{[a,b]})' = f'1_{[a,b]} + f(\delta_a - \delta_b) \qquad (= f'1_{[a,b]} - f(\delta_b - \delta_a)). \tag{4.36}$$

Faire un dessin.

Réponse. $1_{[a,b]} = H_a - H_b$, donc $(f1_{[a,b]})' = f'(H_a - H_b) + f(H_a' - H_b') = f'1_{[a,b]} + f(\delta_a - \delta_b)$. ∎

Définition 4.30 Le terme $f(a)\delta_a$, résultant de la dérivation d'ordre 1, est appelé couche d'ordre 1 de densité $f(a)$.

Remarque 4.31 Cette définition prend tout son sens dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 2$: si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ, on obtient quand n_i est la i-ème composante du vecteur normal unitaire sortant :

$$\frac{\partial(f1_\Omega)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}1_\Omega - fn_i\delta_\Gamma \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{4.37}$$

à comparer avec (4.36) (le signe correspond à la normale sortante de Ω, ce qui dans le cas (4.36) est un signe $-$ en a). Et fn_i exprime le saut de $f1_\Omega$ en traversant Γ (formule des sauts), le terme $\langle fn_i\delta_\Gamma, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle fn_i, \varphi\rangle_\Gamma$ (couche d'ordre 1) mesurant le saut de la dérivation (d'ordre 1) de $f1_\Omega$. Donc pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on obtient :

$$\langle\frac{\partial(f1_\Omega)}{\partial x_i}, \varphi\rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,d\Omega - \int_\Gamma f(\vec{x})n_i(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,d\Gamma,$$

et on retrouve la formule de Green–Gauss–Ostrogradski dans le cas $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. ∴

Définition 4.32 Le terme $f(a)\delta'_a$ est appelé couche d'ordre 2 (doublet) de densité $f(a)$.

Remarque 4.33 Le résultat (4.35) sera très utilisé lors de l'étude des équations différentielles et de son application au calcul symbolique. ∴

Remarque 4.34 On peut également appliquer la formule de Leibniz, en faisant attention à son écriture au sens des distributions. Par exemple, on a au sens des distributions :

$$(fH_a)'' = f''H_a + 2f'H'_a + fH''_a \qquad (= f''H_a + 2f'\delta_a + f\delta'_a), \tag{4.38}$$

avec $2f'\delta_a = 2f'(a)\delta_a$ et avec $f\delta'_a = -f'(a)\delta_a + f(a)\delta'_a$, cf. (4.26). Et on retrouve bien (4.35) :

$$(fH_a)'' = f''H_a + f'(a)\delta_a + f(a)\delta'_a. \tag{4.39}$$

La formule de Leibniz est ici trop "lourde" étant donné que δ_a est 'absorbant' et qu'on obtient directement (4.35). ∴

Exemple 4.35 Vérifier que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(H_0(x)\cos(x))' &= -H_0(x)\sin(x) + \delta_0,\\ (H_0(x)\sin(x))' &= H_0(x)\cos(x).\end{aligned} \tag{4.40}$$

∴

4.9 Applications

On note (abusivement) $I = x$ la fonction $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ définie par $I : x \to I(x) = x$ (identité). (Sous-entend que le nom de la variable est x.)

Et on note $xf =^{\text{déf}} If$ la fonction $x \to xf(x)$. Et comme $I \in C^\infty(\mathbb{R})$, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le produit $IT =^{\text{noté}} xT$ est une distribution, cf (3.59).

4.9.1 Fonction $C^1(\mathbb{R})$

Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ est en particulier $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Et on a immédiatement :

Proposition 4.36 *Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et si T_f est la distribution régulière associée à f alors :*

$$(T_f)' = T_{(f')} \overset{\text{noté}}{=} f' \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

(ne pas oublier d'écrire « dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ») i.e. la dérivée de la distribution régulière est la distribution régulière associée à la dérivée.

Preuve. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle(T_f)', \varphi\rangle = -\int_\mathbb{R} f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_\mathbb{R} f'(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_{(f')}, \varphi\rangle,$$

puisque f et f' sont $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et φ est nulle à l'infini. ∴

4.9.2 Fonction xH_0

Soit la fonction :

$$f = IH_0 \overset{\text{noté}}{=} xH_0, \qquad \text{i.e.} \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{4.41}$$

faire un dessin (ici I est la fonction identité $I(x) = x$). Cette fonction est trivialement continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Cette fonction n'est pas dérivable en 0 (au sens classique), mais est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc dérivable au sens des distributions.

Proposition 4.37 *On a :*

$$(xH_0)' = H_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.42}$$

où $(xH_0)' =^{\text{déf}} (T_{xH_0})'$ au sens des distributions. Soit $\langle (xH_0)', \varphi \rangle = \langle H_0, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Preuve. La formule de Leibniz donne $(IH_0)' = I'H_0 + I\delta_0 = H_0 + 0$ car $I(0) = 0$. Ou encore, calcul direct : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle (T_{xH_0})', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} xH_0(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^\infty x\varphi'(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx - 0 = \langle H_0, \varphi \rangle. \tag{4.43}$$

▪

Exercice 4.38 Montrer que $|x|' = -H_0(-x) + H_0(x) = -1_{\mathbb{R}_-} + 1_{\mathbb{R}_+}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Réponse. Se servir de la linéarité de la dérivée et écrire $|x| = xH_0(x) - xH_0(-x)$. ▪

Exercice 4.39 Montrer que, avec $H_a = 1_{[a,\infty[}$ (Heaviside en a) :

$$\big((x-a)H_a\big)' = H_a \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.44}$$

Réponse. Appliquer Leibniz ou reprendre (4.43) en remplaçant $\int_0^\infty$ par $\int_a^\infty$. ▪

4.9.3 Fonction $C^0(\mathbb{R})$, et $C^1(\mathbb{R})$ par morceaux

La généralisation aux fonctions $C^0(\mathbb{R})$ et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ est immédiate : une telle fonction est de la forme, avec $f_1 \in C^1(\mathbb{R})$ et $x_1 < \dots < x_n$:

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)\sigma_i H_{x_i}, \tag{4.45}$$

faire un dessin, où les réels σ_i représentent les sauts de pente de f aux points x_i :

$$\sigma_i \overset{\text{déf}}{=} f'(x_i+) - f'(x_i-) \overset{\text{noté}}{=} [f'](x_i), \tag{4.46}$$

voir proposition suivante.

Proposition 4.40 *On a alors, notant abusivement $f' =^{\text{déf}} (T_f)'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:*

$$f' = f_1' + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i H_{x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.47}$$

où on n'oublie pas d'écrire « dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ » (égalité qui ne peut être utilisée qu'au "sens faible", i.e. sous la forme $\int f'\varphi =^{\text{déf}} \int f_1'\varphi + \sum_{i=1}^n \sigma_i \int H_{x_i}\varphi$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Preuve. On applique (4.44) et la linéarité de la dérivation. ▪

4.9.4 Fonction $C^1(\mathbb{R})$ par morceaux

La généralisation aux fonctions C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ est immédiate : une telle fonction est de la forme, avec $f_1 \in C^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i (x - x_i) H_{x_i}(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i H_{x_i}(x), \qquad \text{où donc} \qquad \begin{cases} \tilde{\sigma}_i = [f](x_i), \\ \sigma_i = [f'](x_i). \end{cases} \tag{4.48}$$

Proposition 4.41 *On a alors, notant abusivement $f' =^{\text{déf}} (T_f)'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:*

$$f' = f_1' + \sum_{i=1}^n \sigma_i H_{x_i} + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i \delta_{x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.49}$$

où on n'oublie pas d'écrire « dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ » : ce n'est pas une égalité fonctionnelle (entre fonctions), mais une égalité entre distributions.

Preuve. Linéarité. ∴

4.9.5 Notations de Schwartz

Pour f une fonction C^1 par morceaux de la forme (4.48), on note $f_1 = \{f\}$ la partie $C^1(\mathbb{R})$ de f :

$$f = \{f\} + g, \qquad g = \sum_{i=1}^n \sigma_i (x - x_i) H_{x_i}(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i H_{x_i}(x), \tag{4.50}$$

avec g non dérivable au sens classique. On note :

$$f' = \{f'\} + g' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.51}$$

qui signifie donc $(T_f)' = T_{f_1'} + (T_g)'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, noté abusivement $f' = f_1' + g'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Notation généralisé aux fonctions f C^k par morceaux où donc :

$$f = f_k + g \overset{\text{noté}}{=} \{f\} + g, \qquad f_k = \{f\} \in C^k, \tag{4.52}$$

qui donne :

$$f^{(k)} = \{f^{(k)}\} + g^{(k)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{4.53}$$

4.10 $T' = 0 \Rightarrow T = c$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a : si $T = c$ constante (au sens $T = T_{c1_{\mathbb{R}}}$), alors $T' = 0$: en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} c\varphi'(x)\, dx = -[c\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0,$$

car φ est à support compact. (Rappel : $[\varphi(x)]_0^\infty =^{\text{déf}} \lim_{X\to\infty} [\varphi(x)]_0^X$.)

La réciproque est vraie :

Proposition 4.42 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie $T' = 0$ alors T est une "distribution constante" : $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $T = c$ (au sens $T = T_{c1_{\mathbb{R}}}$), à savoir $c = \langle T, \gamma \rangle$ pour toute fonction $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $\int_\Omega \gamma(x)\, dx = 1$ (masse unité).*

Preuve. Si $T = c$, alors $\langle T, \gamma \rangle = \int_{\mathbb{R}} c\gamma(x)\, dx = c(\int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\, dx) = c$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\, dx = 1$.

Supposons $T' = 0$, i.e. $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \psi' \rangle = 0$.

On veut : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = \langle c1_{\mathbb{R}}, \varphi \rangle = c\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$. Donc on cherche à exprimer $\langle T, \varphi \rangle$ en fonction de $\langle T, \psi' \rangle$ pour une certaine fonction ψ.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a envie de définir $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en fonction de φ à partir de $\varphi = \psi'$, donc, ayant $\psi(-\infty) = 0$,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\, dt, \tag{4.54}$$

mais alors $\psi(\infty) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\, dx \neq 0$ en général (prendre une fonction $\varphi \geqslant 0$). Corrigeons (4.54) :

Soit $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $\int_\mathbb{R} \gamma(x)\,dx = 1$, et soit

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\,dt - (\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,dx) \int_{-\infty}^x \gamma(t)\,dt, \quad \text{donc} \quad \psi'(x) = \varphi(x) + (\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,dx)\gamma(x). \tag{4.55}$$

On a bien $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, car $\varphi, \gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Et donc

$$\begin{aligned} \langle T', \psi\rangle = 0 &= \langle T, \varphi\rangle - (\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,dx)\langle T, \gamma\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \langle T, \gamma\rangle\langle T_{1_\mathbb{R}}, \varphi\rangle \\ &= \langle T, \varphi\rangle - c\langle T_{1_\mathbb{R}}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \langle T_{c1_\mathbb{R}}, \varphi\rangle \quad \text{où} \quad c = \langle T, \gamma\rangle. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $T - T_{c1_\mathbb{R}} = 0$ comme annoncé.

Et si $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie $\int_\mathbb{R} \zeta(x)\,dx = 1 = \langle 1_\mathbb{R}, \zeta\rangle$ alors $\langle T, \zeta\rangle =^{(4.56)} c\langle 1_\mathbb{R}, \zeta\rangle = c = \langle T, \gamma\rangle$: la constante c est indépendante du choix de la fonction γ de masse unité. ∴

Corollaire 4.43 *Toute distribution admet une primitive qui est unique à une constante près.*

Preuve. Traitons le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Autres cas en exercice.

Existence. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.q. $S' = T$, i.e. $\langle S', \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, i.e. :

$$\langle S, \varphi'\rangle = -\langle T, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Comme précédemment on veut une information sur $\langle S, \varphi\rangle$ alors qu'on ne dispose que d'une information sur $\langle S, \varphi'\rangle$. On applique la démarche précédente : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on pose $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ "la primitive modifiée" définie en (4.55), i.e. :

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\,dt - (\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,dx) \int_{-\infty}^x \gamma(t)\,dt \overset{\text{noté}}{=} \widetilde{\psi}(\varphi)(x). \tag{4.57}$$

Et on définit S par :

$$\langle S, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} -\langle T, \widetilde{\psi}(\varphi)\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Si S ainsi défini est une distribution, comme $\widetilde{\psi}(\varphi')(x) = \int_{-\infty}^x \varphi'(t)\,dt - (\int_\mathbb{R} \varphi'(x)\,dx) \int_{-\infty}^x \gamma(t)\,dt = \varphi(x) - (0)\gamma(x) = \varphi(x)$, on a :

$$\langle S, \varphi'\rangle = -\langle T, \varphi\rangle,$$

Comme souhaité.

Vérifions que S est bien une distribution. Linéarité : car ψ est une fonction linéaire de φ, immédiat. Continuité : soit (φ_n) une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui tend vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; alors (ψ_n) est une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (par construction) qui tend vers ψ donnée par (4.57). Et on a $\text{supp}\psi_n \subset K + \text{supp}\gamma$ où K est un support commun à toutes les φ_n, cf. (3.2). Et on a, notons $|K|$ la mesure de K :

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi_n(x)| &\leqslant \int_{-\infty}^x |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt + (\int_\mathbb{R} |\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx) \int_{-\infty}^x |\gamma(t)|\,dt \\ &\leqslant ||\varphi - \varphi_n||_\infty |K| + ||\varphi - \varphi_n||_\infty |K| \int_{-\infty}^\infty |\gamma(t)|\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

car $||\varphi - \varphi_n||_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Idem avec $|\psi^{(k)}(x) - \psi_n^{(k)}(x)$. Donc S est linéaire continue, cf. (3.2) : c'est une distribution.

Unicité. Soit S_2 une autre primitive, i.e. $\langle S_2', \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle = \langle S', \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc $\langle S_2' - S', \varphi\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $(S_2 - S)' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d'où $S_2 - S$ est une distribution constante, cf. proposition 4.42. ∴

4.11 Valeur principale de Cauchy et dérivation de $\mathrm{Log}|x|$

On va ici donner un exemple de distribution "associée" à une fonction non localement sommable, à savoir $T = \text{v.p.}\frac{1}{x}$ définie par :

$$T = (\mathrm{Log}|x|)', \tag{4.58}$$

où Log est la fonction logarithme népérien.

Comme $\mathrm{Log}|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, cette fonction définie une distribution régulière S. Donc sa dérivée $S' = T$ est bien une distribution.

Mais T n'est pas une distribution régulière. On détaille les calculs dans la suite, et on écrira T "presque" comme une distribution régulière.

4.11.1 **Fonction** $\mathrm{Log}(|x|)$

On note ici $g : x \in \mathbb{R}^* \to g(x) = \mathrm{Log}(|x|) =^{\text{noté}} \mathrm{Log}|x| \in \mathbb{R}$: c'est la fonction paire définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0, \;\; g(x) = \mathrm{Log}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \\ \text{pour } x < 0, \;\; g(x) = \mathrm{Log}(-x) = \displaystyle\int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_{-1}^{x} \frac{du}{u}. \end{cases} \tag{4.59}$$

C'est une primitive de la fonction impaire $x \to \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$. En effet, par définition de Log dans $\mathbb{R}_+^*$ on a $\mathrm{Log}'(x) = \frac{1}{x}$, et dans $\mathbb{R}_-^*$ on a $(\mathrm{Log}|x|)' = (\mathrm{Log}(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

La fonction $g = \mathrm{Log}|.|$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}$: en effet, une primitive est, sur $\mathbb{R}^*$:

$$G(x) = x\mathrm{Log}(|x|) - x, \qquad \text{et on pose } G(0) = 0,$$

vérification immédiate. (Et G est une fonction continue sur $\mathbb{R}$: on a prolongé par continuité en 0.)

4.11.2 Rappel d'intégration

Soient $a < c < b$. Si f est une fonction intégrable sur $]a, c{-}\eta[$ et sur $]c{+}\varepsilon, b[$ pour tout $\eta, \varepsilon > 0$ t.q. $a < c{-}\eta$ et $c{+}\varepsilon < b$, alors f intégrable sur $]a, b[$ ssi :

$$\lim_{\eta\to 0} \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx < \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx < \infty. \tag{4.60}$$

Et alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est la somme de ces deux limites. Et dans ce cas $f \in L^1_{loc}(]a,b[)$.

Ce n'est pas le cas de la fonction $\frac{1}{x}$ pour $a < 0 < b$ (cas $c = 0$) : problème en 0.

4.11.3 Partie finie et valeur principale de Cauchy

Il se peut que dans (4.60) les limites n'existent pas, mais que la limite "symétrique" suivante existe (quand on prend $\eta = \varepsilon$) :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \Big) < \infty. \tag{4.61}$$

Définition 4.44 Dans ce cas, le réel :

$$\text{p.f.}(\int_a^b f(x)\,dx) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \Big) \tag{4.62}$$

est appelée partie finie de l'intégrale divergente $\int_a^b f(x)\,dx$.

Définition 4.45 On note v.p.(f) la distribution définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$:

$$\langle \text{v.p.}(f), \varphi \rangle = \text{p.f.}(\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx), \tag{4.63}$$

dite valeur principale de Cauchy f.

Proposition 4.46 *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, sous l'hypothèse (4.61), $T = \text{v.p.}(f)$ est bien une distribution de $\mathcal{D}'(]a,b[)$.*

Preuve. Exercice. ∎

4.11.4 Cas v.p.$(\frac{1}{x})$

Cas $f(x)=\frac{1}{x}$, correspondant à $a<0$, $b>0$ et $c=0$.
On a $\int_a^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x}=\mathrm{Log}(|-\varepsilon|)-\mathrm{Log}|a|+\mathrm{Log}(b)-\mathrm{Log}\varepsilon=\mathrm{Log}(b)-\log(-a)<\infty$. Donc :

$$\text{p.f.}\int_a^b\frac{1}{x}\,dx=\mathrm{Log}\frac{|b|}{|a|},\tag{4.64}$$

Et on note v.p.$(\frac{1}{x})$ la distribution v.p.(f) de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ainsi la distribution associée est donnée par, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \text{v.p.}(\frac{1}{x}),\varphi\rangle=\text{p.f.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\qquad (=\lim_{\varepsilon\to0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big)).\tag{4.65}$$

C'est une fonction très utilisée en physique où $x\to\frac{1}{x}$ représente un potentiel.

4.11.5 Dérivation de $T_{\mathrm{Log}|x|}$

Dérivons la distribution régulière $T_{\mathrm{Log}|x|}$: pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle (T_{\mathrm{Log}|x|})',\varphi\rangle=-\langle \mathrm{Log}|x|,\varphi'\rangle=-\int_{\mathbb{R}}\mathrm{Log}|x|\varphi'(x)\,dx.\tag{4.66}$$

(L'intégrale est convergente car $\mathrm{Log}|.|\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $\varphi'\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.) On approche l'intégrale convergente de (4.66) par les termes (symétriques) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{Log}|x|\varphi'(x)\,dx&=\int_{-\infty}^0\mathrm{Log}(-x)\,\varphi'(x)\,dx+\int_0^\infty\mathrm{Log}(x)\,\varphi'(x)\,dx\\&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\mathrm{Log}(-x)\,\varphi'(x)\,dx+\int_\varepsilon^\infty\mathrm{Log}(x)\,\varphi'(x)\,dx\Big).\end{aligned}\tag{4.67}$$

Et deux intégrations par parties donnent :

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{Log}|x|\varphi'(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\Big(-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx-\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\mathrm{Log}(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon)-\mathrm{Log}(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\Big).\tag{4.68}$$

Et $\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)=2\varepsilon\varphi'(0)+o(\varepsilon)$, donc $\mathrm{Log}(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\longrightarrow_{\varepsilon\to0}0$. Il reste :

$$\langle \mathrm{Log}'|x|,\varphi\rangle=+\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big).\tag{4.69}$$

D'où, cf. (4.65) :

$$(\mathrm{Log}|x|)'=\text{v.p.}\frac{1}{x}\qquad\text{dans }\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\tag{4.70}$$

au sens $(T_{\mathrm{Log}|x|})'=\text{v.p.}\frac{1}{x}$. Donc v.p.$\frac{1}{x}$ est la dérivée de la fonction $\mathrm{Log}(|x|)$ au sens des distributions.

5 Distribution à support borné, $\mathcal{E}'(\Omega)$

5.1 Support d'une distribution, distribution à support compact

5.1.1 Distribution nulle sur un ouvert

Soit Ω et U deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Omega\subset U$. Faire des dessins (exemple avec $U=\mathbb{R}^n$), et tout sera clair.

Définition 5.1 On dit que « la distribution $T\in\mathcal{D}'(U)$ est nulle sur l'ouvert Ω » ssi T est nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Donc :

$$T\text{ nulle sur }\Omega\quad\Longleftrightarrow\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\text{ on a }\langle T,\varphi\rangle=0,\tag{5.1}$$

autrement dit, la restriction de T à $\mathcal{D}(\Omega)$ est nulle.

Et donc :

$$T\text{ non nulle sur }\Omega\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\text{ t.q. }\langle T,\varphi\rangle\neq0.\tag{5.2}$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on prendra souvent $U=\mathbb{R}$.

Exemple 5.2 La masse de Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est nulle sur $\mathbb{R}^*$ (et sur tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^*$).

En effet, ici $U = \mathbb{R}$, et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, alors $\varphi(0) = 0$, d'où $\delta_0(\varphi) = 0$.

Et la masse de Dirac est non nulle sur tout ouvert Ω contenant 0 : un tel ouvert contient un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$, et la fonction donnée par γ_k en (2.25) pour k assez grand vérifie $\gamma_k \in \mathcal{D}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ et $\delta_0(\gamma_k) = \gamma_k(0) \neq 0$. ▲

Exercice 5.3 Montrer que δ_0' est nulle sur $\mathbb{R}^*$, et est non nulle sur tout ouvert contenant 0.

Réponse. 1- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$. Donc φ est nulle dans un voisinage ouvert de 0. Donc φ' est nulle dans ce voisinage ouvert de 0, donc $\varphi'(0) = 0$, donc $\delta_0'(\varphi) = 0$. Vrai pout tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, donc δ_0' est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

2- Et avec γ_k donnée en (2.25), avec $\varepsilon > 0$ et avec k assez grand, la fonction $x\gamma_k$ est dans $\mathcal{D}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ (immédiat) et $(x\gamma_k)'(0) = \gamma_k(0) + 0 \neq 0$: donc $\langle \delta_0', x\gamma_k \rangle \neq 0$, donc δ_0' est non nulle sur $\mathcal{D}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$, vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc δ_0' est non nulle sur tout ouvert contenant 0. ▲

Exemple 5.4 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors la distribution régulière associée T_f est nulle sur $\mathbb{R} - \mathrm{supp}(f)$, car $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathrm{supp} f \cap \mathrm{supp} \varphi} f(x)\varphi(x)\,dx$ est nulle pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \mathrm{supp}(f))$. ▲

Proposition 5.5 *Si $T \in \mathcal{D}'(U)$ est nulle sur m ouverts Ω_1,...,Ω_m, alors T est nulle sur $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i$.*

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bigcup_{i=1}^m \Omega_i)$: notant $K = \mathrm{supp}\varphi$, on a $K \subset \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$.

On applique le théorème 2.41 de partition de l'unité : il existe m fonctions $\chi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ telles que $\sum_{i=1}^m \chi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$. Notons $\varphi_i = \chi_i\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ (car produit de fonctions C^∞ et de support dans $\mathrm{supp}\chi_i$), et donc $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i$ sur K, donc sur Ω.

D'où $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^m \langle T, \varphi_i \rangle = 0$, car T est nulle sur les Ω_i, et T est bien nulle sur $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i$. ▲

Définition 5.6 Les distributions S et $T \in \mathcal{D}'(U)$ sont dites égales sur Ω ssi $S = T$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. ssi $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et on écrit (abusivement) $S = T$ sur Ω (on devrait dire $S = T$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$).

On peut ainsi comparer deux distributions "localement" sur un ouvert Ω.

5.1.2 L'ouvert $\Omega_{max}(T)$

Notons $\mathcal{O}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ (l'ensemble des ouverts usuels).

Notation. Soit $\Omega_{max}(T)$ l'union de tous les ouverts sur lesquels T est nulle :

$$\Omega_{max}(T) = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{O} \text{ t.q. } T \text{ est nulle sur } \Omega} \Omega. \tag{5.3}$$

En particulier $\Omega_{max}(T)$ est ouvert (réunion d'ouverts).

Exemple 5.7 $\Omega_{max}(\delta_0) = \mathbb{R}^*$, cf. exemple 5.2. ▲

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y||_{\mathbb{R}^n} < r\}$ la boule ouverte de rayon r centrée en x.

Proposition 5.8 *On a $x \in \Omega_{max}(T)$ ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que T est nulle sur $B(x, \varepsilon)$:*

$$x \in \Omega_{max}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon)),\ \langle T, \varphi \rangle = 0. \tag{5.4}$$

Ou de manière équivalente :

$$x \notin \Omega_{max}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon)),\ \langle T, \varphi \rangle \neq 0. \tag{5.5}$$

Preuve. Montrons (5.4).

$\Rightarrow$. Supposons $x \in \Omega_{max}(T)$. Les boules ouvertes forment une base de voisinage, donc $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_{max}(T)$. Et si $\varphi \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon))$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{max})$ et donc $T(\varphi) = 0$: on a T nulle sur $B(x, \varepsilon)$.

$\Leftarrow$ (réciproque). Supposons qu'on a un $\varepsilon > 0$ tel que $T(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon))$. Alors $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_{max}(T)$, et donc $x \in \Omega_{max}(T)$.

Et (5.5) est la négation de (5.4). ▲

5.1.3 Support $\mathrm{supp}(T)$, distribution à support compact, et $\mathcal{E}'(\Omega)$

Définition 5.9 Le support de T est par définition le complémentaire de $\Omega_{max}(T)$:

$$\mathrm{supp}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R} - \Omega_{max}(T). \tag{5.6}$$

Par définition, $\mathrm{supp}(T)$ est donc fermé (complémentaire d'un ouvert), et, cf. (5.5) :

$$x \in \mathrm{supp}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \varphi \in \mathcal{D}(B(x,\varepsilon)) \quad \text{t.q.} \quad \langle T, \varphi \rangle \neq 0. \tag{5.7}$$

Définition 5.10 La distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite à support compact dans Ω ssi $\mathrm{supp}T$ est compact dans Ω, i.e. ssi $\mathrm{supp}T$ est borné (puisque toujours $\mathrm{supp}T$ est toujours fermé).

Définition 5.11 On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions à support compact.

Exemple 5.12 On a $\mathrm{supp}(\delta_0) = \{0\}$, cf. exemple 5.7 : on a $\delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
De même $\mathrm{supp}(\delta_0') = \{0\}$, cf. exemple 5.3 : on a $\delta_0' \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. ∴

Proposition 5.13 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(T_f)$ où T_f est la distribution régulière associée à f. Et on utilisera la notation $\mathrm{supp}f$ dans les deux cas (que f soit considérée comme une fonction ou comme la distribution régulière associée).*

Preuve. Cf. (1.11). ∴

Lemme 5.14 *Si $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{supp}(S+T) \subset \mathrm{supp}(S) \bigcup \mathrm{supp}(T)$.*

Preuve. Il s'agit de montrer que $\Omega_{max}(S+T) \supset \Omega_{max}(S) \bigcap \Omega_{max}(T)$. Soit $x \in \Omega_{max}(S) \cap \Omega_{max}(T)$ (si x n'existe pas, i.e. si l'intersection est vide, alors le résultat est trivial). Donc $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ t.q. $\forall \varphi \in B(x,\varepsilon_1) \cap B(x,\varepsilon_2)$ on a $\langle S, \varphi \rangle = 0 = \langle T, \varphi \rangle$; donc, avec $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\forall \varphi \in B(x,\varepsilon)$, on a $\langle S+T, \varphi \rangle = 0$, donc $x \in \Omega_{max}(S+T)$. ∴

Proposition 5.15 *$\mathcal{E}'(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{supp}(\lambda T) = \mathrm{supp}(T)$ (car $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$), donc si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ alors $\lambda T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Soit $S, T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On a $\mathrm{supp}(S+T) \subset \mathrm{supp}(S) \bigcup \mathrm{supp}(T)$, cf. lemme précédent, somme de deux compacts, donc compact, donc $S+T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. ∴

Lemme 5.16 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $c \in \mathbb{R}^n$, alors :*

$$\mathrm{supp}\check{T} = -\mathrm{supp}T, \qquad \mathrm{supp}(\tau_c T) = \mathrm{supp}T + c, \qquad \mathrm{supp}(\tau_c(\check{T})) = -\mathrm{supp}T + c. \tag{5.8}$$

(Résultats vus dans le cas des fonctions, cf. (2.4).)

Preuve. Soit $x \in \mathrm{supp}\check{T}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{D}(B(x,\varepsilon))$, $\langle \check{T}, \varphi \rangle \neq 0$, soit $\langle T, \check{\varphi} \rangle \neq 0$ et comme $\check{\varphi} \in \mathcal{D}(B(-x,\varepsilon))$, on déduit $-x \in \mathrm{supp}T$, d'où $\mathrm{supp}\check{T} \subset -\mathrm{supp}T$. Et $\check{\check{T}} = T$ donne $\mathrm{supp}T \subset -\mathrm{supp}\check{T}$, d'où l'égalité $\mathrm{supp}\check{T} = -\mathrm{supp}T$.

Soit $x \in \mathrm{supp}(\tau_c T)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{D}(B(x,\varepsilon))$, $\langle \tau_c T, \varphi \rangle \neq 0$, donc $\langle T, \tau_{-c}\varphi \rangle \neq 0$ et on a $\tau_{-c}\varphi \in \mathcal{D}(B(x-c,\varepsilon))$, donc $x-c \in \mathrm{supp}T$, donc $x \in \mathrm{supp}T + c$, donc $\mathrm{supp}(\tau_c T) \subset \mathrm{supp}T + c$. Et $\tau_{-c}(\tau_c T) = T$, donc $\mathrm{supp}T \subset \mathrm{supp}\tau_c T - c$, d'où l'égalité $\mathrm{supp}(\tau_c T) = \mathrm{supp}T + c$. ∴

5.1.4 Support singulier $\mathrm{suppsing}(T)$

Ce paragraphe nécessiterait quelques développements. Comme dans la suite on ne se servira que des distributions de type $T_f + S$ où $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et S une somme de Dirac et de ses dérivées, on se contente ici du minimum intuitif.

Définition 5.17 On appelle support singulier d'une distribution T, et on note $\mathrm{suppsing}(T)$ le sous ensemble de $\mathrm{supp}T$ sur lequel T n'est pas distribution régulière.

Remarque 5.18 Pour être précis, il faut considérer les ouverts U tels que T est régulière sur U, i.e. tels que il existe $f_U \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ vérifiant $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_U(x)\varphi(x)\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, puis considérer la réunion $U_{\max}$ de tous ces U, puis dire qu'il n'y a qu'une fonction $f_{U_{\max}}$ telle que $f_{U_{\max}}$ restreinte à U vaut f_U, et appeler $\text{suppsing}(T) = \mathbb{R}^n - U_{\max}$. En particulier $\text{suppsing}(T)$ est fermé. ▪

Donc sur $\Omega = \mathbb{R}^n - \text{suppsing}(T)$ la distribution T est régulière, i.e. il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \text{suppsing}(T))$ on a $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$.

Exemple 5.19 Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ on a $\text{supp}(T_f) = \text{supp}(f)$ et $\text{suppsing}(T_f) = \emptyset$. ▪

Exemple 5.20 On a $\text{suppsing}(\delta_a) = \{a\} = \text{supp}(\delta_a)$. En effet, on a $\text{suppsing} \subset \text{supp}\delta_a = \{a\}$ et $\text{suppsing}\delta_a \neq \emptyset$ car δ_a n'est pas une distribution régulière.

Et pour le peigne de Dirac $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le support singulier est $\mathbb{Z}$. ▪

Exemple 5.21 Soit $T = \delta_0 + T_{H_0}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*_-)$ alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$, d'où $\Omega_{max}(T) \supset \mathbb{R}^*_-$, d'où $\text{supp}T \subset \mathbb{R}_+$. Puis $\text{supp}T = \mathbb{R}_+$ (exercice).

Puis si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*_+)$ alors $\langle T, \varphi\rangle = \langle T_{H_0}, \varphi\rangle$ d'où T est régulière sur $\mathbb{R}^*_+$. D'où $\text{suppsing}T \subset \{0\}$.

Et T n'est pas une distribution régulière, d'où $\text{suppsing}T = \{0\}$. (S'il existait une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $T = T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on aurait immédiatement $f = H_0$ sur $\mathbb{R}^*$, car $T_f = T_{H_0}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, et donc $T = T_{H_0}$, ce qui est faux.) ▪

5.2 Dual de $C^\infty(\Omega)$: $\mathcal{E}'(\Omega)$

Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ soit $T_f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la distribution régulière associée. On a $\text{supp}(T_f) = \text{supp}(f)$.

En particulier, si $\text{supp}(f)$ est borné (donc a fortiori $f \in L^1(\mathbb{R})$) on peut considérer son action sur les fonctions $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (sans restriction de support pour les ψ) :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(f) \text{ borné}, \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle T_f, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx < \infty, \tag{5.9}$$

puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx = \int_{\text{supp}(f)} f(x)\psi(x)\,dx \leqslant (\sup_{x\in\text{supp}(f)} |\psi(x)|)\, ||f||_1 < \infty$.

On a plus généralement :

Proposition 5.22 et définition *Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ (avec donc $\text{supp}T$ compact dans Ω), si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ alors, pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\alpha = 1$ dans un voisinage ouvert de $\text{supp}T$, on a $\alpha\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et la quantité $\langle T, \alpha\psi\rangle$ est indépendante de α. Et on pose par définition :*

$$\forall T \in \mathcal{E}'(\Omega), \quad \forall \psi \in C^\infty(\Omega), \quad \langle T, \psi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \alpha\psi\rangle. \tag{5.10}$$

De plus, si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$ alors $fT \in \mathcal{E}'(\Omega)$ avec $\text{supp}(fT) \subset \text{supp}(T)$.

Donc pour $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, on peur prolonger son domaine de définition de $\mathcal{D}(\Omega)$ à $C^\infty(\Omega)$.

Preuve. Tout d'abord, une telle fonction $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ existe (cf. (2.26)), et de plus le produit $\alpha\psi$ est bien dans $\mathcal{D}(\Omega)$, et donc, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors $\langle T, \alpha\psi\rangle$ a bien un sens, en particulier vrai pour $T \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$ une autre fonction telle que $\beta(x) = 1$ pour tout x dans un voisinage ouvert de $\text{supp}T$. Alors $(\alpha - \beta)(x) = 0$ dans un voisinage ouvert (comme intersection de deux ouverts) de $\text{supp}T$. Et donc $\alpha - \beta = 0$ dans $\Omega_{max}(T)$. Et donc pour tout $\psi \in C^\infty(\Omega)$ on a $(\alpha - \beta)\psi = 0$ dans $\Omega_{max}(T)$, et donc :

$$\langle T, \alpha\psi\rangle - \langle T, \beta\psi\rangle = \langle T, (\alpha - \beta)\psi\rangle = 0, \tag{5.11}$$

i.e. $\langle T, \alpha\psi\rangle = \langle T, \beta\psi\rangle$, ce pour toutes les fonctions $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui valent 1 dans un voisinage ouvert du compact $\text{supp}T$. D'où la notation non ambigüe $\langle T, \alpha\psi\rangle = \langle T, \psi\rangle$ dans (5.10).

Puis avec $f \in C^\infty(\Omega)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.q. $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{max}(T))$ on a $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{max}(T))$ (immédiat), et donc $\langle fT, \varphi\rangle =^{\text{déf}} \langle T, f\varphi\rangle = 0$. Donc $\text{supp}(fT) \subset \text{supp}(T)$. ▪

Remarque 5.23 Il n'est pas suffisant dans la propriété ci-dessus de considérer des fonctions α et β de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui valent 1 sur $\text{supp}T$: il faut avoir 1 dans un ouvert qui contient le compact $\text{supp}T$ (i.e. il faut avoir $\alpha \equiv 1$ dans un voisinage ouvert de $\text{supp}T$). Sinon on n'a pas $(\alpha - \beta) \in \mathcal{D}(\Omega - \text{supp}T)$, mais uniquement $(\alpha - \beta)_{|\text{supp}T} = 0$ ce qui est insuffisant pour conclure. Un exemple est donné par la distribution

$$T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to T(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{j=1}^m \varphi(\frac{1}{j}) - m\varphi(0) - \log(m)\varphi'(0)\Big), \tag{5.12}$$

dont le support est $\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{m}, ...\} \bigcup \{0\}$, et le problème est, entre autres, que 0 est un point d'accumulation dans le support. Voir par exemple Zuily [15], exercice 10 page 29, pour les calculs. ∴

Proposition 5.24 *Le dual de $C^\infty(\Omega)$ au sens des distributions (pour la continuité définie par la convergence (3.2)) est l'ensemble $\mathcal{E}'(\Omega) = \mathcal{L}_{\rm cont}(C^\infty(\Omega), \mathbb{R})$ des distributions à support compact.*

Preuve. Admis (hors programme).

Idée : linéarité immédiate. On munit $C^\infty(\Omega)$ de la famille de normes $p_{K,m}$ rendant $C^\infty(\Omega)$ complet, voir § 19 (annexe). Soit K compact, t.q. $\mathrm{supp}(T) \subset \mathring{K} \subset \Omega$ (on dit que K est un voisinage compact de $\mathrm{supp}(T)$). Pour toute suite $(\varphi_n)_\mathbb{N}$ d'éléments de $C^\infty(\Omega)$ convergeant vers φ dans $C^\infty(\Omega)$ au sens des normes $p_{K,m}$, on a $\langle T, \varphi - \varphi_n\rangle \to 0$ (continuité). ∴

5.3 Application : $xT = 0$ implique $T = c\delta_0$

Soit $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'identité (application C^∞). On note $IT = xT$ (voir début paragraphe 4.9.)

Question : soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de T ?

Il est immédiat que si $T = C\delta_0$, où $C \in \mathbb{R}$, alors $xT = 0$: en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle x(C\delta_0), \varphi\rangle = C\langle x\delta_0, \varphi\rangle = C\langle \delta_0, x\varphi\rangle = C0\varphi(0) = 0.$$

C'est la réciproque qu'il s'agit d'établir.

Proposition 5.25 *Soit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

$$xT = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R} \ t.q. \ T = C\delta_0, \tag{5.13}$$

i.e. T est proportionnelle à la masse de Dirac δ_0. Et on a $C = \langle T, 1_\mathbb{R}\rangle$ (a un sens car $T = C\delta_0$ est à support compact et $1_\mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R})$).

Preuve. $T = 0$ est trivialement solution. Soit $T \neq 0$ t.q. $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On veut montrer que : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, \varphi\rangle = C\varphi(0)$.

1- Montrons : $\mathrm{supp}T$ est borné et mieux $= \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$. Posons $\psi = \frac{\varphi}{x}$: comme φ est nulle dans un voisinage ouvert de 0, on a $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\mathrm{supp}\psi \subset \mathrm{supp}\varphi$. Et $xT = 0$ donne $\langle xT, \psi\rangle = \langle 0, \psi\rangle = 0$; et donc $\langle xT, \frac{\varphi}{x}\rangle = 0 = \langle T, x\frac{\varphi}{x}\rangle = \langle T, \varphi\rangle = 0$. Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, donc $\Omega_{max}(T) \supset \mathbb{R}^*$, donc $\mathrm{supp}T \subset \{0\}$, donc $\mathrm{supp}T = \{0\}$ car $T \neq 0$.

T étant à support compact, on peut travailler avec les fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$, cf. prop. 5.22.

2- Calcul : on connaît $\langle T, x\varphi\rangle$ (qui vaut $\langle xT, \varphi\rangle = 0$) pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et on veut connaître $\langle T, \psi\rangle$ pour tout $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Si pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ il existait une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = x\varphi$, on aurait $\langle T, \psi\rangle = \langle xT, \varphi\rangle = 0$ (et donc $T = 0$). Mais, à ψ donné, cela imposerait $\varphi = \frac{\psi}{x}$, et φ ne serait pas définie au voisinage de 0 dès que $\psi(0) \neq 0$: à ψ donné, on ne peut donc pas définir φ aussi brutalement.

On corrige : soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ donnée ; on considère la fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} \quad \text{i.e.} \quad \varphi(x) = \int_{u=0}^1 \psi'(ux)\, du.$$

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Et $\langle T, x\varphi\rangle = \langle xT, \varphi\rangle = 0$, avec $x\varphi = \psi - \psi(0)1_\mathbb{R}$, donc $\langle T, \psi\rangle - \psi(0)\langle T, 1_\mathbb{R}\rangle = 0$, donc :

$$\langle T, \psi\rangle = \langle\, \delta_0, \psi\rangle\langle T, 1_\mathbb{R}\rangle = \langle\langle T, 1_\mathbb{R}\rangle\, \delta_0, \psi\rangle.$$

Vrai pour tout $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $T = \langle T, 1_\mathbb{R}\rangle\, \delta_0 = C\delta_0$ où on a posé $C = \langle T, 1_\mathbb{R}\rangle$. ∴

Remarque 5.26 Dans la démonstration précédente, même si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction φ construite n'est pas à support compact à cause de $\frac{\psi(0)}{x}$ qui ne s'annule pas à l'infini, d'où l'utilisation de la dualité $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$–$C^\infty(\mathbb{R})$. ∴

Remarque 5.27 Dans la démonstration précédente, il n'était pas nécessaire de considérer la dualité entre $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R})$: on pouvait résoudre cet exercice au paragraphe 3.6.4 : il aurait suffit de considérer la fonction $\varphi(x) = \frac{\psi(x)-\alpha(x)\psi(0)}{x}$ où $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\alpha(0) = 1$, la fonction φ étant maintenant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dès que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Exercice. ∴

Exercice 5.28 Résoudre $xT = \delta_0$: montrer que $T = -\delta_0' + c\delta_0$.

Réponse. 1- Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.q. $xT = \delta_0$. Montrons que $\text{supp}(T) = \{0\}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, on a $\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$ et $\langle \delta_0, \varphi \rangle = 0$, donc $\langle xT, \varphi \rangle = 0$.

2- On cherche $\langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sachant $\langle T, x\psi \rangle = \psi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi_i n\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On pose $\varphi = x\psi$, donc ψ est donnée par $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$: un tel ψ n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On modifie : on pose $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $\psi(0) = \varphi'(0)$: maintenant $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, car (développement limité avec reste intégral) $\varphi(x) - \varphi(0) = \int_{t=0}^{x} f'(t)\,dt = x\int_{u=0}^{1} f'(ux)\,du$, et théorème de convergence dominée. Donc d'une part $\langle xT, \psi \rangle = \psi(0) = \varphi'(0)$ car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, et d'autre part $\langle xT, \psi \rangle = \langle T, \varphi - \varphi(0)1_\mathbb{R} \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T, 1_\mathbb{R} \rangle \varphi(0)$, donc $\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0) + c\varphi(0)$ où $c = \langle T, 1_\mathbb{R} \rangle$, d'où $T = -\delta_0' + c\delta_0$.

3- Soit $T = -\delta_0' + c\delta_0$. On a $\langle xT, \varphi \rangle = \langle -\delta_0', x\varphi \rangle + c\langle \delta_0, x\varphi \rangle = \langle \delta_0, (x\varphi)' \rangle + 0 = \varphi(0)$. ∎

6 Généralisation de la définition : supports compatibles

La définition d'une distribution T est actuellement donnée dans les deux cas suivants :

1. $\text{supp}T$ quelconque, T agissant sur $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fonction C^∞ à support compact (définition),
2. $\text{supp}T$ compact, T agissant sur $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($\text{supp}\varphi$ quelconque) (proposition).

Mais il suffit en fait pour définir la quantité $\langle T, \varphi \rangle$ que l'intersection des supports soit bornée :

Définition 6.1 Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont tels que $K = \text{supp}T \bigcap \text{supp}\psi$ est compact, on dit que les supports de T et de ψ sont compatibles.

Lemme 6.2 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Si $K = \text{supp}T \bigcap \text{supp}\psi$ est compact (les supports de T et de ψ sont compatibles), alors ψT est une distribution à support compact avec $\text{supp}(\psi T) \subset K$.

Preuve. Comme $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a bien $\psi T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (est une distribution).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - K)$. On a $\text{supp}(\psi\varphi) \subset \text{supp}(\psi) \bigcap \text{supp}(\varphi) \subset \text{supp}(\psi) \bigcap (\mathbb{R}^n - K)$, donc :

$$\text{supp}(\psi\varphi) \bigcap \text{supp}(T) \subset (\text{supp}(\psi) \bigcap \text{supp}(T)) \bigcap (\mathbb{R}^n - K) = K \bigcap (\mathbb{R} - K) = \emptyset.$$

Donc $\text{supp}(\psi\varphi) \subset \Omega_{max}(T)$ (complémentaire de $\text{supp}(T)$. Donc $\langle T, \psi\varphi \rangle = 0 = \langle \psi T, \varphi \rangle$: la distribution ψT est nulle sur $\mathbb{R}^n - K$, donc $\text{supp}(\psi T) \subset K$. ∎

Proposition 6.3 et définition. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ont leurs supports compatibles, et si α est une fonction de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 sur un voisinage ouvert de $K = \text{supp}T \bigcap \text{supp}\psi$, alors $\langle T, \alpha\psi \rangle$ est indépendant de α. On définit alors :*

$$\langle T, \psi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \alpha\psi \rangle. \tag{6.1}$$

Preuve. Soit une autre fonction $\beta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui vaut également 1 sur un voisinage ouvert de $K = \text{supp}T \bigcap \text{supp}\psi$. Il s'agit de montrer que $\langle T, \alpha\psi \rangle = \langle T, \beta\psi \rangle$, i.e. que $\langle T, (\alpha - \beta)\psi \rangle = 0$. Mais $\text{supp}(\alpha - \beta)) \subset \mathbb{R}^n - K$: on applique le lemme précédent. Donc la définition proposée est légitime. ∎

Remarque 6.4 On introduira lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, une autre dualité sans condition de support, mais avec conditions de décroissance à l'infini (distributions à croissance "lente", et fonctions C^∞ à décroissance "rapide"). Elle sera introduite avec la transformation de Fourier. ∎

7 Dérivation et intégration sous le crochet

Pour $\varphi : (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \varphi(\vec{x}, \vec{y})$, à $\vec{x}$ fixé on note $\varphi_{\vec{x}}(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ et on s'intéresse à, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$:

$$\theta(\vec{x}) = \langle T, \varphi_{\vec{x}} \rangle \stackrel{\text{noté}}{=} \langle T(\vec{y}), \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \rangle \stackrel{\text{noté}}{=} \langle T(\vec{y}), \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \rangle_{dy} \stackrel{\text{noté}}{=} \int_{\vec{y}} T(\vec{y})\varphi(\vec{x}, \vec{y})\, d\Omega_y, \tag{7.1}$$

dès que, pour $\vec{x}$ donné, les supports de T et $\varphi_{\vec{x}}$ sont compatibles.

$\theta(x)$ est "le crochet qui dépend du paramètre $\vec{x}$" (l'intégrale qui dépend du paramètre $\vec{x}$ quand T est une distribution régulière), et ici $\vec{y}$ est le nom imposé de la "variable d'intégration".

Remarque 7.1 Les abus de notation $=^{\text{noté}}$ dans (7.1) permettent de ne pas introduire de notations supplémentaires : on voit la “variable d'intégration” (ici y) et le paramètre (ici x).

Insistons : notons $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$ et $\varphi_y(x) = \varphi(x,y)$; la dualité $\langle T, \varphi_x\rangle$ est une dualité où φ_x est une fonction (et non la valeur $\varphi_x(y)$ de la fonction φ_x au point y), et la notation $\langle T(y), \varphi_x(y)\rangle = \langle T(y), \varphi_x(y)\rangle_{dy}$ ne sert qu'à imposer le nom de la variable (ici y) quand on utilisera la fonction φ_x, bien que $T(y)$ n'ait aucun sens : le domaine de définition de T est $\mathcal{D}(\Omega)$, et $T(\varphi) =^{\text{noté}} \langle T, \varphi\rangle$ a un sens, mais pas $T(y)$, à moins de ne s'en servir que comme une notation, celle définie dans (7.1).

Exemple 7.2 Avec $n = m = 1$ et $T = \delta_a$, on a, “notations usuelles”,
$\theta(x) = \langle \delta_a, \varphi_x\rangle = \varphi_x(a) = \varphi(x,a)$, noté $\langle \delta_a(y), \varphi_x(y)\rangle_{dy} =^{\text{noté}} \langle \delta_a(y), \varphi(x,y)\rangle = \varphi(x,a)$. Et
$\theta(y) = \langle \delta_a, \varphi_y\rangle = \varphi_y(a) = \varphi(a,y)$, noté $\langle \delta_a(x), \varphi_y(x)\rangle_{dx} =^{\text{noté}} \langle \delta_a(x), \varphi(x,y)\rangle = \varphi(a,y)$.

Exemple 7.3 Avec $n = m = 1$ et $T = T_f$, on a
$\theta(x) = \langle T_f, \varphi_x\rangle = \int_{y\in\mathbb{R}} f(y)\varphi(x,y)\,dy =^{\text{noté}} \langle f(y), \varphi(x,y)\rangle_{dy}$. Alors que
$\theta(y) = \langle T_f, \varphi_y\rangle = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\varphi(x,y)\,dx =^{\text{noté}} \langle f(x), \varphi(x,y)\rangle_{dx}$.
Exemple $\varphi(x,y) = e^{-ixy}$ (vers la transformée de Fourier) :
$\theta(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f(y)e^{-ixy}\,dy =^{\text{noté}} \langle f(y), e^{-ixy}\rangle_{dy}$. Alors que
$\theta(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\,dx =^{\text{noté}} \langle f(x), e^{-ixy}\rangle_{dx}$.

Proposition 7.4 *Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m};\mathbb{R})$ on note $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-ensembles tels que $\mathrm{supp}\varphi \subset K_1\times K_2$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. On suppose que $\mathrm{supp}T \bigcap K_2$ est compact (compatibilité des supports de T et de $\varphi_{\vec{x}}$). Alors :*
(i) la fonction $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par (7.1) est $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (et est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si K_1 est compact).
(ii) On peut dériver sous le crochet, pour $i = 1, ..., n$:

$$(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}(\vec{x}) =) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle T(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\rangle_{dy}) = \langle T(\vec{y}), \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\vec{x},\vec{y})\rangle_{dy}, \tag{7.2}$$

i.e. on peut dériver sous le signe “somme” (notation abusive) :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\int_{\vec{y}\in\Omega} T(\vec{y})\,\varphi(\vec{x},\vec{y})\,d\Omega_y\Big) = \int_{\vec{y}\in\Omega} T(\vec{y})\,\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\vec{x},\vec{y})\Big)\,d\Omega_y.$$

(iii) On peut intégrer sous le crochet, si K est un compact de $\mathbb{R}^n$:

$$(\int_{\vec{x}\in K}\theta(x)\,dx =) \qquad \int_{\vec{x}\in K}\langle T(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\rangle_{dy}\,d\Omega_x = \langle T(\vec{y}), \int_{\vec{x}\in K}\varphi(\vec{x},\vec{y})\,d\Omega_x\rangle_{dy}, \tag{7.3}$$

noté

$$\int_{\vec{x}\in K}(\int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^m} T(\vec{y})\,\varphi(\vec{x},\vec{y})\,d\Omega_y)\,d\Omega_x = \int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^m} T(\vec{y})(\int_{\vec{x}\in K}\varphi(\vec{x},\vec{y})\,d\Omega_x)\,d\Omega_y. \tag{7.4}$$

(Fubini est donc toujours vrai pour $\iint_{x,y} T(y)\varphi(\vec{x},\vec{y})d\Omega_x d\Omega_y$ quand les supports de T et φ sont compatibles en $\vec{y}$, et qu'on intègre sur un compact en $\vec{x}$).

Preuve. Cas $n = m = 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, K_1 et K_2 compacts. Autres cas en exercice.

À x fixé, $\varphi_x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (avec $\mathrm{supp}(\varphi_x) \subset K_2$), donc θ est bien définie en tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons que θ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_{x_0}(y) = \varphi(x_0,y)$, $h \in \mathbb{R}$ et $\varphi_{hx_0}(y) = \varphi(x_0{+}h, y)$. Donc $\varphi_{hx_0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et

$$\theta(x_0+h) - \theta(x_0) = \langle T, \varphi_{hx_0} - \varphi_{x_0}\rangle \quad (= \langle T(y), \varphi(x_0{+}h,y) - \varphi(x_0,y)\rangle). \tag{7.5}$$

Montrons :

$$(\varphi_h)_{x_0} - (\varphi)_{x_0} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \tag{7.6}$$

Notant $L_2 = K_2 + [-1,1]$, φ_{x_0} et les $(\varphi_{hx_0}$ ont leur support dans le compact L_2 pour $h \leqslant 1$, et

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_{hx_0}^{(k)}(y) = \frac{\partial^k\varphi^{(k)}}{\partial y^k}(x_0{+}h,y) = \frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}(x_0,y) + h\frac{\partial\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}}{\partial x}(x_1,y)$ où x_1 est entre x_0 et $x_0{+}h$ (théorème des accroissements finis), car $\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}$ est C^1. Donc pour $x \in [x_0{-}1, x_0{+}1]$, on a $|\varphi_{hx_0}^{(k)}(y) - \varphi_{x_0}^{(k)}(y)| \leqslant h\,C$, quand $h \leqslant 1$, où $C = \sup_{(x,y)\in L_1\times L_2}|\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x\partial y^k}(x,y)|$. Donc $|\varphi_{hx_0}^{(k)}(y) - \varphi_{x_0}^{(k)}(y)| \longrightarrow_{h\to 0} 0$ pour tout $y \in K_2$.

D'où (7.6), d'où $\langle T, \varphi_{hx_0} - \varphi_{x_0}\rangle \longrightarrow_{h\to 0} 0$, d'où θ continue en x_0 cf. (7.5).

De même, θ est dérivable par continuité de T car :

$$\frac{\theta(x_0+h)-\theta(x_0)}{h} = \langle T(y), \frac{\varphi(x_0+h,y)-\varphi(x_0,y)}{h}\rangle \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \langle T(y), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y)\rangle.$$

En effet $\frac{\varphi(x_0+h,y)-\varphi(x_0,y)}{h} \to \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y)$ au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (vérification similaire à la précédente). On vient par la même occasion d'établir (7.2) (dérivation sous le $\langle .,.\rangle$).

Et de même par récurrence, elle est C^∞.

Puis $\text{supp}(\theta) \subset K_1$ car : $\mathbb{R}-K_1$ est ouvert, et si $x_0 \notin K_1$ alors $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x_0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}-K_1$, et $\varphi_{x_0} \equiv 0$ dans $B(x_0,\varepsilon)$ (fonction nulle). D'où θ est nul dans $B(x_0,\varepsilon)$, donc dans l'ouvert $\mathbb{R}-K_1$; d'où $\text{supp}\theta \subset K_1$.

Intégration : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant \min K_1$. Posons (primitive de φ en x à y fixé) :

$$\Phi(x,y) := \int_{t=a}^{x} \varphi(t,y)\,dt \overset{\text{noté}}{=} \Phi(x,y), \quad \text{et} \quad \theta(x) := \langle T, \Phi_x\rangle = \langle T(y), \Phi(x,y)\rangle_{dy}.$$

Comme $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $\text{supp}\Phi \subset \text{supp}\varphi \subset K_1 \times K_2$ compact, donc $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Par dérivation sous le crochet (7.2) (qui vient d'être établie), il vient :

$$\theta'(x) = \langle T(y), \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\rangle_{dy} = \langle T(y), \varphi(x,y)\rangle, \tag{7.7}$$

d'où $\theta(x) = \int_a^x \langle T(y), \varphi(t,y)\rangle\,dt$, d'où (7.3) ∎

Exercice 7.5 Quand $T = T_f$ est une distribution régulière associée à $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, démontrer (7.2) à l'aide du théorème de convergence dominée.

Réponse. Noter qu'on utilisera de manière essentielle le fait que φ est C^1 (et est C^∞ si on veut continuer à dériver).

1- Cas $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$: l'intégrant $h(x,y) = f(y)\varphi(x,y)$ est C^1 en x, avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = f(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ est borné indépendamment de x par $||\frac{\partial\varphi}{\partial x}||_{C^\infty(\mathbb{R}^2)}|f| \in L^1(\mathbb{R})$.

2- Cas $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à $\theta'(x_0)$. Soit $x \in I_0 =]x_0-1, x_0+1[$, soit $L = \text{supp}T \cap K_2$ compact par hypothèse (compatibilité des supports). Soit h comme dans le cas 1, alors $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)|$ est borné indépendamment de $x \in I_0$ par $||\frac{\partial\varphi}{\partial x}||_{C^\infty(I_0\times L)}|f| \in L^1(\mathbb{R})$. ∎

Remarque 7.6 Attention, le fait qu'on puisse toujours dériver sous le signe $\int$ au sens des distributions ne remet pas en cause le théorème de convergence dominée de Lebesgue : on ne peut dériver sous le signe $\int$ que parce que φ est infiniment régulière. ∎

Exercice 7.7 Soit $\theta(x) = \langle\delta_0(y), \varphi(x,y)\rangle$ pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Vérifier la formule de dérivation sous le crochet.

Réponse. On a $\theta(x) = \langle\delta_0, \varphi_x\rangle = \varphi_x(0) = \varphi(x,0)$. Donc on a $\theta'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,0)$.

Et par dérivation sous le crochet, on a $\theta'(x) = \langle\delta_0(y), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,0)$. ∎

Exercice 7.8 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact, et soit sa transformée de Fourier définie sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$. Mettre $\widehat{f}$ sous la forme $\widehat{f}(\xi) = \langle T, \Psi_\xi\rangle =^{\text{noté}} \langle T(x), \psi(x,\xi)\rangle$. Vérifier que $(\widehat{f})'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}(-ix)f(x)e^{-ix\xi}\,dx$.

Réponse. Soit $T = T_f$, ici $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, donc $\langle T, \varphi\rangle$ a un sens pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (compatibilité des supports). Soit ψ donnée par $\psi(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi}$. On a $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $\psi_\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $\langle T_f, \Psi_\xi\rangle$ est un réel (a un sens) et $\widehat{f}(\xi) = \langle T_f, \Psi_\xi\rangle$. Et $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(x,\xi) = -ix\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi}$. D'où, dérivée sous $\langle .,.\rangle$: $(\widehat{f})'(\xi) = \langle T_f(x), \frac{-ix}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi}\rangle_{dx} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}} xf(x)e^{-ix\xi}\,dx$. ∎

8 Théorème de Fubini pour les distributions $W = S \otimes T$

8.1 Produit tensoriel de deux distributions

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On appelle produit tensoriel des fonctions f et g la fonction $h =^{\text{noté}} f \otimes g : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ définie par le produit :

$$h(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x})g(\vec{y}), \qquad \text{soit donc} \qquad (f\otimes g)(\vec{x},\vec{y}) \overset{\text{déf}}{=} f(\vec{x})g(\vec{y}). \tag{8.1}$$

$h = f \otimes g$ est donc une fonction à “variables séparées” sur $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Elle est également notée abusivement :

$$h(\vec{x},\vec{y}) \overset{\text{noté}}{=} f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) \qquad (\overset{\text{déf}}{=} (f\otimes g)(\vec{x},\vec{y})). \tag{8.2}$$

Remarque 8.1 $\otimes$ n'est pas commutatif : trivial si $m \neq n$. Et même si $m = n$, e.g. $= 1$, prendre $f(x) = x$ et $g(y) = y^2$ qui donnent $(f \otimes g)(x,y) = xy^2$ alors que $(g \otimes f)(x,y) = g(x)f(y) = x^2y$.

D'ailleurs $\otimes$ n'est pas un produit "intérieur" (e.g. qui à 2 fonctions dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ associe une fonction dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$) puisque $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{m+n};\mathbb{R})$. Il est cependant trivialement distributif (c'est un produit). ∴

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \otimes g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{m+n})$ (théorème de Fubini sur les compacts $K \subset \mathbb{R}^{m+n}$ car $f \otimes g \in L^1_{loc}(K)$), et on peut étendre le produit tensoriel aux distributions régulières : si $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ est à variables séparées, i.e. $\Phi = u \otimes v$ avec $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\begin{aligned}\langle T_{f\otimes g}, u \otimes v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x)g(y)u(x)v(y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)u(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)v(y)\,dy \\ &= \langle T_f, u\rangle\,\langle T_g, v\rangle.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Et si Φ n'est pas à variables séparées, alors on applique le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\langle T_{f\otimes g}, \Phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Phi(x,y)\,dy\Big)\,dx \\ &\overset{\text{noté}}{=} \Big\langle T_f(x)\ ,\ \langle T_g(y), \Phi(x,y)\rangle_{dy}\Big\rangle_{dx} = \Big\langle T_g(y)\ ,\ \langle T_f(x), \Phi(x,y)\rangle_{dx}\ \Big\rangle_{dy}\end{aligned} \tag{8.4}$$

ce qui est toujours licite quand $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ puisque qu'alors l'intégrant $(x,y) \to f(x)g(y)\Phi(x,y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^{m+n})$. Et on note :

$$T_f \otimes T_g \overset{\text{déf}}{=} T_{f\otimes g}. \tag{8.5}$$

On a ainsi défini le produit tensoriel sur les distributions régulières : pour $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$, on a :

$$\langle T_f \otimes T_g, \Phi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T_{f\otimes g}, \Phi\rangle \overset{\text{noté}}{=} \langle f \otimes g, \Phi\rangle. \tag{8.6}$$

La généralisation à toutes les distributions est donnée par la proposition suivante :

Proposition 8.2 et définition de $S \otimes T$. *Étant données deux distributions $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique distribution $W_{S,T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n})$ qui vérifie, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\langle W_{S,T}, u \otimes v\rangle = \langle S, u\rangle\,\langle T, v\rangle, \tag{8.7}$$

Et $W_{S,T} =^{noté} S \otimes T$ est appelé le produit tensoriel de S par T, et donc :

$$\langle S \otimes T, u \otimes v\rangle = \langle S, u\rangle\,\langle T, v\rangle. \tag{8.8}$$

Preuve. Admis. Idées : on veut définir $\langle W, \Phi\rangle$ pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$. On doit admettre en particulier que toute fonction $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ est de la forme $\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)v_i(y)$, où $u_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ et $v_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et ainsi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Puis on vérifie que $W = S \otimes T$ est bien une distribution, et la densité donne l'unicité. ∴

Exemple 8.3 Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. La masse de Dirac $\delta_{\vec{a}}$ pour $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est définie par :

$$\delta_{\vec{a}} = \delta_{a_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{a_n} \tag{8.9}$$

C'est donc la distribution de support réduit à $\{\vec{a}\}$ et dont l'action a un sens sur toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue en $\vec{a}$: on a dans ce cas $\langle \delta_{\vec{a}}, f\rangle = f(\vec{a})$. ∴

Remarque 8.4 Les indices des crochets de dualité sont implicites dans (8.7) qui s'écrit aussi :

$$\langle W, u \otimes v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n}),\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})} = \langle S, u\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}\,\langle T, v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}.$$

(On n'a pas le choix.) ∴

Et (8.8) est également noté abusivement :

$$\langle S(x) \otimes T(y), u(x) \otimes v(y)\rangle_{dxdy} = \langle S(x), u(x)\rangle_{dx}\,\langle T(y), v(y)\rangle_{dy}, \tag{8.10}$$

ou encore :

$$\iint S(x)T(y)u(x)v(y)\,dxdy = \int S(x)u(x)\,dx \int T(y)v(y)\,dy.$$

Cela évitera d'introduire des notations.

8.2 Théorème de Fubini

On reprend les notations utilisées en (7.1) : pour $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ (non a priori à variables séparées), la fonction $\theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie en (7.1), à savoir :

$$\theta(\vec{x}) = \langle T, \Phi_{\vec{x}} \rangle \overset{\text{noté}}{=} \langle T(\vec{y}), \Phi(\vec{x}, \vec{y}) \rangle_{dy} \overset{\text{noté}}{=} \int_y T(\vec{y}) \Phi(\vec{x}, \vec{y})\, dy \tag{8.11}$$

vérifie $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Théorème 8.5 (Fubini) *Soient $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pour $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ (non a priori à variables séparées), les réels*
$\langle S(x) \otimes T(y), \Phi(x,y) \rangle_{dxdy} =^{\text{déf}} \langle S \otimes T, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}$,
$\langle S, \theta \rangle = \big\langle S(x), \langle T(y), \Phi(x,y) \rangle_{dy} \big\rangle_{dx}$, *et*
$\big\langle T(y), \langle S(x), \Phi(x,y) \rangle_{dx} \big\rangle_{dy}$
sont bien définis, et on a :

$$\langle S(x) \otimes T(y), \Phi(x,y) \rangle_{dxdy} = \big\langle S(x), \langle T(y), \Phi(x,y) \rangle_{dy} \big\rangle_{dx} = \big\langle T(y), \langle S(x), \Phi(x,y) \rangle_{dx} \big\rangle_{dy}, \tag{8.12}$$

noté

$$\iint S(x) T(y) \Phi(x,y)\, dxdy = \int S(x) (\int T(y) \Phi(x,y)\, dy)\, dx = \int T(y) \int S(x) \Phi(x,y)\, dx)\, dy. \tag{8.13}$$

Preuve. La dérivation sous le crochet, proposition 7.4, nous donne la régularité de θ.

De (8.10) on déduit alors l'inversion des crochets pour le calcul de $\langle S(x) \otimes T(y), \Phi(x,y) \rangle$ à l'aide de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ (admis). ∎

Corollaire 8.6 *Si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors, avec des notations implicites :*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(S \otimes T) = \frac{\partial^k S}{\partial x_i^k} \otimes T, \qquad \frac{\partial^k}{\partial y_j^k}(S \otimes T) = S \otimes \frac{\partial^k T}{\partial y_j^k}, \tag{8.14}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$ et $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. Et on note abusivement :

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(S(x) \otimes T(y)) = (\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} S(x)) \otimes T(y), \tag{8.15}$$

idem pour la dérivation en y_j.

Preuve. Avec le Théorème de Fubini on obtient (notations abusives), pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(S(x) \otimes T(y))\ , \Phi(x,y) \rangle_{dxdy} &= (-1)^k \langle (S(x) \otimes T(y)), \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \Phi(x,y) \rangle_{dxdy} \\
&= (-1)^k \langle T(y), \langle S(x), \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \Phi(x,y) \rangle \rangle_{dxdy} = \langle T(y), \langle \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} S(x), \Phi(x,y) \rangle \rangle_{dxdy}.
\end{aligned}$$

Idem pour l'autre égalité. ∎

Remarque 8.7 Avec le théorème de Fubini, on retrouve les dérivations et intégrations sous le crochet. En effet, on veut (7.2), i.e. :

$$\big\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle T(y), \Phi(x,y) \rangle_{dy})\ ,\ \psi(x) \big\rangle_{dx} = \big\langle \langle T(y), \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x,y) \rangle_{dy}\ ,\ \psi(x) \big\rangle_{dx}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{8.16}$$

Vérification à partir du membre de gauche de (8.16) qui vaut :

$$\begin{aligned}
&= -\big\langle \langle T(y), \Phi(x,y) \rangle_{dy}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) \big\rangle_{dx} = -\big\langle T(y), \langle \Phi(x,y), \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) \rangle_{dx} \big\rangle_{dy} \\
&= +\big\langle T(y), \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,y), \psi(x) \rangle_{dx} \big\rangle_{dy} = \big\langle \langle T(y), \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x,y) \rangle_{dy}\ ,\ \psi(x) \big\rangle_{dx}.
\end{aligned}$$

Et pour l'intégration (7.3) :

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \langle T(y),\Phi(x,y)\rangle_{dy}\,dx = \big\langle 1_{\mathbb{R}}(x), \langle T(y),\Phi(x,y)\rangle\big\rangle_{dx} = \big\langle T(y), \langle 1_{\mathbb{R}}(x),\Phi(x,y)\rangle_{dx}\big\rangle_{dy}$$
$$= \langle T(y), \int_{\mathbb{R}} \Phi(x,y)\,dx\rangle$$

comme souhaité. ∴

Exercice 8.8 Montrer que $T_\beta \otimes T_\alpha \neq T_\alpha \otimes T_\beta$ en général.

Réponse. Exemple : $\alpha(x) = x$ et $\beta(x) = x^2$. On a $(\alpha\otimes\beta)(x,y) = xy^2$ et $(\beta\otimes\alpha)(x,y) = x^2y$. Et $\iint xy^2\varphi(x,y)\,dxdy \neq \iint x^2y\varphi(x,y)\,dxdy$ en général. ∴

Exercice 8.9 Soit la fonction de Heaviside de n variables $H_{\vec a} = H_{a_1}\otimes\ldots\otimes H_{a_n}$. Montrer que :

$$\frac{\partial H_{\vec a}}{\partial x_1} = \delta_{a_1}\otimes H_{a_1}\otimes\ldots\otimes H_{a_n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n H_{\vec a}}{\partial x_1\ldots\partial x_n} = \delta_{\vec a}. \tag{8.17}$$

Réponse. Soit on applique (8.14), soit calcul direct : écrivons le résultat dans $\mathbb{R}^2$ pour simplifier les écritures. Et notons T_{H_z} la distribution régulière associée à H_z. Alors, pour tout $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, avec le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\langle D_x(T_{H_a}\otimes T_{H_b}),\Phi\rangle = &\ -\langle (T_{H_a}(x)\otimes T_{H_b}(y)), D_x\Phi(x,y)\rangle = -\langle T_{H_b}(y),\langle T_{H_a}(x), D_x\Phi(x,y)\rangle\rangle\\ = &\ +\langle T_{H_b}(y),\langle D_xT_{H_a}(x),\Phi(x,y)\rangle\rangle = +\langle T_{H_b}(y),\langle\delta_a(x),\Phi(x,y)\rangle\rangle = \langle\delta_a\otimes T_{H_b},\Phi\rangle.\end{aligned}$$

∴

8.3 Généralisation de $S\otimes T$: compatibilité des supports

Et en ce qui concerne le support de $W = S\otimes T$ on a (faire un dessin dans le cas $m = n = 1$) :

Proposition 8.10 *Si $S\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors* $\mathrm{supp}(S\otimes T) = \mathrm{supp}S\times\mathrm{supp}T$.

Preuve. Soit $W = S\otimes T$. Montrons que $\mathrm{supp}W\subset\mathrm{supp}S\times\mathrm{supp}T$. Soit $(x,y)\notin\mathrm{supp}S\times\mathrm{supp}T$. Supposons par exemple $x\notin\mathrm{supp}S$ (sinon nécessairement $y\notin\mathrm{supp}T$ et on échange les rôles de x et y). Soit alors $\varepsilon>0$ t.q. $B(x,\varepsilon)\subset\mathbb{R}-\mathrm{supp}S$ (qui est ouvert).

Comme toute boule (“ronde”) $B((x,y),\varepsilon)$ est incluse dans le produit cartésien (“carré”) $B(x,\varepsilon)\times B(y,\varepsilon)$, si $\Phi\in\mathcal{D}(B((x,y),\varepsilon))$, alors $\Phi\in\mathcal{D}(B(x,\varepsilon)\times B(y,\varepsilon))$ (prolongement par 0), et donc $\Phi_y\in\mathcal{D}(B(x,\varepsilon))$ (où $\Phi_y : x\to\Phi_y(x) = \Phi(x,y)$). Faire un dessin.

D'où à l'aide du théorème de Fubini, pour tout $\Phi\in\mathcal{D}(B((x,y),\varepsilon))$:

$$\langle W,\Phi\rangle = \big\langle T(y),\langle S(x),\Phi(x,y)\rangle\big\rangle = \langle T(y),0\rangle = 0.$$

Donc $(x,y)\in\Omega_{max}(W)$, i.e. $(x,y)\notin\mathrm{supp}(W)$, donc $\mathrm{supp}W\subset\mathrm{supp}S\times\mathrm{supp}T$.

Réciproquement, soit $(x_0,y_0)\in\mathrm{supp}S\times\mathrm{supp}T$. Donc $x_0\in\mathrm{supp}S$ et $y_0\in\mathrm{supp}T$. Donc, pour toute boule ouverte $B(x,\varepsilon_x)$ de $\mathbb{R}^m$, il existe $\alpha\in\mathcal{D}(B(x,\varepsilon_x))$ telle que $\langle S,\alpha\rangle\neq0$. De même il existe $\beta\in\mathcal{D}(B(y,\varepsilon_y))$ telle que $\langle T,\beta\rangle\neq0$. Et on a :

$$\langle S\otimes T,\alpha\otimes\beta\rangle = \langle S,\alpha\rangle\langle T,\beta\rangle\neq0.$$

Comme tout ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}$ contenant (x,y) contient un ouvert de type $B(x,\varepsilon_x)\times B(y,\varepsilon_y)$, on en déduit que $(x,y)\notin\Omega_{max}(W)$, i.e. $(x,y)\in\mathrm{supp}W$. ∴

Et on a la proposition :

Proposition 8.11 *Le produit tensoriel $S\otimes T$ a un sens sur une fonction $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ dès que :*

$$E_\Phi = (\mathrm{supp}S\times\mathrm{supp}T)\bigcap\mathrm{supp}\Phi \tag{8.18}$$

est borné. Et pour une telle fonction Φ on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\langle S(x)\otimes T(y),\Phi(x,y)\rangle = \big\langle S(x),\langle T(y),\Phi(x,y)\rangle\big\rangle = \big\langle T(y),\langle S(x),\Phi(x,y)\rangle\big\rangle. \tag{8.19}$$

Preuve. (i) Si Φ est à support compact, aucune condition n'est requise sur le support de S et T : c'est la définition des distributions, dualité entre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Cas général : grâce à la définition généralisée (voir la proposition 6.3). Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$ donnée et soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ avec $\alpha = 1$ dans un voisinage ouvert U_α de E_Φ. La fonction $\alpha\Phi$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$, et donc $\langle S \otimes T, \alpha\Phi\rangle \in \mathbb{R}$ est bien défini, et on a le théorème de Fubini :

$$\langle S(x) \otimes T(y), \alpha(x,y)\Phi(x,y)\rangle = \langle S(x), \langle T(y), \alpha(x,y)\Phi(x,y)\rangle\rangle = \langle T(y), \langle S(x), \alpha(x,y)\Phi(x,y)\rangle\rangle.$$

Soit β est une fonction qui vaut également 1 dans un voisinage ouvert U_β de E_Φ. Donc $\alpha - \beta$ est nulle dans le voisinage ouvert $U_\alpha \bigcap U_\beta$ de E_Φ et donc $\langle S(x) \otimes T(y), (\alpha(x,y) - \beta(x,y))\Phi(x,y)\rangle = 0$, i.e. $\langle S(x) \otimes T(y), \alpha(x,y)\Phi(x,y)\rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \beta(x,y)\Phi(x,y)\rangle$: (8.19) a un sens est indépendant de α. ▪

Exemple 8.12 Rappel : une fonction $w : (x,y) \to w(x,y)$ est indépendante de x si elle est de la forme $w(x,y) = f(y)$, autrement dit si c'est la fonction à variables séparées $w = 1_\mathbb{R} \otimes f$.

De même, on dira qu'une distribution W de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ est indépendante de x si elle est de la forme $W = 1_\mathbb{R} \otimes T$ (variables séparées). On a alors, pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$:

$$\langle 1_\mathbb{R}(x) \otimes T(y), \Phi(x,y)\rangle = \langle 1_\mathbb{R}(x), \langle T(y), \Phi(x,y)\rangle\rangle = \int_{x\in\mathbb{R}} \langle T(y), \Phi(x,y)\rangle\,dx = \langle T(y), \int_{x\in\mathbb{R}} \Phi(x,y)\,dx\rangle.$$

Et plus généralement cela a un sens quand $E_\Phi = (\mathrm{supp}1_\mathbb{R} \times \mathrm{supp}T) \bigcap \mathrm{supp}\Phi$ est borné. ▪

9 Produit de convolution de distributions

9.1 Produit de convolution de fonctions

9.1.1 Vers la convolution de distributions régulières

Le produit de convolution a été introduit au paragraphe 2.2 : quand cela a un sens :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{u\in\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\,du = (g * f)(x). \tag{9.1}$$

L'intégrale $h(x)$ est une intégrale dépendant du paramètre x.

Exemple 9.1 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \Pi_k = k1_{[\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}]}$, on a $(f * g)(x) = k\int_{-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} f(x-t)\,dt$ = la "valeur moyenne de f à travers une fenêtre de largeur $\frac{1}{k}$ centrée en x". Et, si f est continue en x :

$$(f * \Pi_k)(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x), \tag{9.2}$$

ce qui va donner, dans le cas f continue sur $\mathbb{R}$:

$$(f * \delta_0)(x) = f(x). \tag{9.3}$$

Donc $f * \delta_0 = f$, une fois qu'on aura défini le produit de convolution de distributions... Ce qu'on va faire maintenant. ▪

9.1.2 Notation $f(t) * g(t)$

Notation. On note $(f * g)(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt \overset{\text{noté}}{=} (f(t) * g(t))(x)$, i.e. on impose explicitement le nom (ici t) de la variable d'intégration. Cela ne pose pas de problème quand le contexte n'est pas ambigu.

Exemple avec "Fourier" :

$$h(x) = (f * \frac{e^{i\nu\cdot}}{\sqrt{2\pi}})(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\nu(x-t)}\,dt \overset{\text{noté}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(t) * e^{i\nu t})(x) \overset{\text{noté}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * e^{i\nu t})(x)...$$

9.2 Définition de $S * T$

9.2.1 Définition formelle

Rappel : si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Au sens des distributions, la distribution régulière associée $T_{f*g} =^{\text{noté}} f * g$ vérifie, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{t \in \mathbb{R}^n} (f * g)(t)\varphi(t)\, dt = \int_{t \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(t - y)g(y)\varphi(t)\, dy\, dt, \tag{9.4}$$

grâce au théorème de Fubini. On obtient :

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x + y)\, dx\, dy = \langle f \otimes g, h \rangle, \quad \text{où} \quad h(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \varphi(x + y). \tag{9.5}$$

Et on notera (abusivement) :

$$\langle f * g, \varphi \rangle \overset{\text{noté}}{=} \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x + y) \rangle \qquad (\overset{\text{déf}}{=} \langle f \otimes g, h \rangle). \tag{9.6}$$

Définition 9.2 On définit alors le produit de convolution de deux distributions $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S \otimes T, h \rangle, \qquad \text{où} \qquad h(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \varphi(x + y) \tag{9.7}$$

Il est immédiat que si $S * T$ a un sens alors $S * T = T * S$ (commutativité), car $h(x, y) = h(y, x)$. Et on note abusivement, quand $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\langle S * T, \varphi \rangle &\overset{\text{noté}}{=} \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle \overset{\text{noté}}{=} \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle \quad (\overset{\text{déf}}{=} \langle S \otimes T, h \rangle) \\ &\overset{\text{noté}}{=} \int_x \int_y S(x)T(y)\varphi(x + y)\, dxdy \overset{\text{noté}}{=} \int_x \int_z S(x)T(z - x)\varphi(z)\, dxdz.\end{aligned} \tag{9.8}$$

Un des outils principaux pour l'étude de ce produit de convolution sera le théorème de Fubini, proposition 8.5.

Exercice 9.3 Montrer que pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $T_{f*g} = T_f * T_g$.

Réponse. Fubini donne : $T_{f*g}(\varphi) = \int_{x\in\mathbb{R}}(\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x - t)\, dt)\varphi(x)\, dx = \int_{y\in\mathbb{R}} \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(y)\varphi(y + t)\, dtdy$, et on a $(T_f * T_g)(\varphi) = \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x + y)\rangle_{dy}\rangle_{dx}$, ce pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ■

Exercice 9.4 Montrer formellement (de fait pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ voir la suite = régularisation) :

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_f, \check{T}_g * \varphi \rangle. \tag{9.9}$$

(Rigoureusement : voir (9.28).)

Réponse. Fubini donne :

$$\begin{aligned}\iint f(x)g(y)\varphi(x+y)\, dxdy &= \int_x f(x)(\int_y g(y)\varphi(x+y)\, dy)dx = \int_x f(x)(\int_u g(u-x)\varphi(u)\, du)dx \\ &= \int_x f(x)(\int_u \check{g}(x-u)\varphi(u)\, du)dx = \int_x f(x)(\check{g} * \varphi)(x)\, dx.\end{aligned}$$

Ce résultat sera conservé pour les distributions, cf. la suite. ■

9.2.2 Domaines de définition : supports convolables

On rappelle qu'on ne peut pas convoler la fonction constante $1_\mathbb{R} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec elle-même : on aurait $(1_\mathbb{R} * 1_\mathbb{R})(x) = \int_\mathbb{R} 1 dt = \infty$.

De même, la définition au sens des distributions pose un problème : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on aurait $\langle 1(x) \otimes 1(y), \varphi(x+y) \rangle = \int_\mathbb{R}(\int_\mathbb{R} \varphi(z)dz)dx$ intégrale de fonctions à variables séparées donc égale à $(\int_\mathbb{R} dx)(\int_\mathbb{R} \varphi(z)dz) = \infty$. Donc l'hypothèse $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est visiblement insuffisante pour que (9.4) et (9.7) aient un sens.

Lemme 9.5 *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \neq 0$, avec $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, \rho)$; et soit $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ définie par $h(x, y) = \varphi(x+y)$; alors*

$$\text{supp}(h) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : ||x + y|| \leqslant \rho\} \quad \textit{(“bande oblique”, dessin)}, \tag{9.10}$$

et $\text{supp}(h)$ n'est jamais borné.

Preuve. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ et $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ t.q. $||t|| \leqslant \alpha$ et $||t|| \geqslant \beta$; donc $h(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$ t.q. $||x+y|| \leqslant \alpha \leqslant ||x+y|| \geqslant \beta$, d'où (9.10). Puis $\rho = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Et supp$h$ n'est pas borné (pour $\varphi \neq 0$) : si $c \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\varphi(c) \neq 0$, alors $h(x,y) \neq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x+y=c$, donc contient tous les points $(x, c-x) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $||(x,c-x)||^2_{\mathbb{R}^{2n}} \geqslant ||x||^2_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow_{x \to \infty} \infty$.

Dessin cas 1-D : $y = \alpha - x$ est la droite dans $\mathbb{R}^2$ de pente -1 qui passe par $(x,y) = (\alpha, 0)$, et $y = \beta - x$ est la droite dans $\mathbb{R}^2$ de pente -1 qui passe par $(x,y) = (\beta, 0)$, et supp(h) est dans "la bande oblique dans $\mathbb{R}^2$ qui limité par ces deux droites obliques. (h est d'altitude constante $= \varphi(c)$ le long des droites $x + y = c$.) ▪

Proposition 9.6 et définition. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $h_\varphi(x,y) := \varphi(x+y)$ cf. (9.7). Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Le produit de convolution $S * T$ a un sens dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. le réel $\langle S * T, \varphi \rangle$ a un sens pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dès que l'ensemble*

$$E_\varphi := (\mathrm{supp}S \times \mathrm{supp}T) \bigcap \mathrm{supp}(h_\varphi) \quad \underline{\text{est borné}}, \tag{9.11}$$

C'est en particulier le cas si (dessin)

1. supp$S$ *<u>ou</u>* supp$T$ *est borné, i.e. l'une des deux distributions est à support borné (cf. EDP),*
2. supp$S$ *<u>et</u>* supp$T$ *sont limités tous deux à gauche (cf. EDO) (ou limités tous deux à droite).*
3. $$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{supp}(S) \bigcap \mathrm{supp}(\tau_z \check{T}) \quad \textit{est borné} \tag{9.12}$$

Preuve. $\langle S * T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'} = \langle S \otimes T, h \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}), \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})'}$ a un sens dès l'intersection supp$(S \otimes T) \bigcap$ supp(h) est bornée cf. prop.-déf. 6.3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dont $\exists \rho \in \mathbb{R}$ t.q. supp$\varphi \subset B(0, \rho)$.

Avec (9.10) on a supp(h) dans la "bande oblique" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} ; ||x+y|| \leqslant \rho\}$ quand supp$(\varphi) \subset [-\rho, \rho]$. Donc $E_\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \mathrm{supp}S,\ y \in \mathrm{supp}T$ et $||x+y|| \leqslant \rho\}$.

Cas 1 : supp$S \subset B(0,a)$ (borné), donc $||x|| \leqslant a$, avec $||x+y|| \leqslant \rho$, avec $||y|| \leqslant ||x+y|| + ||x|| \leqslant \rho + a$, donc $E_\varphi \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : ||x|| \leqslant a$ et $||y|| \leqslant \rho + a\}$ est borné, vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. OK.

Cas 2 : quitte à travailler composante par composante on se ramène à $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$; supp$S \subset [a, \infty[$ et supp$T \subset [b, \infty[$ (supports limité à gauche), avec supp$(h) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\rho \leqslant x + y \leqslant \rho\}$ cf. (9.10). Donc si $(x,y) \in E_\varphi$ alors $x \geqslant a$, $y \geqslant b$, $-\rho \leqslant x+y \leqslant \rho$, donc $-y \leqslant -b$, donc $x \leqslant \rho - y \leqslant \rho - b$, donc $x \in [a, \rho - b]$, et idem $y \in [b, \rho - a]$ donc E_φ borné, vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. OK.

Cas 3 : on a

$$\begin{aligned} E_\varphi &\subset \{(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 : x \in \mathrm{supp}S,\ y \in \mathrm{supp}T,\ ||x+y|| \leqslant \rho\} \\ &\subset \{(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 : x \in \mathrm{supp}S,\ y \in \mathrm{supp}T,\ z = x+y,\ ||z|| \leqslant \rho\} \\ &\subset \{(x, z-x) \in (\mathbb{R}^n)^2 : x \in \mathrm{supp}S,\ z \in B(0,\rho),\ z - x \in \mathrm{supp}T\} \\ &\subset \{(x, z-x) \in (\mathbb{R}^n)^2 : x \in \mathrm{supp}S \textstyle\bigcap \mathrm{supp}(\tau_z \check{T}),\ z \in B(0,\rho)\} \end{aligned} \tag{9.13}$$

Donc E_φ est borné dès que supp$S \bigcap$ supp$(\tau_z \check{T})$ est borné pour tout z (doit être vrai pour tout φ). (Les cas 1 et 2 sont des cas particuliers du cas 3.) ▪

Proposition 9.7 *Quand le produit de convolution est défini, il est commutatif : $S * T = T * S$.*

Preuve. $h(x,y) =^{(9.7)} h(y,x)$ et Fubini (8.12) (quand les supports sont compatibles) donnent $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, h \rangle = \langle T(y), \langle S(x), h(y,x) \rangle_{dx} \rangle_{dy} = \langle T(y) \otimes S(x), h(y,x) \rangle_{dydx} = \langle T \otimes S, h \rangle = \langle T * S, \varphi \rangle$. ▪

9.3 Convolution de fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Proposition 9.8 *Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ deux fonctions localement sommables, T_f et T_g les distributions régulières associées. On suppose les supports de T_f et T_g convolables cf. (9.12). Alors :*

$$f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad T_f * T_g = T_{f*g} \overset{\text{noté}}{=} f * g \quad \text{au sens } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{9.14}$$

Preuve. $\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_f(x) \otimes T_g(y), \varphi(x+y) \rangle_{dxdy} = \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x+y) \rangle_{dy} \rangle_{dx} = \int_x f(x) \langle T_g(y), \varphi(x+y) \rangle_{dy}\, dx = \int_x f(x) (\int_y g(y) \varphi(x+y)\, dy) dx = \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x) g(y) \varphi(x+y)\, dxdy$, car $(x,y) \to f(x)g(y)\varphi(x+y)$ est localement sommable dans $\mathbb{R}^2$ de support borné, cf. (9.12), doncest sommable. Et $\int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x) g(y) \varphi(x+y)\, dxdy = \int_{x \in \mathbb{R}} \big(\int_{z \in \mathbb{R}} f(x) g(z-x) \varphi(z)$ $\int_{z \in \mathbb{R}} (f * g)(z) \varphi(z)\, dz = \langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_{f*g}, \varphi \rangle$. Vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ▪

Notation : pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec T_f, T_g de supports convolables,

$$T_f * T \overset{\text{noté}}{=} f * T \quad \text{au sens } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{9.15}$$

9.4 Masses de Dirac et convolution

9.4.1 δ_0 est l'élément neutre du produit de convolution : $\delta_0 * T = T$

Proposition 9.9 *δ_0 est l'élément neutre du produit de convolution : pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,*

$$\delta_0 * T = T = T * \delta_0. \tag{9.16}$$

Preuve. Comme δ_0 est à support compact, T et δ_0 sont convolables. Et Fubini :
$\langle T * \delta_0, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes \delta_0(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(x), \langle \delta_0(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle$.
D'où $T * \delta_0 = T$, et $= \delta_0 * T$ car $*$ est commutatif. ∎

Notation : si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $\delta_0 * T_f = T_f$ est noté

$$f * \delta_0 = f. \tag{9.17}$$

9.4.2 δ_0' est la dérivation pour le produit de convolution

Proposition 9.10 *δ_0' est la dérivation pour le produit de convolution : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,*

$$\delta_0' * T = T' = T * \delta_0'. \tag{9.18}$$

Preuve. Comme δ_0' est à support compact, T et δ_0' sont convolables. Et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:
$\langle T * \delta_0', \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes \delta_0'(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(x), \langle \delta_0'(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(x), -\varphi'(x) \rangle = +\langle T', \varphi \rangle$
grâce au théorème de Fubini. ∎

Notation : si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors (9.15) donne : $\delta_0' * T_f = (T_f)'$ est noté

$$\delta_0' * f = f'. \tag{9.19}$$

9.4.3 δ_a est une translation pour le produit de convolution

Proposition 9.11 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors :*

$$\delta_a * T = \tau_a T, \qquad \text{ou encore} \qquad \tau_a \delta_0 * T = \tau_a T \qquad (= \delta_0 * \tau_a T). \tag{9.20}$$

Et la masse de Dirac en a est la translation pour le produit de convolution.

Preuve. $\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle T_y, \varphi(y+a) \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle \tau_a T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ∎

9.5 Fonctions de Heaviside et $H_0 e^{\lambda x}$

En vue de la résolution des équations de convolution, on pose pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$H_{(\lambda)}^{(n)}(x) = H_0(x) e^{\lambda x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{9.21}$$

fonction $e^{\lambda x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ tronquée en 0. Alors on a :

$$(H_{(\lambda)}^{(n)} * H_{(\lambda)}^{(m)})(x) = H_{(\lambda)}^{(n+m)}(x) \tag{9.22}$$

En effet :

$$\begin{aligned} (H_{(\lambda)}^{(n)} * H_{(\lambda)}^{(m)})(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda(x-t)} e^{\lambda t} \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda x} x^{n+m-1}}{(n-1)!\,(m-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{m-1} \, du \end{aligned} \tag{9.23}$$

après avoir posé $t = xu$. Et l'intégrale vaut $\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$ (exercice).

9.6 Remarques

Ne pas confondre supports compatibles au sens de la proposition 6.3 (relative à la dualité $\langle T, \varphi \rangle$) et supports convolables (relative à l'opération de convolution $T * S$) :

Exercice 9.12 Soient $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. leurs supports soient compatibles, i.e. t.q. $\mathrm{supp} S \bigcap \mathrm{supp}\psi$ est compact (proposition–définition 6.3).

Donner un exemple où les supports de S et de T_ψ ne sont pas forcément convolables.

Réponse. Soit $S = 1_{\mathbb{R}_-}$ et $\psi = 1_{[-1,\infty[} * \gamma_1$ avec donc $\mathrm{supp}\psi = [-2, \infty[$, voir (1.18) et (2.26) : ici $\mathrm{supp} S =]-\infty, 0]$ est limité à droite et $\mathrm{supp}\psi = [-2, \infty[$ est limité à gauche, et $\mathrm{supp} S \cap \mathrm{supp}\psi \subset [-2, 0]$: les supports sont compatibles ($\langle S, \psi \rangle$ est bien défini).

Mais $\mathrm{supp}\check{T} =]-\infty, 2]$, donc $\mathrm{supp} S \times \mathrm{supp}\widecheck{T_\psi} = [-\infty, 0] \bigcap [-2, \infty[= [-\infty, 0]$ n'est pas compact. Et choisissant $\psi = \gamma_1$ on a $\langle S(x) \otimes T(y), \gamma_1(x+y) \rangle = \infty$: Donc S et ψ ne sont pas convolables. ▟

Exercice 9.13 Montrer que si les distributions S et T sont convolables alors on n'a pas forcément $\mathrm{supp} S$ et $\mathrm{supp} T$ compatibles.

Réponse. On se met dans le cas 2. de la proposition 9.6 avec $\psi = 1_{\mathbb{R}_+} * \gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $S = T = T_\psi$. Alors S et T sont convolables (supports limités à gauche), mais $\langle S, \psi \rangle = \infty$. ▟

Remarque 9.14 La proposition 9.6 a pour hypothèse que pour chaque φ, l'ensemble E_φ est borné. Cela **ne** veut **pas** dire que $(\bigcup_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})} E_\varphi)$ est bornée : d'ailleurs cette union n'est jamais bornée quand S et T sont non nuls.

Par exemple, si $\mathrm{supp} T$ est borné et $S = 1_\mathbb{R}$ (on est dans le cas 1. de la proposition), l'ensemble E_φ est contenu dans la bande oblique (de pente -1) qui coupe l'axe des x sur le support de φ, et qui se situe dans la bande horizontale délimitée par $\mathrm{supp} T$. Les ψ_n définis par $\psi_n(x) = \varphi(x-n)$ sont bien sûr dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et E_{ψ_n} est borné, mais l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{\psi_n}$ n'est pas bornée. ▟

Remarque 9.15 La proposition 9.6 ne donne que des conditions suffisantes ("dès que" = "il suffit que") pour que $S * T$ ait un sens, pas des conditions nécessaires. Par exemple, si f et g sont des fonctions $L^1(\mathbb{R})$ alors leurs supports ne sont pas convolables, alors que $f * g$ a un sens, (et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, voir proposition 2.18), et donc que $T_f * T_g = T_{f*g}$ a un sens, cf. exercice 9.3. ▟

9.7 Régularisation C^∞ des distributions

On sait qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est régularisée par convolution par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: on a $f * \varphi = \gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ cf. prop. 2.19.

On va voir : une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est régularisée par convolution par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, i.e. $T * \varphi = \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, au sens $T * T_\varphi = T_\gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

9.7.1 Régularisation C^∞ des distributions

Vocabulaire : $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont convolables signifie : T et T_ψ sont convolables dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Rappel : $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) g(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \tau_x \check{g}(t)\, dt =^{\text{noté}} \langle f, \tau_x \check{g} \rangle$, cf. (2.6).

Proposition 9.16 et définition. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $T_\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ la distribution régulière associée. Si T et T_ψ sont convolables (voir proposition 9.6), alors :*

$$T * T_\psi = T_\gamma \quad \textit{distribution régulière avec } \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \textit{noté} \quad T * \psi = \gamma \ \textit{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{9.24}$$

où :

$$\boxed{\gamma(x) = \langle T, \tau_x \check{\psi} \rangle} \overset{\text{noté}}{=} \langle T(t), \psi(x-t) \rangle_{dt} \overset{\text{noté}}{=} (T * \psi)(x) \overset{\text{noté}}{=} \int_{t \in \mathbb{R}} T(t) \psi(x-t)\, dt. \tag{9.25}$$

Définition : $T * \psi = \gamma$ est la régularisée C^∞ de T par ψ, ou encore T est régularisé par convolution par une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, et on dit que la convolution par une fonction C^∞ est une régularisation.

En particulier, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (distribution à support compact), alors pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, la distribution $T * T_\psi$ donnée en (9.24) est représentée par la fonction $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ donnée par (9.25).

Preuve. $T * T_\psi$ a un sens car les supports sont supposés convolables. Soit $x \in \mathbb{R}^n$; $\tau_x \check{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (trivial), et les supports de T et de $\tau_x \check{\psi}$ sont compatibles, cf. (9.12). Donc le réel $\gamma(x) := \langle T, \tau_x \check{\psi} \rangle \in \mathbb{R}$ est bien défini, ce qui définit la fonction $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $\gamma(x) =^{\text{noté}} \langle T(z), \psi(x-z) \rangle_{dz} =^{\text{noté}} \int_z T(z) \psi(x-z)\, dz$. Et γ est C^∞ grâce au théorème de dérivation sous le crochet (proposition 7.4) puisque $(x,t) \to \psi(x-t)$ est trivialement $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ quand $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, d'où $T_\gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (distribution régulière) est bien défini.

Montrons (9.24), i.e. $\langle T * T_\psi, \varphi\rangle = \langle T_\gamma, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\langle T * T_\psi, \varphi\rangle &= \langle T(z) \otimes T_\psi(y), \varphi(z+y)\rangle_{dzdy} \overset{\text{Fubini}}{=} \langle T(z), \langle T_\psi(y), \varphi(z+y)\rangle_{dy}\rangle_{dz} \\ &= \langle T(z), \int_{y\in\mathbb{R}^n} \psi(y)\varphi(z+y)\,dy\rangle_{dz} = \langle T(z), \int_{x\in\mathbb{R}^n} \psi(x-z)\varphi(x)\,dx\rangle_{dz} \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x)\langle T(z), \psi(x-z)\rangle_{dz} dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x)\gamma(x)\,dx = \langle T_\gamma, \varphi\rangle,\end{aligned} \tag{9.26}$$

d'où (9.25). ▲

A retenir : le calcul formel $\gamma(x) = (T * \psi)(x) = \int_\mathbb{R} T(t)\psi(x-t)\,dt = \langle T(t), \psi(x-t)\rangle_{dt}$ donne le "bon résultat" (au sens $T_\gamma = T * T_\psi$). Ce dès que les supports de T et ψ sont convolables.

Corollaire 9.17 *Si (T_j) est une suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui tend vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(T_j * \psi)(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (T * \psi)(x) \tag{9.27}$$

pour toute $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ convolable avec T, au sens $\gamma_j(x) = \langle T_j, \tau_x\check{\psi}\rangle \longrightarrow_{j\to\infty} \gamma(x) = \langle T, \tau_x\check{\psi}\rangle$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Avec $T_{\gamma_j} = T_j * T_\psi$, on a $\gamma_j(x) = \langle T_j, \tau_x\check{\psi}\rangle \longrightarrow_{j\to\infty} \langle T, \tau_x\check{\psi}\rangle = \gamma(x)$ par définition de la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cf.§ 3.4, donc $T_{\gamma_j} \rightharpoonup_{j\to\infty} T_\gamma = T * T_\gamma$,i.e. (9.27). ▲

9.7.2 Convergences $S * T_j \rightharpoonup S * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

On rappelle que $\langle \check{S}, \varphi\rangle := \langle S, \check{\varphi}\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, quand les supports sont compatibles.

On généralise (9.9), i.e. $\langle T_f * T_g, \varphi\rangle = \langle T_f, \check{T}_g * \varphi\rangle$ pour f et g convolables :

Proposition 9.18 *1- Si S et T sont convolables, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :*

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T, \check{S} * \varphi\rangle. \tag{9.28}$$

2- Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (à support compact) et si (T_j) est une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors la suite $S * T_j$ converge vers $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \text{ et } T_j \rightharpoonup T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad S * T_j \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{9.29}$$

2'- D'où si $(\gamma_k)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante, cf. (2.23), et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors $T_{\gamma_k} \rightharpoonup_{k\to\infty} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et :

$$\gamma_k * T \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{9.30}$$

notation abusive de $T_{\gamma_k} * T \rightharpoonup_{k\to\infty} T$ (approximation de T par une fonction C^∞).

Preuve. 1- $\check{S}$ a été défini en (3.49), et $\widecheck{\tau_x\check{\varphi}}(y) = \tau_x\check{\varphi}(-y) = \check{\varphi}(-y-x) = \varphi(y+x)$. Donc avec (9.24) :

$$(\check{S} * \varphi)(x) = \langle \check{S}(y), \tau_x\check{\varphi}(y)\rangle = \langle S(y), \varphi(y+x)\rangle,$$

Comme S et T sont convolables, avec Fubini on a, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T(x) \otimes S(y), \varphi(x+y)\rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y)\rangle_{dy}\rangle_{dx} = \langle T, \check{S} * \varphi\rangle.$$

2- Pour x fixé on a $(T_j * \varphi)(x) = \langle T_j, \tau_x\check{\varphi}\rangle \longrightarrow_{j\to\infty} \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle = (T * \varphi)(x)$. D'où :

$$\langle S * T_j, \varphi\rangle = \langle S, \check{T}_j * \varphi\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle S, \check{T} * \varphi\rangle = \langle S * T, \varphi\rangle. \tag{9.31}$$

2'- supp(γ_k) est compact : donc $T_{\gamma_k} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, et on applique (9.29). Détails : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\langle T_{\gamma_k} * T, \varphi\rangle = \langle T_{\gamma_k}, \check{T} * \varphi\rangle \longrightarrow_{k\to\infty} \langle \delta_0, \check{T} * \varphi\rangle = (\check{T} * \varphi)(0) = \langle \check{T}, \tau_0\check{\varphi}\rangle = \langle \check{T}, \check{\varphi}\rangle = \langle T, \varphi\rangle$. ▲

Exercice 9.19 (Reprise de (9.9).) ▲

9.7.3 Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

On sait déjà que la distribution δ_0 (masse de Dirac) est limite d'une "suite régularisante" $(\gamma_k)_{\mathbb{N}^*}$, cf. (3.38).

Proposition 9.20 *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite $(\alpha_k)_{\mathbb{N}^*}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$: pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que :*

$$\alpha_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \qquad \text{au sens} \quad T_{\alpha_k} \rightharpoonup_{k\to\infty} T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega). \tag{9.32}$$

On dit que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Preuve. (Par régularisation et troncature.) Cas $\Omega = \mathbb{R}$ tout entier (ou $\mathbb{R}^n$). Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $(\gamma_k)_{\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante, cf. (2.23). Donc $\gamma_k * T \in C^\infty(\mathbb{R})$ cf. (9.24) (régularisée).

Soit $\lambda_k = \gamma_1 * 1_{[-k-1,k+1]} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-k,+k]$ et 0 sur $[-k-2,k+2]$, voir proposition 2.24, et soit $\alpha_k = \lambda_k(\gamma_k * T)$ ("troncature régulière" de $\gamma_k * T$ au sens $T_{\alpha_k} = \lambda_k(T_{\gamma_k} * T)$. Il est immédiat que $\alpha_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$ (assez grand) t.q. $\text{supp}(\varphi) \subset [-k,k]$. Donc $\lambda_k\varphi = \varphi$, d'où :

$$\langle \lambda_k(\gamma_k * T), \varphi\rangle = \langle \gamma_k * T, \lambda_k\varphi\rangle = \langle \gamma_k * T, \varphi\rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle, \tag{9.33}$$

grâce à (9.30). D'où (9.32).

Cas Ω ouvert de $\mathbb{R}$ quelconque : on reprend la démonstration précédente, mais on construit maintenant une suite de fonctions λ_k de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 sur le compact K tel que $d(K, \mathbb{R}-\Omega) \leqslant \frac{1}{k}$ (distance maximale du bord de K au bord de Ω). Et une telle suite existe d'après la proposition 2.27. ▟

9.8 Convolution d'une fonction polynôme par une distribution à support compact

On dispose de (9.25), et donc pour une distribution T à support borné, la convolée $T * 1_{\mathbb{R}}$ a un sens (au sens des distributions car les supports sont convolables) : c'est la "fonction" constante $\langle T, 1_{\mathbb{R}}\rangle 1_{\mathbb{R}}$ (la distribution régulière $\langle T, 1_{\mathbb{R}}\rangle T_{1_{\mathbb{R}}}$) :

$$(T * 1_{\mathbb{R}})(x) = \langle T(t), 1_{\mathbb{R}}(x-t)\rangle = \langle T, 1_{\mathbb{R}}\rangle = cste.$$

De même, pour l'application linéaire $\psi(x) = x$, on a :

$$(T * \psi)(x) = \langle T(t), x - t\rangle = x\langle T(t), 1_{\mathbb{R}}\rangle + \langle T(t), -t\rangle = \langle c_1 + c_0\, x, \varphi\rangle,$$

où $c_0 = \langle T, 1_{\mathbb{R}}\rangle$ et $c_1 = \langle T(t), -t\rangle$, et $T * \psi$ est donc une application affine.

Plus généralement, si P est un polynôme de degré n il est donné par son développement limité au voisinage d'un point z par $P(z+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}\psi^{(k)}(z)$. Et donc :

$$\tau_x\check{P}(t) = P(-t+x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}P^{(k)}(-t),$$

son développement de Taylor au voisinage de $-t$. D'où $T * P$ est aussi un polynôme de degré n donné par (on suppose toujours T à support borné) :

$$(T * P)(x) = \langle T(t), P(x-t)\rangle = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\langle T(t), P^{(k)}(-t)\rangle = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!}\, x^k \tag{9.34}$$

où $c_k = \langle T(t), P^{(k)}(-t)\rangle$.

9.9 Autre exemple

Exemple 9.21 Dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$, supposons que $\text{supp}S \subset A$ et $\text{supp}T \subset B$ où A est le cône d'ondes d'avenir et B le demi-espace des temps positifs :

$$A = \{t = x_4 \geqslant 0,\ x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geqslant 0\} \qquad B = \{t = x_4 \geqslant 0\} \tag{9.35}$$

Alors $S*T$ est bien défini : en effet, si $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ et $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3,y_4)$, alors supposant $\vec{x}+\vec{y}$ borné, par exemple, $\max_i(x_i+y_i) \leqslant C$, implique $x_4 + y_4 \leqslant C$. Et comme $x_4 \geqslant 0$ et $y_4 \geqslant 0$ on en déduit que x_4 et y_4 sont bornés. Puis comme $x_4^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, on déduit que les x_i sont bornés, donc que les y_i sont aussi bornés. ▟

10 Transformée de Fourier

10.1 Série de Fourier de fonctions

10.1.1 Rappels

Voir polycopié "Séries de Fourier" pour les détails.

Le produit scalaire usuel dans $L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[;\mathbb{C}) =^{\text{noté}} L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$ et sa norme associée sont

$$(f,g)_{L^2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{g(t)}\,dt, \qquad ||f||_{L^2} = (\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.1}$$

La base de Fourier usuelle $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$ (théorème de Stone–Weierstrass) est définie par

$$e_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{C} \\ t & \to e_k(t) = e^{i\omega_k t} = e^{\frac{2ik\pi}{T}t}. \end{cases} \tag{10.2}$$

C'est une famille orthogonale de $L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$: $(e_k,e_\ell)_{L^2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2ik\pi}{T}t}e^{-\frac{2i\ell\pi}{T}t}\,dt = T\delta_{k\ell}$ (et donc $(\frac{1}{\sqrt{T}}e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une b.o.n. dans $L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$). On note $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (e^{\frac{2ik\pi}{T}t})_{k\in\mathbb{Z}}$ (le nom imposé de la variable est t ici).

T est la période. La fréquence fondamentale ν_1, la pulsation fondamentale ω_1 et, pour $k \geqslant 2$, les fréquences et pulsations harmoniques ν_k et ω_k sont les réels > 0

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = k\omega_1, \quad \text{et} \quad \nu_k = \frac{k}{T} = k\nu_1, \quad \text{où donc} \quad \nu_k = 2\pi\nu_k. \tag{10.3}$$

Soit $f \in L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$. On note $c_k \in \mathbb{C}$ ses composantes sur la base de Fourier (non normée) $(e_k)_{\mathbb{Z}}$:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k, \quad \text{i.e.} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad \text{où donc} \quad (f,e_k)_{L^2} = Tc_k, \tag{10.4}$$

car $(f,e_k)_{L^2} = (\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_\ell e_\ell, e_k)_{L^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_\ell (e_\ell,e_k)_{L^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_\ell T\delta_{\ell k}$, donc

$$c_k = \frac{1}{T}(f,e_k)_{L^2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-ik\omega_1 t}\,dt = \text{valeur moyenne de } f \text{ pour la mesure } e^{-ik\omega_1 t}\,dt. \tag{10.5}$$

(Autrement dit, les $\sqrt{T}\,c_k$ sont les composantes de f sur la b.o.n. $(\frac{1}{\sqrt{T}}e_k)_{\mathbb{Z}}$, et on a $||f||_{L^2} = T\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2$.)

La fonction f en (10.4) est dans L^2 : elle n'est définie que presque partout ; on définit : la série de Fourier de f est la fonction $Sf : [-\frac{T}{2},\frac{T}{2}] \to \mathbb{C}$ donnée par, pour tout $t \in [-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$:

$$Sf(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e_k(t) \quad (= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{i\omega_k t}). \tag{10.6}$$

Donc : si $f \in L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$ alors

$$Sf(t) = f(t) \quad \text{pour presque tout } t, \tag{10.7}$$

pour la mesure de Lebesgue. E.g., si f est C^1 par morceaux, discontinue en x_0, alors $Sf(x_0) = \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$. (Les composantes c_k ne font pas intervenir de valeur ponctuelle de f : que des valeurs moyennes de f, cf. (10.5).)

Remarque 10.1 Pour un endomorphisme $A \in \mathcal{L}(E,E)$ (application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même), un vecteur e non nul est vecteur propre s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (valeur propre) tel que $A(e) = \lambda e$, auquel cas l'espace Vect$\{e\}$ est invariant par A. Et pour $E = L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[)$ et $f \in E$, si on note $A = C_f = f*$ l'opérateur de L^2 dans L^2 définit par $C_f(g) = f * g$, alors on a avec la définition des coefficients de Fourier :

$$C_f(e_k)(t) = (f * e_k)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{i\frac{2\pi k}{T}(t-s)}\,ds = e^{i\frac{2\pi k}{T}t}\,c_k = c_k e_k. \tag{10.8}$$

Et donc la fonction $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$ est fonction propre pour C_f associée à la valeur propre c_k (le k-ième coefficient de Fourier de f). Cette propriété de "conservation" des exponentielles est essentielle en mécanique quantique. ▟

Remarque 10.2 Cas particulier $f \in L^2([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}];\mathbb{R})$ (à valeurs réelles) : un calcul simple donne

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin(k\omega t) \quad \text{où} \quad \alpha_k = c_k + c_{-k}, \quad \beta_k = i(c_k - c_{-k}). \tag{10.9}$$

(Soit $c_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}$ et $c_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}$.) ▟

10.1.2 Passage intuitif de la série de Fourier à la transformée de Fourier

Heuristiquement, on fait tendre T vers $+\infty$, donc $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow_{T\to\infty} 0$, et

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{10.10}$$

et donc l'écart entre deux pulsations consécutives tend vers 0 : on ne peut plus différencier deux pulsations (on a un "continuum"). Donc on veut écrire $f(t) =^{(10.4)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)...$ sous la forme $f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} a(\omega)...\,d\omega$. On commence par modifier c_k, cf. (10.5), en posant

$$a(\omega_k) = \frac{T\,c_k}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-i\omega_k t}\,dt, \tag{10.11}$$

(rappel : $\frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\pi}}$ est une b.o.n. dans $L^2(]-T,T[)$). D'où

Définition 10.3 La transformée de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la fonction $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par (quand elle existe) :

$$(a(\omega) =) \quad \boxed{\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt} \overset{\text{noté}}{=} \mathcal{F}(f)(\omega) \quad \overset{\text{noté}}{=} \langle f, \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \rangle. \tag{10.12}$$

La présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ dépend des auteurs (ici convention mécanique quantique). Voir aussi § 10.1.3.

Puis formellement on reconstitue f à l'aide des ses "composantes" $\widehat{f}(\omega) = \langle f, \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \rangle = a(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{+i\omega t}\,d\omega \quad (= \widehat{\widehat{f}}(-t)), \tag{10.13}$$

à comparer avec (10.12).

Notation abusive : quand t est le nom de la variable utilisée pour f, on note (abusif mais pratique)

$$\widehat{f}(\omega) \overset{\text{noté}}{=} \widehat{f(t)}(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega). \tag{10.14}$$

On verra que cette définition a un sens par exemple quand $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^2(\mathbb{R})$. (Quand $\mathcal{F} : f \to \widehat{f}$ a un sens, sa linéarité est évidente : $\mathcal{F}(f+\lambda g) = \mathcal{F}(f) + \lambda\mathcal{F}(g)$ par linéarité de l'intégrale, soit $\widehat{f+\lambda g} = \widehat{f} + \lambda\widehat{g}$.)

Exercice 10.4 Pour $a > 0$ et $f(t) = e^{-at} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$, montrer que :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega} \qquad (\overset{\text{noté}}{=} \widehat{e^{-at} 1_{\mathbb{R}_+}}(\omega)). \tag{10.15}$$

Et montrer que :

$$\widehat{e^{-a|t|}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\text{sgn}(t) e^{-a|t|})(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-i\omega}{a^2 + \omega^2}, \tag{10.16}$$

où sgn est la fonction signe ($\text{sgn}(t) = 1$ si $t > 0$ et $= -1$ si $t < 0$).

Réponse. $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-at-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\frac{e^{-at-i\omega t}}{-a-i\omega}]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega}$.

De même, $\widehat{e^{at} 1_{\mathbb{R}_-}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\frac{e^{at-i\omega t}}{a-i\omega}]_{-\infty}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a-i\omega} = \widehat{e^{-a|t|} 1_{\mathbb{R}_-}}(\omega)$.

$e^{-a|t|} = e^{-at} 1_{\mathbb{R}_+} + e^{at} 1_{\mathbb{R}_-}$. D'où par sommation $\widehat{e^{-a|t|}}$ et par différence $\widehat{\text{sgn}(t) e^{-a|t|}}$. ∎

Exercice 10.5 Soit $\text{sinc}_a(x) = \dfrac{\sin ax}{ax}$ pour $a > 0$ (fonction sinus cardinal), et $\text{sinc}(x) = \text{sinc}_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Dessin.

1- Montrer que $\text{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$.

2- Montrer que sinc est intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Riemann (intégrale impropre).

3- Montrer que :

$$\widehat{1_{[-T,T]}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T \text{sinc}_T(\omega) \qquad (= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin T\omega}{\omega}), \tag{10.17}$$

et, pour $a<b$:

$$\widehat{1_{[a,b]}}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{b-a}{2}\,\mathrm{sinc}_{\frac{b-a}{2}}(\omega)\,e^{-i\frac{a+b}{2}\omega}\qquad \Big(=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\omega)}{\omega}\,e^{-i\frac{a+b}{2}\omega}\Big). \tag{10.18}$$

Réponse. Soit $k\geqslant 0$. Sur $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ on a $\sin x\geqslant 0$ d'où :

$$\frac{2}{(2k+1)\pi}\leqslant\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin(x)}{(2k+1)\pi}\,dx\leqslant\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{sinc}(x)\,dx\leqslant\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin(x)}{2k\pi}\,dx\leqslant\frac{1}{k\pi}.$$

Sur $[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi]$ on a $\sin x\leqslant 0$ d'où :

$$-\frac{2}{(2k+1)\pi}\leqslant\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin(x)}{(2k+1)\pi}\,dx\leqslant\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{sinc}(x)\,dx\leqslant\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin(x)}{(2k+2)\pi}\,dx\leqslant-\frac{1}{(k+1)\pi}.$$

1- Donc $\int_{\mathbb{R}}|\mathrm{sinc}(x)|\,dx=\infty$ car $\sum_{\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=\infty$. Donc sinc n'est pas Lebesgue intégrable.

2- Donc $0\leqslant\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{sinc}(x)\,dx\leqslant\frac{1}{k\pi}-\frac{1}{(k+1)\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{k(k+1)}$. Donc $\int_0^\infty\mathrm{sinc}(x)\,dx<\infty$. Et comme sinc est paire (immédiat), $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{sinc}(x)\,dx<\infty$.

3- $\widehat{1_{[-T,T]}}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}e^{-i\omega t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}]_{-T}^{T}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega T}-e^{+i\omega T}}{-i\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega}2\sin(\omega T)$.

En particulier $\widehat{1_{[-1,1]}}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sinc}(\omega)$.

Et pour $\widehat{1_{[a,b]}}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-i\omega t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega b}-e^{-i\omega a}}{-i\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{\omega}\frac{e^{-i\omega\frac{a+b}{2}}(e^{i\omega\frac{b-a}{2}}-e^{-i\omega\frac{b-a}{2}})}{2i}$. ▪

10.1.3 Remarque : électronique et traitement du signal

Voir le § 14 où on utilisera une autre définition de la transformée de Fourier : $\mathcal{F}_e:f\to\mathcal{F}_e(f)$ donnée par :

$$\mathcal{F}_e(f)(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i2\pi\nu t}\,dt,\quad\text{donc}\quad=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)(2\pi\nu)=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)(\omega)\quad\text{quand}\quad\omega=2\pi\nu. \tag{10.19}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{F}_e(f)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\circ\mathrm{hom}\quad\text{où}\quad\mathrm{hom}(\nu)=2\pi\nu, \tag{10.20}$$

où hom est l'homothétie de rapport 2π qui donne la pulsation à partir de la fréquence (changement d'unité).

10.2 Transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$

10.2.1 La transformée de Fourier est bien définie sur $L^1(\mathbb{R})$

Proposition 10.6 *Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\xi\in\mathbb{R}$ alors l'intégrale*

$$\widehat{f}(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}\,dx \tag{10.21}$$

est bien définie. Et la fonction $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ainsi définie est bornée continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule à l'infini :

$$f\in L^1(\mathbb{R})\quad\Longrightarrow\quad||\widehat{f}||_\infty\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_1,\quad\textit{et}\quad\widehat{f}\in C^0(\mathbb{R};\mathbb{C}),\quad\textit{et}\quad|\widehat{f}(\xi)|\underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow}0. \tag{10.22}$$

NB : en général $\widehat{f}\notin L^1(\mathbb{R})$, cf. (10.15) ou (10.17).

Preuve. L'intégrant $f(x)e^{-ix\xi}$ est majoré en valeur absolue par $|f(x)|$, et $f\in L^1(\mathbb{R})$, donc (théorème de convergence par domination) l'intégrale est bien définie.

$\widehat{f}$ bornée : $|\widehat{f}(\xi)|=|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}\,dx|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_1$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, d'où (10.22).

Continuité de $\widehat{f}$: l'intégrant $f(x)\,e^{-i\xi x}$ est une fonction continue de ξ qui est dominé indépendamment de ξ par $|f(x)|$, avec $f\in L^1(\mathbb{R})$, donc $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Annulation de $\widehat{f}$ à l'infini : il s'agit de montrer : $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$ t.q. $|\xi|>M$, $|\widehat{f}(\xi)|<\varepsilon$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, soit $\varepsilon>0$ et $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $||f-\varphi||_{L^1}<\varepsilon$. Donc (10.22) donne $||\widehat{f}-\widehat{\varphi}||_\infty<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}$, donc $|\widehat{f}(\xi)-\widehat{\varphi}(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$. Puis on utilise le lemme suivant 10.7 avec $M>0$ t.q. pour tout ξ t.q. $|\xi|>M$ on a $|\widehat{\varphi}(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}$. D'où $|\widehat{f}(\xi)|<\varepsilon$ pour tout $|\xi|>M$. Vrai pour tout ε,donc f s'annule à l'infini. ▪

Lemme 10.7 *Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{\varphi}$ s'annule à l'infini : $\widehat{\varphi}(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

(Mais pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\widehat{\varphi}$ n'est jamais à support compact quand φ non nulle).

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, et, par intégration par parties, sachant $\varphi(x) = 0$ dans un voisinage de l'infini,

$$|\sqrt{2\pi}\widehat{\varphi}(\xi)| \overset{(10.12)}{=} |\int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx| = |-\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,dx + 0| = \frac{1}{|\xi|}\widehat{\varphi'}(\xi) \overset{(10.22)}{\leqslant} \frac{1}{|\xi|}||\widehat{\varphi'}||_\infty \underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad (10.23)$$

car φ' est continue à support compact, donc φ' est bornée.

(Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$, alors $\widehat{\varphi}$ n'est pas à support compact : voir prop. 13.9.) ∎

En revanche, $y \to e^{-iy}$ n'est ***pas*** dans $L^2(\mathbb{R})$, et donc on ne peut ***pas*** écrire $\mathcal{F}(f)(\xi) = (e^{-i\xi\cdot}, f(\cdot))_{L^2}$!

Exercice 10.8 Montrer que la transformée de Fourier conserve la parité : dans $L^1(\mathbb{R})$, si f est paire alors $\widehat{f}$ est paire, et si f est impaire alors $\widehat{f}$ est impaire, et les opérateurs $\check{}$ et $\hat{}$ commutent :

$$\check{\widehat{f}} = \widehat{\check{f}}. \quad (10.24)$$

Réponse. $\widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{+ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(-y)e^{-iy\xi}\,dy = \begin{cases} \widehat{f}(\xi) \text{ si } f \text{ est paire} \\ -\widehat{f}(\xi) \text{ si } f \text{ est impaire} \end{cases}.$

Et $\check{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(-y)e^{-iy\xi}\,dx = \widehat{\check{f}}(\xi)$. ∎

Corollaire 10.9 *La fonctionnelle $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \to L^\infty(\mathbb{R}) \\ \quad f & \mapsto \mathcal{F}(f) = \widehat{f} \end{cases} \quad (10.25)$$

est linéaire et continue de $(L^1(\mathbb{R}), ||.||_1)$ dans $(L^\infty(\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, cf. (10.22) :

$$(||\mathcal{F}(f)||_\infty =) \quad ||\widehat{f}||_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_1. \quad (10.26)$$

Preuve. Dans (10.25) la linéarité de $\mathcal{F}$ est évidente : $\mathcal{F}(f + \lambda g) = \mathcal{F}(f) + \lambda\mathcal{F}(g)$ dès que f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ par linéarité de l'intégrale. Et (10.26) est donné par (10.22).

$\mathcal{F}$ étant linéaire, $\mathcal{F}$ est continue ssi $\exists C > 0$ t.q. $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ on a $||\widehat{f}||_\infty \leqslant C||f||_1$: vrai, cf. (10.22). ∎

10.2.2 Remarque sur $L^1(\mathbb{R})$, et lemme

Avoir $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'implique pas $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

Exemple : $f(x) = \sum_{n=1}^\infty n 1_{[n,n+\frac{1}{n^3}]}$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, et donc $f \in L^1(\mathbb{R})$, avec $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a cependant :

Lemme 10.10 *Si f **et** f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Preuve. Comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\int_{A_\varepsilon}^\infty |f'(x)|\,dx < \varepsilon$, et donc :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall x > A_\varepsilon,\ \int_{A_\varepsilon}^x |f'(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Donc, à ε fixé, et A_ε fixé en conséquence, on en déduit $|\int_{A_\varepsilon}^x f'(t)\,dt| < \varepsilon$, i.e. $|f(x) - f(A_\varepsilon)| < \varepsilon$ donc $\big||f(x)| - |f(A_\varepsilon)|\big| < \varepsilon$, donc $|f(A_\varepsilon)| + \varepsilon > |f(x)| > |f(A_\varepsilon)| - \varepsilon$, pour tout $x > A_\varepsilon$. Donc $|f(A_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$: sinon $|f(A_\varepsilon)| - \varepsilon = c > 0$ et $||f||_{L^1(\mathbb{R})} \geqslant \int_{A_\varepsilon}^\infty |f(x)|\,dx \geqslant \int_A^\infty (|f(A_\varepsilon)| - \varepsilon)\,dx \geqslant \int_A^\infty c\,dx = \infty$, faux pour $f \in L^1(\mathbb{R})$. Et donc que $|f(x)| < 2\varepsilon$, ce $\forall x > A_\varepsilon$. Et donc $f(x) \longrightarrow_{x\to\infty} 0$. ∎

10.2.3 Notation $\overline{\mathcal{F}}$

On note :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{+i\xi x}\, d\xi = \widehat{f}(-\xi) \qquad (= \check{\widehat{f}}(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)), \tag{10.27}$$

où $\overline{\mathcal{F}}$ fait référence à la conjugaison : $\overline{e^{-i\xi x}} = e^{i\xi x}$; notations essentiellement utilisée pour f à valeurs réelles (sinon ambiguïté) car alors $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$.

Un modification triviale de la proposition 10.9 montre que $\overline{\mathcal{F}}$ est définie sur $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

On verra au § 11.5 que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ quand ça a un sens (e.g. pour les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$).

Exercice 10.11 Vérifier que, pour $g \in L^1(\mathbb{R})$ (donc à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned}
&\bullet\ (\overline{\widehat{g}} =) \quad \overline{\mathcal{F}}(g) = \mathcal{F}(\check{g}) \quad (= \widehat{\check{g}}), \quad \text{et} \quad (\overline{\widehat{\check{g}}} =) \quad \overline{\mathcal{F}}(\check{g}) = \mathcal{F}(g) \quad (= \widehat{g}),\\
&\bullet\ (\widehat{\overline{\check{g}}} =) \quad \mathcal{F}(\check{\overline{g}}) = \overline{\mathcal{F}(g)} \quad (= \overline{\widehat{g}}), \quad \text{et} \quad (\widehat{\overline{g}} =) \quad \mathcal{F}(\overline{g}) = \overline{\mathcal{F}(\check{g})} \quad (= \overline{\widehat{\check{g}}}).
\end{aligned} \tag{10.28}$$

Réponse. On a pour $\xi \in \mathbb{R}$:
$\mathcal{F}(\check{g})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(-x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{i\xi x}\, dx = \overline{\mathcal{F}}(g)(\xi)$. D'où $\overline{\mathcal{F}}(g) = \overline{\mathcal{F}}(\check{g}) = \widehat{\check{g}} = \widehat{g}$. Puis
$\mathcal{F}(\overline{\check{g}})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\check{g}}(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(x)\, e^{+i\xi x}\, dx} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\xi y}\, dy} = \overline{\mathcal{F}(g)}$. ∎

10.3 Dérivation et produit

Si $I : x \in \mathbb{R} \to I(x) = x \in \mathbb{R}$ est la fonction identité sur $\mathbb{R}$, alors, si x est le nom donné à la variable, on note $If =^{\text{noté}} xf$, i.e. xf est la fonction $xf : x \to (If)(x) = xf(x)$ (le nom de la variable est imposé : c'est x).

On a vu que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, cf. (10.22).

Proposition 10.12 *(i) Dérivée de la transformée de Fourier : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est $C^1(\mathbb{R})$ et on a :*

$$\left(\widehat{f}\right)' = -i\, \widehat{(xf)}, \quad \text{i.e.} \quad \widehat{xf} = i\left(\widehat{f}\right)', \quad \text{i.e.} \quad \left(\widehat{f}\right)'(\xi) = -i\widehat{(xf)}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} : \tag{10.29}$$

la transformée de Fourier transforme l'expression algébrique xf en l'expression dérivée $i\left(\widehat{f}\right)'$, et réciproquement.

(ii) Transformée de Fourier de la dérivée : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que f est dérivable et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{f'} = i\xi\, \widehat{f}, \quad \text{i.e.} \quad \xi\, \widehat{f} = -i\, \widehat{f'}, \quad \text{i.e.} \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi\, \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} : \tag{10.30}$$

la transformée de Fourier transforme la dérivée f' est en l'expression algébrique $\xi\, \widehat{f}$.

(iii) Translatées : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors :

$$\begin{cases} \widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi}\, \widehat{f}(\xi), \\ \tau_a \widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{iax} f}(\xi). \end{cases} \tag{10.31}$$

(La "transformée de Fourier de la translatée" induit un changement de phase de la transformée de Fourier.)

Preuve. Avec le théorème de la convergence dominée pour (i) et par intégration par parties pour (ii) :

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ix\xi}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)(-i\xi) e^{-ix\xi}\, dx + [f(x) e^{-ix\xi}]_{-\infty}^{\infty} \Big) = i\xi\, \widehat{f}(\xi) + 0,$$

car f et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ impliquent f s'annule à l'infini, cf. lemme 10.10. (Quand on disposera de la transformation de Fourier inverse alors (10.30) se déduira de (10.29) et réciproquement.)

Puis

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\, e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-i(y+a)\xi}\, dy = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi), \tag{10.32}$$

et de même :

$$\tau_a \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix(\xi-a)}\, dx = \mathcal{F}(f(x)\, e^{ixa})(\xi). \tag{10.33}$$

∎

Exercice 10.13 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Exprimer $(\widehat{\varphi'})'$ en fonction de $\widehat{\varphi}$.

Réponse.

$$(\widehat{\varphi'})'(\xi) = (i\xi\widehat{\varphi})'(\xi) = i\widehat{\varphi}(\xi) + i\xi\widehat{\varphi}'(\xi) = i\widehat{\varphi}(\xi) + \xi\widehat{x\varphi}(\xi). \tag{10.34}$$

∎

10.4 Gaussiennes : conservées, étalées, concentrées

Les gausiennes sont les fonctions positives (très utiles dans nombreux domaines) définies pour $a > 0$ et $c \in \mathbb{R}^*$ par

$$x \in \mathbb{R} \to ce^{-ax^2}, \quad \text{et on note} \quad \chi_a(x) = e^{-ax^2}. \tag{10.35}$$

La "masse" de χ_a vaut

$$||\chi_a||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{10.36}$$

En effet : $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx\right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-ar^2} r dr d\theta = 2\pi[-\frac{1}{2a}e^{-ar^2}]_0^\infty = \frac{\pi}{a}$.

Proposition 10.14 *Soit $a > 0$. Par Fourier, une gaussienne est transformée en une gaussienne :*

$$\widehat{\chi_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\chi_{\frac{1}{4a}}(\xi), \quad \textit{noté} \quad \widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \tag{10.37}$$

Et la masse de la transformée $\widehat{\chi_a}$ est indépendante de a :

$$||\widehat{\chi_a}||_{L^1} = \sqrt{2\pi}. \tag{10.38}$$

En particulier $\chi_{\frac{1}{2}}$ (donc $\chi_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$) est "conservée" (c'est un "point central") :

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \textit{i.e.} \quad \widehat{\chi_{\frac{1}{2}}} = \chi_{\frac{1}{2}}, \quad \textit{noté} \quad \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \tag{10.39}$$

et $\chi_{\frac{1}{2}}$ est appelée la gaussienne réduite.

Dessin : si $a < \frac{1}{2}$ alors χ_a est "plus étalée" que $\chi_{\frac{1}{2}}$, et la transformée de Fourier $\widehat{\chi_a}$ est "plus concentrée" que $\chi_{\frac{1}{2}}$; et si $a > \frac{1}{2}$ alors χ_a est "plus concentrée" que $\chi_{\frac{1}{2}}$, et la transformée de Fourier $\widehat{\chi_a}$ est "plus étalée" que $\chi_{\frac{1}{2}}$. (Cas particulier de la propriété d'étalement et de concentration par Fourier, voir (10.49).)

Preuve. On a $\chi_a'(x) = -2ax\chi_a(x)$, donc χ_a est solution de l'équation différentielle homogène

$$\chi_a{}'(x) + 2a\,x\,\chi_a(x) = 0. \tag{10.40}$$

La transformée de Fourier à cette équation donne, cf. (10.29) et (10.30),

$$i\xi\,\widehat{\chi_a}(\xi) + 2ai\,(\widehat{\chi_a})'\,(\xi) = 0, \tag{10.41}$$

Donc $\widehat{\chi_a}$ vérifie l'équation différentielle homogène

$$\widehat{\chi_a}{}'(\xi) + \frac{1}{2a}\,\xi\,\widehat{\chi_a}(\xi) = 0 \tag{10.42}$$

de même type que χ_a, cf. (10.40), donc (unicité de la solution pour une équation différentielle Lipschitzienne avec condition initiale)

$$\widehat{\chi_a}(\xi) = ce^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \tag{10.43}$$

Et on a $\widehat{\chi_a}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,e^0\,dx =^{(10.36)} \frac{1}{\sqrt{2a}}$, D'où (10.37).

Et $||\widehat{\chi_a}||_{L^1} =^{(10.37)} \frac{1}{\sqrt{2a}}||\chi_{\frac{1}{4a}}|| =^{(10.36)} \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4a}}} = \sqrt{2\pi}$. ∎

Proposition 10.15 *Les gaussiennes χ_ε données par $\chi_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2}$ vérifient :*

$$\chi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} 1_{\mathbb{R}} \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \qquad \textit{noté} \qquad e^{-\varepsilon x^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} 1_{\mathbb{R}} \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{10.44}$$

étalement à la limite $\varepsilon \to 0$ vers la fonction constantes $1_{\mathbb{R}}$. Et sa transformée de Fourier $\widehat{\chi_\varepsilon}$ vérifie :

$$\widehat{\chi_\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \sqrt{2\pi}\,\delta_0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \qquad \textit{noté} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \sqrt{2\pi}\,\delta_0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{10.45}$$

concentration à la limite vers la masse de Dirac (avec le facteur multiplicatif $\sqrt{2\pi}$ = la masse de $\widehat{\chi_\varepsilon}$).

Preuve. Pour (10.44) : il faut montrer $T_{\chi_\varepsilon} \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} T_{1_\mathbb{R}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et soit $I(\varepsilon) := \langle T_{\chi_\varepsilon}, \varphi\rangle = \int_\mathbb{R} e^{-\varepsilon x^2}\varphi(x)\,dx$, intégrale qui dépend du paramètre ε. L'intégrant est $g(\varepsilon,x) = e^{-\varepsilon x^2}\varphi(x)$; à x fixé, il est continu en $\varepsilon \in \mathbb{R}$; et, $|g(\varepsilon,x)|$ est borné indépendamment de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ par $|\varphi(x)|$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. On peut donc passer à la limite sous le signe $\int$ (théorème de convergence dominée), et $I(\varepsilon) \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} I(0) = \int_\mathbb{R} \varphi(x)\,dx = \int_\mathbb{R} 1_\mathbb{R}(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_{1_\mathbb{R}}, \varphi\rangle$, cqfd. (Ou bien appliquer (10.48).)

Pour (10.45) : il faut montrer $T_{\widehat{\chi_\varepsilon}} \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} \sqrt{2\pi}\delta_0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $I(\varepsilon) := \langle T_{\widehat{\chi_\varepsilon}}, \varphi\rangle = \int_\mathbb{R} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\varphi(x)\,dx$. Ici l'intégrant $f(\varepsilon,x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\varphi(x)$ n'est pas dominée indépendamment de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ par une fonction $\in L^1$. On fait le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}$, donc $dx = \sqrt{2\varepsilon}\,dy$, donc

$$I(\varepsilon) = \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\varphi(\sqrt{2\varepsilon}y)\,dy.$$

L'intégrant $g(\varepsilon,y) = e^{-\frac{y^2}{2}}\varphi(\sqrt{2\varepsilon}y)$ est continu en ε et $\longrightarrow_{\varepsilon\to 0} e^{-\frac{y^2}{2}}\varphi(0)$, et $|e^{-\frac{y^2}{2}}\varphi(\sqrt{2\varepsilon}y)| \leqslant ||\varphi||_\infty e^{-\frac{y^2}{2}}$. D'où $I(\varepsilon) \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} I(0) = \varphi(0)\sqrt{2\pi} = \langle \delta_0, \varphi\rangle\sqrt{2\pi}$, cqfd. (Ou bien appliquer (10.52).) ∎

Exercice 10.16 Vérifier $\widehat{\widehat{\chi_a}} = \chi_a$.

Réponse. Soit $b = \frac{1}{4a}$ et soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}} = \sqrt{b}e^{-bx^2}$. Donc $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2b}\widehat{e^{-bx^2}}(\xi) = \sqrt{2b}\frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}} = e^{-a\xi^2}$. (Heureusement : voir formule d'inversion de Fourier avec ici χ_a paire.) ∎

Exercice 10.17 Calculer $(\widehat{\chi_a})'$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

Réponse. Formellement $(\widehat{\chi_a})'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-ax^2}(-ix)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}(xe^{-ax^2})e^{-ix\xi}\,dx$. Rigoureusement : OK car $x \to xe^{-ax^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Puis IPP, avec $u'(x) = xe^{-ax^2}$ et $v(x) = e^{-ix\xi}$ donc $u(x) = \frac{-1}{2a}e^{-ax^2}$ (à une constante près) et $v'(x) = -i\xi e^{-ix\xi}$: $(\widehat{\chi_a})'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\xi e^{-ix\xi}\,dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{2a}e^{-ax^2}e^{-ix\xi}]_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\xi}{2a}\widehat{\chi_a}(\xi) + 0$. ∎

10.5 Étalement et concentration par Fourier

10.5.1 Changement d'échelle sur l'axe des x à hauteur constante

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit :

$$f_a(x) = f(ax), \quad \text{où donc} \quad f_a(0) = f(0) \text{ altitude conservée en } 0. \tag{10.46}$$

Donc la valeur $f_a(x)$ de f_a en x est égale à la valeur de f en ax. Et la masse de f_a vaut $\int_{x\in\mathbb{R}} f_a(x)\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}} f(ax)\,dx = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\,a\,dt = a\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\,dt = a$ fois la masse de f.

Dessin : exemple : si $f = 1_{[-b,b]}$, alors $f_a = 1_{[-\frac{b}{a},\frac{b}{a}]}$ est dans $[-\frac{b}{a},\frac{b}{a}]$ (car $f_a(x) = 0$ dès que $ax \notin [-b,b]$). Donc :

Pour $a < 1$, la fonction f_a "étale" la fonction f (le support est plus grand).

Pour $a > 1$, la fonction f_a "concentre" la fonction f (le support est plus petit). Dessin.

Proposition 10.18 *Soit $a \neq 0$. Soit f une fonction continue en 0. Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} f(0), \tag{10.47}$$

i.e., f_a "étale f à la limite $a \to 0$" vers la fonction constante $f(0)\,1_\mathbb{R}$. Dessin. D'où la convergence faible :

$$f_a \underset{a\to 0}{\rightharpoonup} f(0)\,1_\mathbb{R} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{10.48}$$

donc au sens $\displaystyle\int_\mathbb{R} f_a(x)\varphi(x)\,dx \underset{a\to 0}{\longrightarrow} f(0)\int_\mathbb{R}\varphi(x)\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. (Ou encore $T_{f_a} \underset{a\to 0}{\rightharpoonup} T_{f(0)\,1_\mathbb{R}}$.)

Preuve. f étant continue en 0, on a $f(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} f(0)$, et donc à x fixé $f(ax) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} f(0)$, d'où (10.47).

Il s'agit de montrer : $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle f_a, \varphi\rangle \longrightarrow_{a\to 0} f(0)\langle 1_\mathbb{R}, \varphi\rangle$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et soit $\beta > 0$ t.q. $\text{supp}\varphi \subset [-\beta,\beta]$. Donc $\langle f_a, \varphi\rangle = \int_{x=-\beta}^{\beta} f(ax)\varphi(x)\,dx$. Soit $g(a,x) = f(ax)\varphi(x)1_{]-\beta,\beta[}(x)$ (l'intégrant). À x fixé, g est continu en a=0 car f l'est. Et $|g(a,x)| \leqslant (\sup\limits_{x\in[-\beta,\beta]} |f(ax)|)||\varphi||_\infty \leqslant (\sup\limits_{y\in[-a\beta,a\beta]} |f(y)|)||\varphi||_\infty$. Et f étant continue en 0, il existe $\eta > 0$, t.q. pour tout $|t| < \eta$, on a $|f(t) - f(0)| < 1$. Et donc pour les a t.q. $|a|\beta < \eta$, on a

$\sup_{t\in[-a\beta,a\beta]} |f(t)| \leqslant |f(0)|+1$, et donc $|g(a,x)| = (|f(0)|+1)||\varphi||_\infty$ pour tout $a \in]-\frac{\eta}{\beta},\frac{\eta}{\beta}[$. Donc φ étant $L^1(\mathbb{R})$, g est dominée par une fonction intégrable indépendante de $a \in]-\frac{\eta}{\beta},\frac{\eta}{\beta}[$. On peut donc passer à la limite sous le signe $\int$ quand $a \to 0$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(ax)\varphi(x)\,dx \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(0)\varphi(x)\,dx$, cqfd. ∴

Proposition 10.19 *(Calcul de $\widehat{f_a}$.) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$\widehat{f_a} = \frac{1}{a}(\widehat{f})_{\frac{1}{a}} \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_a}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\,d\xi. \tag{10.49}$$

Interprétation : pour $a \in]0,1[$, la fonction f_a "étale" f, et sa transformée par Fourier $\widehat{f_a}$ "concentre" $\widehat{f}$ en augmentant sa hauteur, la masse de $\widehat{f_a}$ étant conservée. Et pour $a > 1$, la fonction f_a "concentre" f, et sa transformée par Fourier $\widehat{f_a}$ "étale" $\widehat{f}$ en diminuant sa hauteur, la masse de $\widehat{f_a}$ étant conservée. Dessin.

Preuve. On a :

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(ax)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\frac{\xi}{a}}\,dy = \frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{\xi}{a}). \tag{10.50}$$

D'où $\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f_a}(\xi)\,d\xi = \int_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{\xi}{a})\,d\xi = \int_{u\in\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\,du$. ∴

10.5.2 Changement d'échelle sur l'axe des y à masse constante

Soit $\lambda > 0$, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $m = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx =$ (la masse de f). Soit $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_\lambda(x) = \lambda\, f(\lambda x), \quad \text{où donc} \quad \int_{\mathbb{R}} F_\lambda(x)\,dx = m \quad (= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy). \tag{10.51}$$

Donc F_λ conserve la "masse" $m = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy$ de f, et pour $\lambda > 1$, la fonction F_λ "concentre" et "rehausse" la fonction f (on a $F_\lambda(0) = \lambda f(0)$). Dessin avec $f = 1_{]-1,1[}$ par exemple.

Proposition 10.20 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$F_\lambda \underset{\lambda\to\infty}{\rightharpoonup} m\,\delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{10.52}$$

i.e. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F_\lambda(x)\varphi(x)\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} m\,\varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $J(\lambda) := \int_{\xi\in\mathbb{R}} F_\lambda(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\xi\in\mathbb{R}} f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda})\,dy$. Soit $g(\lambda,y) = f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda}) =$ l'intégrant. À y fixé g est continu en λ (pour $\lambda > 0$) et $g(\lambda,y) \longrightarrow_{\lambda\to\infty} f(y)\varphi(0)$. Avec $|g(\lambda,y)| \leqslant ||\varphi||_\infty|f(y)|$, domination indépendante de λ avec $f \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\xi\in\mathbb{R}} f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda})\,dy = \int_{\xi\in\mathbb{R}} \lim_{\lambda\to\infty} f(y)\varphi(\frac{y}{\lambda})\,dy = \int_{\xi\in\mathbb{R}} f(y)\varphi(0)\,dy = m\varphi(0) = m\delta_0(\varphi)$, cqfd. ∴

Remarque 10.21 Plus loin on calculera la transformée de Fourier de δ_0 (après avoir défini la transformée de Fourier d'une distribution) : "δ_0 est infiniment concentrée", et sa transformée de Fourier est "infiniment étalée" (c'est une "fonction constante"). ∴

10.6 Échange du produit simple et du produit de convolution pour les fonctions

Proposition 10.22 *Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ alors :*

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi), \quad \text{i.e.} \quad \widehat{\varphi * \psi} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\varphi}\,\widehat{\psi}. \tag{10.53}$$

Idem avec $\overline{\mathcal{F}}$. Si de plus $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi\psi \in L^1(\mathbb{R})$, on en déduit :

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi), \quad \text{i.e.} \quad \widehat{\varphi\psi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}. \tag{10.54}$$

Idem avec $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve. (Fubini) La relation (10.53) n'est autre que l'intégrable double d'une fonction à variables séparées :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} \varphi(y)\, \psi(x-y)\, dy\, e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\int_{y\in\mathbb{R}} e^{-iy\xi}\, \varphi(y)\, dy)(\int_{z\in\mathbb{R}} e^{-iz\xi}\, \psi(z)\, dz) = \sqrt{2\pi}\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)
\end{aligned}
\tag{10.55}
$$

le théorème de Fubini étant applicable la fonction $(z,y) \to e^{-i(y+z)\xi}\, \varphi(y)\, \psi(z)$ étant dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Calcul similaire si on remplace $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{F}}$.

Avec les hypothèses données, et une fois qu'on aura vu la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$, cf. prop. 11.16, on en déduit :

$$
\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}) = \sqrt{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi})\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\psi}) = \sqrt{2\pi}\varphi\psi, \tag{10.56}
$$

d'où en appliquant $\mathcal{F}$: $\widehat{\varphi} * \widehat{\psi} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\varphi\psi)$. ∴

11 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas stable par Fourier (une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f}$ n'est pas nécessairement dans $L^1(\mathbb{R})$, voir (10.15) ou (10.17). L. Schwartz a introduit un espace qui est stable et conservé par Fourier, et qui de plus permettra de définir les transformées de Fourier des distributions usuelles comme la masse de Dirac. En particulier on verra que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors f admet bien une transformée de Fourier, que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$, et mieux que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $(L^2(\mathbb{R}), (\cdot,\cdot)_{L^2}) \to (L^2(\mathbb{R}), (\cdot,\cdot)_{L^2})$.

11.1 L'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide

Définition 11.1 L'espace des fonctions à décroissance rapide est l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. φ et toutes ses dérivées décroissent plus vite que toute fraction rationnelle, i.e.

$$
\varphi \in \mathcal{S} \quad \text{ssi} \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \ell \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \exists C_{k\ell} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\varphi^{(\ell)}(x)| < \frac{C_{k\ell}}{|x^k|}. \tag{11.1}
$$

Proposition 11.2 *$\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. Et si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $x^k\varphi^{(\ell)} \in \mathcal{S}$ pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.*

Preuve. C'est trivialement un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}$ et $k,\ell \in \mathbb{N}$, posons $\psi = x^k\varphi^{(\ell)}$. Soit $m,n \in \mathbb{N}$. On a $\psi^{(n)} = (x^k\varphi^{(\ell)})^{(n)} = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (x^k)^{(i)}\varphi^{(l+n-i)} = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^{k-i}\varphi^{(l+n-i)}$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour tout i (Leibniz). D'où $x^m\psi^{(n)} = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^{k-i+m}\varphi^{(l+n-i)}$ D'où $||x^m\psi^{(n)}||_\infty \leqslant \sum_{i=0}^n \alpha_i C_{k-i+m,l+n-i} < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ à n et m fixé qcq. D'où $\psi \in \mathcal{S}$. ∴

Exercice 11.3 Montrer les équivalences : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{S}$ ssi :

$$
\forall k,\ell \in \mathbb{N},\ \exists C_{k\ell} > 0 : \forall x \in \mathbb{R},\ |x^k\varphi^{(\ell)}(x)| < C_{k\ell}. \tag{11.2}
$$

i.e. ssi :

$$
\forall k,\ell \in \mathbb{N},\ \exists C_{k\ell} > 0,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(\ell)}(x)| < C_{k\ell}, \quad \text{noté} \quad ||x^k\varphi^{(\ell)}||_\infty < C_{k\ell}, \tag{11.3}
$$

i.e. ssi :

$$
\forall k,\ell \in \mathbb{N},\ ||x^k\varphi^{(\ell)}||_\infty < \infty. \tag{11.4}
$$

i.e. ssi :

$$
\forall k,\ell \in \mathbb{N},\ \exists C_{k\ell} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sqrt{1+x^2}^k\varphi^{(\ell)}(x)| < C_{k\ell}, \tag{11.5}
$$

i.e. ssi :

$$
\forall k,\ell \in \mathbb{N},\ \exists C_{k\ell} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(\ell)}(x)| < \frac{C_{k\ell}}{(\sqrt{1+x^2})^k}, \tag{11.6}
$$

Réponse. Exercice facile : $1 + x^{2k} \leqslant (1+x^2)^k$. ∴

11.2 Premiers exemples

Exemple 11.4 Prototype d'une fonction à décroissance rapide : $\varphi(x) = e^{-x^2}$ (décroissance exponentielle). ▟

Exemple 11.5 La fonction $\gamma_1 * e^{-|x|}$ (régularisée de la fonction à décroissance exponentielle) est dans $\mathcal{S}$. ▟

Exemple 11.6 La fonction $f : x \to f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}$ (décroissance trop lente à l'infini). En effet, $\sup_{\mathbb{R}} |x^3 \frac{1}{(1+x^2)}| = \infty$, cf. (11.3). De même, aucune fonction rationnelle (non nulle) n'appartient à $\mathcal{S}$, de même que les polynômes non nuls et e^x, e^{x^2}... ▟

Exercice 11.7 Montrer : si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\psi \in \mathcal{S}$, alors $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$.

Réponse. On a $\varphi * \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, cf. prop 2.19, et $(\varphi * \psi)^{(\ell)} = \varphi * \psi^{(\ell)}$, cf. (2.21). Donc, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$|x^k(\varphi * \psi)^{(\ell)}(x)| = |x^k \int_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t)\psi^{(\ell)}(x-t)\,dt| \leqslant ||x^k\psi^{(\ell)}||_\infty \int_{u\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|\,dt < \infty.$$

▟

Exercice 11.8 Montrer : si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors pour tout $p \in [1, \infty]$ on a $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$.

Réponse. Pour $p = \infty$, avec (11.3) on a $||x^0\varphi^{(0)}||_\infty \leqslant C_{00} < \infty$, donc $||\varphi||_\infty < \infty$, donc $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Pour $p \in [1, \infty[$, avec (11.3) on a : la fonction $(1 + x^2)\varphi$ est dans $\in \mathcal{S}$, cf. prop 11.2, avec $|(1 + x^2)\varphi(x)| \leqslant C_{00} + C_{20}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_{00}+C_{20}}{1+x^2}$, d'où $|\varphi(x)|^p \leqslant (\frac{C_{00}+C_{20}}{1+x^2})^p$, d'où $|\varphi|^p \in L^1(\mathbb{R})$ pour $p \geqslant 1$. ▟

11.3 * Métrique sur $\mathcal{S}$ et densités

11.3.1 Topologie métrique sur $\mathcal{S}$

Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $k, \ell \in \mathbb{N}$, si $||x^k\varphi^{(\ell)}||_\infty < \infty$, alors on note :

$$\tilde{p}_{k,\ell}(\varphi) = ||x^k\varphi^{(\ell)}||_\infty. \tag{11.7}$$

Donc

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, \ell \in \mathbb{N},\ \tilde{p}_{k,\ell}(\varphi) < \infty\}. \tag{11.8}$$

Exercice 11.9 Vérifier que les $\tilde{p}_{k,\ell}$ définissent des semi-normes.

Réponse. On sait que $||.||_\infty$ est une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$, et on a $\mathcal{S} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ (car $||\varphi||_\infty = p_{0,0}(\varphi) < \infty$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$). Donc $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{S}$. D'où :

$\tilde{p}_{k,\ell}(\varphi) \geqslant 0$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$: immédiat.
$\tilde{p}_{k,\ell}(\lambda\varphi) = |\lambda| p_{k,\ell}(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$: immédiat.
$\tilde{p}_{k,\ell}(\varphi + \psi) \leqslant p_{k,\ell}(\varphi) + p_{k,\ell}(\psi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$: immédiat. ▟

On peut montrer qu'il n'existe pas de norme qui rende $\mathcal{S}$ complet (admis). Mais il y a une distance qui le fait, à savoir :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k,\ell} \frac{1}{2^{k+\ell}} \min(1, \tilde{p}_{k,\ell}(\psi - \varphi)). \tag{11.9}$$

(Vérification de $d(\cdot, \cdot)$ est une distance sur $\mathcal{S}$: immédiat.)

On admet que $\mathcal{S}$ muni de cette distance est un espace métrique complet. Et donc les suites de Cauchy dans $\mathcal{S}$ sont convergentes dans $\mathcal{S}$.

L'utilisation de cette distance n'est pas très pratique, pour les propriétés de convergence ou de continuité, et on utilise en fait les semi-normes $\tilde{p}_{k,\ell}$. Par exemple $(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathcal{S}$ qui converge dans $\mathcal{S}$ vers $\varphi \in \mathcal{S}$ s'écrit $d(\varphi_n, \varphi) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, ou de manière équivalente :

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \tilde{p}_{k,\ell}(\varphi - \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{11.10}$$

i.e., $\forall k, \ell \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$, $\tilde{p}_{k,\ell}(\varphi - \varphi_n) < \varepsilon$.

Pour simplifier les calculs, on peut aussi considérer la famille de normes $(p_{k,\ell})_{0\leqslant k,\ell<\infty}$ définies sur $\mathcal{S}$ par :

$$p_{k,\ell}(\varphi) = \sum_{\alpha\leqslant k,\beta\leqslant\ell} \tilde{p}_{k,\ell}(\varphi) \qquad (= \sum_{\alpha\leqslant k,\beta\leqslant\ell} ||x^\alpha\varphi^{(\beta)}||_\infty). \tag{11.11}$$

La topologie induite par $(p_{k,\ell})_{0\leqslant k,\ell<\infty}$ est la même que celle induite par $(\tilde{p}_{k,\ell})_{0\leqslant k,\ell<\infty}$ (les mêmes ouverts).

Exercice 11.10 Vérifier que les $p_{k,\ell}$ définissent bien des normes.

Réponse. Les $p_{k,\ell}$ sont des semi-normes : immédiat car somme finie de semi-normes. Et $p_{k,\ell}(\varphi) = 0$ implique en particulier $\tilde{p}_{0,0}(\varphi) = 0$, soit $||\varphi||_\infty = 0$, donc $\varphi = 0$. ∴

Exercice 11.11 Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, montrer : $p_{k,\ell}(x\varphi) \leqslant p_{k+1,\ell}(\varphi)$ et $p_{k,\ell}(\varphi') = p_{k,\ell+1}(\varphi)$ (très utile).

Réponse. Immédiat. ∴

11.3.2 Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}$

Proposition 11.12 *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{S}, d(\cdot,\cdot))$: si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors il existe une suite $(\varphi_j)_{\mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q.*

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad p_{k,\ell}(\varphi - \varphi_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{11.12}$$

i.e., $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^2$, $p_{k,\ell}(\varphi - \psi) < \varepsilon$.

Preuve. Par troncature et régularisation. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ donnée, et soit $\theta_1 = 1_{[-1,1]} * \gamma_1$, voir proposition 2.24, fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-1, 1]$ et à support dans $[-2, 2]$ et telle que $0 \leqslant \theta_1(x) \leqslant 1$. On construit la suite (θ_j) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-j, j]$:

$$\theta_j(x) = \theta_1(\frac{x}{j}), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11.13}$$

En particulier $\theta_i = 1$ sur $[-j, j]$. Soit la suite $\varphi_j = \varphi\theta_j$. On a trivialement $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout j. Montrons $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathcal{S}$, i.e. pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ montrons $||x^k(\varphi - \varphi_j)^{(\ell)}||_\infty \to 0$ quand $j \to \infty$.

On a $\varphi(x) - \varphi_j(x) = 0$ sur $[-j, j]$ (par construction) et $\varphi(x) - \varphi_j(x) = \varphi(x)$ pour x à l'extérieur de $[-2j, 2j]$, donc $\varphi - \varphi_j$ est à décroissance rapide. On a $(\varphi - \varphi_j)(x) = \varphi(x)(1 - \theta_1(\frac{x}{j}))$, et la formule de Leibniz donne :

$$\begin{aligned}
(\varphi - \varphi_j)^{(\ell)}(x) &= \sum_{\gamma=0}^{\ell} \binom{\ell}{\gamma} \varphi^{(\ell-\gamma)}(x)\,(1 - \theta_1(\frac{x}{j}))^{(\gamma)} \\
&= \varphi^{(\ell)}(x)(1 - \theta_1(\frac{x}{j})) - \sum_{\gamma=1}^{\ell} \binom{\ell}{\gamma} \varphi^{(\ell-\gamma)}(x)\,\frac{1}{j^\gamma}\theta_1^{(\gamma)}(\frac{x}{j}) \\
&= \varphi^{(\ell)}(x)(1 - \theta_j(x)) - \frac{1}{j} \sum_{\gamma=1}^{\ell} \binom{\ell}{\gamma} \varphi^{(\ell-\gamma)}(x)\,\frac{1}{j^{\gamma-1}}\theta_1^{(\gamma)}(\frac{x}{j})
\end{aligned} \tag{11.14}$$

D'où on déduit que (après multiplication par x^k et avec $0 \leqslant 1 - \theta_j \leqslant 1$ et $1 - \theta_j = 0$ sur $[-j, j]$) :

$$||x^k(\varphi - \varphi_j)^{(\ell)}||_\infty \leqslant \max_{|x|\geqslant j} |x^k\varphi^{(\ell)}| + \frac{1}{j} C(\sum_{\gamma=1}^{\ell} ||x^k\varphi^{(\ell-\gamma)}||_\infty) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{11.15}$$

où $C > 0$ qui contient les $\binom{\ell}{\gamma}$ et les $||\theta_1^{(\gamma)}||_\infty$ pour $1 \leqslant \gamma \leqslant \ell$. Et pour $k, \ell \in \mathbb{N}$, $p_{k,\ell}$ est une somme finie de termes qui tendent vers 0 et tend donc vers 0. ∴

11.3.3 $\mathcal{S}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$

Proposition 11.13 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Et $\mathcal{S}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

(Et c'est trivialement faux pour $p = \infty$: prendre $f = 1_\mathbb{R} \in L^\infty(\mathbb{R})$ qui ne peut être approchée en norme $||.||_\infty$ par une fonction qui s'annule à l'infini.)

Preuve. Soit $k, \ell \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $x^k\varphi^{(\ell)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (produit de fonctions C^∞ toutes à support inclus dans suppφ). En particulier $x^k\varphi^{(\ell)}$ est continue dans $\mathbb{R}$ à support compact $\subset$ suppφ, donc $||x^k\varphi^{(\ell)}||_\infty < \infty$, et (11.3) est vérifiée. Donc $\varphi \in \mathcal{S}$.

Et si $\varphi \in S$ alors $|\varphi(x)| \leqslant C_{00}$ cf. (11.1), d'où $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$, et $|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_{20}}{1+x^2}$ pour tout $x \neq 0$, cf. (11.6), d'où $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

On a $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$ (exercice 11.8). Et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, voir prop. 2.34, donc $\mathcal{S}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \text{t.q.} \quad ||f - \varphi||_{L^p} < \varepsilon.$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$, cela reste vraie si on remplace $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $\exists \varphi \in \mathcal{S}$. ∴

11.4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$: on a $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Ayant $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$, proposition 11.13, on peut en particulier appliquer la proposition 10.12 :

Proposition 11.14 *Si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $x^k\varphi^{(\ell)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, et on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \widehat{\varphi'}(\xi) = i\xi\widehat{\varphi}(\xi), & \widehat{\varphi^{(\ell)}}(\xi) = (i\xi)^\ell\widehat{\varphi}(\xi), \\ (\widehat{\varphi})'(\xi) = -i\widehat{x\varphi}(\xi), & (\widehat{\varphi})^{(k)}(\xi) = (-i)^k\widehat{x^k\varphi}(\xi), \\ \widehat{\tau_a\varphi}(\xi) = e^{-ia\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi), & \\ \tau_a\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{e^{iax}\varphi}(\xi). & \end{cases} \tag{11.16}$$

(La dérivation est devenue puissance polynomiale et réciproquement.)

Preuve. Démontrées dans la prop. 10.12 dans les cas $k = \ell = 1$. Puis récurrence immédiate. ∎

Proposition 11.15 *Si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, i.e. $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.*

Preuve. De (11.16) on déduit :

$$|\xi^k\widehat{\varphi}^{(\ell)}| = |\xi^k\,\widehat{x^\ell\varphi}| = |\widehat{(x^\ell\varphi)^{(k)}}\,| \tag{11.17}$$

Et $\psi = (x^\ell\varphi)^{(k)} \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$, donc $\widehat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R})$, donc $|\xi^k\widehat{\varphi}^{(\ell)}|$ borné. Vrai pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, donc $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. ∎

11.5 Transformée inverse dans $\mathcal{S}$

11.5.1 Transformation inverse $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{S}$

Connaissant $\varphi \in \mathcal{S}$, on peut calculer $\mathcal{F}(\varphi) = \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Réciproquement :

Proposition 11.16 *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est bijective de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \check{} =^{\text{noté}} \overline{\mathcal{F}}$, i.e., pour tout $\psi \in \mathcal{S}$,*

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi) = \mathcal{F}(\check{\psi}) = \hat{\check{\psi}} = \check{\hat{\psi}}, \tag{11.18}$$

i.e. dans $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \psi(\xi)\,e^{+ix\xi}\,d\xi = (\mathcal{F}\psi)(-x) = \widehat{\psi}(-x) = \check{\hat{\psi}}(x) = \hat{\check{\psi}}(x) \tag{11.19}$$

($\check{}$ et $\hat{}$ commutent cf. (10.24)), donc

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \check{} = \check{} \circ \mathcal{F} \overset{\text{noté}}{=} \overline{\mathcal{F}}. \tag{11.20}$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\varphi = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{\varphi})) = \mathcal{F}(\check{\hat{\varphi}}) = \hat{\hat{\check{\varphi}}} = \check{\hat{\hat{\varphi}}}, \quad \text{i.e.} \quad \check{\varphi} = \hat{\hat{\varphi}}, \tag{11.21}$$

i.e. dans $\mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\,e^{+ix\xi}\,d\xi = \hat{\hat{\varphi}}(-x). \tag{11.22}$$

Preuve. Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $\mathcal{F}(\varphi) = \widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}(\widehat{\varphi}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))$ est bien défini.

Montrons que $(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(\varphi)(-x) = \varphi(x)$, i.e. $\mathcal{F}(\widehat{\varphi})(-x) = \varphi(x)$. On a :

$$\mathcal{F}(\widehat{\varphi}\,)(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\,e^{+ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\Big(\int_{y\in\mathbb{R}} \varphi(y)\,e^{-iy\xi}\,dy\Big)\,e^{+ix\xi}\,d\xi. \tag{11.23}$$

Mais on ne peut pas inverser les signes $\int$, car $\int_{\xi\in\mathbb{R}} e^{+i(x-y)\xi}\,d\xi$ n'est pas définie.

On raisonne comme pour les distributions : à x fixé, on remplace la fonction $\xi \to e^{+ix\xi}$ par la fonction $\xi \to e^{+ix\xi}\chi_\varepsilon(\xi)$ où

$$\text{pour } \varepsilon > 0,\ \chi_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon\xi^2} \overset{\text{noté}}{=} \chi(\varepsilon,\xi), \quad \text{et} \quad \chi_0(\xi) = 1 = \chi(0,\xi), \tag{11.24}$$

(on sait que $\chi_\varepsilon \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} 1_\mathbb{R}$ cf. (10.44)), i.e. on pose :

$$\text{pour } \varepsilon > 0,\ I_x(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\,\chi(\varepsilon,\xi)\,e^{+ix\xi}\,d\xi, \quad \text{et} \quad I_x(0) = \mathcal{F}(\widehat{\varphi}\,)(-x). \tag{11.25}$$

On vérifie que (x est fixé) :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_x(\varepsilon) = I_x(0) = \mathcal{F}(\widehat{\varphi})(-x), \tag{11.26}$$

par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue : l'intégrant est $h(\varepsilon,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\chi(\varepsilon,\xi)\,e^{+ix\xi}$, on a h dominé par $|\widehat{\varphi}(\xi)|$ indépendamment de ε avec $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ (hypothèse), et à ξ fixé, $h_\xi : \varepsilon \in [0,1] \to h_\xi(\varepsilon) = h(\varepsilon,\xi)$ est continu dans $[0,1]$ car $\chi_\xi : \varepsilon \in \mathbb{R} \to \chi_\xi(\varepsilon) = e^{-\varepsilon\xi^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Mais aussi, grâce à Fubini qu'on peut maintenant appliquer, et sachant $\widehat{\chi_\varepsilon} \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} \sqrt{2\pi}\delta_0$ cf. (10.45), on a :

$$\begin{aligned}
I_x(\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\Big(\int_{y\in\mathbb{R}}\varphi(y)\,e^{-iy\xi}\,dy\Big)\chi_\varepsilon(\xi)\,e^{+ix\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{y\in\mathbb{R}}\varphi(y)\Big(\int_{\xi\in\mathbb{R}}\chi_\varepsilon(\xi)\,e^{-i(y-x)\xi}\,d\xi\Big)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y\in\mathbb{R}}\widehat{\chi_\varepsilon}(y{-}x)\,\varphi(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z\in\mathbb{R}}\widehat{\chi_\varepsilon}(z)\,\varphi(z{+}x)\,dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle\widehat{\chi_\varepsilon}(z),\varphi(z{+}x)\rangle_{dz} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle\sqrt{2\pi}\delta_0,\varphi(z{+}x)\rangle_{dz} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0{+}x) = \varphi(x),
\end{aligned} \tag{11.27}$$

dès que φ est continue en x. Donc $I_x(\varepsilon) \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} \varphi(x)$, donc $I_x(0) = \varphi(x)$, avec $I_x(0) = \mathcal{F}(\widehat{\varphi})(-x)$. ∎

11.5.2 Égalité de Parseval et isométrie $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{S})$

Lemme 11.17 *Si φ et ψ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors :*

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\widehat{\psi}(x)\,dx = \int_{\xi\in\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{11.28}$$

En particulier, si $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$ alors :

$$(\varphi,\overline{\widehat{\psi}})_{L^2} = (\widehat{\varphi},\overline{\psi})_{L^2}. \tag{11.29}$$

Preuve. (11.28) est une égalité entre intégrales doubles : il faut montrer :

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\psi(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi)\,dx = \int_{\xi\in\mathbb{R}}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx)\psi(\xi)\,d\xi.$$

Et l'intégrant $(x,\xi) \to \varphi(x)\psi(\xi)e^{-ix\xi}$ est majoré par la fonction à variables séparées $(x,\xi) \to |\varphi(x)\psi(\xi)|$, avec $\varphi,\psi \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\varphi\otimes\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$: on peut appliquer le théorème de Fubini, d'où (11.28). Et $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, d'où (11.29). ∎

Théorème 11.18 *On a l'égalité de Parseval : conservation du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$ par Fourier : pour tout $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$:*

$$(\varphi,\psi)_{L^2} = (\widehat{\varphi},\widehat{\psi})_{L^2}, \qquad \textit{i.e.} \qquad \int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx = \int_{\xi\in\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(\xi)\,\overline{\widehat{\psi}}(\xi)\,d\xi. \tag{11.30}$$

Donc $\mathcal{F} : (\mathcal{S},||.||_{L^2}) \to (\mathcal{S},||.||_{L^2})$ est une isométrie.

Et on verra (grâce aux distributions tempérées) que cette relation est conservée dans $L^2(\mathbb{R})$: $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est une isométrie.

En particulier, l'énergie (la norme) est conservée par transformée de Fourier : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$||\varphi||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\widehat{\varphi}||_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \textit{i.e.} \qquad \int_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|^2\,dx = \int_{\xi\in\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi. \tag{11.31}$$

Preuve. Soit $g = \mathcal{F}^{-1}(\psi)$ où donc $\widehat{g} = \psi$ et $\widehat{\psi} = \widehat{\widehat{g}} = \breve{g}$. On a $g \in \mathcal{S}$ car $\psi \in \mathcal{S}$. Montrer (11.30) est alors équivalent à montrer que $(\varphi,\widehat{g})_{L^2} = (\widehat{\varphi},\breve{g})_{L^2}$. Vrai car :

$$(\widehat{\varphi},\breve{g})_{L^2} = \int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(x)\overline{\breve{g}}(x)\,dx \underset{\text{cf. (11.28)}}{=} \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\overline{\widehat{\widehat{g}}}(x)\,dx \underset{\text{cf. (10.28)}}{=} \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\overline{\widehat{g}}(x)\,dx = (\varphi,\widehat{g})_{L^2}.$$

∎

11.5.3 Application : relations d'incertitude d'Heisenberg

En mécanique quantique, ce sont les mesures de l'énergie $W_{x_0}(f)$ et $W_{\xi_0}(\widehat{f})$ qui permettent de situer la particule (probabilité de présence $|f|^2$ en x_0) ou de connaître sa quantité de mouvement (probabilité de présence $|\widehat{f}|^2$ en ξ_0), où :

$$W_{x_0}(f)^2 = \frac{\int_{x\in\mathbb{R}}(x-x_0)^2\,|f(x)|^2\,dx}{\int_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx} \quad \text{et donc} \quad W_{\xi_0}(\widehat{f})^2 = \frac{\int_{\xi\in\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}{\int_{\xi\in\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}. \tag{11.32}$$

En d'autres termes, $W_{x_0}(f)^2$ est une mesure de la dispersion d'énergie de f "en espace" au voisinage de x_0, et $W_{\xi_0}(\widehat{f})^2$ est une mesure de la dispersion d'énergie de f en "quantité de mouvement" au voisinage de ξ_0. Si x_0 et ξ_0 sont les centres de gravité de $|f|^2$ et de $|\widehat{f}|^2$, alors W_{x_0} et W_{ξ_0} sont les écarts types de $|f|^2$ et de $|\widehat{f}|^2$. (On rappelle que le centre de gravité d'une fonction g est le réel x_0 tel que $\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)g(x)\,dx = 0$.)

Remarque 11.19 En traitement du signal $x = t$ est le temps et $\xi = \omega$ est une fréquence. Et on obtient une relation entre la dispersion en temps et en fréquence. Et W_{x_0} correspond à un décalage en temps, alors que W_{ξ_0} correspond à un décalage en fréquence. ▪

Proposition 11.20 *(Principe d'incertitude) Quand $f \in \mathcal{S}$, on a pour tout $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$:*

$$W_{x_0}(f)W_{\xi_0}(\widehat{f}) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{11.33}$$

Et ce résultat est conservé dès que f vérifie $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $xf \in L^2(\mathbb{R})$.

(C'est un résultat de "étalement-concentration par Fourier" : si $W_{x_0}(f)$ est concentré, alors $W_{\xi_0}(\widehat{f})$ est étalé, et si $W_{x_0}(f)$ est étalé, alors $W_{\xi_0}(\widehat{f})$ est concentré, et on mesure le minimum du produit $W_{x_0}(f)W_{\xi_0}(\widehat{f})$ = une énergie minimale.)

Preuve. $f \in \mathcal{S}$, donc $f, xf \in L^2(\mathbb{R})$. On pose $g(x) = e^{-i\xi_0 x}f(x)$, avec donc $g \in \mathcal{S}$ et $|g(x)| = |f(x)|$, et avec $\widehat{g}(\xi) = \tau_{-\xi_0}\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi+\xi_0)$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne :

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}((x-x_0)\,\overline{g}(x))\,(g'(x))\,dx\Big|^2 \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2\,|g(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}|g'(x)|^2\,dx\Big). \tag{11.34}$$

Pour le membre de gauche, par intégrations par parties, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}}((x-x_0))\,(\overline{g}(x)\,g'(x))\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|g|^2(x)\,dx + 0, \tag{11.35}$$

car le terme de bord $\frac{1}{2}\Big[(x-x_0)g^2(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}$ est nul, car $g \in \mathcal{S}$.

Pour le membre de droite de (11.34), l'égalité de Parseval donne :

$$\int_{\mathbb{R}}|g'(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}}|\widehat{g'}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}}|\xi\widehat{g}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}}\xi^2\,|\widehat{f}(\xi+\xi_0)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi. \tag{11.36}$$

D'où on déduit de (11.34) que :

$$\Big(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|f|^2(x)\,dx\Big)^2 \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2\,|f(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\Big) \tag{11.37}$$

Et l'égalité de Parseval donnant $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$ il vient :

$$\frac{1}{4}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\Big) \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2\,|f(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\Big), \tag{11.38}$$

soit (11.33). ▪

11.6 Transformée inverse pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

La transformée inverse (11.18) est encore vraie pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ quand $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, sans supposer $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. La démonstration n'est pas immédiate. On commence par :

Lemme 11.21 *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et pour $g \in \mathcal{S}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$(f * g)(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \qquad (= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\widehat{f}\,\widehat{g})(-x)). \tag{11.39}$$

En particulier, avec $\varphi_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ et donc $\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon\xi^2}$, cf. (10.37), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\widehat{f})(-x). \tag{11.40}$$

(Ici $\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \delta_0$ mais f n'est pas supposée C^0, et $f(x)$ n'a pas de sens partout.)

Preuve. $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{S}$ permettent d'appliquer Fubini : on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi &= \int_{\xi\in\mathbb{R}} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\,dt)\widehat{g}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\\
&= \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi)e^{+i(x-t)\xi}\,d\xi)\,dt\\
&= \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\widehat{\widehat{g}}(t-x)\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt,
\end{aligned}$$

car on a (11.22).

Puis soit $g(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$, donc $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon\xi^2}$, cf. (10.37). D'où $(f*\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi \longrightarrow_{\varepsilon}$ grâce au théorème de convergence dominée puisque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. D'où (11.40). ∎

Lemme 11.22 *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'application $A_f = A : \left\{\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \to L^1(\mathbb{R})\\ y & \to A(y) = \tau_y f\end{array}\right\}$ est continue, avec, pour $y \in \mathbb{R}$:*

$$||A(y{+}h) - A(y)||_{L^1} = ||A(h) - A(0)||_{L^1}. \tag{11.41}$$

Preuve. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
||A(y_0{+}h) - A(y_0)||_{L^1} = ||\tau_{y_0+h}f - \tau_{y_0}f||_{L^1} &= \int_{x\in\mathbb{R}} |f(x{-}y_0{-}h) - f(x{-}y_0)|\,dx\\
&= \int_{z\in\mathbb{R}} |f(z{-}h) - f(z)|\,dz = ||A(h) - A(0)||_{L^1},
\end{aligned}$$

(invariance de l'intégrale de Lebesgue par translation) et il suffit donc de montrer la continuité de A en 0.

Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $|f(z{-}h) - f(z)| \leqslant h||f'||_\infty \underset{h\to 0}{\longrightarrow}$ et donc $||A(h) - A(0)||_{L^1} \longrightarrow_{h\to 0} 0$, et dans ce cas A est bien continue en 0.

Sinon, comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, soit $(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $||f - \varphi_n||_{L^1} \to 0$. On a :

$$\begin{aligned}
||A(h) - A(0)||_{L^1} = ||\tau_h f - f||_{L^1} &\leqslant ||\tau_h f - \tau_h\varphi_n||_{L^1} + ||\tau_h\varphi_n - \varphi_n||_{L^1} + ||\varphi_n - f||_{L^1}\\
&\leqslant ||\tau_h\varphi_n - \varphi_n||_{L^1} + 2||f - \varphi_n||_{L^1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

car $||\tau_h f - \tau_h\varphi_n||_{L^1} = ||f - \varphi_n||_{L^1}$ (invariance de l'intégrale de Lebesgue par translation). D'où A est continue en 0, d'où A est continue sur $\mathbb{R}$. ∎

Lemme 11.23 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$ est une famille de fonctions de $\mathcal{S}$ t.q. :*

$$\varphi_\varepsilon \geqslant 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1, \qquad \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{11.42}$$

(on ne suppose pas les φ_ε à support compact) alors :

$$f * \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}), \tag{11.43}$$

convergence en moyenne (pas ponctuelle : f n'est pas continue en générale alors que $f * \varphi_\varepsilon$ l'est).

Preuve. Comme $f,\varphi_\varepsilon\in L^1(\mathbb{R})$ on a $f*\varphi_\varepsilon\in L^1(\mathbb{R})$. Et avec φ_ε de masse unité :

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)-f(x)=\int_{t\in\mathbb{R}}(f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(t)\,dt.=\int_{t\in\mathbb{R}}(\tau_t f-f)(x)\varphi_\varepsilon(t)\,dt.$$

D'où avec les notations du lemme précédent et (11.41) :

$$||f*\varphi_\varepsilon-f||_{L^1}\leqslant\int_{t\in\mathbb{R}}(\int_{x\in\mathbb{R}}|\tau_tf(x)-f(x)|\,dx)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt\leqslant\int_{t\in\mathbb{R}}||A(t)-A(0)||_{L^1}\varphi_\varepsilon(t)\,dt,$$

à l'aide du théorème de Fubini–Tonelli.

Et $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $F(t)=||A(t)-A(0)||_{L^1}$ est continue, cf. lemme précédent. D'où, avec $\varphi_\varepsilon\rightharpoonup_{\varepsilon\to0}\delta_0$:

$$||f*\varphi_\varepsilon-f||_{L^1}\leqslant\langle\varphi_\varepsilon,F\rangle\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\langle\delta_0,F\rangle=F(0)=0,$$

i.e. (11.43). ∴

Lemme 11.24 *Si $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions dans $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})\bigcap L^1(\mathbb{R})$ qui converge vers g dans $(C^0(\mathbb{R};\mathbb{R}),||.||_\infty)$ et qui converge vers h dans $(L^1(\mathbb{R}),||.||_{L^1})$, alors $h=g$ p.p. (donc h est continue p.p., et f converge aussi vers g dans $(L^1(\mathbb{R}),||.||_{L^1})$).*

Preuve. Voir polycopié intégrale de Lebesgue, § Convergence dans $C^0(\mathbb{R})\bigcap L^1(\mathbb{R})$. ∴

Proposition 11.25 *Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$, alors on a (11.19) pour presque tout x :*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{+ix\xi}\,d\xi\quad\text{p.p.},\quad\text{soit}\quad\overline{\mathcal{F}}\circ\mathcal{F}=I\ \text{dans}\ L^1(\mathbb{R}),\tag{11.44}$$

qui est la formule d'inversion des fonctions $f\in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

Et $\mathcal{F}$ est bijective de $\{f\in L^1(\mathbb{R}):\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})\}$ dans lui-même d'inverse donnée par (11.19).

Donc pour $f\in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ on a $\check{f}=\widehat{\widehat{f}}$ p.p., donc f est continue p.p. sur $\mathbb{R}$ (relativement à la mesure de Lebesgue.

Preuve. Comme $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale $\mathcal{F}(\widehat{f})(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=^{\text{noté}}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x)$ a un sens, et la fonction $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})=^{\text{déf}}\widetilde{\mathcal{F}(\widehat{f})}$ ainsi définie est continue en tout $x\in\mathbb{R}$ (théorème de convergence dominée).

On dispose de (11.40) : avec $\varphi_\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ on a :

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\,\chi_\varepsilon(\xi)\,e^{+ix\xi}\,d\xi\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\mathcal{F}(\widehat{f})(-x)=\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(x),\tag{11.45}$$

avec $\mathcal{F}(\widehat{f})\in C^0$ car $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

Et le lemme 11.23, cf. (11.43), donne $f*\varphi_\varepsilon\longrightarrow_{\varepsilon\to0}f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Donc $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})=f$ p.p. grâce au lemme 11.24, soit $\overline{\mathcal{F}}\circ\mathcal{F}=I$ dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e. (11.44). ∴

11.7 $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ est continue

On a montré que $\mathcal{F}(\mathcal{S})\subset\mathcal{S}$. On a également, lorsque $\mathcal{S}$ est muni de la famille de semi-normes $p_{k,\ell}$:

Proposition 11.26 *La transformée de Fourier $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ est une application linéaire qui est continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même (toute image est bornée par un antécédent) : ici on a :*

$$\forall k,\ell\in\mathbb{N},\quad\exists C>0\ :\ \forall\varphi\in\mathcal{S},\quad p_{k,\ell}(\mathcal{F}(\varphi))\leqslant C\,p_{\ell+2,k}(\varphi).\tag{11.46}$$

Preuve. On a $\mathcal{F}$ linéaire sur $\mathcal{S}$ puisque $\mathcal{S}\subset L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}$ linéaire sur $L^1(\mathbb{R})$, et pour montrer la continuité (hors programme) il faut montrer que 'toute image est bornée par un antécédent' (avec les semi-normes adéquat), i.e. :

$$\forall k,\ell\in\mathbb{N},\quad\exists k',\ell'\in\mathbb{N},\quad\exists C>0,\quad\forall\varphi\in\mathcal{S},\quad p_{k,\ell}(\mathcal{F}(\varphi))\leqslant C\,p_{k',\ell'}(\varphi).\tag{11.47}$$

On a $|\xi^k\widehat{\varphi}^{(\ell)}(\xi)| = |\xi^k\widehat{x^\ell\varphi}(\xi)| = |\widehat{(x^\ell\varphi)^{(k)}}(\xi)|$, cf. (11.16), et :

$$\begin{aligned}|\widehat{(x^\ell\varphi)^{(k)}}\,(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)(x^\ell\varphi)^{(k)}e^{-ix\xi}\,dx\Big)|\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||(1+x^2)\,(x^\ell\varphi)^{(k)}||_\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\,dx,\end{aligned}\tag{11.48}$$

d'où, avec $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan]_{-\infty}^{\infty} = \pi > 0$, avec (11.17) et avec Leibniz :

$$||\xi^k\widehat{\varphi}^{(\ell)}||_\infty \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha\leqslant\ell+2,\ \beta\leqslant k} C_{\alpha\beta}||x^\alpha\varphi^{(\beta)}||_\infty,\tag{11.49}$$

où les $C_{\alpha\beta}$ sont donnés par Leibniz. Et donc pour la norme (11.7) :

$$p_{k,\ell}(\widehat{\varphi}) \leqslant C\,p_{\ell+2,k}(\varphi),\tag{11.50}$$

avec $C > 0$, et ce pour tout $\varphi\in\mathcal{S}$: la transformée de Fourier est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. ▪

12 Distributions tempérées

12.1 Espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées

12.1.1 Définition

Les semi-normes $p_{k,\ell}$, données par $p_{k,\ell}(\varphi) = \sum_{\alpha\leqslant k,\beta\leqslant\ell}||x^\alpha\varphi^{(\beta)}||_\infty$, cf. (11.7), définissent une topologie sur $\mathcal{S}$, donc sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de cette topologie.

Définition 12.1 Une distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite tempérée ssi T est également continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par $\mathcal{S}$, i.e. ssi la distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie (image bornée par un antécédent) :

$$\exists C>0,\quad \exists k,\ell\in\mathbb{N},\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad |\langle T,\varphi\rangle|\leqslant C\,p_{k,\ell}(\varphi),\tag{12.1}$$

où $p_{k,\ell}$ est défini en (11.7).

On note $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées.

Exemple 12.2 Toute fonction polynôme définit une distribution tempérée : $\langle x^k,\varphi\rangle\leqslant p_{k,0}(\varphi)$ pour $\varphi\in\mathcal{S}$. ▪

Exemple 12.3 Soit f donnée par $f(x) = e^{x^2}$. On a $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc définit la distribution T_f. Mais $T_f =^{\text{noté}} f$ n'est pas une distribution tempérée : prendre φ définie par $\varphi(x) = e^{-x^2}$; on a $\varphi\in\mathcal{S}$; et $\langle T_f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2}e^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} dx = \infty$, donc :

$$\forall C>0,\quad \forall k,l\in\mathbb{N},\quad \langle T,\varphi\rangle\geqslant C\,p_{k,\ell}(\varphi).\tag{12.2}$$

▪

Théorème 12.4 *(Extension de la dualité) Si $T:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ est une distribution tempérée, alors T se prolonge de manière unique à $\mathcal{S}$: il existe une unique application linéaire $\widetilde{T}:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{T}(\varphi) = T(\varphi)$ pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et telle que (image bornée par un antécédent) :*

$$\exists C>0,\quad \exists k,\ell\in\mathbb{N},\quad \forall\varphi\in\mathcal{S},\quad |\langle\widetilde{T},\varphi\rangle|\leqslant C\,p_{k,\ell}(\varphi).\tag{12.3}$$

Et on note alors simplement $\widetilde{T} = T$. Et ainsi $\mathcal{S}'$ définit le dual topologique de $\mathcal{S}$ (l'ensemble des formes linéaires et continues sur $\mathcal{S}$).

Preuve. Admis. La démonstration est basée sur la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}$, voir § 11.3.2, et le prolongement par continuité. ▪

Remarque 12.5 Voir l'annexe § 19 pour la description des topologies. ▪

12.1.2 Stabilité

Proposition 12.6 *Si $T \in \mathcal{S}'$, alors toutes les distributions $x^k T^{(\ell)}$ appartiennent à $\mathcal{S}'$ pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Soit T t.q. (12.3).
$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, et on a $x\varphi \in \mathcal{S}$. D'où $|\langle xT, \varphi \rangle| \leqslant C\, p_{k+1,\ell}(\varphi)$.
$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, et on a $\varphi' \in \mathcal{S}$. D'où $|\langle T', \varphi \rangle| \leqslant C\, p_{k,\ell+1}(\varphi)$.
Et récurrence immédiate. ∎

12.1.3 Convergence dans $\mathcal{S}'$

$\mathcal{S}'$ est le dual de $\mathcal{S}$ (i.e. $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des applications linéaires et continues sur $\mathcal{S}$), et on retrouve la convergence faible :

Définition 12.7 On dit que la suite $(T_j)_{\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ (suite de distributions tempérées) converge vers T dans $\mathcal{S}'$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \qquad \langle T_j, \varphi \rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle \quad \text{(dans } \mathbb{R}\text{)}. \tag{12.4}$$

Et on note :

$$T_j \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} T \quad \text{dans } \mathcal{S}'. \tag{12.5}$$

(Convergence faible ou ponctuelle, i.e. pour φ fixé on a convergence).

On a alors :

Proposition 12.8 *Si $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{S}'$ telle que $T_j \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{S}'$ alors pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, $x^k T_j^{(\ell)} \rightharpoonup x^k T^{(\ell)}$ dans $\mathcal{S}'$.*

Preuve. Et pour (T_j) suite de $\mathcal{S}'$ qui converge faiblement vers $T \in \mathcal{S}'$, on a $\langle T_j', \varphi \rangle = -\langle T_j, \varphi' \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, qui converge vers $-\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$. Et donc $T_j' \rightharpoonup T'$ dans $\mathcal{S}'$. Idem pour xT_j. Puis, par récurrence sur k, ℓ. ∎

12.2 Exemples

12.2.1 Les distributions régulières L^p sont tempérées

Lemme 12.9 *Pour tout $q \in [1, \infty]$:*

$$\exists C_q > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad ||\varphi||_{L^q} \leqslant C_q\, p_{2,0}(\varphi). \tag{12.6}$$

Preuve. On a $\mathcal{S} \subset L^q(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant q \leqslant \infty$ cf. prop. 11.13.
Pour $q \in [1, \infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^q\, dx = \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{1+x^2})^q (1+x^2)^q\, |\varphi(x)|^q\, dx \leqslant (\int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{1+x^2})^q\, dx)\ ||((1+x^2)|\varphi(x)|)^q||_\infty,$$

d'où (12.6) (en prenant la racine q-ième) avec $C_q = (\int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{1+x^2})^q\, dx)^{\frac{1}{q}}$ (indépendant de φ).
Et pour $q = \infty$ on a $||\varphi||_{L^\infty} = p_{0,0}(\varphi) \leqslant p_{2,0}(\varphi)$, cf. (11.7) : $C = 1$ convient. ∎

Corollaire 12.10 *Soit $p \in [1, \infty]$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors T_f est une distribution tempérée :*

$$\exists C = C_f > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad |\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant C\, p_{2,0}(\varphi), \tag{12.7}$$

avec C indépendant de φ.

Preuve. Soit $p \in]1, \infty[$ et q t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{S} \subset L^q(\mathbb{R})$, l'inégalité de Hölder (Cauchy–Schwarz pour $p = q = 2$) indique que :

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx| \leqslant ||f||_{L^p(\mathbb{R})} ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R})},$$

d'où le résultat avec (12.6).

Cas $p = 1$: $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx| \leqslant (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx)\,||\varphi||_\infty = ||f||_{L^1}\,p_{0,0}(\varphi) \leqslant ||f||_{L^1}\,p_{2,0}(\varphi).$$

Cas $p = \infty$: $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx| \leqslant ||f||_\infty(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx) = ||f||_\infty ||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant ||f||_\infty C_1\,p_{2,0}(\varphi),$$

avec (12.6). ▪

12.2.2 Distribution tempérée définissant la transformée de Fourier

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction complexe $\alpha_\xi : x \in \mathbb{R} \to \alpha_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi x}$ qui dépend du paramètre ξ est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (majorée en module par la fonction constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}1_{\mathbb{R}}$) et définit donc une distribution tempérée T_{α_ξ} : c'est la distribution tempérée qui définit la transformée de Fourier :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \langle \alpha_\xi, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e^{-i\xi x}, \varphi(x)\rangle_{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-i\xi x}\,dx. \tag{12.8}$$

12.2.3 Exemple : fonction à croissance lente

Définition 12.11 On appelle fonction à croissance lente, une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ bornée par un polynôme, de même que toutes ses dérivées : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \exists C_\ell > 0, \quad \exists m_\ell \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(\ell)}(x)| \leqslant C_\ell(1 + |x|)^m. \tag{12.9}$$

(Au voisinage de $\pm\infty$, la fonction $f^{(\ell)}$ est $O(|x|^m)$.)

Exemple 12.12 Toute fonction polynôme est à croissante lente : $|f(x)| = |\sum_{i=1}^n a_i x^i| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|\,|x|^i$, et $(1 + |x|)^m = \sum_{k=1}^m C_m^k |x|^k$: on prend $m = n$ et $C = \max(|a_i|)$. ▪

Exemple 12.13 L'exponentielle $e^{|x|}$ ne définit pas une distribution tempérée, exercice. ▪

Proposition 12.14 *Toute fonction à croissance lente définit une distribution tempérée.*

Preuve. Soit f à croissante lente. Donc (12.9) est vraie en particulier pour $\ell = 0$, donc, pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} C_0(1 + |x|)^{m_0}|\varphi(x)|(1 + x^2)\frac{1}{1 + x^2}\,dx \\ &\leqslant C\,p_{m_0+2,0}(\varphi)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2}\,dx, \end{aligned}$$

où C est indépendant de φ, d'où le résultat. ▪

Remarque 12.15 Une distribution peut être tempérée tout en étant "à croissance exponentielle", comme c'est le cas de certaines fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$: soit $f = \sum_{n=1}^\infty e^n 1_{[n, n+e^{-n}\frac{1}{n^2}]}$: on a $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, donc $f \in L^1(\mathbb{R})$, et on a vu que toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ définissait une distribution tempérée, voir exemple 12.7. Mais ici "la largeur de l'intervalle d'intégration décroît de manière exponentielle" avec n.

Néanmoins, dans la pratique ingénieur, on a tendance à dire que les distributions tempérées sont à "croissance au plus polynomiale", sous-entendu on exclut les cas pathologiques comme la fonction f de cette remarque : c'est le cas quand f est croissante au voisinage de l'infini. ▪

12.2.4 Exemple : masse de Dirac

Exemple 12.16 δ_a est tempérée ainsi que ses dérivés $\delta_a^{(\ell)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$: démonstration immédiate car $|\varphi^{(\ell)}(0)| \leqslant ||\varphi^{(\ell)}||_\infty \leqslant p_{0,\ell}(\varphi)$. ∴

Exercice 12.17 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite numérique quelconque.

(i) Montrer que $a_k\delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que $a_k\delta_k \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que $a_k\delta_k \in \mathcal{S}'$ et que $a_k\delta_k \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{S}'$ si et seulement si $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente. (On dit que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à croissance lente ssi $\exists C > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leqslant C(1+|k|)^m$.)

(iii) Montrer que $\sum_{\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ est dans $\mathcal{S}'$ si et seulement si $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente. (Indication : $\sum a_k\varphi(k) < \infty$ puisque $\varphi(k) \leqslant \frac{C}{(1+|k|)^{m+2}}$ pour k assez grand.)

Réponse. (i) $a_k\delta_k$ est même tempérée : exemple précédent. Et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ il existe $M > 0$ t.q. supp$\varphi \subset [-M, M]$. Donc $a_k\varphi_k(\varphi) = 0$ dès que $k > M$, donc $a_k\varphi_k(\varphi) \longrightarrow_{k\to 0} 0$.

(ii) Pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $a_k\delta_k(\varphi) = a_k\varphi(k)$. Supposons (a_k) à croissance lente. Alors $|a_k\delta_k(\varphi)| \leqslant C([1+|k|)^m\varphi(k) \leqslant C([1+|k|)^m|\varphi(k)| \leqslant C([1+|k|)^m||\varphi||_\infty \leqslant C\frac{1}{1+k^2}p_{k+2,0}(\varphi)$, donc $a_k\delta_k(\varphi) \rightharpoonup 0$.

Supposons que (a_k) n'est pas à croissance lente : $\forall C > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \geqslant C(1+|k|)^m$. Soit $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $|a_k| \geqslant C(1+|k|)^m$. Puis soit $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{m/2}}$. On a $\varphi \in \mathcal{S}$ et $a_k\varphi(k) \simeq C \not\to 0$. Donc si $a_k\delta_k \rightharpoonup 0$ alors (a_k) est à croissance lente.

(iii) Exercice. ∴

12.2.5 Exemple : distribution à support compact

Proposition 12.18 *Toute distribution à support compact définit une distribution tempérée.*

Preuve. Toute distribution à support compact est d'ordre fini, voir annexe 19, (19.18) page 131 : soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors il existe $m \in \mathbb{N}$ (son ordre), t.q. : $\exists C > 0$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant Cp_{0,m}(\varphi)$. ∴

Proposition 12.19 *Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est telle que* supp$T = \{a\}$, *alors il existe $m+1$ constantes $(c_j)_{j=0,\dots,m}$ telles que $T = \sum_{j=0}^m c_j\,\delta_a^{(j)}$ (combinaison linéaire de la masse de Dirac en a et de ses dérivées).*

Preuve. C'est la proposition 19.10 page 131. ∴

12.3 Cas des distributions à support compact

12.3.1 Densité de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'$

Lemme 12.20 *Pour tout $T \in \mathcal{S}'$ (tempérée), il existe une suite $(T_j) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (à support compact) telle que $T_j \rightharpoonup_{j\to\infty} T$ dans $\mathcal{S}'$. Autrement dit $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}'$.*

Preuve. (Par troncature et régularisation.) Soit $T \in \mathcal{S}'$ et soit $\theta_j = 1_{[-j,j]} * \gamma_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ où γ_1 est donnée par (2.25). Alors la suite $T_j = \theta_jT$ est une suite de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Et on a pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$|\langle T - T_j, \varphi\rangle| = |\langle T, (1-\theta_j)\varphi\rangle| \leqslant C\,p_{k,\ell}((1-\theta_j)\varphi) \tag{12.10}$$

où C, k et ℓ ne dépendent que de $T \in \mathcal{S}'$. Et $p_{k,\ell}((1-\theta_j)\varphi) \longrightarrow_{j\to\infty} 0$, voir par exemple § 11.3.2, d'où le résultat. ∴

12.3.2 Expression simplifiée de la convolution quand $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$

On dispose de la proposition 9.16 : si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $T * \varphi$ est une distribution bien définie (les supports sont convolables), et régulière : il définit une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ notée abusivement $T * \varphi$, et :

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle. \tag{12.11}$$

Et si $T \in \mathcal{S}'$ et si (T_j) est une suite de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ telle que $T_j \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{S}'$, comme pour $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T_j * \varphi, \psi\rangle = \langle T_j, \check{\varphi} * \psi\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle T, \check{\varphi} * \psi\rangle,$$

car $\check{\varphi} \in \mathcal{S}$ (car $\varphi \in \mathcal{S}$) et $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ (car $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) donnent $\check{\varphi} * \psi \in \mathcal{S}$, cf. exercice 11.7, et $\langle T, \check{\varphi} * \psi\rangle$ est bien défini.

De plus, si $T \in \mathcal{S}'$ et si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors la fonction $x \in \mathbb{R} \to \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \in \mathbb{R}$ est $C^\infty(\mathbb{R})$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors si $x \in \mathbb{R}$ on a $\tau_x\check{\varphi} \in \mathcal{S}$ (trival), et donc le crochet $\langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle$ est bien défini. Et la fonction $x \in \mathbb{R} \to \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \in \mathbb{R}$ ainsi définie est $C^\infty(\mathbb{R})$, cf. (7.2).

D'où la définition, qui donne une extension de la notion de supports convolables :

12.3.3 Extension de la convolution à $\mathcal{S}'$

Définition 12.21 Si $T \in \mathcal{S}'$ et si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $T * \varphi$ est la fonction $\in C^\infty(\mathbb{R})$ (plus précisément est une distribution régulière identifiée à une fonction) définie par :

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x(\check{\varphi}) \rangle, \tag{12.12}$$

i.e. par :

$$(T * \varphi)(x) \stackrel{\text{noté}}{=} \langle T(y), \varphi(x-y) \rangle_{dy} \stackrel{\text{noté}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} T(y) \varphi(x-y)\, dy. \tag{12.13}$$

13 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

13.1 Définition

On a déjà vu que pour les fonctions de $\mathcal{S}$ on avait, cf (11.28) (Fubini) :

$$\langle \widehat{\varphi}, \psi \rangle = \langle \varphi, \widehat{\psi} \rangle, \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}. \tag{13.1}$$

On généralise cette propriété aux distributions tempérées en posant la définition :

Définition 13.1 Pour $T \in \mathcal{S}'$ distribution tempérée, on définit sa transformée de Fourier par dualité :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \qquad \langle \widehat{T}, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \tag{13.2}$$

Cette définition a un sens car si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, cf. proposition 11.15.

Exemple 13.2 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors f est tempérée (i.e. T_f distribution régulière associée à f est tempérée), et on retrouve la définition usuelle : $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}} =^{\text{noté}} \widehat{f}$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T_f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle = & \int_\xi f(\xi)\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\xi f(\xi) \int_x \varphi(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\, d\xi \\ = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x (\int_\xi f(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi)\, \varphi(x)\, dx = \int_x \widehat{f}(x)\, \varphi(x)\, dx \\ = & \langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle \stackrel{\text{noté}}{=} \langle \widehat{f}, \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{13.3}$$

On peut en effet appliquer le théorème de Fubini puisque la fonction $(x, \xi) \to \varphi(x) f(\xi)\, e^{-ix\xi}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ car φ et f sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $|e^{-ix\xi}| = 1$. ∎

Exercice 13.3 Montrer que si T est paire (resp. impaire) alors $\widehat{T}$ est paire (resp. impaire) :

$$\check{\widehat{T}} = \widehat{\check{T}}. \tag{13.4}$$

Réponse. On a (10.24) : $\check{\widehat{f}} = \widehat{\check{f}}$. D'où $\langle \check{\widehat{T}}, \varphi \rangle =^{\text{déf}} \langle \widehat{T}, \check{\varphi} \rangle =^{\text{déf}} \langle T, \widehat{\check{\varphi}} \rangle = \langle T, \check{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle \check{T}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{\check{T}}, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$. ∎

13.2 Stabilité $\mathcal{F}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}'$

La définition par dualité donne :

Proposition 13.4 *La transformée de Fourier d'une distribution tempérée est une distribution tempérée, i.e.,* $\mathcal{F}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}'$.

Preuve. On sait que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, et donc, pour $T \in \mathcal{S}'$ on a $\widehat{T}$ qui est une application linéaire et continue sur $\mathcal{S}$, cf. (13.2). La linéarité est triviale, et sachant $p_{k,\ell}(\widehat{\varphi}) \leqslant C\, p_{\ell+2,k}(\varphi)$ où $C > 0$ (voir proposition 11.26 et équation (11.50)), la continuité de $\widehat{T}$ sur $\mathcal{S}'$ est immédiate. ∎

Remarque 13.5 Les distributions à support compact sont tempérées (cf. proposition 12.18) et ont donc leurs transformées de Fourier qui est également tempérée (cf. proposition 13.4). Cela peut être établi sans l'aide de la proposition 13.25 :

Sachant T à support compact, T est une distribution d'ordre finie $p \in \mathbb{N}$ (voir annexe) :

$$\exists C > 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |\langle T(x), \varphi(x) \rangle_{dx}| \leqslant C \sup_{x \in K, \beta \leqslant p} |\varphi^{(\beta)}(x)|, \tag{13.5}$$

où K est un compact tel que $\overset{\circ}{K} \supset \mathrm{supp}(T)$. Et donc ici, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$|\langle T(x), (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} \rangle_{dx}| \leqslant C \sup_{x \in K, \beta \leqslant p} |(x^\alpha e^{-ix\xi})^{(\beta)}|. \tag{13.6}$$

Et $\widehat{T}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle T(x), e^{-ix\xi} \rangle$, car T est à support compact, d'où $\widehat{T}^{(\alpha)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle T(x), (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} \rangle$ par dérivation sous le crochet de dualité. Posant $f_\xi(x) = x^\alpha e^{-ix\xi}$, on a $f'(x) = (x^{\alpha-1} - i\xi x^\alpha) e^{-ix\xi}$, et par récurrence immédiate $f^{(\beta)}(x) = P_\beta(x, \xi) e^{-ix\xi}$ où $P_\beta(x, \xi)$ est un polynôme de degré β en ξ et un polynôme en x. Comme on prend le sup pour $x \in K$ compact et $\beta \leqslant p$, on obtient :

$$|\frac{d^\alpha}{d\xi^\alpha} \widehat{T}(\xi)| \leqslant C' \, (1 + |\xi|)^p, \tag{13.7}$$

avec $C' > 0$ indépendant de ξ. Et $\widehat{T}$ est bien à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. ∎

13.3 Premiers exemples

13.3.1 Transformée de Fourier d'une distribution régulière

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et T_f est la distribution régulière associée, alors on a vu que $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$, et on note abusivement $\widehat{T_f} = \widehat{f}$.

13.3.2 Transformée de Fourier de δ_a et de δ'_a

Proposition 13.6 *Dans $\mathcal{S}'$:*

$$\widehat{\delta_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1_{\mathbb{R}}, \qquad \text{et} \qquad \widehat{\delta_a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-iax} \tag{13.8}$$

(Donc si δ_0 est approchée par une fonction "infiniment concentrée en 0" alors sa transformée de Fourier est une fonction constante, donc "infiniment étalée sur $\mathbb{R}$".) Et :

$$\widehat{\delta'_0}(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \, x, \qquad \text{et} \qquad \widehat{\delta'_a}(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \, x e^{-iax}. \tag{13.9}$$

Et :

$$\widehat{\delta_0^{(k)}}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \, x^k, \qquad \text{et} \qquad \widehat{\delta_a^{(k)}}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \, x^k e^{-iax}. \tag{13.10}$$

Ainsi $\widehat{\delta_0^{(k)}}$ est un monôme de degré k.

Preuve. δ_0 n'est pas une fonction, mais c'est une distribution tempérée, cf. exemple 12.16. (13.2) donne, pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{\delta_a}, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, e^{-iax} \, dx = \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-iax}, \varphi(x) \rangle_{dx}, \tag{13.11}$$

donc $\widehat{\delta_a}$ est la distribution régulière identifiée à la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-iax}$. D'où (13.8). Puis avec (11.16) :

$$\langle \widehat{\delta'_a}, \varphi \rangle = \langle \delta'_a, \widehat{\varphi} \rangle = -\widehat{\varphi}'(a) = i\widehat{x\varphi}\,(a) = i \langle \delta_a, \widehat{x\varphi} \rangle = i \langle \widehat{\delta_a}, x\varphi \rangle = i \langle x\widehat{\delta_a}, \varphi \rangle = i \langle x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-iax}, \varphi \rangle,$$

d'où $\widehat{\delta'_a}$ est la distribution régulière identifiée à la fonction $\frac{ixe^{-iax}}{\sqrt{2\pi}}$. Et récurrence immédiate. ∎

Remarque 13.7 Comme d'habitude on a abusé des notations : on aurait dû définir la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-iax}$, et écrire $\widehat{\delta_a} = T_f$ distribution régulière associée à f. Pour alléger l'exposé, on a non seulement utilisé $T_f \stackrel{\text{noté}}{=} f$, mais pire, on a utilisé la notation très abusive $T_f(x)$. Le contexte lève les ambiguïtés : on n'a pas le choix pour que (13.8) ait un sens. ∎

Remarque 13.8 Calcul "brutal" justifié au § suivant :
$\widehat{\delta_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle\delta_a(x), e^{-ix\xi}\rangle_{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixa}$, et
$\widehat{\delta'_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle\delta'_a(x), e^{-ix\xi}\rangle_{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-ix\xi})'_{|x=a} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-i\xi)e^{-ia\xi}$. ∎

13.3.3 Transformée de Fourier d'une distribution à support compact

Une distribution à support compact est en particulier tempérée, cf. proposition 12.18. Sa transformée de Fourier est donc bien définie : $\langle\widehat{T},\varphi\rangle = \langle T,\widehat{\varphi}\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.

Proposition 13.9 *Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier est la distribution tempérée régulière C^∞ donnée par, pour $\xi \in \mathbb{R}$:*

$$\widehat{T}(\xi) = \langle T(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\xi x}\rangle_{dx}. \tag{13.12}$$

(Sans abus de notation, $\widehat{T} = T_g$ où $g(\xi) = \langle T(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\xi x}\rangle_{dx}$.)

Et mieux : $\widehat{T}$ est développable en série entière de rayon infini : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$(g(\xi) =) \qquad \widehat{T}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n\alpha_n}{n!}\,\xi^n, \qquad \text{où} \qquad \alpha_n = \langle T(x), x^n\rangle. \tag{13.13}$$

En particulier $\widehat{T}$ n'est pas à support compact.

Preuve. La fonction $f : (\xi, x) \to f(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\xi x}$ est C^∞. Et T est à support compact, donc la fonction g suivante est bien définie :

$$g(\xi) = \langle T, f_\xi\rangle \stackrel{\text{noté}}{=} \langle T(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\xi x}\rangle_{dx} \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int T(x)\,e^{-ix\xi}\,dx. \tag{13.14}$$

Et pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $\langle\widehat{T}(x),\varphi(x)\rangle = \langle T(\xi),\widehat{\varphi}(\xi)\rangle = \langle T(\xi),\langle f(\xi,x),\varphi(x)\rangle\rangle = \langle\langle T(\xi), f(\xi,x)\rangle,\varphi(x)\rangle = \langle g,\varphi\rangle$, d'où $\widehat{T} = g$ (au sens $\widehat{T} = T_g$). Et T est compacte, donc tempérée, cf. proposition 12.18, donc $\widehat{T}$ est tempérée. Et T est compacte, donc g est C^∞ de g, cf. proposition 7.4 de dérivation sous le signe $\langle.,.\rangle$.

Et on a (développement en série de l'exponentielle) :

$$e^{-i\xi x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-i\xi)^n.$$

Avec (13.12) et Fubini on obtient $g(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n\langle T, x^n\rangle}{n!}\,\xi^n$, i.e. (13.13). ∎

Exemple 13.10 On retrouve en particulier le cas des masses de Dirac et de ses dérivées : pour δ_a par exemple, $\widehat{\delta_a}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ia\xi)^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-iax}$. ∎

13.3.4 Concentration–étalement par Fourier pour les distributions tempérées

On rappelle que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}), \tag{13.15}$$

égalité interprétée comme : si une fonction est concentrée, alors sa transformée de Fourier est étalée, et réciproquement, si une fonction est étalée, alors sa transformée de Fourier est concentrée. Ce résultat est conservé pour les distributions tempérées :

Proposition 13.11 *Pour $T \in \mathcal{S}'$ et $\lambda \neq 0$ on a :*

$$\widehat{T(\lambda x)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\hat{T}(\frac{\xi}{\lambda}). \tag{13.16}$$

Preuve. Posons $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. On a $\widehat{f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}} f(\lambda x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y\in\mathbb{R}} f(y)e^{-i\frac{y}{\lambda}\xi}\,\frac{dy}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}) = \frac{1}{|\lambda|}(\hat{f})_{\frac{1}{\lambda}}(\xi)$, donc :

$$\widehat{f_\lambda} = \frac{1}{|\lambda|}(\hat{f})_{\frac{1}{\lambda}}. \tag{13.17}$$

D'où (13.15), vrai en particulier vraie pour tout $f \in \mathcal{S}$.

Soit $T \in \mathcal{S}'$; posons $S_{T,\lambda}(x) = T(\lambda x)$ au sens (3.54) et (3.55), i.e., pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$(\langle S_{T,\lambda}(x), \varphi(x)\rangle =) \qquad \langle S_{T,\lambda}, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \frac{1}{|\lambda|}\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle \qquad (\overset{\text{noté}}{=} \langle T(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\rangle_{dx}). \tag{13.18}$$

Il est immédiat que $S_{T,\lambda} \in \mathcal{S}'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Et $S_{T,\frac{1}{\lambda}}$ est défini par :

$$\langle S_{T,\frac{1}{\lambda}}, \varphi\rangle = \langle T, |\lambda|\varphi_\lambda\rangle. \tag{13.19}$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{S_{T,\lambda}}, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle S_{T,\lambda}, \hat{\varphi}\rangle \overset{(13.18)}{=} \langle T, \frac{1}{|\lambda|}(\hat{\varphi})_{\frac{1}{\lambda}}\rangle \overset{(13.15)}{=} \langle T, \widehat{\varphi_\lambda}\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle \hat{T}, \varphi_\lambda\rangle \overset{(13.19)}{=} \frac{1}{|\lambda|}\langle \widehat{S_{\hat{T},\frac{1}{\lambda}}}, \varphi\rangle,$$

donc $\widehat{S_{T,\lambda}} = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{S_{\hat{T},\frac{1}{\lambda}}}$, noté (13.16). ∎

13.4 Premières propriétés

13.4.1 Convergence

On a alors :

Proposition 13.12 *Si $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{S}'$ qui tend vers $T \in \mathcal{S}'$, alors $\widehat{T_j}$ tend vers $\hat{T}$ dans $\mathcal{S}'$:*

$$T_j \rightharpoonup T \quad \text{dans } \mathcal{S}' \quad \Longrightarrow \quad \widehat{T_j} \rightharpoonup \hat{T} \quad \text{dans } \mathcal{S}' \tag{13.20}$$

Preuve. On a $T_j \in \mathcal{S}'$ donc $\widehat{T_j} \in \mathcal{S}'$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, donc (13.2) et (12.4) donnent :

$$\langle \widehat{T_j}, \varphi\rangle = \langle T_j, \hat{\varphi}\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{T}, \varphi\rangle \tag{13.21}$$

D'où le résultat. ∎

13.4.2 Application : transformée de Fourier de $1_\mathbb{R}$

Proposition 13.13

$$\widehat{1_\mathbb{R}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{S}', \tag{13.22}$$

au sens $\widehat{T_{1_\mathbb{R}}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0$ dans $\mathcal{S}'$.

Preuve. La distribution $T = T_{1_\mathbb{R}} =^{\text{noté}} 1_\mathbb{R}$ (fonction constante $= 1$) n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ et n'a pas de transformée de Fourier au sens des fonctions. Mais c'est une distribution tempérée, et on sait que, avec (10.44), quand $\varepsilon \to 0$:

$$e^{-\varepsilon x^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} 1_\mathbb{R} \qquad \text{dans } \mathcal{S}', \tag{13.23}$$

au sens $T_{\chi_\varepsilon} \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} T_{1_\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{S}'$, où $\chi_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2}$. Par ailleurs on sait que, avec (10.45), quand $\varepsilon \to 0$:

$$\widehat{e^{-\varepsilon x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \sqrt{2\pi}\,\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{S}', \tag{13.24}$$

au sens $\widehat{T_{\chi_\varepsilon}} \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} \sqrt{2\pi}\,\delta_0$ dans $\mathcal{S}'$. On en déduit (13.22) avec (13.20). ∎

Remarque 13.14 Le calcul direct pose problème :

$$\langle \widehat{T_{1_\mathbb{R}}}, \varphi\rangle = \langle T_{1_\mathbb{R}}, \hat{\varphi}\rangle = \int_\xi \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\xi (\int_x \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx)\,d\xi, \tag{13.25}$$

mais on ne peut inverser les signes $\int$. D'où la proposition précédente. ∎

13.4.3 Echange dérivée ↔ polynôme

Par dualité, on retrouve les résultats déjà connus pour les fonctions, cf. (11.16) :

Proposition 13.15 *Pour tout $T \in \mathcal{S}'$, tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $k, l \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\begin{cases} \widehat{T'}(\xi) = i\xi\widehat{T}(\xi), \qquad \widehat{T^{(l)}}(\xi) = (i\xi)^l\widehat{T}(\xi), \\ \left(\widehat{T}\right)'(\xi) = -i\widehat{xT}(\xi), \qquad \left(\widehat{T}\right)^{(k)}(\xi) = (-i)^k\widehat{x^kT}(\xi), \\ \widehat{\tau_a T}(\xi) = e^{-ia\xi}\,\widehat{T}, \\ \tau_a\widehat{T}(\xi) = \widehat{e^{iax}T}. \end{cases} \tag{13.26}$$

Preuve. On applique la définition $\langle\widehat{T},\varphi\rangle = \langle T,\widehat{\varphi}\rangle$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ et on se sert de la proposition 11.14. Le faire, presque facile : mais faire très très attention aux notations ! Par exemple, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle\widehat{T'(x)}(\xi),\varphi(\xi)\rangle_{d\xi} \overset{\text{déf}}{=} \langle T'(x),\widehat{\varphi(\xi)}(x)\rangle_{dx} \overset{\text{déf}}{=} -\langle T(x),\widehat{\varphi(\xi)}'(x)\rangle_{dx} = -\langle T(x),-i\widehat{\xi\varphi(\xi)}(x)\rangle_{d\xi}$$

à l'aide de (11.16). Puis :

$$i\langle T(x),\widehat{\xi\varphi(\xi)}(x)\rangle_{dx} \overset{\text{déf}}{=} i\langle\widehat{T(x)}(\xi),\xi\varphi(\xi)\rangle_{d\xi} = i\langle\widehat{T}(\xi),\xi\varphi(\xi)\rangle_{d\xi} = \langle i\xi\widehat{T}(\xi),\varphi(\xi)\rangle_{d\xi}$$

D'où le premier résultat. On a écrit toutes les variables 'muettes' d'intégration, bien que ce soit une notation abusive. On peut commencer par écrire cette démonstration pour $T = f \in L^1(\mathbb{R})$ et en utilisant le signe $\int$ qui fait apparaître les variables d'intégration ('muettes') plutôt que le signe $\langle .,.\rangle$. ▪

Exercice 13.16 Montrer : $\widehat{x} = i\sqrt{2\pi}\widehat{\delta_0'}$. On notera $f(x) = x$.

Réponse. 1- Avec (13.26) et (13.22) : $\widehat{f} = \widehat{x} = \widehat{x1_{\mathbb{R}}} = +i(\widehat{1_{\mathbb{R}}})' = +i(\sqrt{2\pi}\delta_0)'$. Equivalent à $\langle\widehat{f}(\xi),\varphi(\xi)\rangle_{d\xi} = \langle f(x),\widehat{\varphi}(x)\rangle_{dx} = \langle 1_{\mathbb{R}}(x), f(x)\widehat{\varphi}(x)\rangle_{dx} = \langle 1_{\mathbb{R}}(x), x\widehat{\varphi}(x)\rangle_{dx} = \langle 1_{\mathbb{R}}(x), -i\widehat{\varphi'}(x)\rangle_{dx} = -i\langle\widehat{1_{\mathbb{R}}}(\xi),\varphi'(\xi)\rangle_{d\xi} = -i\langle\sqrt{2\pi}\delta_0(\xi),\varphi'(\xi)\rangle_{d\xi} = i\langle\sqrt{2\pi}\delta_0',\varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$.

2- En prenant un peu d'avance (Fourier inverse donné par (13.40)). (13.9) donne $\widehat{\widehat{\delta_0'}} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\widehat{x}$, avec $\widehat{\widehat{\delta_0'}} = \check{\delta_0'}$ (Fourier inverse) $= -\delta_0'$ (car δ_0' est impaire cf. (4.15)).

3- $f(x) = x$ donne $f' = 1_{\mathbb{R}}$, d'où $\widehat{f'} = \sqrt{2\pi}\delta_0$, d'où $i\xi\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\delta_0(\xi)$, et les solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $\xi T = \delta_0$ sont les $T = -\delta_0' + c\delta_0$, cf. exercice 5.28. Donc $\widehat{f}(\xi) = -i\sqrt{2\pi}(-\delta_0' + c\delta_0)$. Et $\widehat{T}(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}x + c\frac{1}{\sqrt{2\pi}}1_{\mathbb{R}}(x)$, donc $\widehat{\widehat{f}}(x) = -i\sqrt{2\pi}(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}x + c\frac{1}{\sqrt{2\pi}}1_{\mathbb{R}}(x)) = -x - ci1_{\mathbb{R}}(x)$, avec $\widehat{\widehat{f}}(x) = \check{f}(x) = -x$, donc $c = 0$. ▪

Exercice 13.17 Soit $T \in \mathcal{S}'$. Exprimer $(\widehat{T'})'$ en fonction de T.

Réponse. S'inspirer de (10.34). ▪

13.4.4 Application : transformée de Fourier e^{iax}, sin, cos

À l'aide de (13.26), on en déduit dans $\mathcal{S}'$:

$$\widehat{e^{+iax}} = \widehat{e^{+iax}1_{\mathbb{R}}} = \tau_a\widehat{1_{\mathbb{R}}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_a, \qquad \widehat{e^{-iax}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_{-a}, \tag{13.27}$$

D'où avec $\cos(ax) = \frac{e^{+iax}+e^{-iax}}{2}$ et $\sin(ax) = \frac{e^{+iax}-e^{-iax}}{2i}$:

$$\widehat{\cos(ax)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta_a + \delta_{-a}), \qquad \widehat{\sin(ax)} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta_a - \delta_{-a}), \tag{13.28}$$

noté abusivement $\widehat{\cos(ax)}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta_a(\xi) + \delta_{-a}(\xi))$ et $\widehat{\sin(ax)}(\xi) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta_a(\xi) - \delta_{-a}(\xi))$.

Exemple 13.18 Ecrire (13.27) et (13.28) sans abus de notation.

Réponse. Soit $f_a(x) = e^{+iax}$, soit $g_a(x) = \cos(ax)$ et soit $h_a(x) = \sin(ax)$. Alors :
$\widehat{T_{f_a}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_a$, $\widehat{T_{g_a}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta_a + \delta_{-a})$, $\widehat{T_{h_a}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta_a - \delta_{-a})$. ▪

13.4.5 Transformée de Fourier d'une mesure bornée (vers les probabilités)

Une mesure (positive) est définie en cours d'intégration.

On peut également la définir comme étant une distribution d'ordre 0, voir (19.15) (annexe), qui est positive :

Définition 13.19 Une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$ est une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall K \text{ compact} \subset \mathbb{R}, \exists C_K > 0 \text{ t.q. } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K : \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K \, ||\varphi||_\infty. \tag{13.29}$$

Définition 13.20 Une mesure positive est une distribution $T =^{\text{noté}} \mu$ d'ordre 0 qui est positive, i.e. telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \varphi \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \langle \mu, \varphi \rangle \geqslant 0. \tag{13.30}$$

Remarque 13.21 On peut étendre l'ensemble de définition $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'une distribution d'ordre 0 à $C^0_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des application continues à support compact dans $\mathbb{R}$, puisque seule la norme $||.||_\infty$ de C^0 est utilisée. ▪

Définition 13.22 Pour $\varepsilon > 0$, soit $\chi_\varepsilon : x \in \mathbb{R} \to \chi_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2}$. Une mesure positive bornée est une mesure positive telle que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \langle \mu, \chi_\varepsilon \rangle < c. \tag{13.31}$$

Comme χ_ε "s'étale" vers la fonction $1_\mathbb{R}$ quand $\varepsilon \to 0$, cf. (10.44), cela s'interprète presque comme :

$$\langle \mu, 1_\mathbb{R} \rangle < c, \tag{13.32}$$

sauf que $1_\mathbb{R}$ n'est pas à support compact, et que $\langle \mu, 1_\mathbb{R} \rangle$ n'a pas de sens... on a besoin de la remarque suivante 13.23.

Remarque 13.23 On peut étendre l'ensemble de définition $C^0_c(\mathbb{R})$ d'une mesure positive bornée à $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\Omega) : ||f||_\infty < \infty\}$ l'ensemble des application continues et bornées. Et on a alors la définition équivalente : une mesure positive est bornée ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \qquad \langle \mu, 1_\mathbb{R} \rangle < c. \tag{13.33}$$

On retrouve la définition des mesures positives bornées du cours d'intégration. ▪

Proposition 13.24 *Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}$ (c'est en particulier le cas d'une probabilité), alors $\widehat{\mu}$ une distribution régulière, à savoir :*

$$\widehat{\mu} = T_p, \tag{13.34}$$

où p est la fonction continue, bornée, et même uniformément continue, donnée par :

$$p(\xi) = \langle \mu(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \rangle_{dx} \overset{\text{noté}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \, d\mu(x) \qquad (= \langle \mu_x, e^{-ix\xi} \rangle_{dx}). \tag{13.35}$$

Et on note abusivement ("identification" de la distribution régulière et de sa fonction associée) :

$$\widehat{\mu}(\xi) \overset{\text{noté}}{=} p(\xi), \tag{13.36}$$

donc au sens, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{\mu}, f \rangle = \int_{x \in \mathbb{R}} p(x) f(x) \, dx. \tag{13.37}$$

Preuve. Soit $\alpha_\xi : x \in \mathbb{R} \to \alpha_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi x} = \alpha(\xi, x) = \alpha_x(\xi)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, comme $\alpha_\xi \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et μ est une mesure positive bornée, le réel $\langle \mu, \alpha_\xi \rangle$ est bien défini. Et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\mu}, \varphi \rangle = \langle \mu, \widehat{\varphi} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \mu(\xi), \langle \varphi(x), e^{-ix\xi} \rangle_{dx} \rangle_{d\xi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \varphi(x), \langle \mu(\xi), e^{-ix\xi} \rangle_{d\xi} \rangle_{dx} = \int_{x \in \mathbb{R}} \langle \mu(\xi), e^{-ix\xi} \rangle_{d\xi} \, \varphi(x) \, dx,
\end{aligned}$$

car on peut appliquer Fubini : ici la mesure est $dx \otimes \mu$, l'intégrant est $g : (x, \xi) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(x) e^{-ix\xi}$, il vérifie $|g(x, \xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\varphi(x)| \, |1_\mathbb{R}(\xi)|$, et $\varphi \otimes 1_\mathbb{R} \in L^1(\mathbb{R}^2, dx \otimes \mu)$ car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et μ mesure bornée. D'où (13.37).

Puis avec le théorème de convergence dominée, p est une fonction continue car $x \to e^{-ix\xi}$ est μ-intégrable (μ étant bornée), $\xi \to e^{-ix\xi}$ est continue, et $(x,\xi) \to e^{-ix\xi}$ est dominée indépendamment de ξ par la fonction μ-intégrable $1_{\mathbb{R}}$.

De plus p est borné par $\int_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu(\mathbb{R})$. Donc $p \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Puis, avec $|1-e^{ia}|^2 = (1-e^{ia})(1-e^{-ia}) = 2-2\cos a$, la fonction $\beta(a) = 2-2\cos a - a^2$ étant négative sur $\mathbb{R}$ (faire le tableau de variation), on obtient $|1-e^{ia}| \leqslant \min(\sqrt{2},|a|)$ (puisque $\leqslant \sqrt{2}$ est immédiat).

Et donc $|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| = |e^{-ix\xi}(1-e^{i\xi(x-y)})| \leqslant \min(2, |\xi(x-y)|)$, et donc, pour $|x-y| \leqslant \eta$:

$$|p(x)-p(y)| \leqslant |\int_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi})\,d\mu(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \min(2,|\xi|\eta)\,d\mu(\xi).$$

L'intégrant $(\xi,\eta) \to \min(2,|\xi|\eta)$ est borné par 2 indépendamment de η, donc le théorème de convergence dominée donne $\int_{\xi\in\mathbb{R}} \min(2,|\xi|\eta)\,d\mu(\xi) \longrightarrow_{\eta\to 0} \int_{\xi\in\mathbb{R}} \min(2,0)\,d\mu(\xi) = 0$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ t.q. $|x-y| \leqslant \eta$ entraine $|p(x)-p(y)| \leqslant \varepsilon$: la fonction p est uniformément continue. ∎

13.5 Transformée inverse dans $\mathcal{S}'$

13.5.1 L'inverse dans $\mathcal{S}'$

On rappelle (11.20) : $(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) = (\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,e^{+ix\xi}\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.

Sachant $\mathcal{F}$ est un isomorphisme sur $\mathcal{S}$, soit $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, on définit $\overline{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{S}'$ par, pour tout $T \in \mathcal{S}'$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle. \tag{13.38}$$

Comme pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $\overline{\mathcal{F}}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}$, et que $\mathcal{F} \in \mathcal{S}'$ (distribution tempérée) la fonctionnelle $\overline{\mathcal{F}}T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est bien une distribution tempérée : $\overline{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}'$.

Proposition 13.25 *On a $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I$ dans $\mathcal{S}'$: la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$; soit, pour tout $T \in \mathcal{S}'$, dans $\mathcal{S}'$:*

$$\mathcal{F}^{-1}(T) = \overline{\mathcal{F}}(T), \tag{13.39}$$

soit :

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(T) = \check{T}. \tag{13.40}$$

Preuve. Avec (13.38) et (11.20), on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \tag{13.41}$$

D'où $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$ et de même $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T$. On en déduit que $\mathcal{F}$ est inversible dans $\mathcal{S}'$ et que $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$. Et $\langle (\mathcal{F}\circ\mathcal{F})(T), \varphi\rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, \widehat{\widehat{\varphi}}\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle = \langle \check{T}, \varphi\rangle$. ∎

13.5.2 Transformée de Fourier de sinc (et de $1_{\mathbb{R}}$, e^{iax}, sin, cos)

Avec (13.20) on a déjà déduit (13.22), (13.27) et (13.28). On retrouve ces résultats avec la transformée de Fourier inverse.

Exemple 13.26 On sait que $\sqrt{2\pi}\,\widehat{\delta}_0 = 1_{\mathbb{R}}$, au sens $\sqrt{2\pi}\,\widehat{\delta}_0 = T_{1_{\mathbb{R}}}$ dans $\mathcal{S}'$, calcul direct immédiat, voir (13.11) et (13.8). On en déduit que $\widehat{1_{\mathbb{R}}} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\widehat{\delta}}_0 = \sqrt{2\pi}\,\check{\delta}_0 = \sqrt{2\pi}\,\delta_0$ dans $\mathcal{S}'$ (puisque $\delta_0 = \check{\delta}_0$), au sens $\widehat{T_{1_{\mathbb{R}}}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0$:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{\delta}_0 = 1_{\mathbb{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{1_{\mathbb{R}}} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0 \quad (\text{dans } \mathcal{S}'). \tag{13.42}$$

∎

Avec $\alpha > 0$ on a vu (calcul direct (10.17)) que $\widehat{1_{[-\alpha,\alpha]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\mathrm{sinc}_\alpha$, d'où avec (13.39) :

$$\widehat{\mathrm{sinc}_\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha}1_{[-\alpha,\alpha]}. \tag{13.43}$$

En particulier $\widehat{\mathrm{sinc}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,1_{[-1,1]}$.

Exercice 13.27 Préciser la démarche pour obtenir (13.43).

Réponse. $\widehat{1_{[-\alpha,\alpha]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\mathrm{sinc}_\alpha$ est une égalité entre fonctions. La fonction sinc_α n'est pas $L^1(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier n'est pas définie a priori. Mais $\mathrm{sinc}_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: soit $T_{\sin_\alpha}$ la distribution régulière associée. Comme sinc_α est bornée, $T_{\sin_\alpha} \in \mathcal{S}'$, et sa transformée de Fourier est définie dans $\mathcal{S}'$. L'égalité fonctionnelle $\widehat{1_{[-\alpha,\alpha]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\mathrm{sinc}_\alpha$ donne l'égalité $\widehat{T_{1_{[-\alpha,\alpha]}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha T_{\mathrm{sinc}_\alpha}$ dans $\mathcal{S}'$. D'où $\mathcal{F}(\widehat{T_{1_{[-\alpha,\alpha]}}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\mathcal{F}(T_{\mathrm{sinc}_\alpha})$ dans $\mathcal{S}'$. Comme $1_{[-\alpha,\alpha]}$ est paire, on obtient $T_{1_{[-\alpha,\alpha]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\widehat{T_{\mathrm{sinc}_\alpha}}$ dans $\mathcal{S}'$. Donc $\widehat{T_{\mathrm{sinc}_\alpha}}$ est une distribution régulière, et on note $1_{[-\alpha,\alpha]} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\widehat{\mathrm{sinc}_\alpha}$, soit (13.43). ▪

13.6 Transformée de Fourier : isométrie dans L^2

Les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ ne sont pas dans $L^1(\mathbb{R})$ en général : la fonction $x \to \frac{1}{1+|x|}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ (problème à l'infini). Et on ne peut pas définir brutalement leurs transformées de Fourier.

Par contre, les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ sont tempérées, voir (12.7). On a mieux :

Proposition 13.28 *La transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$, i.e. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est linéaire bijective, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$, et vérifie l'égalité de Parseval : pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:*

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R})} = (\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{13.44}$$

En particulier, l'énergie est conservée par transformée de Fourier : pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$||f||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{13.45}$$

Preuve. $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'est et $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $(\varphi_j)_\mathbb{N}$ suite de $\mathcal{S}$ tend vers f dans $L^2(\mathbb{R})$: $||f-\varphi_j||_{L^2} \longrightarrow_{j\to\infty} 0$.

1- Montrons que $(\widehat{\varphi}_j)_\mathbb{N}$ (qui est une suite de $\mathcal{S}$) est convergente dans $L^2(\mathbb{R})$: la suite $(\varphi_j)_\mathbb{N}$ étant convergente dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc, avec le théorème 11.18 (Parseval dans $\mathcal{S}$), $||\widehat{\varphi}_i-\widehat{\varphi}_j||_{L^2} = ||\varphi_i-\varphi_j||_{L^2} \longrightarrow_{i,j\to\infty} 0$. Donc $(\widehat{\varphi}_j)$ est une suite de Cauchy dans $(L^2(\mathbb{R}), ||.||_{L^2})$ espace complet. Donc $(\widehat{\varphi}_j)_\mathbb{N}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$. Notons $h = \lim_{j\to\infty}(\widehat{\varphi}_j) \in L^2(\mathbb{R})$.

2- La fonction f étant dans $L^2(\mathbb{R})$, la distribution régulière associée T_f est tempérée, et donc admet une transformée de Fourier. Montrons que $\widehat{T_f} = T_h$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{T_f} - T_h, \varphi\rangle &= \langle\widehat{T_f} - \widehat{T_{\varphi_j}}, \varphi\rangle + \langle\widehat{T_{\varphi_j}} - T_h, \varphi\rangle \\
&= \langle T_f - T_{\varphi_j}, \widehat{\varphi}\rangle + \langle T_{\widehat{\varphi_j}} - T_h, \varphi\rangle = \int_\mathbb{R} (f(x)-\varphi_j(x))\widehat{\varphi}(x)\,dx + \int_\mathbb{R} (\widehat{\varphi_j}(x) - h(x))\widehat{\varphi}(x)\,dx \\
&\leqslant ||f-\varphi_j||_{L^2}||\widehat{\varphi}||_{L^2} + ||\widehat{\varphi_j} - h||_{L^2}||\varphi||_{L^2} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0+0 = 0.
\end{aligned}$$

Donc la distribution $\widehat{T_f}$ est une distribution régulière : $\widehat{T_f} = T_h =^{\text{noté}} h = \lim_{j\to\infty}(\widehat{\varphi}_j) =^{\text{noté}} \widehat{f}$ (après "identification" d'une distribution régulière et de la fonction associée) : toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet une transformée de Fourier $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Et l'inverse $\mathcal{F}^{-1}$ est donné par les distributions tempérées.

Enfin (13.44) est vérifiée par continuité du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$: si $(\varphi_i) \to f$ et $(\psi_j) \to g$, alors $(\varphi_i, \psi_j)_{L^2} = (\widehat{\varphi}_i, \widehat{\psi}_j)_{L^2}$ donne, en faisant $i \to \infty$, $(f,\psi_j)_{L^2} = (\widehat{f}, \widehat{\psi}_j)_{L^2}$, qui donne, en faisant $j \to \infty$, $(f,g)_{L^2} = (\widehat{f},\widehat{g})_{L^2}$. ▪

13.7 Échange du produit simple et du produit de convolution pour les distributions

13.7.1 Préliminaire

On commence par un lemme de calcul basé sur le théorème de Fubini :

Lemme 13.29 *Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (à support compact) et si $T \in \mathcal{S}'$ (tempérée) alors $S * T$ est tempérée.*

Preuve. Si T est tempérée alors $\check{T}$ est tempérée (immédiat), d'où pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $\check{T} * \varphi$ est bien défini, cf. définition 12.21, et avec (9.25) :

$$(\check{T} * \varphi)(x) = \langle T, \tau_{-x}\varphi\rangle \qquad (= \langle T(t), \tau_{-x}\varphi(t)\rangle_{dt}),$$

d'où $|(\check{T} * \varphi\rangle)(x)| \leqslant Cp_{k,\ell}(\tau_{-x}\varphi) = Cp_{k,\ell}(\varphi)$, où C, k, ℓ dépendent de T, cf. (12.3).

D'où $|\langle S * T, \varphi\rangle| = \langle S, \check{T} * \varphi\rangle \leqslant Cp_{k,\ell}(\varphi)\langle S, 1_{\mathbb{R}}\rangle \leqslant D\, p_{k,\ell}(\varphi)$ avec $D = C\langle S, 1_{\mathbb{R}}\rangle$: $S * T$ est tempérée. ∎

13.7.2 Échange dans certains cas

Proposition 13.30 *1- Si $T \in \mathcal{S}'$ (distribution tempérée) et si f est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente alors fT est tempérée et on conserve (10.54) au sens de $\mathcal{S}'$:*

$$\widehat{fT} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{T} \quad \text{dans } \mathcal{S}', \tag{13.46}$$

soit $\mathcal{F}(fT) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(T)$. Et de même :

$$\mathcal{F}^{-1}(fT) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(T). \tag{13.47}$$

2- Si $S, T \in \mathcal{S}'$ et si $\hat{S}$ est une fonction C^∞ à croissante lente, alors on conserve les relations (10.53) au sens de $\mathcal{S}'$:

$$\widehat{S * T} = \sqrt{2\pi}\, \hat{S}\, \hat{T}, \tag{13.48}$$

i.e., $\mathcal{F}(S * T) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T)$. Et de même :

$$\mathcal{F}^{-1}(S * T) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}(S)\mathcal{F}^{-1}(T). \tag{13.49}$$

3- Pour $T \in \mathcal{S}'$ (tempérée) et $S \in \mathcal{E}'$ (à support compact), alors $S * T$ est tempérée, et on conserve (13.48).

Preuve. 1- Avec $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente (au plus polynomiale) on a $fT \in \mathcal{S}'$ (démonstration immédiate). Et par transformée de Fourier, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{fT}, \varphi\rangle = \langle fT, \hat{\varphi}\rangle = \langle T, f\hat{\varphi}\rangle \tag{13.50}$$

On vérifie que cela a bien un sens car $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ et donc $f\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Puis :

$$f\hat{\varphi} = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(f\hat{\varphi})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f * \overline{\mathcal{F}}(\hat{\varphi})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(\check{\hat{f}} * \varphi) \tag{13.51}$$

D'où avec (9.28) :

$$\langle \widehat{fT}, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle T, \mathcal{F}(\check{\hat{f}} * \varphi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle \hat{T}, \check{\hat{f}} * \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle \hat{T} * \hat{f}, \varphi\rangle \tag{13.52}$$

ceci étant vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a obtenu (13.46).

2- Dans ce cas $\hat{S}\hat{T}$ est une distribution tempérée, et (13.47) donne dans $\mathcal{S}'$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{S}\hat{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(\hat{S}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S * T.$$

D'où, en appliquant $\mathcal{F}$, on obtient (13.48) dans $\mathcal{S}'$.

3- Si $S \in \mathcal{E}'$ alors $\hat{S}$ est une fonction C^∞ à croissance lente, cf. proposition 13.9, et donc si $T \in \mathcal{S}'$, alors $\hat{S}\hat{T}$ a bien un sens. On procède à l'aide des étapes suivantes :

(i) Si S et T sont dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors $S \otimes T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ (à support compact, de support le produit cartésien des supports). D'où, l'exponentielle étant $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\widehat{S * T}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle (S * T)(x), e^{-ix\xi}\rangle_{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle S(x) \otimes T(y), e^{-i(x+y)\xi}\rangle_{dxdy} \\
&= \langle S(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle T(y), e^{-i(x+y)\xi}\rangle_{dy}\rangle_{dx} = \langle S(x), e^{-ix\xi}\, \hat{T}(\xi)\rangle_{dx} = \sqrt{2\pi}\hat{S}(\xi)\, \hat{T}(\xi)
\end{aligned} \tag{13.53}$$

et le cas des distributions à support compact est traité.

(ii) Supposons encore $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, avec maintenant $T \in \mathcal{S}'$. On sait, avec le lemme 12.20, qu'il existe une suite $T_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ qui converge faiblement vers T dans $\mathcal{S}'$. Et, à l'aide de (9.29), on a :

$$S * T_j \rightharpoonup S * T \quad \text{d'où} \quad \mathcal{F}(S * T_j) \rightharpoonup \mathcal{F}(S * T) \tag{13.54}$$

par continuité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$. D'où avec (i) et la continuité de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(S * T_j) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T_j) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(S * T_j) \rightharpoonup \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T) \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'. \tag{13.55}$$

D'où le résultat (13.48). Idem pour (13.49). ∎

Exemple 13.31 On peut retrouver les résultats de la proposition 13.15 : Pour $T \in \mathcal{S}'$ on a, si $l \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \widehat{T^{(l)}} = i^l\,\xi^l\,\widehat{T} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}(T^{(l)}) = (-i)^l\,\xi^l\,\overline{\mathcal{F}}(T), \\ (-i)^l\,\widehat{x^l\,T} = \widehat{T}^{(l)}, \\ \widehat{\tau_a T} = e^{-ia\xi}\,\widehat{T}, \\ \tau_a\widehat{T} = \widehat{e^{iax}T}. \end{cases} \tag{13.56}$$

(En particulier on retrouve (13.10).) En effet :

$$T' = \delta_0' * T \quad \text{d'où} \quad \widehat{T'} = \widehat{\delta_0' * T} = \sqrt{2\pi}\widehat{\delta_0'}\,\widehat{T} = i\,\xi\,\widehat{T}, \tag{13.57}$$

puisque $\mathcal{F}(\delta_0') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\xi$. De même, $\overline{\mathcal{F}}(\delta_0') = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}i\xi$ et donc $\overline{\mathcal{F}}(T') = -i\xi\,\overline{\mathcal{F}}(T)$. Puis par récurrence sur l. Et la deuxième relation s'en déduit, voir la proposition 13.15.

La troisième relation s'obtient comme :

$$\widehat{\tau_a T} = \mathcal{F}(\delta_a * T) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\delta_a)\mathcal{F}(T) = e^{-ia\xi}\,\mathcal{F}(T), \tag{13.58}$$

puisque $\delta_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{F}(\delta_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle \delta_a(x), e^{-ix\xi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ia\xi}$. Et la quatrième relation s'en déduit, voir la proposition 13.15. ∎

14 Application au traitement du signal

14.1 Transformée de Fourier utilisée

14.1.1 Définition

En traitement du signal, on utilise la transformée de Fourier donnée en (10.19), qui sera notée ici simplement $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = \widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i2\pi\nu t}\,dt, \tag{14.1}$$

la variable ν étant la fréquence (précédemment $\omega = 2\pi\nu$ était la pulsation).

Exercice 14.1 Montrer : si $f \in L^1$ vérifie $xf \in L^1$ alors $\widehat{f} \in C^1$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$(\widehat{f})'(\xi) = -2i\pi\widehat{(xf)}(\xi). \tag{14.2}$$

Si $f \in L^1$ vérifie $f' \in L^1$ alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\widehat{f}(\xi). \tag{14.3}$$

Si $f \in L^1$, si $m \in \mathbb{R}$, si $\tau_m f$ est la translaté de m, i.e. $\tau_m f(x) = f(x-m)$, alors :

$$\widehat{\tau_m f}(\xi) = e^{-2i\pi\xi m}\widehat{f}(\xi). \tag{14.4}$$

Réponse. (14.2) est obtenue par dérivation sous $\int$ (théorème de convergence dominée car $xf \in L^1$).

(14.3) est obtenue par intégration par parties :

$$\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f'(x)\,dx = +\int_{x\in\mathbb{R}} 2i\pi\xi\,e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx + [e^{-2i\pi\xi x} f(x)]_{-\infty}^{\infty},$$

le terme de bord s'annulant car f et f' dans L^1 donnent f s'annule en $\pm\infty$, cf. lemme 10.10 page 64.

Puis $\widehat{\tau_m f}(\xi) = \int_{x\in\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x-m)\,dx = \int_{y\in\mathbb{R}} f(y)e^{-2i\pi\xi(y+m)}\,dy$, d'où (14.4). ∎

Exercice 14.2 Montrer : la transformée de Fourier de la gaussienne $g_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est la gaussienne :

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2\sigma^2x^2} = \sigma\sqrt{2\pi}\, g_{\frac{2}{\pi\sigma}}(\xi). \tag{14.5}$$

En particulier la gaussienne $g_\pi(x) =^{\text{déf}} e^{-\pi x^2}$ est conservée par la transformée Fourier (14.1) :

$$g_\pi(x) = e^{-\pi x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{g_\pi}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}. \tag{14.6}$$

Et plus généralement, pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$:

$$g_{m,\sigma}(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{g}_{m,\sigma}(\xi) = \pi\sigma\, e^{-2i\pi m\xi}\, e^{-2\sigma^2\pi^2\xi^2}. \tag{14.7}$$

Réponse. Soit $g(x) = ce^{-ax^2}$. On dérive : $g'(x) = -c2ax\, e^{-ax^2}$. D'où :

$$g'(x) + 2ax\, g(x) = 0.$$

D'où par Fourier (qui est une transformation linéaire) : $\widehat{(g')}(\xi) + 2a\widehat{(xg)}(\xi) = 0$, d'où, avec (14.2) et (14.3), $2i\pi\,\xi\,\widehat{g}(\xi) + 2a\frac{1}{-2i\pi}\,(\widehat{g})'(\xi) = 0$, soit :

$$(\widehat{g})'(\xi) + 2\frac{\pi^2}{a}\,\xi\,\widehat{g}(\xi) = 0,$$

équation similaire à la précédente : $\widehat{g}(\xi) = ke^{-\frac{\pi^2}{a}x^2}$ est solution pour toute constante c. Avec $k = \widehat{g}(0) = \int_{x\in\mathbb{R}} g(x)e^{-2i\pi 0x}\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}} ce^{-ax^2}\,dx = c\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, cf. (10.36). D'où $\widehat{g}(\xi) = c\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}x^2}$.

En particulier pour $a = \pi$ on a (14.6).

En particulier pour $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ on a $k = c\sigma\sqrt{2\pi}$ et $\frac{\pi^2}{a} = 2\pi^2\sigma^2$, d'où (14.5).

Puis $g_{m,\sigma}(x) = g_\sigma(x-m) = \tau_m g(\sigma)$, d'où $\widehat{g_{m,\sigma}}(\xi) = e^{-2i\pi\xi m}\widehat{g_\sigma}(\xi)$, d'où (14.7). ∎

14.1.2 Fourier inverse

Ici :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\nu) = \overline{\mathcal{F}}(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{+i2\pi\nu t}\,dt = \mathcal{F}(f)(-\nu), \tag{14.8}$$

vérification similaire. En particulier :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(\nu) = f(-\nu). \tag{14.9}$$

14.1.3 Parseval

On a pour les fonctions $L^2(\mathbb{R})$:

$$(f,g)_{L^2} = (\widehat{f},\widehat{g})_{L^2}, \tag{14.10}$$

qui est une application de Fubini $\langle\varphi,\widehat{\psi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)\psi(\nu)e^{-2i\pi\nu t}\,dxdt = \langle\widehat{\varphi},\psi\rangle$ pour $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$, avec l'utilisation de Fourier inverse (on pose $f = \varphi$ et $\overline{g} = \widehat{\psi}$, et donc $\psi = \check{\overline{g}} = \overline{\widehat{g}}$).

14.1.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

$\mathcal{F}(T) = \widehat{T}$ est toujours définie par, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle\widehat{T},\varphi\rangle = \langle T,\widehat{\varphi}\rangle. \tag{14.11}$$

Et pour les distributions à support compact :

$$\widehat{T}(\nu) = \langle T(t), e^{-i2\pi\nu t}\rangle_{dt}, \tag{14.12}$$

Et $\widehat{T}$ est une fonction C^∞ à croissance au plus polynomiale.

14.1.5 Translatée

$$\widehat{\tau_c T} = e^{-2i\pi c.}\widehat{T}, \qquad \tau_c\widehat{T} = \widehat{e^{2i\pi c.}T}. \tag{14.13}$$

En effet $\langle\widehat{\tau_c T}(t),\varphi(t)\rangle_{dt} = \langle\tau_c T(\nu),\widehat{\varphi}(\nu)\rangle_{d\nu} = \langle T(\nu),\tau_{-c}\widehat{\varphi}(\nu)\rangle_{d\nu}$, avec $\tau_{-c}\widehat{\varphi}(\nu) = \widehat{\varphi}(\nu+c) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)e^{-2i\pi t(\nu+c)}\,dt = e^{-2i\pi tc}\widehat{\varphi}(\nu)$, d'où $\langle\widehat{\tau_c T}(t),\varphi(t)\rangle_{dt} = \langle e^{-2i\pi tc}\widehat{T}(t),\varphi(t)\rangle_{dt}$. Et

$\langle\tau_c\widehat{T},\varphi\rangle = \langle\widehat{T},\tau_{-c}\varphi\rangle = \langle T,\widehat{\tau_{-c}\varphi}\rangle$, avec $\widehat{\tau_{-c}\varphi}\rangle(\nu) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t+c)e^{-2i\pi t\nu}\,dt = \int_{\mathbb{R}}\varphi(s)e^{-2i\pi\nu(s-c)}\,ds = \widehat{e^{2i\pi c.}\varphi}(\nu)$, d'où $\langle\tau_c\widehat{T},\varphi\rangle = \langle\widehat{T},e^{2i\pi c.}\varphi\rangle$.

14.1.6 Convolée

Quand cela a un sens on a :

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}, \qquad \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}. \tag{14.14}$$

On le vérifie pour les fonction $L^1(\mathbb{R})$: pour la première :
$\int_{t\in\mathbb{R}}(\int_{u\in\mathbb{R}} f(u)g(t-u)\,du)e^{-2i\pi t}dt = \int_{s\in\mathbb{R}}\int_{u\in\mathbb{R}} f(u)g(s)e^{-2i\pi(s+u)}\,dudt.$

On en déduit $\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\widehat{\widehat{g}} = \check{f}\check{g}$, d'où $\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}(-t) = (fg)(t)$, d'où $(\widehat{f} * \widehat{g})(\nu) = \widehat{fg}(\nu)$.

Et dans le cas des distributions compatibles, voir paragraphes précédents.

14.1.7 Transformée de Fourier d'une Dirac δ_a et de $1_{\mathbb{R}}$

Proposition 14.3

$$\widehat{\delta}_a = e^{-2i\pi a.}, \qquad \widehat{\delta}_0 = 1_{\mathbb{R}}, \tag{14.15}$$

et on note $\widehat{\delta}_a(\nu) = e^{-2i\pi a\nu}$*, soit, pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}$ *:*

$$\langle \widehat{\delta}_a, \varphi\rangle \overset{noté}{=} \langle \widehat{\delta}_a(\nu), \varphi(\nu)\rangle_{d\nu} = \int_{\nu\in\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu a}\varphi(\nu)\,d\nu. \tag{14.16}$$

Preuve. On applique (14.12). ∎

Proposition 14.4

$$\widehat{e^{+i2\pi a.}} = \delta_a, \qquad \widehat{1}_{\mathbb{R}} = \delta_0, \tag{14.17}$$

soit, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ *:*

$$\varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle \widehat{e^{+i2\pi a.}}, \varphi\rangle \overset{noté}{=} \langle \widehat{e^{+i2\pi a.}}(t), \varphi(t)\rangle_{dt}.. \tag{14.18}$$

Preuve. On applique Fourier à (14.15) : $\check{\delta}_a = \widehat{\widehat{\delta}}_a = \widehat{e^{-2i\pi a.}}$, d'où $\delta_a = \widehat{e^{+2i\pi a.}}$. ∎

14.2 Le sinus cardinal

14.2.1 Définition

Les fonctions sinus cardinal sont définies pour $a > 0$ par :

$$\forall x \neq 0, \quad \mathrm{sinc}_a(x) = \frac{\sin(ax)}{ax} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sinc}_a(0) = 1. \tag{14.19}$$

Deux fonctions sinus cardinal se déduisent l'une de l'autre par changement d'échelle :

$$\mathrm{sinc}_a(x) = \mathrm{sinc}_1(ax).$$

On encore $\mathrm{sinc}_a(bx) = \mathrm{sinc}_b(ax) = \frac{\sin(abx)}{abx}$.

Ce sont des fonctions paires (trivial) qui sont $C^\infty(\mathbb{R})$ car la fonction sinus est développable en série entière au voisinage de 0, développement de la forme $\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec ε C^∞ en 0.

“La” fonction sinus cardinal est, suivant les conventions, soit donnée par $a = \pi$ soit donnée par $a = 1$.

14.2.2 Transformée de Fourier des portes centrées et décentrées

Proposition 14.5

$$\widehat{1_{[-a,a]}}(t) = \frac{\sin(2\pi at)}{\pi t} = 2a\,\mathrm{sinc}_{2\pi a}(t) \qquad \textit{et} \qquad \widehat{1_{[-\frac12,\frac12]}}(t) = \mathrm{sinc}_\pi(t), \tag{14.20}$$

avec $1_{[-\frac12,\frac12]}$ *la porte centrée de largeur* 1. *Et :*

$$\widehat{\mathrm{sinc}_{2\pi a}}(\nu) = \frac{1}{2a}\,1_{[-a,a]}(\nu) \qquad \textit{et} \qquad \widehat{\mathrm{sinc}_\pi}(x) = 1_{[-\frac12,\frac12]}(x) \tag{14.21}$$

Preuve. La fonction $1_{[-a,a]}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, et donc admet une transformée de Fourier dans $L^\infty(\mathbb{R})$. $\widehat{1_{[-a,a]}}(t) = \int_{\nu=-a}^{a} e^{-2i\pi\nu t}\,d\nu = [\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi t}]_{\nu=-a}^{a} = \frac{e^{2i\pi at}-e^{-2i\pi at}}{2i\pi t} = \frac{\sin(2\pi at)}{\pi t} = 2a\,\mathrm{sinc}_{2\pi a}(t)$, d'où (14.20).

Puis $\mathrm{sinc}_{2\pi a}$ définie une distribution tempérée (fonction bornée), et donc admet une transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$. Avec (14.9) : $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}_{2\pi a}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(1_{[-a,a]})) = \check{1}_{[-a,a]} = 1_{[-a,a]}$ car $1_{[-a,a]}$ est paire. D'où (14.21). ▪

Proposition 14.6 *Pour* $c \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{F}(\tau_c 1_{[-a,a]})(t) = \widehat{1_{[c-a,c+a]}}(t) = e^{-2i\pi ct}\;2a\,\mathrm{sinc}_{2\pi a}(t), \tag{14.22}$$

$$\mathcal{F}(\tau_c \mathrm{sinc}_{2\pi a})(\nu) = e^{-2i\pi c\nu}\,\frac{1}{2a}\,1_{[-a,a]}(\nu). \tag{14.23}$$

$$\mathcal{F}(e^{+2i\pi c\nu}\;2a\,\mathrm{sinc}_{2\pi a}(\nu))(t) = \widehat{1_{[c-a,c+a]}}(t), \tag{14.24}$$

Preuve. On a $\tau_c 1_{[-a,a]} = 1_{[c-a,c+a]}$. Et $\mathcal{F}(\tau_c T) = e^{-2i\pi c.}\widehat{T}$, d'où (14.22). ▪

14.2.3 Aires du sinus cardinal et de son carré

Proposition 14.7 *Pour* $a \neq 0$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_{2\pi a}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2_{2\pi a}(t)\,dt = \frac{1}{2a}, \tag{14.25}$$

et en particulier pour $a = \frac{1}{2}$ *et* $a = \frac{1}{2\pi}$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_{\pi}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2_{\pi}(t)\,dt = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_{1}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2_{1}(t)\,dt = \pi, \tag{14.26}$$

où on a noté sinc_b^2 *la fonction* $t \to \mathrm{sinc}_b^2(t) = (\mathrm{sinc}_b(t))^2$.

Preuve. Avec (14.21) on obtient :

$$\int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_{2\pi a}(t)\,dt = \widehat{\mathrm{sinc}_{2\pi a}}(0) = \frac{1}{2a}, \tag{14.27}$$

i.e.(14.25) première égalité. Puis par intégration par partie :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2}\sin^2(t)\,dt = -\int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{t} 2\cos t \sin t\,dx + [\frac{-1}{t}\sin^2(t)]_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2t}{t}\,dt = 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_2(t)\,dt = \pi.$$

D'où $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(2\pi at)}{(2\pi a)^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(y)}{(y)^2}\,\frac{dy}{2\pi a} = \frac{1}{2a}$. D'où (14.25) deuxième égalité. ▪

Remarque 14.8 (Manipulation de la convolution.) La fonction sinc est intégrable au sens de Riemann, cf. exercice 10.5. La convolution par la fonction constante $= 1_{\mathbb{R}}$ donne l'aire sous la courbe :

$$(\mathrm{sinc}_{2\pi a} * 1_{\mathbb{R}})(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_{2\pi a}(t) 1_{\mathbb{R}}(x-t)\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{sinc}_{2\pi a}(t)\,dt = c.$$

Donc $\mathrm{sinc}_{2\pi a} * 1_{\mathbb{R}} = c1_{\mathbb{R}}$ définie une distribution tempérée, et donc admet une transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$, et :

$$\mathcal{F}(\mathrm{sinc}_{2\pi a} * 1_{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}(c1_{\mathbb{R}}) = c\delta_0.$$

D'autre part, avec (13.48) et (14.21), on a :

$$\mathcal{F}(\mathrm{sinc}_{2\pi a} * 1_{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}(\mathrm{sinc}_{2\pi a})\mathcal{F}(1_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}\,\delta_0 = \frac{1}{2a}\delta_0,$$

car $1_{[-a,a]}(0) = 1$ et δ_0 est absorbant.

D'où $c1_{\mathbb{R}} = \mathrm{sinc}_{2\pi a} * 1_{\mathbb{R}} = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\mathrm{sinc}_{2\pi a} * 1_{\mathbb{R}})) = \frac{1}{2a}\bar{\mathcal{F}}(\delta_0) = \frac{1}{2a}1_{\mathbb{R}}$, i.e.(14.25) première égalité. ▪

14.2.4 Convergence du sinus cardinal vers δ_0

Posant $b = 2\pi a$, (14.25) se réécrit , pour tout $b > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} b\,\mathrm{sinc}_b(t)\,dt = \pi = \int_{\mathbb{R}} b\,\mathrm{sinc}_b^2(t)\,dt. \tag{14.28}$$

Les fonctions $b\,\mathrm{sinc}_b$ et $b\,\mathrm{sinc}_b^2$ ont une masse constante $= \pi$ (indépendante de b).

Proposition 14.9 *On a :*

$$b\,\mathrm{sinc}_b \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} \pi\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}', \tag{14.29}$$

$$b\,\mathrm{sinc}_b^2 \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} \pi\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'. \tag{14.30}$$

Par contre la suite $(\frac{1}{\pi}\,n\,\mathrm{sinc}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas considérée comme une approximation de l'identité (une suite régularisante) : elle n'est ni à support borné, ni positive, bien que de masse unité.

Et la suite $(\frac{n}{\pi}\mathrm{sinc}_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas considérée comme une approximation de l'identité (une suite régularisante) : elle n'est pas à support borné, bien que positive et de masse unité.

Preuve. $\widehat{1_{\mathbb{R}}} = \delta_0$, avec $1_{[-a,a]} \underset{a\to\infty}{\rightharpoonup} 1_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{S}'$ et $\widehat{1_{[-a,a]}} = 2a\mathrm{sinc}_{2\pi a}$, d'où $2a\,\dfrac{\sin(2\pi a x)}{2\pi a x} \underset{a\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_0$ dans $\mathcal{S}'$, donc $\dfrac{b}{\pi}\,\dfrac{\sin(bx)}{bx} \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_0$ dans $\mathcal{S}'$.

Et voir proposition 3.41 page 28 pour $b\,\mathrm{sinc}_b^2$: on pose $f(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}_1^2(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2(t)}{t^2}$, on a $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$, et $f_b(t) = bf(bt) = \dfrac{b}{\pi}\,\dfrac{\sin^2(bt)}{b^2t^2} = \dfrac{b}{\pi}\mathrm{sinc}_b^2(t) \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} \delta_0$ dans $\mathcal{S}'$. ∎

Proposition 14.10 *Pour $a, b > 0$ et tout $A, B \in \mathbb{R}$ quand $B \neq A$, on a dans $\mathcal{D}'$:*

$$\begin{aligned}
&b\,\tau_A\mathrm{sinc}_b \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} \pi\delta_A,\\
&b\,\tau_A\mathrm{sinc}_b^2 \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} \pi\delta_A,\\
&\tau_A\mathrm{sinc}_b\tau_A\mathrm{sinc}_a \underset{b\to\infty}{\rightharpoonup} 0,\\
&a\,\tau_A\mathrm{sinc}_a\ \tau_B\mathrm{sinc}_b \underset{a\to\infty}{\rightharpoonup} 0.
\end{aligned} \tag{14.31}$$

Preuve. $\tau_A f(x) = f(x-A)$ donne $a\,\tau_A f(x) = af(x-A) = \tau_A(abf)(x)$, et $\tau_A\delta_0 = \delta_A$, d'où les deux premières relations avec la proposition précédente.

Sachant sinc_a tempérée, on a $a\tau_A\mathrm{sinc}_a$ tempérée. Et comme $\mathrm{sinc}_b \in C^\infty(\mathbb{R})$ est bornée, on a $\tau_B\mathrm{sinc}_b$ bornée, et si $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $\tau_B\mathrm{sinc}_b\,\varphi \in \mathcal{S}$. D'où , avec (14.29) et $(14.31)_1$:

$$\langle a\tau_A\mathrm{sinc}_a\,\tau_B\mathrm{sinc}_b, \varphi\rangle = \langle a\tau_A\mathrm{sinc}_a, \tau_B\mathrm{sinc}_b\,\varphi\rangle \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \langle \pi\delta_A, \tau_B\mathrm{sinc}_b\,\varphi\rangle = \pi\,\tau_B\mathrm{sinc}_b(A)\varphi(A),$$

avec $\tau_B\mathrm{sinc}_b(A) = \mathrm{sinc}_b(A-B) = \frac{\sin(b(A-B))}{b(A-B)} \longrightarrow_{b\to\infty} 0$ quand $A \neq B$, d'où $(14.31)_4$. Et si $A = B$ alors $\tau_B\mathrm{sinc}_b(A) = \mathrm{sinc}_b(0) = 1$ et $a\langle\tau_A\mathrm{sinc}_a\,\tau_B\mathrm{sinc}_b, \varphi\rangle \longrightarrow_{a\to\infty} \pi\varphi(A)$, et donc $\langle\tau_A\mathrm{sinc}_a\,\tau_B\mathrm{sinc}_b, \varphi\rangle \longrightarrow_{a\to\infty} 0$, d'où $(14.31)_3$. ∎

14.3 Peigne de Dirac

14.3.1 Définition

Définition 14.11 Pour $a > 0$, on appelle peigne de Dirac de période a la distribution :

$$\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ka} = \dots + \delta_{-2a} + \delta_{-a} + \delta_0 + \delta_a + \dots, \tag{14.32}$$

définie sur les fonctions φ continues en les kA pour $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$\langle \Delta_a, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka) \overset{\text{noté}}{=} \langle \Delta_a(x), \varphi(x)\rangle_{dx}. \tag{14.33}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ le membre de droite de (14.33) est une somme finie (car φ est à support compact), et Δ_a est une distribution (immédiat).

Exercice 14.12 Montrer : pour $a > 0$:

$$\Delta_a(x) = \frac{1}{a}\Delta_1(\frac{x}{a}). \tag{14.34}$$

Réponse. $\langle \Delta_1(\frac{x}{a}), \varphi(x)\rangle_{dx} = \langle \Delta_1(x), a\varphi(ax)\rangle_{dx} = \sum_k a\langle \delta_k(x), \varphi(ax)\rangle_{dx} = a\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ax) = a\langle \Delta_a, \varphi\rangle$, où on a utilisé (3.55). ▪

Proposition 14.13 *Le peigne de Dirac est une distribution tempérée.*

Preuve. Pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on a :

$$|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)| = |\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)\varphi(k)\frac{1}{1+k^2}| \leqslant (\sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi(x)|) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2},$$

et donc $\langle \Delta_1, \varphi\rangle \leqslant C\, p_{20}(\varphi)$ où $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}$: Δ_1 est tempérée. Même démarche pour Δ_a. ▪

Remarque 14.14 Preuve alternative. Rappel : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Et donc
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k) = \varphi(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (k^2\varphi(k))\frac{1}{k^2} \leqslant p_{2,0}(\varphi)\,(1+\frac{\pi^2}{3})$. ▪

14.3.2 Ses transformées de Fourier : les formules sommatoires de Poisson

Soit $a > 0$.

Proposition 14.15 *Première formule de Poisson : dans $\mathcal{S}'$:*

$$\widehat{\Delta_a}(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2ik\pi a\nu}, \tag{14.35}$$

i.e., pour $\varphi \in \mathcal{S}$, avec $\langle \widehat{\Delta_a}, \varphi\rangle =^{\text{déf}} \langle \Delta_a, \widehat{\varphi}\rangle$:

$$\langle \widehat{\Delta_a}, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(ka) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\omega\in\mathbb{R}} \varphi(\nu)e^{-2ik\pi a\nu}\,d\nu \overset{\text{noté}}{=} \langle \widehat{\Delta_a}(\nu), \varphi(\nu)\rangle_{d\nu}.$$

Preuve. On a $\widehat{\delta}_{ka}(\nu) = e^{-2ik\pi a\nu}$ dans S'. Et la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est linéaire continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, d'où (14.35). Et $\langle \widehat{\Delta_a}, \varphi\rangle = \langle \Delta_a, \widehat{\varphi}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(ka)$. ▪

Proposition 14.16 *Deuxième formule de Poisson : dans $\mathcal{S}'$:*

$$\widehat{\Delta_a} = \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}, \tag{14.36}$$

Soit, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\sum_k \widehat{\varphi}(ak) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{k}{a}). \tag{14.37}$$

En particulier :

$$\widehat{\Delta_1} = \Delta_1, \tag{14.38}$$

i.e. pour $\nu = 1$ le peigne de Dirac est conservé par Fourier.

Preuve. Etablissons (14.38). On a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2ik\pi\nu} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2i(k+1)\pi\nu} = e^{-2i\pi\nu}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2ik\pi\nu}$, d'où par différence :

$$(1-e^{-2i\pi\nu})\widehat{\Delta_1} = 0, \qquad \text{dans } \mathcal{S}'. \tag{14.39}$$

Posons $g(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{\nu}$: le développement limité à tout ordre de l'exponentielle $e^{-2i\pi\nu}$ au voisinage des $\nu = k \in \mathbb{Z}$ indique que g est C^∞ au voisinage des entiers, et comme g est trivialement C^∞ ailleurs, on a $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Donc $1-e^{-2i\pi\nu} = \nu g(\nu)$ et (14.39) donnent, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \nu g\widehat{\Delta_1}(\nu), \varphi(\nu)\rangle = 0 = \langle \nu\widehat{\Delta_1}(\nu), g(\nu)\varphi(\nu)\rangle.$$

De plus g ne s'annule pas sur $]-1,1[$: $(e^{-2i\pi\nu})'(\nu) = -2i\pi e^{-2i\pi\nu} = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-2i\pi(\nu+h)} - e^{-2i\pi\nu}}{h}$ et donc $g(0) = 2i\pi \neq 0$, et pour $\nu \in]-1,1[$ la seule solution de $e^{-2i\pi\nu} = 1$ est $\nu = 0$. Donc toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ est de la forme $g\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: onc, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$:

$$\langle \nu\widehat{\Delta_1}, \psi\rangle = 0.$$

Donc :

$$\nu\widehat{\Delta_1} = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(]-1,1[),$$

donc, cf. (5.13) :

$$\exists c_0, \quad \widehat{\Delta_1} = c_0\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(]-1,1[).$$

Même démarche dans $\mathcal{D}'(]0,2[)$ et dans tous les $\mathcal{D}'(](k-1),(k+1)[)$: finalement :

$$\exists (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \qquad \widehat{\Delta_1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta_k \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{14.40}$$

Puis on considère la fonction porte $1_{]k-\frac12,k+\frac12[}$: cette fonction n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, mais peut-être régularisée : on pourra refaire tous les calculs qui suivent avec la régularisée par convolution avec γ_1, ce qui ici n'est pas nécessaire car pour la masse de Dirac δ_k il suffit de considérer des fonctions continues en k. On a avec (14.40) :

$$\langle \widehat{\Delta_1}, 1_{]k-\frac12,k+\frac12[}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\langle \delta_m, 1_{]k-\frac12,k+\frac12[}\rangle = \langle c_k\delta_k, 1_{]k-\frac12,k+\frac12[}\rangle = c_k,$$

avec $\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\delta_m = \sum_{m+k\in\mathbb{Z}} c_{m+k}\delta_{m+k}$ et donc, pour tout k, on a $\langle \widehat{\Delta_1}, 1_{]k-\frac12,k+\frac12[}\rangle = c_0 = c_k$, et donc :

$$\widehat{\Delta_1} = c_0 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{14.41}$$

Puis :

$$\langle \widehat{\Delta_1}, 1_{]-\frac12,\frac12[}\rangle = \langle \Delta_1, \widehat{1_{]-\frac12,\frac12[}}\rangle = \langle \sum_k \delta_k, \widehat{1_{]-\frac12,\frac12[}}\rangle = \sum_k \widehat{1_{]-\frac12,\frac12[}}(k),$$

avec $\widehat{1_{]-\frac12,\frac12[}}(t) = \mathrm{sinc}_\pi(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi t}$ donne $\widehat{1_{]-\frac12,\frac12[}}(0) = 1$ et $\widehat{1_{]-\frac12,\frac12[}}(k) = 0$, d'où :

$$\langle \widehat{\Delta_1}, 1_{]-\frac12,\frac12[}\rangle = 1,$$

et donc $c_0 = 1$ et :

$$\widehat{\Delta_1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k = \Delta_1. \tag{14.42}$$

Puis :

$$\langle \Delta_a, \widehat{\varphi}\rangle = \sum_k \widehat{\varphi}(ka) = \sum_k \widehat{\psi}(k) = \langle \Delta_1, \widehat{\psi}\rangle = \langle \widehat{\Delta}_1, \psi\rangle = \langle \Delta_1, \psi\rangle,$$

où on a posé :

$$\widehat{\psi}(\nu) = \widehat{\varphi}(a\nu) \qquad \text{et donc} \qquad \psi(t) = \frac1a \varphi(\frac ta).$$

D'où :

$$\langle \widehat{\Delta}_a, \varphi\rangle = \langle \Delta_1, \psi\rangle = \sum_k \frac1a \varphi(\frac ka) = \frac1a \sum_k \langle \delta_{\frac ka}, \varphi\rangle,$$

vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, d'où (14.36). ∴

Corollaire 14.17 *Pour $S \in \mathcal{E}'$ (à support borné), comme $\Delta_a \in \mathcal{S}'$ (est tempérée), on a $S * \Delta_a \in \mathcal{S}'$ (est tempérée), et $S * \Delta_a$ est somme de sa série de Fourier :*

$$(S * \Delta_a)(t) = \frac1a \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(\frac ka)\, e^{2i\frac ka \pi t}. \tag{14.43}$$

Preuve. Avec $\widehat{S} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (car S à support compact), posant $b = \frac1a$, sachant que δ_{kb} est absorbant et que $\mathcal{F}(e^{2i\pi kb.}) = \delta_{kb}$, on a :

$$\mathcal{F}(S * \Delta_a) = \widehat{S}\,\widehat{\Delta_a} = b\,\widehat{S}\,\Delta_b = b\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(kb)\delta_{kb} = b\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(k\omega)\mathcal{F}(e^{2i\pi kb.}) = \mathcal{F}(b\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(kb)e^{2ik\pi b.}),$$

par linéarité et continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'$. D'où (14.43) en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$. ∴

14.3.3 Peigne de Dirac et distributions périodiques

Définition 14.18 Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite périodique ssi il existe $a \geqslant 0$ telle que $\tau_a T = T$.

Et on dit alors que T est périodique de période a quand a est le plus petit réel vérifiant $\tau_a T = T$.

(On exclut souvent le cas $T =$ constante, i.e. on parle de distribution périodique quand $a > 0$.)

Exemple 14.19 Δ_a est périodique de période a. ▲

Exemple 14.20 Soit $T_f =^{\text{noté}} f$ la distribution régulière associée à une fonction périodique $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de période a. Montrons :

$$f = f1_{[0,a]} * \Delta_a. \tag{14.44}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{ka}^{(k+1)a} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^a f(y{+}ka)\,\varphi(y{+}ka)\,dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^a f(y)\,\varphi(y{+}ka)\,dy = \int_0^a f(y)\,(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(y{+}ka))\,dx \\
&= \int_0^a f(y)\,(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\delta_{ka} * \varphi)(y))\,dy = \int_0^a f(y)\,((\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ka}) * \varphi)(y)\,dy,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f1_{[0,a]}, \Delta_a * \varphi\rangle = \langle f1_{[0,a]} * \Delta_a, \varphi\rangle,$$

car $\check{\Delta}_a = \Delta_a$ et $f1_{[0,a]}$ étant à support compact le produit tensoriel est bien défini. ▲

Le théorème suivant généralise cet exemple :

Théorème 14.21 *Soit T est une distribution périodique. Si sa période est $a > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $S \in \mathcal{E}'$ (distribution à support compact) t.q. $\text{supp}(S) \subset [-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et t.q. :*

$$T = S * \Delta_a, \tag{14.45}$$

et donc T est tempérée.

Et on peut prendre $\varepsilon = 0$ quand T est une distribution périodique régulière, i.e. quand $T = T_f$ avec f périodique de période a.

(Dans le cas d'une distribution périodique quelconque, on ne sait pas prendre $\varepsilon = 0$.)

Preuve. Contrairement à l'exemple 14.20, on ne peut pas tronquer brutalement par $1_{[0,a]}$ (la fonction $1_{[0,a]}$ n'est pas C^∞ et le produit $T1_{[0,1]}$ n'a pas de sens).

On commence par régulariser $1_{[0,a]}$ en posant $\varphi = \gamma_n * 1_{[0,a]}$ où γ_n est l'approximation de l'identité δ_0 (pour le produit de convolution) donnée par (2.25), avec n assez grand pour que $\frac{1}{n} < \frac{a}{2}$. On a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et φT a un sens, avec $\text{supp}(\varphi T) \subset [-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]$. Montrons que :

$$T = (\varphi T) * \Delta_a \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

et donc que $S = \varphi T$ convient.

On a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{ka}\varphi(x) = 1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{-ka}\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cf. (2.35).

On a $\varphi T \in \mathcal{E}'$ et $\Delta_a \in \mathcal{D}'$ et donc $(\varphi T) * \Delta_a$ est bien défini. D'où, sachant que $\Delta_a = \check{\Delta}_a$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle (\varphi T) * \Delta_a, \psi\rangle = \langle \varphi T, \Delta_a * \psi\rangle = \langle \varphi T, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{ak}\psi\rangle = \langle T, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\,\tau_{ak}\psi\rangle,$$

avec $\sum_k \varphi(x)\tau_{ak}\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x)\psi(x{-}ak) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x{+}ak)\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{-ak}\varphi(x)\psi(x) = \psi(x)$, et donc :

$$\langle (\varphi T) * \Delta_a, \psi\rangle = \langle T, \psi\rangle,$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. D'où $T = (\varphi T) * \Delta_a$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et $S = \varphi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ convient.

Puis Δ_a étant tempérée et S étant compact, $\Delta_a * S$ est tempérée, cf. proposition 13.30.

Cas particulier d'une distribution régulière : c'est l'exemple 14.20. ▲

Exemple 14.22 $T = \Delta_a$ est périodique, et $\Delta_a = \delta_0 * \Delta_a$, donc $S = \delta_0$ convient, ainsi que $S = \delta_{ka}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. ▪

Corollaire 14.23 *Si T est périodique non nulle, alors sa transformée de Fourier $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$ n'est jamais une fonction, mais est de la forme :*

$$\widehat{T} = \frac{1}{a} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(\frac{k}{a})\delta_{\frac{k}{a}}, \tag{14.46}$$

où S est donnée dans le théorème précédent.

Preuve. Sachant $\tau_a T = T$, si $\widehat{T}$ était une fonction on aurait $e^{-2i\pi a\xi}\widehat{T}(\xi) = \widehat{T}(\xi)$ pour tout ξ, cf. (13.26), soit donc $(1 - e^{-2i\pi a\xi})\widehat{T}(\xi) = 0$. Et donc $\widehat{T}(\xi) = 0$ presque partout. Absurde si T est une fonction non nulle.

Et comme T est de la forme (14.45), Et $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(S * \Delta_a) = \widehat{S}\widehat{\Delta_a}$, et (14.36) donne (14.46). ▪

14.4 Distributions à support borné et théorème de Shannon

14.4.1 L'espace V_B

On note :

$$V_B = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\widehat{f}) \subset [-B, B]\} \tag{14.47}$$

le sous-ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support borné dans $[-B, B]$: on dit que f est à largeur de bande limité en fréquence, ici largeur de bande $2B$, et de largeur de demi-bande B.

Exemple 14.24 La fonction $f = \text{sinc}_{2\pi B}$ est dans V_B est dans V_B car $\mathcal{F}(\text{sinc}_{2\pi B})(\nu) = \frac{1}{2B} 1_{[-B,B]}(\nu)$, cf. (14.21) : le support de $\widehat{f}$ est borné.

Et $\mathcal{F}(\tau_s f)(\nu) = \mathcal{F}(\tau_s \text{sinc}_{2\pi B})(\nu) = e^{-2i\pi c\nu}\mathcal{F}(\text{sinc}_{2\pi B})(\nu) = \frac{1}{2B}e^{-2i\pi c\nu} 1_{[-B,B]}(\nu)$, cf. (14.13). Donc $\widehat{\tau_s f} \in V_B$ et $\widehat{\tau_s f}$ a même support que $\widehat{f}$. ▪

Ce dernier exemple est général :

Lemme 14.25 *Toutes les fonctions de V_B sont $C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente (croissance au plus polynomiale). Et si $f \in V_B$ alors toutes ses translatées vérifient $\tau_s f \in V_B$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$\text{supp}(\widehat{\tau_s f}) = \text{supp}(\widehat{f}). \tag{14.48}$$

Preuve. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ existe dans $L^2(\mathbb{R})$.

Et pour $f \in V_B$ on a $\widehat{f} \in \mathcal{E}'$, donc $\widehat{\widehat{f}} = \check{f}$ est $C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente, cf. proposition 13.9. Donc f est C^∞ à croissance lente. Et $\tau_s f(t) \overset{\text{déf}}{=} f(t - s)$ vérifie :

$$\widehat{\tau_s f}(\nu) = e^{-i2\pi s}\widehat{f}(\nu),$$

cf. (14.13). D'où (14.48). ▪

14.4.2 Les fonctions w_k de Shannon

On note :

$$w_0(t) = \sqrt{2B}\,\text{sinc}_{2\pi B}(t) \qquad (= \sqrt{2B}\,\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}), \tag{14.49}$$

On a $w_0(0) = \sqrt{2B}$ et $w_0(\frac{k}{2B}) = 0$ pour tout k. Et pour $k \in \mathbb{Z}$ on considère ses translatées :

$$w_k = \tau_{\frac{k}{2B}} w_0, \tag{14.50}$$

i.e. :

$$w_k(t) = \sqrt{2B}\,\text{sinc}_{2\pi B}(t - \frac{k}{2B}) \qquad (= \sqrt{2B}\,\frac{\sin(2\pi Bt - k\pi)}{2\pi Bt - k\pi}), \tag{14.51}$$

donc telles que $w_k(\frac{k}{2B}) = \sqrt{2B}$ et $w_k(\frac{\ell}{2B}) = 0$ pour tout $k \neq \ell$.

Exercice 14.26 Montrer : $\widehat{w_0} = \frac{1}{\sqrt{2B}}\,1_{[-2B,2B]}$ et $\widehat{w_k} = \frac{1}{\sqrt{2B}}\,e^{-i\pi\frac{k}{B}}1_{[-2B,2B]}$.

Réponse. Avec (14.21), $\widehat{w_0}(\nu) = \sqrt{2B}\,\widehat{\mathrm{sinc}_{2\pi B}}(\nu) = \sqrt{2B}\,\frac{1}{2B}1_{[-2B,2B]}(\nu)$.

Et $\widehat{w_k}(\nu) = \widehat{\tau_{\frac{k}{2B}}w_0}(\nu) = e^{-2i\pi\frac{k}{2B}}\widehat{w_0}(\nu)$ ∎

Lemme 14.27 *(de Shannon.) On a :*

$$w_0 * w_0 = \frac{1}{\sqrt{2B}}\,w_0, \tag{14.52}$$

et la famille $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $(V_B,(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R})})$.

Preuve. On a, avec (14.20), $\widehat{1_{[-B,B]}}(x) = 2B\,\mathrm{sinc}_{2\pi B}(x) = \sqrt{2B}\,w_0(x)$. Donc $(w_0 * w_0) = \frac{1}{2B}(\widehat{1_{[-B,B]}} * \widehat{1_{[-B,B]}}) = \frac{1}{2B}\mathcal{F}(1_{[-B,B]}.1_{[-B,B]}) = \frac{1}{2B}\mathcal{F}(1_{[-B,B]}) = \frac{1}{\sqrt{2B}}\,w_0$.

On a :

$$\begin{aligned}(w_k,w_\ell)_{L^2} &= 2B\int_{t\in\mathbb{R}}\mathrm{sinc}_{2\pi B}(t-\frac{k}{2B})\mathrm{sinc}_{2\pi B}(t-\frac{\ell}{2B})\,dt\\ &= 2B\int_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{sinc}_{2\pi B}(x)\mathrm{sinc}_{2\pi B}(x-\frac{\ell-k}{2B})\,dx = (w_0,w_{\ell-k})_{L^2}.\end{aligned}$$

Et comme w_0 est paire ($w_0(-x) = w_0(x)$) on a :

$$(w_0,w_m)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} w_0(t)w_0(t-\frac{m}{2B})\,dt = \int_{\mathbb{R}} w_0(t)w_0(\frac{m}{2B}-t)\,dt = (w_0 * w_0)(\frac{m}{2B}) = \frac{1}{\sqrt{2B}}\,w_0(\frac{m}{2B}).$$

D'où si $m = 0$ alors $||w_m||^2_{L^2} = ||w_0||^2_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2B}}\,w_0(0) = 1$, et si $m \ne 0$, alors $(w_k,w_\ell)_{L^2} = 0$ car $w_0(\frac{m}{2B}) = 0$ pour $m \ne 0$. Et la famille $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bien orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$. ∎

14.4.3 Théorème de Shannon pour $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 14.28 *(Echantillonnage de Shannon.) $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne (base orthonormée) de $(V_B,(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R})})$, autrement dit, toute fonction $f \in V_B$ se décompose sur la base orthogonale (non normée) des sinus cardinaux, avec :*

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2B})\,\mathrm{sinc}_{2\pi B}(t-\frac{k}{2B}) \qquad (= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2B})\,\frac{\sin(2\pi Bt-\pi k)}{2\pi Bt-\pi k}), \tag{14.53}$$

et les $f(\frac{k}{2B})$ sont les composantes de f sur la base orthogonale $(\tau_{\frac{k}{2B}}\mathrm{sinc}_{2\pi B})_{k\in\mathbb{Z}}$ (base non normée). Et ainsi f (et $\widehat{f}$ en appliquant Fourier à (14.53)) est entièrement déterminée par un nombre dénombrable de réels, les $(f(\frac{k}{2B}))_{k\in\mathbb{Z}}$, "son échantillonage sur la grille $\frac{1}{2B}\mathbb{Z}$".

Ou encore, en considérant Fourier inverse, si $g \in L^2([-B,B];\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier $\widehat{g} \in V_B$ est entièrement déterminée par "son échantillonage sur la grille $\frac{1}{2B}\mathbb{Z}$" (par ses valeurs ponctuelles $\widehat{g}(\frac{k}{2B})$, $k \in \mathbb{Z}$).

Et la décomposition sur la b.o.n. $(w_k)_{\mathbb{Z}}$ donne la norme L^2 : pour $f \in V_B$, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2B}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2B})\,w_k(t), \qquad \text{avec} \qquad ||f||^2_{L^2} = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\frac{k}{2B}), \tag{14.54}$$

et les $\frac{1}{\sqrt{2B}}f(\frac{k}{2B})$ sont les composantes de f sur la base orthonormale $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Et en appliquant la transformée de Fourier, $\widehat{f}$ est donnée par :

$$\forall \nu \in [-B,B], \qquad \widehat{f}(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2B}\,f(-\frac{k}{2B})\,e^{i\frac{\pi k}{B}\nu}, \tag{14.55}$$

soit :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{f}(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2B}\,f(-\frac{k}{2B})\,e^{i\frac{\pi k}{B}\nu}1_{[-B,B]}(\nu). \tag{14.56}$$

Et on a ainsi un isomorphisme :

$$\begin{cases} B_V \longleftrightarrow \ell^2 \\ f \mapsto (f(\frac{k}{2B}))_{k\in\mathbb{Z}}. \end{cases} \tag{14.57}$$

(Et même l'isométrie $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2B}}(f(\frac{k}{2B}))_{k\in\mathbb{Z}}$.)

Preuve. Disposant du lemme de Shannon, il s'agit de montrer que la famille $(w_k)_{\mathbb{Z}}$ est génératrice dans V_B. Pour ce, il suffit de montrer que (14.54) est vraie pour toute fonction $f \in V_B$. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \in [-B, B]$, on a $\widehat{f} \in L^2([-B, B])$ et on dispose du développement en série de Fourier, cf. (10.6) : pour (presque tout) $\nu \in [-B, B]$ (intervalle de longueur $2B$) :

$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{\frac{2ik\pi}{2B}\nu}, \qquad \text{où} \qquad c_k = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} \widehat{f}(\nu) e^{\frac{-2ik\pi}{2B}\nu}\, d\nu. \tag{14.58}$$

Et ayant $\mathrm{supp}\widehat{f} \subset [-B, B]$, donc que $\widehat{f} = \widehat{f} 1_{[-B,B]}$, on déduit :

$$c_k = \frac{1}{2B}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu) e^{\frac{-2ik\pi}{2B}\nu}\, d\nu = \frac{1}{2B}\widehat{\widehat{f}}(\frac{k}{2B}) = \frac{1}{2B}\, f(-\frac{k}{2B}). \tag{14.59}$$

D'où (14.55) et (14.56). Puis :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{\frac{i\pi k}{B}\cdot}1_{[-B,B]})(t) &= (\mathcal{F}(e^{\frac{2i\pi k}{2B}\cdot}) * \mathcal{F}(1_{[-B,B]}))(t) \\
&= (\delta_{\frac{k}{2B}} * 2B\, \mathrm{sinc}_{2\pi B})(t) = 2B\ \tau_{\frac{\pi k}{B}} \mathrm{sinc}_{2\pi B}(t) \\
&= \sqrt{2B}\ \tau_{\frac{\pi k}{B}} w_0(t) = \sqrt{2B}\ w_k(t).
\end{aligned}$$

Et donc :

$$f(-t) = \widehat{\widehat{f}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2B}\ f(-\frac{k}{2B})\sqrt{2B}\ w_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2B}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-\frac{k}{2B})\ w_k(t),$$

et donc :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2B}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2B})\ w_{-k}(-t),$$

avec $w_{-k}(-t) = w_0(-t + \frac{k\pi}{B}) = w_0(t - \frac{k\pi}{B}) = w_k(t)$ puisque w_0 est paire. D'où (14.54). ∎

Corollaire 14.29 *Quand $f \in V_B$, on a :*

$$\forall C \geqslant B, \qquad f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2C})\ \tau_{\frac{k}{2C}} \mathrm{sinc}_{2\pi C}(t - \frac{k}{2C}) \tag{14.60}$$

Preuve. Pour $C \geqslant B$ et $f \in V_B$ on a trivialement $f \in V_C$. ∎

Remarque 14.30 Théorème de Paley–Wiener : une fonction f est dans V_B ssi c'est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière $F(z)$ telle que $\left(\int_{\mathbb{R}} |F(s + i\tau)|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ce^{B\tau}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, C étant une constante indépendant de τ. On ne s'en servira pas ici. ∎

14.4.4 Théorème de Shannon pour les fonctions trigonométriques

Prenons le cas de la fonction $\sin(2\pi Bt) = \frac{e^{2i\pi Bt} - e^{-2i\pi Bt}}{2i}$, qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ mais dont la transformée de Fourier $\frac{\delta_B - \delta_{-B}}{2i}$ est une distribution à support compact dans $[-B, B]$.

Si (14.54) était vraie, on aurait $\sin(2\pi Bt) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(2\pi B(\frac{k}{2B}))\ \frac{\sin(2\pi Bt - k\pi)}{2\pi Bt - k\pi} = 0$ pour tout t car $\sin(k\pi) = 0$ pour tout k. C'est absurde. Donc (14.54) est faux pour la fonction sinus (qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$).

On devra se contenter de (14.60) avec $C > B$:

Théorème 14.31 *Soit $e_B(t) = e^{2i\pi Bt}$. Si $C > |B|$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :*

$$e_B(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_B(\frac{k}{2C})\, \mathrm{sinc}_{2\pi C}(t - \frac{k}{2C}), \tag{14.61}$$

i.e. à condition de prendre $C > |B|$, la fonction $e_B = e^{2i\pi Bt}$ est décomposable sur les fonctions $(t \to \mathrm{sinc}_{2\pi C}(t - \frac{k}{2C}))_{k\in\mathbb{Z}}$.

Et, par linéarité, si $f = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2i\pi B_k t}$ (somme finie), où les B_k, c_k sont des réels, on a :

$$\text{si} \quad C > \max_{k=-N,N} |B_k| \quad \text{alors} \quad f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2C})\, \mathrm{sinc}_{2\pi C}(t - \frac{k}{2C}), \tag{14.62}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $g = e_B 1_{]-C,C[}$ la fonction tronquée. Cette fonction est dans $L^2([-C,C])$ et a donc pour série de Fourier, au sens presque partout dans $]-C,C[$:

$$g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{2i\pi k}{2C}t}, \qquad \text{où} \qquad c_k = \frac{\sin(2\pi BC - \pi k)}{2\pi BC - \pi k},$$

car :

$$c_k = \frac{1}{2C}\int_{-C}^{C} g(t)e^{-2i\pi\frac{k}{2C}t}\,dt = \frac{1}{2C}\int_{-C}^{C} e^{2i\pi(B-\frac{k}{2C})t}\,dt = \frac{1}{2C}\frac{e^{2i\pi(B-\frac{k}{2C})C} - e^{-2i\pi(B-\frac{k}{2C})C}}{2i\pi(B-\frac{k}{2C})}.$$

Et la fonction g étant C^1 dans $]-C,C[$, $g(t)$ est égal à sa série de Fourier : pour tout $t \in]-C,C[$:

$$\forall t \in]-C,C[, \qquad g(t) = e_B(t) = e^{2i\pi Bt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi BC - \pi k)}{2\pi BC - \pi k}\, e^{\frac{2i\pi k}{2C}t}.$$

Et ceci est vrai quel que soit $B \in \mathbb{R}$. Donc, en inversant les notations $t \leftrightarrow B$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall B \in]-C,C[, \quad e^{2i\pi Bt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\frac{2i\pi kB}{2C}} \frac{\sin(2\pi tC - \pi k)}{2\pi tC - \pi k}.$$

∴

14.4.5 Théorème de Shannon pour les $T \in \mathcal{S}'$ t.q. $\widehat{T} \in \mathcal{E}'$

On peut avoir des problèmes avec les bords du support de T. L'idée est donc, dans (14.60), de remplacer $\mathrm{sinc}_{2\pi C}(t) = \frac{1}{2C}\mathcal{F}(1_{[-C,C]})$ par :

$$\psi(t) = \frac{1}{2C}\mathcal{F}(\gamma_n * 1_{[-C,C]}), \tag{14.63}$$

où n est fixé et γ_n donnée par (2.25) régularise $1_{[-C,C]}$.

Lemme 14.32 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\widehat{T}) \subset [-B,B]$ où $B > 0$.*

Alors T est (identifiée à) une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente (croissance au plus polynomiale), et si $C > B$, alors T est entièrement déterminée par la suite dénombrable des ses valeurs $T(\frac{k}{2C})$:

$$T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T(\frac{k}{2C})\,\psi(t-\frac{k}{2C}), \tag{14.64}$$

où n vérifie $\frac{1}{n} \leqslant \min(B, C-B)$ (à comparer avec (14.60)).

Preuve. Pour $C > B$ on prend n t.q. $\frac{1}{n} < C-B$: donc $[-C+\frac{1}{n}, C-\frac{1}{n}] \supset [-B,B]$, et donc $\varphi = \gamma_n * 1_{[-C,C]}$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-B,B]$ (et qui est nulle sur $\mathbb{R} - [-C-\frac{1}{n}, C+\frac{1}{n}]$).

Montrons que $\widehat{T}$ est la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\widehat{T} = \varphi(\widehat{T} * \Delta_{2C}). \tag{14.65}$$

Comme "$\tau_c(fg) = (\tau_c f)(\tau_c g)$" car "$\tau_c(fg)(x) = f(x-c)g(x-c) = \tau_c f(x)\tau_c g(x)$", et comme $\Delta_{2C} = \check{\Delta}_{2C}$ on a, pour tout $\zeta \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\langle \varphi(\widehat{T} * \Delta_{2C}), \zeta\rangle &= \langle \widehat{T} * \Delta_{2C}, \varphi\zeta\rangle = \langle \widehat{T}, \Delta_{2C} * (\varphi\zeta)\rangle = \langle \widehat{T}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2Ck}(\varphi\zeta)\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \widehat{T}, \tau_{2Ck}(\varphi\zeta)\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle (\tau_{2Ck}\varphi)\widehat{T}, \tau_{2Ck}\zeta\rangle,\end{aligned}$$

avec $\widehat{T}$ qui est nul sur $\mathcal{D}(]-C+\frac{1}{n}, C-\frac{1}{n}[)$ (car $\mathrm{supp}T \subset]-C+\frac{1}{n}, C-\frac{1}{n}[\supset [-B,B]$), et avec $\varphi(\nu-2Ck) = 0$ quand $\nu \notin [-C+2Ck-\frac{1}{n}, C+2Ck+\frac{1}{n}]$ (car φ est nulle quand $\nu \notin [-C-\frac{1}{n}, C+\frac{1}{n}]$. Donc $(\tau_{2Ck}\varphi)\widehat{T}$ est nul pour tout $k \neq 0$. Donc le seul terme non nul de la somme est le terme pour k=0, à savoir $\langle \widehat{T}\varphi, \zeta\rangle = \langle \widehat{T}, \zeta\rangle$ car $\varphi = 1$ sur $\mathrm{supp}T$:

$$\langle \varphi(\widehat{T} * \Delta_{2C}), \zeta\rangle = \langle \widehat{T}, \zeta\rangle.$$

On en déduit, sachant $\zeta = \hat{\hat{\hat{\hat{\zeta}}}}$ pour tout $\zeta \in \mathcal{S}$:

$$\langle T, \zeta\rangle = \langle \widehat{T}, \hat{\hat{\hat{\zeta}}}\rangle = \langle \varphi(\widehat{T} * \Delta_{2C}), \hat{\hat{\hat{\zeta}}}\rangle = \langle \widehat{T} * \Delta_{2C}, \varphi\hat{\hat{\hat{\zeta}}}\rangle.$$

D'où avec (14.43) :

$$\langle T, \zeta\rangle = \frac{1}{2C}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\hat{T}}(\frac{k}{2C})\langle e^{\frac{2ik\pi\nu}{2C}}, \varphi(\nu)\hat{\hat{\zeta}}(\nu)\rangle_{d\nu} = \frac{1}{2C}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\hat{T}}(\frac{k}{2C})\langle \mathcal{F}(e^{\frac{2ik\pi\nu}{2C}}\varphi(\nu))(t), \check{\zeta}(t)\rangle_{dt}.$$

Et avec $\mathcal{F}(e^{\frac{2ik\pi.}{2C}}\varphi) = \tau_{\frac{k}{2C}}\widehat{\varphi}$ et avec $\hat{\hat{T}} = \check{T}$, on déduit :

$$\langle T, \zeta\rangle = \frac{1}{2C}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\hat{T}}(\frac{k}{2C})\langle \tau_{\frac{k}{2C}}\widehat{\varphi}(t), \check{\zeta}(t)\rangle_{dt} = \frac{1}{2C}\sum_{k\in\mathbb{Z}} T(-\frac{k}{2C})\langle \tau_{\frac{k}{2C}}\widehat{\varphi}(-t), \zeta(t)\rangle_{dt}$$

d'où :

$$T(t) = \frac{1}{2C}\sum_{k\in\mathbb{Z}} T(+\frac{k}{2C})\tau_{\frac{-k}{2C}}\widehat{\varphi}(-t) = \frac{1}{2C}\sum_{k\in\mathbb{Z}} T(\frac{k}{2C})\widehat{\varphi}(-t+\frac{k}{2C}).$$

Et pour φ paire, avec (14.63) on a ψ paire et $\widehat{\varphi} = \check{\widehat{\varphi}} = 2C\psi$. ▟

Remarque 14.33 En général la formule est fausse en prenant $C = B$. Exemple avec $\widehat{f} = \delta_\pi - \delta_{-\pi}$ de période 2π, cas $B = \pi$: c'est la transformée de Fourier de $f(t) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\sin(\pi t)$ qui s'annule en tout k. En particulier $f(\frac{k\pi}{B}) = f(k) = 0$ pour tout k, et (14.64) et visiblement faux quand on prend $C = B$. ▟

On en déduit :

Théorème 14.34 *On conserve la formule de Shannon (14.60) dans le cas particulier, toujours supposant $T \in \mathcal{S}'$, $\mathrm{supp}\widehat{T} \subset [-B, B]$ et $C > B$, sous la condition supplémentaire :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(\frac{k}{2C})| < \infty, \tag{14.66}$$

où $T = T_f =^{\text{noté}} f$ la fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente.

Preuve. Il s'agit de montrer, sous condition, que dans (14.64) on peut remplacer ψ par sinc_C. I.e. on veut remplacer $\varphi = (\gamma_n * 1_{[-C,C]})$ par $(1_{[-C,C]})$. On regarde donc :

$$\begin{aligned} D_n &= |\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2C})\,\psi(t-\frac{k\pi}{C}) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k\pi}{C})\,\mathrm{sinc}_C(t-\frac{k\pi}{C})| \\ &\leqslant ||\mathcal{F}(\gamma_n * 1_{[-C,C]}) - \mathcal{F}(1_{[-C,C]})||_\infty \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(\frac{k}{2C})|\Big). \end{aligned}$$

Mais "$||\widehat{g}||_\infty \leqslant ||g||_{L^1(\mathbb{R})}$" donne :

$$||\mathcal{F}(\gamma_n * 1_{[-C,C]}) - \mathcal{F}(1_{[-C,C]})||_\infty \leqslant ||\gamma_n * 1_{[-C,C]}) - 1_{[-C,C]}||_{L^1(\mathbb{R})}$$

avec :

$$||\gamma_n * 1_{[-C,C]}) - 1_{[-C,C]}||_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \int_{-C-\frac{1}{n}}^{-C+\frac{1}{n}} dx + \int_{C-\frac{1}{n}}^{C+\frac{1}{n}} dx \leqslant \frac{4}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, dès que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(\frac{k}{2C})| < \infty$, on a $D_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. ▟

14.5 Densité spectrale d'énergie

14.5.1 Définition

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t}\,d\nu \qquad \text{où} \qquad \widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2i\pi\nu t}\,dt.$$

Définition 14.35 Le densité spectrale d'énergie (ou densité d'énergie en fréquence) est :

$$\Phi_f = |\widehat{f}\,|^2, \tag{14.67}$$

soit pour tout $\nu \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_f(\nu) = |\widehat{f}(\nu)|^2 = \Big|\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\nu t}\,dt\Big|^2 \qquad (= \widehat{f}(\nu)\overline{\widehat{f}(\nu)}). \tag{14.68}$$

Ainsi l'énergie est (théorème de Parseval) :

$$||f||^2_{L^2} = ||\widehat{f}||^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \Phi_f(\nu)\,d\nu, \tag{14.69}$$

i.e. est l'intégrale de sa densité spectrale.

Exemple 14.36 Soit $f_B(t) = \sin(2\pi at) 1_{[-B,B]}(t)$ (la fonction sinus tronquée). On a donc :

$$\begin{aligned}\widehat{f_B}(\nu) &= (\widehat{\sin(2\pi at)} * \widehat{1_{[-B,B]}})(\nu) = \frac{\delta_a(\nu) - \delta_{-a}(\nu)}{2i} * 2B\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu)\\ &= \frac{B}{i}(\tau_a \mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu) - \tau_{-a}\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu)).\end{aligned} \tag{14.70}$$

D'où :

$$\Phi_{f_B}(\nu) = B^2 \Big|\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu{-}a) - \mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu{+}a)\Big|^2.$$

▲

Remarque 14.37 Dans l'exemple précédent, sachant $B\mathrm{sinc}_B \underset{B\to\infty}{\rightharpoonup} \pi\delta_0$, et $B\tau_a\mathrm{sinc}_B \underset{B\to\infty}{\rightharpoonup} \pi\delta_a$, on obtient :

$$(\mathcal{F}(\sin(2\pi a.)1_{[-B,B]}) =) \qquad \widehat{f_B} \underset{B\to\infty}{\rightharpoonup} \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2i} \qquad (= \mathcal{F}(\sin(2\pi a.))) \qquad \text{dans } \mathcal{S}', \tag{14.71}$$

au sens, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{f_B}, \varphi\rangle \underset{B\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varphi(a) - \varphi(-a)}{2i}.$$

Les ingénieurs ont tendance à noter :

$$\widehat{f_B}(\nu) \underset{B\to\infty}{\rightharpoonup} \frac{\delta_a(\nu)}{2i} - \frac{\delta_{-a}(\nu)}{2i}, \tag{14.72}$$

puis :

$$|\widehat{f_B}(\nu)|^2 \underset{B\to\infty}{\rightharpoonup} \Big|\frac{\delta_a(\nu)}{2} - \frac{\delta_{-a}(\nu)}{2}\Big|^2, \tag{14.73}$$

ce qui n'a aucun sens lu brutalement : par exemple la fonctionnelle δ_0^2 n'a pas de sens : elle correspondrait à la limite de la fonction $(n\ 1_{[0,\frac{1}{n}]})^2 = n^2\ 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ dont l'aire sous la courbe vaudrait $n^2\,\frac{1}{n} = n$ qui tend vers l'infini avec n : et donc δ_0^2 serait une "fonction généralisée d'énergie infinie", ce qui serait inutilisable.

Et à la limite $B \to \infty$, alors $\widehat{f_B}$ devient la distribution donnée par ses valeurs $\langle \widehat{f_B}, \varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$ dont le calcul se fait en commençant par le calcul de $|\widehat{f_B}(\nu)|^2$ à B donné, avec (14.70) :

$$|\widehat{f_B}(\nu)|^2 = B^2\Big((\tau_a\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu))^2 + (\tau_{-a}\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu))^2 - 2\tau_a\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu)\tau_{-a}\mathrm{sinc}_{2\pi B}(\nu)\Big),$$

dont on déduit, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle |\widehat{f_B}(\nu)|^2, \varphi\rangle \underset{B\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}(\varphi(a) - \varphi(-a)).$$

D'où :

$$|\widehat{f_B}(\nu)|^2 \underset{B\to\infty}{\rightharpoonup} \frac{1}{4}|\delta_a(\nu) - \delta_{-a}(\nu)|, \qquad \text{dans } \mathcal{S}', \tag{14.74}$$

ce qui a un sens, contrairement à (14.73) qui n'en a pas.

Interprétation : pour "B grand", alors $|\widehat{f_B}(\nu)|^2$ "est concentrée en a et en $-a$", le graphe de $\widehat{f_B}$ ressemblant à une courbe en "double cloche", l'aire sous chaque cloche valant $\simeq \frac{\pi}{2}$. ▲

14.5.2 Théorème de Wiener–Khinchin

Définition 14.38 On définit la fonction d'autocorrélation d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par (avec s un "décalage en temps") :

$$R_f^0(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(s+t)\overline{f}(t)\,dt = (\tau_{-s}f, f)_{L^2}. \tag{14.75}$$

Théorème 14.39 *Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction d'autocorrélation est la transformée de Fourier de la densité spectrale d'énergie :*

$$R_f^0 = \mathcal{F}(\Phi_f). \tag{14.76}$$

Preuve. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{F}(|f|^2) = \mathcal{F}(\Phi_f)$ est bien défini. Puis $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{\omega\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{+i\omega t}\,d\omega$, d'où :

$$\begin{aligned}
R_f^0(s) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{\omega\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{+i\omega(t+s)}\,d\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{\nu\in\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}}(\nu)e^{-i\nu t}\,d\nu)\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\omega\int_\nu \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t e^{+i(\omega-\nu)t}\,dt)\,d\omega d\nu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\omega\int_\nu \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}\delta(\omega-\nu)\,d\omega d\nu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\omega \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\omega)e^{i\omega s}\,d\omega = \mathcal{F}(\Phi_f)(s),
\end{aligned}$$

comme annoncé, avec le calcul formel $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t e^{+i(\omega-\nu)t}\,dt = \mathcal{F}(e^{+i(\omega-\nu)t}) = \delta(\omega-\nu)$ au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

N.B. : pour faire le calcul sans abuser du caractère formel, on peut par exemple multiplier $e^{+i(\omega-\nu)t}$ par une fonction d'approximation de $1_{\mathbb{R}}$, i.e. on pose :

$$I(f,n) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(s+t)\overline{f}(t)\sqrt{2\pi}\widehat{\gamma_n}(t)\,dt,$$

qui d'une part donne $\langle\sqrt{2\pi}\widehat{\gamma_n}, (\tau_{-s}f)\,f\rangle \longrightarrow_{n\to\infty} \langle\sqrt{2\pi}\widehat{\delta_0}, (\tau_{-s}f)\,f\rangle = \langle 1_{\mathbb{R}}, (\tau_{-s}f)\,f\rangle = R_f^0(s)$, et qui d'autre part donne

$$\begin{aligned}
I(f,n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\omega\int_\nu \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t e^{+i(\omega-\nu)t}\sqrt{2\pi}\widehat{\gamma_n}(t)\,dt)\,d\omega d\nu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\omega\int_\nu \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}\sqrt{2\pi}\check{\widehat{\gamma_n}}(\omega-\nu)\,d\omega d\nu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\omega\int_\nu \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}\sqrt{2\pi}\gamma_n(\omega-\nu)\,d\omega d\nu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\nu \overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}(\int_\mu \widehat{f}(\mu+\nu)\sqrt{2\pi}\gamma_n(\mu)\,d\mu)d\nu \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\nu \overline{\widehat{f}}(\nu)e^{i\nu s}\widehat{f}(\nu)\sqrt{2\pi}d\nu = R_f^0(s).
\end{aligned}$$

∎

14.6 Densité spectrale de puissance

14.6.1 Définitions

La fonction d'autocorrélation définie en (14.75) n'a pas de sens pour les fonctions f de type constante, sinus ou cosinus (qui ne sont pas dans $L^2(\mathbb{R})$). On s'intéresse alors dans ce cas aux "valeurs moyennes" :

Définition 14.40 Le coefficient d'autocorrélation est la fonctionnelle $R : f \to R(f) =^{\text{noté}} R_f$ définie sur $\mathbb{R}$ par (quand ça a un sens) :

$$R_f(s) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{t=-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(t+s)\overline{f}(t)\,dt. \tag{14.77}$$

Exemple 14.41 Pour $f(t) = e^{iat}$, on a $e^{ia(t+s)}\overline{e^{iat}} = e^{ias}$, d'où :

$$R_f(s) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{t=-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} e^{ias}\,dt = e^{ias} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{t=-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} dt = e^{ias},$$

soit donc $R_f(s) = f(s)$: le coefficient d'autocorrélation de $f = e^{ia\cdot}$ est f elle-même. Autrement dit, la fonctionnelle $R : f \to R(f) = R_f$ conserve les e^{iat} pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On définit l'espace de fonctions dans lequel R_f a un sens (espace contenant $L^2(\mathbb{R})$) :

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2\,dt < \infty\}. \tag{14.78}$$

Il est immédiat que si $f \in V$, alors $\tau_s f \in V$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, puisque $\frac{1}{\lambda}\int_{t=-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t-s)|^2\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_{u=-\frac{\lambda}{2}-s}^{\frac{\lambda}{2}-s} |f(u)|^2\,du \leqslant C(\lambda,s)\frac{1}{\mu}\int_{u=-\frac{\mu}{2}}^{\frac{\mu}{2}} |f(u)|^2\,du$ où on a posé $\mu = \max(\frac{\lambda}{2}-|s|, \frac{\lambda}{2}+|s|)$ et $C(\lambda,s) = \frac{\mu}{\lambda}$ (on a $\mu \geqslant \lambda > 0$ et $C(\lambda,s) \simeq 1$ quand $\lambda \to \infty$).

On définit un semi-produit scalaire sur V par :

$$(f,g)_V = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(t)\overline{g}(t)\,dt, \tag{14.79}$$

et la semi-norme associée :

$$||f||_V = \Big(\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{14.80}$$

En particulier $(\tau_{-s}f, f)_V = R_f(s)$.

Il est clair que $L^2(\mathbb{R}) \subset V$, car pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$, d'où, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a $||f||_V = 0$. De même on a $||f||_V = 0$ pour toute fonction intégrable à support compact.

Les fonctions constantes (les $c1_{\mathbb{R}}$) sont dans V avec :

$$||c1_{\mathbb{R}}||_V = \Big(\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |c|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} = |c| < \infty,$$

et de manière plus générale :

Proposition 14.42 *Toute fonction périodique de période T qui est de carré intégrable sur une période est dans V, avec :*

$$||f||_V = \Big(\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \Big(= \Big(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a\Big), \tag{14.81}$$

i.e. $||f||_V^2$ est la valeur moyenne de $|f|^2$ sur une période.

Preuve. Soit $\lambda > 0$ et soit k entier tel que $\lambda \in kT+]0,T] =]kT,(k+1)T]$. Sachant $\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,dt = \int_a^{T+a} |f(t)|^2\,dt$ pour tout a puisque "$\int_a^{T+a} = \int_a^T + \int_T^{T+a} = \int_a^T + \int_0^a$" pour les fonctions périodiques de période T, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} |f(t)|^2\,dt = \int_0^{\lambda} |f(t)|^2\,dt &= \int_0^{t=kT} |f(t)|^2\,dt + \int_{kT}^{\lambda} |f(t)|^2\,dt \\ &= k\int_0^T |f(t)|^2\,dt + \theta\int_0^T |f(t)|^2\,dt,\end{aligned}$$

où $\theta \in [0,1]$. D'où le résultat en multipliant par $\frac{1}{\lambda}$ avec $\frac{1}{kT+T} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{kT}$ et en faisant $k \to \infty$.

Remarque 14.43 L'espace V est un espace pré-hilbertien non séparable : par exemple la famille non dénombrable $(e^{iax})_{a\in\mathbb{R}}$ est orthonormée :

$$(e^{iax}, e^{ibx})_V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(a-b)t}\,dt = \delta_{ab},$$

(où δ_{ab} est ici le symbole de Kronecker) puisque, si $b \neq a$ la fonction $e^{i(a-b)t}$ est périodique de moyenne nulle et donc $(e^{iax}, e^{ibx})_V = 0$, et si $a = b$ on a $||e^{iax}||_V^2 = 1$ la valeur moyenne.

La famille $(e^{iax})_{a\in\mathbb{R}}$ est donc libre (si $\sum_{a\in\mathbb{R}} c_a e^{iax} = 0$ alors $(\sum_{a\in\mathbb{R}} c_a e^{iax}, e^{ibx})_V = c_b = 0$ pour tout b), et donc une base de V contient au moins un nombre non dénombrable d'éléments.

15 Résolution d'équations différentielles et calcul symbolique

15.1 Le problème : forme classique

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ et l'opérateur différentiel $P_1 = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m$:

$$P_1 : \begin{cases} C^m(\mathbb{R};\mathbb{R}) & \to C^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ \qquad u & \to P_1(u) = u^{(m)} + a_1 \, u^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1}u' + a_m u, \end{cases} \tag{15.1}$$

But : pour $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ lipschitzienne et $u_0, ..., u_{m-1} \in \mathbb{R}$ (données), trouver $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ t.q.

$$\begin{cases} P_1(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}_+ \quad \text{(EDO)}, \\ u(0) = u_0, \ldots, u^{(m-1)}(0) = u_{m-1} \quad \text{(CI)}. \end{cases} \tag{15.2}$$

C'est une équation différentielle ordinaire (EDO) de degré m avec m conditions initiales (CI). Le théorème de Cauchy–Lipschitz donne l'existence et l'unicité de la solution.

Rappel de la démarche classique de résolution :

1- Résolution de l'équation différentielle (15.1) homogène (i.e. pour $f = 0$) : trouver u t.q.

$$P_1(u) = 0, \quad \text{i.e.} \quad u^{(m)} + a_1 \, u^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1}u' + a_m u = 0. \tag{15.3}$$

Pour ce on cherche les solutions de type $t \to u(t) = e^{rt}$: on obtient immédiatement $P_1(u)(t) = P(r)e^{rt} = 0$ où

$$P(r) = r^m + a_1 r^{m-1} + ... + a_{m-1} r + a_m \quad \text{(polynôme de degré } m \text{ associé)}, \tag{15.4}$$

dit polynôme caractéristique. On a : $u(t) = e^{rt}$ est solution homogène ssi $P(r) = 0$. Donc on cherche les m racines de P dans $\mathbb{C}$. Si r est racine simple alors e^{rt} est solution, et si r est racine multiple d'ordre k alors e^{rt}, te^{rt}, ..., $t^{k-1}e^{rt}$ sont solutions. On obtient m solutions indépendantes u_i, et toute combinaison linéaires $\sum_{i=1}^m c_i u_i$ est solution de (15.3) (car P_1 est linéaire : $P_1(u + \alpha v) = P_1(u) + \alpha P_1(v)$ et $f = 0$ ici).

2- Puis on cherche une solution particulière u_p à l'aide de la méthode de "variation des constantes".

3- Et la solution de (15.2) est de la forme $u = \sum_{i=1}^m c_i u_i + u_p$ (somme d'une solution homogène générique et de la solution particulière trouvée), et on utilise les conditions initiales pour trouver les c_i. (Voir cours de 1ère année "Equations différentielles" `https://www.isima.fr/leborgne/Isimath1ereannee/ed_cours.pdf` .)

15.2 EDO sous forme équation de convolution

Soit $P_2(\delta_0) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à P_1 définie par

$$P_2(\delta_0) := \delta_0^{(m)} + a_1 \delta_0^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1}\delta_0' + a_m \delta_0. \tag{15.5}$$

Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on note T_u la distribution régulière associée. On a $\delta_0^{(k)} * T_u = (T_u)^{(k)}$ cf. (9.16)-(9.18), noté $\delta_0^{(k)} * u = u^{(k)}$. Puis on remplace $P_1(u) = f$ par $P_2(\delta_0) * T_u = T_f$ (équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) noté

$$P_2(\delta_0) * u = f \ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{15.6}$$

C'est une équation algébrique (le produit $P_2(\delta_0) * u$ est $= f$). Résolution classique dans un anneau $(\mathcal{A}, +, *)$: si $A, u, f \in \mathcal{A}$ et si A est inversible dans $\mathcal{A}$ alors $A * u = f$ a pour solution $u = A^{-1} * f$; en effet $A * u = f$ donne $A^{-1} * (A * u) = A^{-1} * f$, d'où (associativité dans un anneau) $(A^{-1} * A) * u = A^{-1} * f$ (voir annexe 18).

Malheureusement $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}), +, *)$ n'est pas un anneau car $*$ n'est pas associatif dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\underbrace{(\underbrace{1_{\mathbb{R}} * \delta_0'}_{=(1_{\mathbb{R}})'=0}) * H_0}_{=0} \neq \underbrace{1_{\mathbb{R}} * (\underbrace{\delta_0' * H_0}_{=(H_0)'=\delta_0})}_{=1}. \tag{15.7}$$

Ici $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est "trop grand" : on va se limiter au sous ensemble $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ des distributions à supports dans $\mathbb{R}_+$:

15.3 Algèbre de convolution $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

On note

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \text{supp}(T) \subset [0, \infty[\} \tag{15.8}$$

(distributions dont le support limité à gauche en 0). En particulier $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ car $\text{supp}(\delta_0) = \{0\} \subset \mathbb{R}_+$.

15.3.1 Convolution de plusieurs distributions

On définit formellement le produit de convolution de trois distributions R, S et T par : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle R * S * T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})', \mathcal{D}(\mathbb{R})} = \langle R_x \otimes S_y \otimes T_z, \varphi(x+y+z) \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)', \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)}. \tag{15.9}$$

Proposition 15.1 *Si $R, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ (support limité à gauche en 0) alors le produit de convolution $R * S * T$ a un sens, i.e.*

$$\text{(associativité :)} \quad (R * S) * T = R * (S * T) \overset{\text{noté}}{=} R * S * T. \tag{15.10}$$

Preuve. Adapter la démonstration de la proposition 9.6. ∎

15.3.2 $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), +, *, .)$ est une algèbre de convolution

Corollaire 15.2 *$(\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), +, *)$ est un anneau commutatif d'élément neutre δ_0, et $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Donc $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}), +, *, .)$ est une algèbre commutative sur ce corps.*

Preuve. Vérification facile. (Voir annexe 18 pour les définitions.) ∎

Remarque 15.3 La prop. 15.1 reste vraie si toutes les distributions (sauf une au plus) sont dans $\mathcal{E}'$ (l'ensemble des distributions à support compact), d'où $\mathcal{E}'$ est une algèbre de convolution : permet de traiter les équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites.

Et dans $\mathbb{R}^4$, on a l'algèbre de convolution des distributions à support dans le cône d'avenir $t \geqslant 0$, $t^2 \geqslant x^2 + y^2 + z^2$. ∎

15.3.3 EDO dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, et plan de la suite

On "tronque" u en 0 en posant $v = H_0 u$; donc $\mathrm{supp}(v) \subset \mathbb{R}_+$ et $T_v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, donc $P_2(\delta_0) * T_v = P_2(\delta_0) * T_{H_0 u}$ est un produit de convolution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, noté $P_2(\delta_0) * v = P_2(\delta_0) * (H_0 u)$. Et on va calculer $g = P_2(\delta_0) * (H_0 u)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$:

$$P_2(\delta_0) * v = g \quad \text{avec} \quad \mathrm{supp}(g) \subset \mathbb{R}_+, \tag{15.11}$$

au sens $P_2(\delta_0) * T_v = T_g$. dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. D'où la suite du cours :

1- on montre que $P_2(\delta_0)$ est inversible dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ et on calcule $P_2(\delta_0)^{-1}$ (= la solution élémentaire),

2- on calcule g en calculant $P_2(\delta_0) * (H_0 u)$ (contiendra les CI),

3- d'où la solution cherchée $H_0 u = v = P_2(\delta_0)^{-1} * g$: on a résolu l'EDO avec CI, i.e. on a trouvé u sur $\mathbb{R}_+$, i.e. $u(t)$ pour $t > 0$ (on ne s'intéresse pas à u sur $\mathbb{R}_-$ puisqu'on veut résoudre une EDO avec condition initiale).

15.4 Solution élémentaire

15.4.1 Définition

Soit $(\mathcal{A}, +, *, .)$ une algèbre commutative d'élément neutre δ_0. But : pour $A, G \in \mathcal{A}$, résoudre l'équation algébrique : trouver $V \in \mathcal{A}$ t.q.

$$A * V = G. \tag{15.12}$$

Définition 15.4 La solution élémentaire du problème (15.12) est l'élément $E \in \mathcal{A}$ (si il existe) défini par

$$A * E = \delta_0 = E * A, \quad \text{et alors} \quad E \overset{\text{noté}}{=} A^{-1} = \text{l'inverse de } A \text{ dans } \mathcal{A}. \tag{15.13}$$

Proposition 15.5 *Si A est inversible dans $\mathcal{A}$, avec donc $E = A^{-1}$ la solution élémentaire, alors (15.12) a pour unique solution*

$$V = E * G \quad (= A^{-1} * G) \quad \textit{dans } \mathcal{A}. \tag{15.14}$$

Preuve. Rappel : si dans un anneau l'inverse existe alors il est unique. On a $E * (A * V) =^{(15.12)} E * G$, donc $(E * A) * V = E * G$ (associativité dans un anneau), donc $\delta_0 * V = E * G$. ∎

Remarque 15.6 Il est indispensable de ***rester*** dans une algèbre de convolution. Exemple dans $\mathbb{R}^3$ pour $A = \Delta\delta_0$ et l'algèbre de convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ des distributions à support compact ; problème initial (équation de Poisson) :

$$\Delta u = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta\delta_0 * u = f \qquad \text{dans } \mathcal{E}'. \tag{15.15}$$

On connaît "une solution "élémentaire" : $E = -\frac{1}{4\pi r}$ (vérifie $\Delta E = \delta_0$ $(= \Delta\delta_0 * E)$; mais ici $E \notin \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. De plus, pour f est à support borné, une solution de (15.15) n'est pas unique : on a $u = -\frac{1}{4\pi r} * f$ est solution, et la solution générale est :

$$u = -\frac{1}{4\pi r} * f + \text{distribution harmonique}, \tag{15.16}$$

une distribution harmonique étant une distribution u_h solution de $-\Delta u_h = 0$ (équation dont la solution dépend des conditions aux limites, voir cours éléments finis, équation dite de Laplace).

Complément : un théorème de Malgrange et Ehrenpreis assure que toute équation aux dérivées partielles à coefficients constants possède une solution élémentaire (et même une infinité). ∴

Remarque 15.7 Il n'existe pas toujours de solution élémentaire. E.g. : si $A = \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $A * E = \varphi * E$ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ (régularisée de E), donc ne peut pas être égale à δ_0 : il n'y a pas de solution élémentaire. ∴

15.4.2 EDO : calcul de la solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

Cas EDO : donc $\mathcal{A} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ et $A = P_2(\delta_0) =^{(15.5)} \delta_0^{(m)} + a_1\delta_0^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1}\delta_0' + a_m\delta_0$. Notons

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \text{supp} f \in \mathbb{R}_+\}. \tag{15.17}$$

Problème algébrique générique : pour $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, trouver $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ t.q.

$$P_2(\delta_0) * v = g, \tag{15.18}$$

au sens : ayant $T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, trouver $T_v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ t.q. $P_2(\delta_0) * T_v = T_g$.

Proposition 15.8 *La solution élémentaire $E = P_2(\delta_0)^{-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ existe (i.e. $\exists E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ t.q. $P_2(\delta_0)*E = \delta_0$). Précisément, notant $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solution de*

$$\begin{cases} P_1(w) = 0 \quad (\textit{EDO homogène}), \\ w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(m-2)}(0) = 0 \quad \textit{et} \quad w^{(m-1)}(0) = 1 \quad (\textit{CI}), \end{cases} \tag{15.19}$$

on a $E = T_{wH_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ la distribution régulière associée à $wH_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ notée

$$E = H_0 w \tag{15.20}$$

(au sens : E est la distribution régulière associé à $H_0 w$ = "la fonction w tronquée en 0").

Preuve. L'EDO $P_1(w) = 0$ a une solution (Cauchy–Lipschitz) $w \in C^\infty(\mathbb{R})$. Donc $H_0 w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Notons $E = T_{H_0 w}$ la distribution régulière associée, où donc $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Il s'agit de vérifier : $P_2(\delta_0) * (H_0 w) = \delta_0$. Ayant δ_0 absorbant ($\psi\delta_0 = \psi(0)\delta_0$ pour $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$), δ_0 élément neutre pour $*$, $H_0' = \delta_0$, et $\delta_0^{(k)} * f = f^{(k)}$,

$$\begin{cases} \delta_0 * (H_0 w) = H_0 w, \\ \delta_0' * (H_0 w) = (H_0 w)' = H_0' w + H_0 w' = w(0)\delta_0 + H_0 w' = 0 + H_0 w', \\ \delta_0'' * (H_0 w) = \delta_0' * (\delta_0' * w) = H_0' w' + H_0 w'' = w'(0)\delta_0 + H_0 w'' = 0 + H_0\, w'', \\ \ldots \\ \delta_0^{(m-1)} * (H_0 w) = w^{(m-2)}(0)\delta_0 + H_0\, w^{(m-1)} = 0 + H_0\, w^{(m-1)}, \\ \delta_0^{(m)} * (H_0 w) = w^{(m-1)}(0)\delta_0 + H_0\, w^{(m)} = \delta_0 + H_0\, w^{(m)}. \end{cases} \tag{15.21}$$

D'où

$$P_2(\delta_0) * (H_0 w) = \delta_0 + H_0(P_1(w)) \overset{(15.20)}{=} \delta_0 + 0, \tag{15.22}$$

donc $H_0 w = P_2(\delta_0)^{-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ (c'est la solution élémentaire). ∴

Exemple 15.9 EDO $\frac{du}{dt} = f$. Donc $\delta_0' * u = f$. Solution élémentaire : $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $\frac{dw}{dt} = 0$ et $w(0) = 1$: donc

$$w = 1_{\mathbb{R}}, \quad \text{donc} \quad E = H_0 = (\delta_0')^{-1} \;\text{ est l'inverse de }\; \delta_0' \;\text{ dans }\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \tag{15.23}$$

i.e. H_0 est la solution de l'équation de convolution $\delta_0' * E = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Exemple 15.10 EDO $\frac{du}{dt} - \lambda u = f$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $(\delta_0' + \lambda\delta_0) * u = f$. Solution élémentaire : $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $w' - \lambda w = 0$ et $w(0) = 1$: donc

$$w(t) = e^{\lambda t}, \quad \text{donc} \quad E = H_0 w = (\delta_0' + \lambda\delta_0)^{-1} \tag{15.24}$$

(solution élémentaire).

Exemple 15.11 Soit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et

$$P_1(u) = (\frac{d}{dt} - \lambda_1) \circ (\frac{d}{dt} - \lambda_2)(u) = \frac{d^2u}{dt^2} + a_1\frac{du}{dt} + a_2 u \quad \text{où} \quad a_1 = -(\lambda_1{+}\lambda_2), \quad a_2 = \lambda_1\lambda_2. \tag{15.25}$$

Donc $P_2(\delta) = (\delta_0' - \lambda_1\delta) * (\delta_0' - \lambda_2\delta)$ et $P_2(\delta) * u = f$ (vérification immédiate). Ici λ_1, λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique $P(r) = r^2 + a_1 r + a_2 = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2)$.

Solution élémentaire : $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $P_1(w) = 0$ avec $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$: on a immédiatement

$$w(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{\lambda_2 t}, \quad \text{donc} \quad E = H_0 w = ((\delta_0' - \lambda_1\delta_0) * (\delta_0' - \lambda_2\delta_0))^{-1} \tag{15.26}$$

(solution de l'équation de convolution $P_2(\delta_0) * E = \delta_0$).

Cas particulier $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, donc $a_1 = 0$ et $a_2 = \omega^2$, i.e. EDO $u'' + \omega^2 u = f$:

$$P_1(u) = (\frac{d}{dt} - i\omega) \circ (\frac{d}{dt} + i\omega) = \frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u, \quad \text{et} \quad w(t) = \frac{1}{2i\omega}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \tag{15.27}$$

Exemple 15.12 $P_1 = \frac{d^2}{dt^2} - 2\lambda\frac{d}{dt} + \lambda^2 = (\frac{d}{dt} - \lambda I) \circ (\frac{d}{dt} - \lambda I) =^{\text{noté}} \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^2(u)$. Ici λ est racine double du polynôme caractéristique $P(r) = (r{-}\lambda)^2 = r^2{-}2\lambda r{+}\lambda^2$. Solution élémentaire : $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $w''{-}2\lambda w{+}\lambda^2 w = 0$ avec $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$: on a immédiatement

$$w(t) = te^{\lambda t}, \quad \text{et} \quad E = H_0 w = P_2(\delta_0)^{-1} \tag{15.28}$$

où $P_2(\delta_0) = \delta_0'' - 2\lambda\delta_0' + \lambda^2\delta_0 = (\delta_0' - \lambda\delta_0) * (\delta_0' - \lambda\delta_0) =^{\text{noté}} (\delta_0' - \lambda\delta_0)^2$.

Exemple 15.13 Cas d'un polynôme qui a une racine multiple d'ordre $m \geqslant 1$, i.e. cas de l'opérateur différentiel

$$P_1 = (\frac{d}{dt} - \lambda I) \circ \ldots \circ (\frac{d}{dt} - \lambda I) \overset{\text{noté}}{=} \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^m \tag{15.29}$$

(où la puissance m dénote donc la composition des opérateurs). (Et λ est racine de multiplicité m du polynôme caractéristique $P(r) = (r{-}\lambda)^m$.) Solution élémentaire : $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $P_1(w) = 0$ avec $w(0) = ... = w^{(m-2)} = 0$ et $w^{(m-1)}(0) = 1$: on a

$$w(t) = \frac{t^{m-1}}{m-1}e^{\lambda t}, \quad \text{et} \quad E = H_0 w = P_2(\delta_0)^{-1} \tag{15.30}$$

où $P_2(\delta_0) = (\delta_0' - \lambda\delta_0)^m$.

(Vérification immédiate, ou : solution homogène générique $w(t) = c_0 e^{\lambda t} + c_1 te^{\lambda t} + ... + c_{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}$ et on utilise les CI : $w(0) = 0$ donne $c_0 = 0$, donc $w(t) = t(c_1 e^{\lambda t} + ... + c_{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t})$, donc $w'(t) = c_1 e^{\lambda t} + ... + c_{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t} + t(...)$, et $w'(0) = 0$ donne $c_1 = 0$, donc..., donc $w(t) = c_{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}$, et $w^{(m-1)}(0) = 1$ donne $c_{m-1} = 1$.) Ici $P_2(\delta_0) = (\delta_0' - \lambda\delta_0)^m$ (produit de convolution m-fois).

Exemple 15.14 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et

$$P_1 = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I\right)^2 \circ (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I) := (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I) \circ (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I) \circ (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I). \tag{15.31}$$

Polynôme caractéristique $P(r) = (r-\lambda_1)^2(r-\lambda_2)$. Solution homogène

$$w(t) = c_{1,1}e^{\lambda_1 t} + c_{1,2}te^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{avec} \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad \text{et} \quad w''(0) = 1. \tag{15.32}$$

Pour trouver $c_{1,1}$, $c_{1,2}$ et c_2, au lieu d'un calcul direct à l'ade de dérivation (analyse) on peut utiliser la décomposition en éléments simples (algèbre) de $\frac{1}{P(r)}$:

$$\frac{1}{P(r)} = \frac{1}{(r-\lambda_1)^2(r-\lambda_2)} = c_{1,1}\frac{1}{r-\lambda_1} + c_{1,2}\frac{1}{(r-\lambda_1)^2} + c_2\frac{1}{r-\lambda_2}; \tag{15.33}$$

on a $\frac{(r-\lambda_2)}{P(r)} = \frac{1}{(r-\lambda_1)^2} = c_{1,1}\frac{(r-\lambda_2)}{r-\lambda_1} + c_{1,2}\frac{(r-\lambda_2)}{(r-\lambda_1)^2} + c_2$, d'où $\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2} = c_2$, et $\frac{(r-\lambda_1)^2}{P(r)} = \frac{1}{r-\lambda_2} = c_{1,1}(r-\lambda_1) + c_{1,2} + c_2\frac{(r-\lambda_1)^2}{r-\lambda_2}$, d'où $\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} = c_{1,2}$, et $\frac{r}{P(r)} = \frac{r}{(r-\lambda_1)^2(r-\lambda_2)} = c_{1,1}\frac{r}{r-\lambda_1} + c_{1,2}\frac{r}{(r-\lambda_1)^2} + c_2\frac{r}{r-\lambda_2}$, d'où $r \to \infty$ donne $0 = c_{1,1} + c_2$, d'où $c_{1,1} = -c_2$. D'où, avec $w(0) = w'(0) = 0$ et $w''(0) = 1$,

$$w(t) = -\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}te^{\lambda_1 t} + \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{\lambda_2 t}. \tag{15.34}$$

Et $E = H_0 w = (P_2(\delta_0))^{-1}$, où $P_2(\delta_0) = (\delta_0' - \lambda_1\delta_0)^2 * (\delta_0 - \lambda_2\delta_0) := (\delta_0' - \lambda_1\delta_0) * (\delta_0' - \lambda_1\delta_0) * (\delta_0 - \lambda_2\delta_0)$. ▪

15.4.3 D'où v t.q. $A * v = g$

Résolution du problème (15.18) : pour $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, on veut trouver $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ t.q.

$$P(\delta_0) * T_v = T_g \ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \text{noté} \quad \boxed{P(\delta_0) * v = g}. \tag{15.35}$$

Toutes les distributions étant dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, on a $T_v = P(\delta_0)^{-1} * g$, avec $P(\delta_0)^{-1} \stackrel{(15.20)}{=} T_{(H_0 w)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, donc $T_v = T_{(H_0 w)} * T_g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, noté

$$v = (H_0 w) * g \ \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+), \quad \text{i.e.,} \quad \forall t > 0, \ \ v(t) = \int_{\tau=0}^{t} w(t-\tau) g(\tau)\, d\tau. \tag{15.36}$$

15.5 Résolution de l'équation différentielle avec CI

15.5.1 Equation de convolution satisfaite par $v = H_0 u$

But : résoudre (15.2) : $P_1(u) = f$ où $u^k(0) = u_k$, $k = 0, ..., m-1$ (Cauchy–Lipschitz). On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, donc on considère

$$v := H_0 u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+), \quad \text{donc} \quad T_v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \tag{15.37}$$

Proposition 15.15 *u étant la solution de (15.2), i.e. $P_1(u) = f$, on a*

$$P_2(\delta_0) * T_v = T_g, \quad \textit{noté} \quad P_2(\delta_0) * v = g, \quad \textit{où} \quad g = H_0 f + \sum_{k=0}^{m-1} e_k \delta_0^{(k)} \tag{15.38}$$

("contient" les conditions initiales), où

$$\begin{cases} e_0 = a_{m-1}u_0 + a_{m-2}u_1 + \ldots + a_1 u_{m-2} + u_{m-1}, \\ e_1 = a_{m-2}u_0 + \ldots + a_1 u_{m-3} + u_{m-2}, \\ \ldots \\ e_{m-2} = a_1 u_0 + u_1, \\ e_{m-1} = u_0, \end{cases} \tag{15.39}$$

soit (présentation matricielle)

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ \\ e_{m-2} \\ e_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & \ldots & a_1 & 1 \\ a_{m-2} & \ldots & \ldots & a_1 & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots & \\ & & & & & \\ a_1 & 1 & \ldots & & & \\ 1 & 0 & \ldots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \\ u_{m-2} \\ u_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{15.40}$$

Preuve. Calcul similiare à (15.21) mais avec les conditions initiales $u^{(k)}(0) = u_k$:

$$\begin{cases} (H_0u)' = H_0u' + u(0)\delta_0, \\ (H_0u)'' = H_0\,u'' + u'(0)\delta_0 + u(0)\delta_0', \\ \dots \\ (H_0u)^m = H_0\,u^{(m)} + u^{(m-1)}(0)\delta_0 + ... + u(0)\delta_0^{(m-1)}. \end{cases} \tag{15.41}$$

D'où $P_2(\delta_0) * (H_0u) = H_0P(u) + e_0\delta_0 + \ldots + e_{m-1}\delta_0^{(m-1)} =^{\text{noté}} g$, où les e_i son donnés en (15.40). ∴

15.5.2 Solution u dans $\mathbb{R}_+$

Corollaire 15.16 *Avec $E = H_0w$ la solution élémentaire (où w solution de (15.20)), la solution $H_0u = v$ de (15.38) est*

$$\begin{aligned} H_0u = v = H_0w * g = H_0w * (H_0f + \sum_{k=0}^{m-1} e_k\delta_0^{(k)}) = H_0w * H_0f + \sum_{k=0}^{m-1} e_k\delta_0^{(k)} * H_0w \\ = H_0w * H_0f + \sum_{k=0}^{m-1} e_kw^k \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{15.42}$$

(au sens $T_v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$). Donc

$$\forall t > 0,\ \ u(t) = \int_{\tau=0}^t w(\tau)f(t{-}\tau)\,d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} e_kw^k(t), \tag{15.43}$$

soit $u(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau)w(t{-}\tau)\,d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} e_kw^k(t)$ pour tout $t > 0$.

Preuve. On applique (15.38) avec (15.21) : $\delta_0^{(k)} * H_0w = H_0w^{(k)}$ pour tout $k = 0, ..., m{-}1$. ∴

Exemple 15.17 En particulier, résoudre l'équation différentielle $P_1(u) = f$ avec $u(0) = ... = u^{(m-1)}(0) = 0$ donne $u(t) = \int_{\tau=0}^t w(t{-}\tau)f(\tau)\,d\tau$ pour tout $t > 0$ (solution particulière). ∴

Exemple 15.18 En particulier, l'équation différentielle homogène $P_1(u) = 0$ avec conditions initiales $u(0), \ldots, u^{(m-1)}(0)$ donnés, a pour solution $u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e_kw^{(k)}(t)$ pour tout $t > 0$ (solution homogène avec C.I.). ∴

15.5.3 Exemples

Exemple 15.19 EDO

$$\frac{du}{dt} = f, \quad u(0) = u_0, \tag{15.44}$$

où f est une fonction $C^0(\mathbb{R})$. Ici $w = 1_{\mathbb{R}}$, cf. (15.23), et $e_0 = u_0$ cf. (15.39). D'où (15.43) donne

$$\forall t > 0, \quad u(t) = (H_0 * H_0f)(t) + e_0\,H_0(t), \quad \text{i.e.} \quad u(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau + u_0, \tag{15.45}$$

résultat connu. ∴

Exemple 15.20 EDO, avec $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = f, \quad u(0) = u_0. \tag{15.46}$$

Ici $w(t) = e^{-\lambda t}$ cf. (15.24), et $e_0 = u_0$ cf. (15.39). D'où (15.43) donne

$$\forall t > 0, \quad u(t) = (H_0w * H_0f)(t) + e_0\,w(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau + u_0e^{-\lambda t} \tag{15.47}$$

résultat connu (solution particulière + solution homogène avec C.I.). ∴

Exemple 15.21 Cas $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (racines distinctes) et $P_1(u) = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I) \circ (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)$. EDO

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{du}{dt} + \lambda_1\lambda_2 = f, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{15.48}$$

Ici $w(t) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}$ cf. (15.26), avec $e_0 = -(\lambda_1+\lambda_2)u_0 + u_1$ et $e_1 = u_0$ cf. (15.39). D'où (15.43) donne

$$\forall t > 0, \quad u(t) = \int_0^t \frac{e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(\tau)\, d\tau + e_0 w(t) + e_1 w'(t). \tag{15.49}$$

Avec $w(t) =^{(15.26)} \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}$, donc $w'(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}$.

Cas $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$: on a $\frac{e^{i\omega(t-\tau)}-e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i\omega} = \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega}$, et $w(t) =^{(15.27)} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$, donc $u(t) = \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega} f(\tau)\, d\tau + \frac{e_0}{\omega}\sin(\omega t) + e_1 \cos(\omega t)$ pour tout $t > 0$. ∴

Exemple 15.22 EDO, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P_1(u) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^2 = (\frac{d}{dt} - \lambda I) \circ (\frac{d}{dt} - \lambda I) = \frac{d^2}{dt^2} - 2\lambda\frac{d}{dt} + \lambda^2 I$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2\lambda\frac{du}{dt} + \lambda^2 u = f, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{15.50}$$

Ici $w(t) = te^{\lambda t}$ cf. (15.28), avec $e_0 = -2\lambda u_0 + u_1$ et $e_1 = u_0$ cf. (15.39). D'où

$$\forall t > 0, \quad u(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau + (-2\lambda u_0 + u_1)e^{\lambda t} + u_0 t e^{\lambda t}. \tag{15.51}$$

∴

15.6 Inverse d'un produit de convolution et calcul symbolique

15.6.1 Inverse d'un produit de convolution

Proposition 15.23 *Si deux distributions $B, C \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ sont inversibles dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, alors $B*C$ est inversible dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ d'inverse :*

$$(B * C)^{-1} = C^{-1} * B^{-1} \qquad (= B^{-1} * C^{-1}). \tag{15.52}$$

Et l'équation de convolution $(B * C) * E = \delta_0$ a pour solution (élémentaire) $E = B^{-1} * C^{-1}$. Et donc, si $E_B = H_0 w_B$ et $E_C = H_0 w_C$ sont solutions élémentaires de $B * E_B = \delta_0$ et $C * E_C = \delta_0$ alors $H_0 w = E = (H_0 w_B) * (H_0 w_C)$ est solution élémentaire de $(B * C) * E = \delta_0$, où $w(t) = \int_0^t w_B(\tau-t) w_C(\tau)\, d\tau$.

Preuve. Dans l'algèbre de convolution le produit de convolution est associatif, d'où

$$(B * C) * (C^{-1} * B^{-1}) = B * (C * C^{-1}) * B^{-1} = B * \delta_0 * B^{-1} = B * B^{-1} = \delta_0, \tag{15.53}$$

d'où $E = (B*C)^{-1} = C^{-1}*B^{-1} = B^{-1}*C^{-1}$ (algèbre commutative). Et $H_0(t)w(t) = ((H_0 w_B) * (H_0 w_C))(t) = \int_{\mathbb{R}} H_0(\tau-t) w_B(\tau-t) H_0(\tau) w_C(\tau)\, d\tau = \int_0^t w_B(\tau-t) w_C(\tau)\, d\tau$. ∴

Exemple 15.24 Soit $A = (\delta_0'-\lambda_1\delta_0)*(\delta_0'-\lambda_2\delta_0)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Solutions élémentaires pour $B = \delta_0'-\lambda_1\delta_0$ et $C = \delta_0' - \lambda_2\delta_0$ données par $w_B(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $w_C(t) = e^{\lambda_2 t}$. D'où solution élémentaire $H_0 w = E = (H_0 w_B) * (H_0 w_C)$, i.e., pour $t > 0$, $w(t) = \int_{u=0}^t e^{\lambda_1(t-u)} e^{\lambda_2 u}\, dt = e^{\lambda_1 t}[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)u}}{\lambda_2-\lambda 1}]_0^t = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t} =$(15.26). ∴

15.6.2 Rappel : décomposition en éléments simple d'une fraction rationnelle

Dans $\mathbb{C}$ les éléments simples sont les fractions rationnelles $\frac{c}{(z-\lambda)^j}$, pour $c, \lambda \in \mathbb{C}$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

Calculs génériques pour la décomposition en éléments simples. Soit A et B deux polynômes. La division euclidienne de A par B (diviseur) est

$$A = BQ + R, \quad \text{i.e.} \quad \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}, \quad \text{où} \quad \deg(R) < \deg(B). \tag{15.54}$$

où Q, R sont des polynômes (Q = quotient, R = reste). La décomposition en éléments simple se fait sur la fraction rationnelle $\dfrac{R}{B}$. Soit z_i les k racines de B 2 à 2 distinctes de multiplicité m_i :

$$B(z) = (z-z_1)^{m_1} ... (z-z_k)^{m_k} = \prod_{j=1}^k (z-z_j)^{m_j}. \tag{15.55}$$

(Donc $\sum_{i=1}^k m_i$ = degré(B).) La décomposition en éléments simples (dans $\mathbb{C}$) de la fraction rationnelle $\frac{R}{B}$ est :

$$\frac{R(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{c_{j,1}}{(z-z_j)} + \ldots + \frac{c_{j,m_j}}{(z-z_j)^{m_j}} \Big). \tag{15.56}$$

(On appelle résidu les constantes $c_{j,1} \in \mathbb{C}$ correspondant aux coefficients $\frac{c_{j,1}}{z-z_j}$.)

Calcul générique des $c_{j,i}$: exemple pour $j=1$ (idem pour les autres j) : on a

$$\frac{R(z)}{B(z)} = \Big(\frac{c_{1,1}}{(z-z_1)} + \ldots + \frac{c_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}} \Big) + \sum_{j=2}^{k} \Big(\frac{c_{j,1}}{(z-z_j)} + \ldots + \frac{c_{j,m_j}}{(z-z_j)^{m_j}} \Big). \tag{15.57}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(z-z_1)^{m_1} \frac{R(z)}{B(z)} = \frac{R(z)}{\prod_{j=2}^k (z-z_j)^{m_j}} &= c_{1,1}(z-z_1)^{m_1-1} + \ldots + c_{1,m_1-1}(z-z_1) + c_{1,m_1} \\ &\quad + (z-z_1)^{m_1} \sum_{j=2}^{k} \Big(\frac{c_{j,1}}{(z-z_j)} + \ldots + \frac{c_{j,m_j}}{(z-z_j)^{m_j}} \Big).\end{aligned} \tag{15.58}$$

Donc avec $z = z_1$ on a :

$$c_{1,m_1} = \frac{R(z_1)}{\prod_{j=2}^k (z_1-z_j)^{m_j}}. \tag{15.59}$$

Puis en dérivant (15.58) en z :

$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{R(z)}{\prod_{j=2}^k (z-z_j)^{k_j}}\Big) = c_{1,m-1} + (z-z_1)\Big(...\Big), \quad \text{donne} \quad c_{1,m-1} \quad \text{avec } z = z_1. \tag{15.60}$$

Et on continue à dériver en z.

Exemple 15.25 $z_1 \ne z_2$ et $\frac{R(z)}{B(z)} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)^2} = \frac{c_{1,1}}{z-z_1} + \frac{c_{2,1}}{z-z_2} + \frac{c_{2,2}}{(z-z_2)^2}$. Ici $R=1$ et $B(z) = (z-z_1)(z-z_2)^2$.

Donc $\frac{R(z)}{B(z)}(z-z_1) = \frac{1}{(z-z_2)^2} = c_{1,1} + (z-z_1)(\frac{c_{2,1}}{z-z_2} + \frac{c_{2,2}}{(z-z_2)^2})$. Donc $\frac{1}{(z_1-z_2)^2} = c_{1,1}$.

Puis $\frac{R(z)}{B(z)}(z-z_2)^2 = \frac{1}{z-z_1} = \frac{c_{1,1}}{z-z_1}(z-z_2)^2 + c_{2,1}(z-z_2) + c_{2,2}$. Donc $\frac{1}{z_2-z_1} = c_{2,2}$.

Puis $\frac{d}{dz}(\frac{1}{z-z_1}) = -\frac{1}{(z-z_1)^2} = c_{1,1}(z-z_2)(...) + c_{2,1}$, donc $-\frac{1}{(z_2-z_1)^2} = c_{2,1}$. (Ici cas particulier qui peut être traité plus simplement : $\frac{R(z)}{B(z)}z = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)^2} = \frac{c_{1,1}z}{(z-z_1)} + \frac{c_{2,1}z}{z-z_2} + \frac{c_{2,1}z}{(z-z_2)^2}$, d'où $z \to \infty$ donne $0 = 0 + c_{1,1} + c_{2,1}$, d'où $c_{2,1} = -c_{1,1}$.)

15.6.3 Application

Dans $\mathbb{C}$, soit $P(r) = \prod_{j=1}^k (z-z_j)^{m_j}$ où $z_i \ne z_j$ pour tout i,j, et $m_1 + ... + m_k$ = degré de P.

Proposition 15.26 *Si*

$$\frac{1}{P(r)} = \frac{a_{11}}{r-z_1} + ... + \frac{a_{1m_1}}{(r-z_1)^{m_1}} + ... + \frac{a_{k1}}{r-z_k} + ... + \frac{a_{km_k}}{(r-z_k)^{m_k}}. \tag{15.61}$$

alors

$$w(t) = a_{11}e^{z_1 t} + ... + a_{1m_1}t^{m_1-1}e^{z_1 t} + ... + a_{k1}e^{z_n t} + ... + a_{km_k}t^{m_k-1}e^{z_k t} \tag{15.62}$$

est la solution de (15.20).

Preuve. w est somme de solutions homogènes donc est solution homogène. Si $m=1$, $w(t) = e^{z_1 t}$ est bien la solution cherchée (immédiat). Si $m \geqslant 2$ alors $w(0) = 0$ ssi $a_{11} + a_{21} + ... + a_{k1} = 0$, et à la limite $r \to \infty$ de $\frac{r}{P(r)} = 0$ on a $a_{11} + a_{21} + ... + a_{k1} = 0$: on a bien $w(0) = 0$.

Et on a $w(t) = a_{11}e^{z_1 t} + ... + a_{k1}e^{z_k t} + t(a_{12}e^{z_1 t} + ... + a_{k2}e^{z_k t}) + t^2(...)$, donc $w'(t) = a_{11}z_1 e^{z_1 t} + ... + a_{k1}z_k e^{z_k t} + a_{12}e^{z_1 t} + ... + a_{k2}e^{z_k t} + t(...)$, donc $w'(0) = 0$ ssi $a_{11}z_1 + ... + a_{k1}z_k + a_{12} + ... + a_{k2} = 0$. Généraliser l'exemple 15.25...

Exemple 15.27 Voir exercice 15.14.

15.6.4 Notations pour le calcul symbolique

On note symboliquement (présentation algébrique polynomiale) :

1. $\delta_0 =^{\text{noté}} 1$ (unité dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$),
2. $\delta_0' =^{\text{noté}} p$ (dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$),
3. $H_0 =^{\text{noté}} \frac{1}{p}$ (intégration = inverse de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$),
4. $H_0 e^{-zt} =^{\text{noté}} \frac{1}{p+z}$, solution élémentaire $E = H_0 w$ où $w' + zw = 0$ et $w(0) = 1$, donc $w(t) = e^{-zt}$,
5. $H_0(t)\, e^{-zt} \frac{t^{k-1}}{(m-1)!} =^{\text{noté}} \frac{1}{(p+z)^k}$ solution élémentaire $E = H_0 w$ où $(\frac{d}{dt} - z)^k w = 0$ et $w(0) = ... = w^{(k-2)} = 0$ et $w^{(k-1)} = 1$, cf. (15.30).

D'où la résolution de l'équation différentielle :

1. On calcule les racines z_i du polynôme $P(r) = r^m + a_1 r^{m-1} + ... + a_m$ (calcul algébrique).
2. On note k_i la multiplicité de z_i, on note d le nombre de racines distinctes, et on décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{P(p)} = \prod_{i=1}^s \frac{1}{(z-z_i)^{k_i}}$ en éléments simples,
3. On en déduit w (et $E = H_0 w$).

16 Transformée de Laplace

Ce paragraphe est une introduction à la transformée de Laplace qui permet de justifier le calcul symbolique de manière plus simple a posteriori que la transformée de Fourier.

Exemple 16.1 Voici un exemple d'application du calcul symbolique. Soit l'équation à l'inconnue u :

$$\int_{t=0}^{x} \cos(x-t) u(t)\, dt = g(x). \tag{16.1}$$

On s'intéresse à $x \geqslant 0$, et l'équation s'écrit dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ comme l'équation de convolution :

$$(H_0 \cos * H_0 u)(x) = H_0(x) g(x).$$

On a $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ et $H_0(x) e^{ix} = (\delta_0' - i\delta_0)^{-1}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, donc l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{2}((\delta_0' - i\delta_0)^{-1} + \frac{1}{2}(\delta_0' + i\delta_0)^{-1}) * H_0 u = H_0 g.$$

Soit avec la notation symbolique :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}) H_0 u = H_0 g,$$

d'où, puisque $\frac{1}{2}(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}) = \frac{p}{p^2+1}$:

$$H_0 u = \frac{p^2+1}{p} H_0 g = (p + \frac{1}{p}) H_0 g = (\delta_0' + H_0) * H_0 g.$$

D'où la solution :

$$\forall x > 0, \qquad u(x) = g'(x) + \int_0^x g(t)\, dt. \tag{16.2}$$

Ne pas oublier de considérer $H_0 g$ et non simplement g puisque qu'on doit travailler dans l'algèbre $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. ♣

16.1 Définitions

16.1.1 Cas des fonctions

Soit $p = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ où $\alpha = \text{Re}(p) \in \mathbb{R}$ et $\beta = \text{Im}(p) \in \mathbb{R}$.

Pour $f : t \in \mathbb{R} \to f(t) \in \mathbb{C}$, on pose quand cela a un sens :

$$\mathcal{L}(f)(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-\alpha t} e^{-i\beta t}\, dt \tag{16.3}$$

et $\mathcal{L}(f)$ est appelée transformée de Laplace de la fonction f.

Il est clair que pour une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (dans $L^1(\mathbb{R}_+)$), la transformée de Laplace aura un sens dès que $\alpha > 0$. De manière plus générale, on a :

Proposition 16.2 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est telle que pour $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{R}$ la fonction $|f(t)e^{-\alpha_0 t}|$ est intégrable, alors pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p) \geqslant \alpha_0$ la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(p)$ est bien définie.*

Preuve. On a $|f(t)e^{-pt}| \leqslant |f(t)e^{-\mathrm{Re}(p)t}| \leqslant |f(t)e^{-\alpha_0 t}|$ sur $\mathbb{R}_+$: la domination par une fonction intégrable donne bien $f(t)e^{-pt} \in L^1(\mathbb{R})$. ∴

Définition 16.3 Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donné, le plus petit α_0 vérifiant la propriété précédente est appelé l'abscisse de sommabilité (ou de convergence absolue) de l'intégrale de Laplace. Et le domaine (demi-plan) $\{p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(p) > \alpha_0\}$, où α_0 est l'abscisse de sommabilité, est appelé domaine de sommabilité de l'intégrale de Laplace.

Exemple 16.4 Pour $f =$ polynôme non nul, l'abscisse de sommabilité est $\alpha_0 = 0$ et le domaine de sommabilité est le demi-plan de partie réelle strictement positive.

Pour $f(t) = e^t$, l'abscisse de sommabilité est $\alpha_0 = 1$ et le domaine de sommabilité est le demi-plan de partie réelle strictement supérieur à 1.

Pour $f(t) = e^{t^2}$, l'abscisse de sommabilité est $\alpha_0 = \infty$ (la transformée de Laplace n'existe pas).

Pour $f(t) = e^{-t^2}$, l'abscisse de sommabilité est $\alpha_0 = -\infty$ et le domaine de sommabilité est l'espace $\mathbb{C}$ tout entier.

Dans tous les cas, pour déterminer l'abscisse de sommabilité, plutôt que f, on considère en fait les fonctions tronquées $H_0 f$, puisqu'on ne considère que l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$. ∴

Proposition 16.5 *La transformée de Laplace d'une fonction f est une fonction $C^\infty(\Omega)$ où Ω est le domaine de sommabilité. Donc $\mathcal{L}(f)$ est une fonction holomorphe dans Ω et donc analytique dans Ω (développable en série entière au voisinage de tout point de Ω).*

Preuve. On applique le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. ∴

Exemple 16.6 Pour la fonction de Heaviside $H_0 = 1_{\mathbb{R}_+}$, son domaine de sommabilité est $\Omega = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et sa transformée de Laplace est donnée par :

$$\forall p \in \Omega, \qquad \mathcal{L}(H_0)(p) = \frac{1}{p}, \tag{16.4}$$

fonction qui est bien analytique dans Ω. ∴

16.1.2 Cas des distributions

On note $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{C})$ l'espace des fonctions $\varphi : t \in \mathbb{R} \to \varphi(t) \in \mathbb{C}$ telles que $|\varphi| : t \in \mathbb{R} \to |\varphi(t)| \in \mathbb{R}$ est à décroissance rapide : $|\varphi| \in \mathcal{S}$.

Et dans ce cas, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ avec de plus $e^{-\alpha_0 t}T \in \mathcal{S}'$ (on a donc $e^{-\alpha_0 t}T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ et est tempérée) on pose pour $p \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathrm{Re}(p) > \alpha_0$:

$$\mathcal{L}(T)(p) \overset{\text{déf}}{=} \langle e^{-\alpha_0 t}T_t, e^{-(p-\alpha_0)t}\rangle \tag{16.5}$$

Proposition 16.7 et définition. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ avec de plus $e^{-\alpha_0 t}T \in \mathcal{S}'$, alors si $\alpha_1 > \alpha_0$ on a $e^{-\alpha_1 t}T \in \mathcal{S}'$ et :*

$$\mathcal{L}(T)(p) = \langle e^{-\alpha_1 t}T_t, e^{-(p-\alpha_1)t}\rangle, \qquad \forall p \in \mathbb{C} \quad \textit{tel que} \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha_1 \tag{16.6}$$

Cette quantité est indépendante de $\alpha_1 > \alpha_0$ et on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T)(p) &\overset{\text{déf}}{=} \langle T_t, e^{-pt}\rangle \qquad \forall p \in \mathbb{C} \quad \textit{tel que} \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha_0 \\ &\overset{\text{noté}}{=} \int_{t=0}^{\infty} T(t)e^{-pt}\,dt. \end{aligned} \tag{16.7}$$

On appelle abscisse de sommabilité (ou de convergence absolue) le plus petit α_0 tel que $e^{-\alpha_0 t}T \in \mathcal{S}'$. Et le domaine (demi-plan) $\{p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(p) > \alpha_0\}$, où α_0 est l'abscisse de sommabilité, est le domaine de sommabilité de l'intégrale de Laplace.

Preuve. Si $\alpha_1 - \alpha_0 > 0$, alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a $e^{-(\alpha_1-\alpha_0)t}\varphi$ est $C^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide en $+\infty$ et donc, pour T distribution à support dans $\mathbb{R}_+$:

$$\langle e^{-\alpha_0 t}T_t, e^{-(\alpha_1-\alpha_0)t}\varphi\rangle = \langle e^{-(\alpha_1-\alpha_0)t}e^{-\alpha_0 t}T_t, \varphi\rangle = \langle e^{-\alpha_1 t}T_t, \varphi\rangle \tag{16.8}$$

toutes les quantités ci-dessus étant bien défini. On en déduit que $e^{-\alpha_1 t}T_t \in \mathcal{S}'$. Puis avec $\varphi(t) = e^{-(p-\alpha_1)t}$ où $\mathrm{Re}(p) \geqslant \alpha_1$ (le support de T étant dans $\mathbb{R}_+$) :

$$\langle e^{-\alpha_1 t}T_t, e^{-(p-\alpha_1)t}\rangle = \langle e^{-\alpha_0 t}T_t, e^{-(p-\alpha_0)t}\rangle = \mathcal{L}(T)(p) \tag{16.9}$$

et cette quantité est bien indépendante de $\alpha_1 > \alpha_0$. ▪

Et comme pour les fonctions :

Proposition 16.8 *Les transformées de Laplace des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ sont holomorphes, et donc analytiques, dans le domaine de sommabilité.*

Preuve. C'est la propriété de dérivation sous le signe $\langle ., .\rangle$, proposition 7.4. ▪

16.2 Dérivées et translations, exemples

On a (généralisation de la transformée de Fourier) :

Proposition 16.9 *Si $p \in \mathbb{C}$ est dans le domaine de sommabilité de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, pour $l \in \mathbb{N}$ et pour $a \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(T')(p) = p\mathcal{L}(T)(p) \qquad \text{et} \quad \mathcal{L}(T^{(l)})(p) = p^l\mathcal{L}(T)(p) \\ &\mathcal{L}(T)'(p) = -\mathcal{L}(tT)(p) \qquad \text{et} \quad \mathcal{L}(T)^{(l)})(p) = (-1)^l\mathcal{L}(t^lT)(p) \\ &\mathcal{L}(\tau_aT)(p) = e^{-ap}\mathcal{L}(T)(p) \end{aligned} \tag{16.10}$$

Et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ si p et $p+\lambda$ sont dans le domaine de sommabilité de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$:

$$\tau_\lambda\mathcal{L}(T)(p) = \mathcal{L}(e^{+\lambda t}T)(p) \tag{16.11}$$

En particulier, on retrouve le fait qu'une dérivation est transformée en expression polynomiale par Laplace.

Preuve. On a, toutes les quantités ayant un sens :
$\mathcal{L}(T')(p) = \langle T_t', e^{-pt}\rangle = -\langle T_t, -pe^{-pt}\rangle = p\langle T_t, e^{-pt}\rangle$ puis par récurrence pour $l \in \mathbb{N}$ on a la première relation. Puis par dérivation sous le crochet :
$\mathcal{L}(T)'(p) = \frac{d}{dp}\langle T_t, e^{-pt}\rangle = \langle T_t, -te^{-pt}\rangle = \langle -tT_t, e^{-pt}\rangle = -\mathcal{L}(tT)(p)$ puis par récurrence pour $l \in \mathbb{N}$ on a la deuxième relation. Puis par un calcul direct :
$\mathcal{L}(\tau_aT)(p) = \langle T_t, e^{-p(t+a)}\rangle = e^{-pa}\langle T_t, e^{-pt}\rangle$. Et quand cela a un sens :
$\mathcal{L}(e^{+\lambda t}T)(p) = \langle T_t, e^{\lambda t}e^{-pt}\rangle = \langle T_t, e^{-t(p-\lambda)}\rangle = \mathcal{L}(T)(p-\lambda) = \tau_\lambda\mathcal{L}(T)$. ▪

Exemple 16.10 Pour la masse de Dirac :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\delta_0)(p) = 1 \quad (= \langle \delta_0, e^{-pt}\rangle) \\ &\mathcal{L}(\delta_0')(p) = p \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\delta_0^{(\ell)})(p) = p^\ell \\ &\mathcal{L}(H_0)(p) = \frac{1}{p} \\ &\mathcal{L}(\tau_a\delta_0)(p) = e^{-ap} \end{aligned} \tag{16.12}$$

La primitive H_0 de δ_0 apparaît donc comme l'inverse de la dérivée δ_0' de δ_0 après transformation par Laplace : cela redonnera le calcul symbolique.

Les autres relations donnant $\mathcal{L}(t\delta_0)(p) = 0$ et $\tau_a\mathcal{L}(\delta_0)(p) = 1$.

On retrouve les mêmes formules que dans le cas de la transformée de Fourier, p jouant le rôle de $i\xi$. ▪

Exemple 16.11 Pour $p \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Re}(p) > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(H_0(t)e^{i\omega t})(p) &= \tau_{i\omega}\mathcal{L}(H_0(t))(p) = \frac{1}{p - i\omega} \\
\mathcal{L}(H_0(t)e^{-i\omega t})(p) &= \frac{1}{p + i\omega} \\
\mathcal{L}(H_0(t)\cos(\omega t))(p) &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} \\
\mathcal{L}(H_0(t)\sin(\omega t))(p) &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
\end{aligned} \tag{16.13}$$

Exemple 16.12 Pour la fonction $H_0(t)\frac{t^n}{n!}$:

$$\mathcal{L}(H_0(t)\frac{t^n}{n!})(p) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\mathcal{L}(H_0)^{(n)}(p) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dp^n}(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p^{n+1}} \tag{16.14}$$

Et pour la fonction $H_0(t)e^{\lambda t}\frac{t^n}{n!}$, dès que $\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\lambda)$:

$$\mathcal{L}(H_0(t)e^{\lambda t}\frac{t^n}{n!})(p) = \tau_\lambda\mathcal{L}(H_0(t)\frac{t^n}{n!})(p) = \frac{1}{(p-\lambda)^{n+1}} \tag{16.15}$$

16.3 Inversion de la Transformée de Laplace

Elle est donnée à l'aide de l'inversion de la transformée de Fourier : on a, dans le domaine de sommabilité de f, i.e., pour $\alpha > \alpha_0$ et $p = \alpha + i\beta$:

$$\mathcal{L}(f)(\alpha + i\beta) = \int_0^\infty (f(t)e^{-\alpha t})\, e^{-i\beta t}\, dt = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(H_0 f e^{-\alpha t})(\beta) \tag{16.16}$$

Et on a par transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
H_0(t)f(t)e^{-\alpha t} &= \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(H_0 f e^{-\alpha \cdot})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\beta=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(H_0 f e^{-\alpha\cdot})(\beta)\, e^{+i\beta t}\, d\beta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\beta=-\infty}^{\infty} (\int_{s=-\infty}^{\infty} H_0(s)f(s)e^{-\alpha s}\, e^{-i\beta s}\, ds)\, e^{+i\beta t}\, d\beta
\end{aligned} \tag{16.17}$$

D'où :

$$(H_0 f)(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi}\int_{\beta=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(f)(\alpha + i\beta)\, e^{+i\beta t}\, d\beta \tag{16.18}$$

(donc on ne peut connaître f que sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'on ne sait calculer que la fonction tronquée $H_0 f$.) Soit encore, en intégrant sur la droite imaginaire $z = \alpha$ avec donc $dp = 0 + id\beta$:

$$\begin{aligned}
\forall t \geqslant 0, \qquad f(t) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{+ipt}\, dp \\
&\overset{\text{noté}}{=} \frac{1}{2i\pi}\int_{p=\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{+ipt}\, dp
\end{aligned} \tag{16.19}$$

C'est la formule d'inversion. Il reste à savoir sous quelles conditions cette formule est valide.

On sait que la transformée de Laplace est une fonction holomorphe. Il s'agit donc de savoir sous quelles conditions une fonction holomorphe $\mathcal{L}(p)$ est la transformée de Laplace d'une distribution.

Proposition 16.13 *Pour qu'une fonction holomorphe $p \to \mathcal{L}(p)$ soit la transformée de Laplace d'une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, il faut et il suffit qu'il existe un demi-plan $\alpha > \alpha_0$ (domaine de sommabilité) dans lequel $\mathcal{L}(p)$ soit tempérée.*

Preuve. Admis.

16.4 Transformée de Laplace et convolution

Par Laplace, la convolution est transformée en produit :

Proposition 16.14 *Soit* $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, *resp.* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, *ayant une transformée de Laplace pour* p *tel que* $\mathrm{Re}(p) > \alpha_1$, *resp. tel que* $\mathrm{Re}(p) > \alpha_2$, *avec* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(p) > \max(\alpha_1, \alpha_2)$, *on a :*

$$\mathcal{L}(S * T)(p) = \mathcal{L}(S)(p)\mathcal{L}(T)(p) \tag{16.20}$$

Preuve. Ce n'est autre que le théorème de Fubini :

$$\mathcal{L}(S * T)(p) = \langle (S * T)_t, e^{-pt} \rangle = \langle S_x \otimes T_y, e^{-p(x+y)} \rangle = \langle S_x, e^{-px} \rangle \langle T_y, e^{-py} \rangle \tag{16.21}$$

∴

On retrouve par exemple :

Corollaire 16.15 *Si* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ *a une transformée de Laplace pour* p *dans le domaine de sommabilité* $\mathrm{Re}(p) > \alpha_0$, *alors dans le domaine de sommabilité :*

$$\mathcal{L}(T^{(l)})(p) = p^l\, \mathcal{L}(T) \tag{16.22}$$

Preuve. En effet, $T^{(l)} = \delta_0^{(l)} * T$, d'où $\mathcal{L}(T^{(l)})(p) = \mathcal{L}(\delta_0^{(l)})\mathcal{L}(T) = p^l\, \mathcal{L}(T)$. ∴

Exemple 16.16 On retrouve :

$$\mathcal{L}(\delta_0)(p) = \mathcal{L}(H_0')(p) = \mathcal{L}(\delta_0' * H_0)(p) = \mathcal{L}(\delta_0')(p)\,\mathcal{L}(H_0)(p) = p\,\frac{1}{p} = 1 \tag{16.23}$$

i.e., par Laplace, la dérivée δ_0' est bien l'inverse de la primitive H_0. ∴

16.5 Retour sur le calcul symbolique

On applique l'idée que l'intégration est l'opération inverse de la dérivation : pour $p \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(\delta_0)(p) = 1, \quad \mathcal{L}(\delta_0')(p) = p, \quad \mathcal{L}(H_0)(p) = \frac{1}{p}, \quad \mathcal{L}(H_0 e^{\lambda \cdot})(p) = \frac{1}{p - \lambda}. \tag{16.24}$$

Puis grâce à la transformée de Laplace d'un produit de convolution :

$$\mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(\delta_0' * u) = \mathcal{L}(\delta_0')\mathcal{L}(u) = p\mathcal{L}(u), \tag{16.25}$$

on a transformé une primitive en expression polynomiale.

Et avec :

$$\mathcal{L}(\int_0^T u(t)\, dt)(p) = \mathcal{L}(H_0 * H_0 u)(p) = \mathcal{L}(H_0)(p)\mathcal{L}(u)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(u)(p), \tag{16.26}$$

on a transformé une primitive en expression rationnelle, ceci pour $p \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exemple 16.17 Soit à résoudre $u'' + \omega^2 u = f$. On se limite à la recherche de $u(t)$ pour $t \geqslant 0$. On applique alors $\mathcal{L}$ pour obtenir à partir de $(\delta_0'' + \omega^2 \delta_0) * u = f$:

$$(p^2 + \omega^2)\mathcal{L}(u)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \tag{16.27}$$

On retrouve le polynôme caractéristique de l'équation différentielle :

$$P(p) = p^2 + \omega^2 = (p - i\omega)(p + i\omega) \tag{16.28}$$

d'inverse :

$$\frac{1}{P(p)} = \frac{1}{2i\omega}(\frac{-1}{p + i\omega} + \frac{1}{p - i\omega}) \tag{16.29}$$

Et il vient :

$$\mathcal{L}(u)(p) = \frac{1}{2i\omega}(\frac{-1}{p + i\omega} + \frac{1}{p - i\omega})\mathcal{L}(f)(p) \tag{16.30}$$

D'où par transformée inverse (qui ne donne que u sur $\mathbb{R}_+$) :

$$(H_0 u)(t) = \frac{1}{2i\omega}(-H_0 e^{-i\omega t} + H_0 e^{i\omega t}) * H_0 f(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} * H_0 f(t) \tag{16.31}$$

résultat déjà vu. Ne pas oublier de considérer $H_0 f$ et non simplement f puisque la transformée de Laplace inverse ne donne que la fonction tronquée $H_0 f$ (et non f). ∴

17 Résolution d'équations aux dérivées partielles

17.1 Formules de Stokes et de Green

17.1.1 Domaine régulier, élément de surface et normale extérieure

On notera $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \{\vec{x} = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\}$, ce qui donnera l'écriture générique d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de graphe $\{(x', \varphi(x')) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$.

Et on notera $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, ainsi que $|x'| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2}$.

Ainsi, une boule $B_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et un intervalle $[a_n, b_n]$ définissent le 'cylindre' $B_{n-1} \times [a_n, b_n]$, et une fonction $\varphi : B_{n-1} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi \in C^\infty(B_{n-1}, \mathbb{R})$ définira une 'surface' régulière (i.e., son graphe $\{(x', \varphi(x')) : x' \in B_{n-1}\}$ est une 'surface infiniment lisse' de $\mathbb{R}^n$).

Définition 17.1 On dit que Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ est une domaine régulier si localement Ω est l'ensemble des points situés au dessus du graphe d'une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$, i.e. :

1. Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$. On note $\partial\Omega$ sa frontière.
2. Pour tout $\vec{a} = (a', a_n) \in \partial\Omega$, il existe un repère orthonormé R_a (dit adapté), il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, et il existe une fonction $\varphi_a \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ tels que : dans le repère R_a on ait $\vec{a} = (0, ..., 0)$ (origine dans $\mathbb{R}^n$) et :
$$\Omega \bigcap \{(x', x_n) : |x'| < \varepsilon,\ |x_n| < \eta\} = \{(x', x_n) : |x'| < \varepsilon,\ |x_n| < \eta \text{ et } x_n > \varphi_a(x')\} \tag{17.1}$$
(Ω est localement d'un seul côté du graphe de φ_a.)

On se donne un domaine régulier Ω et un point $\vec{a} = (a', a_n) \in \partial\Omega$. Avec φ_a défini ci-dessus dans un voisinage V_a de $\vec{a}$, on définit le vecteur normal unitaire extérieur (ou sortant) à $\partial\Omega$ en $\vec{x} = (x', x_n) \in V_a \bigcap \partial\Omega$ comme étant le vecteur normal unitaire au graphe de φ_a en $\vec{x}$ défini par :

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi_a(x')|^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_a(x')}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_a(x')}{\partial x_{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi_a(x')|^2}} \begin{pmatrix} \Big(\nabla\varphi_a\Big)(x') \\ \\ -1 \end{pmatrix} \tag{17.2}$$

où $\nabla\varphi_a(x') = (\frac{\partial\varphi_a(x')}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\varphi_a(x')}{\partial x_{n-1}})^t$ est le vecteur gradient de φ_a en $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, et $|\nabla\varphi_a(x')|$ sa norme dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Noter que Ω étant (localement) au dessus du graphe de φ_a, la dernière composante de $\vec{n}(\vec{x})$ est bien définie par un signe '$-$' pour avoir la normale extérieure (ou sortante). Pour mémoire :

Définition 17.2 On appelle i-ème cosinus directeur de la normale $\vec{n}(\vec{x})$ la projection du vecteur normal $\vec{n}(\vec{x})$ dans la i-ème direction : $\cos\theta_i = (\vec{n}(\vec{x}), \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = n_i(\vec{x})$.

Puis on définit localement (au voisinage de $\vec{a}$) l'élément de surface comme étant la mesure sur $\mathbb{R}^{n-1}$ définie au voisinage de $\vec{a}$ par :
$$d\sigma_a = \sqrt{1 + |\nabla\varphi_a(x')|^2}\, dx' \tag{17.3}$$
où on a noté $dx' = dx_1...dx_{n-1}$. On montre que cette mesure est indépendante du choix du repère R_a (exercice). Et $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi_a(x')|^2}}$ n'est autre que la jacobien de la transformation en x, voir cours d'intégration sur des surfaces paramétrées.

Donc localement, i.e. pour $\psi \in \mathcal{D}(\omega)$ où ω est un 'petit' voisinage de $\vec{a}$, on a défini $d\sigma_a$ par :
$$\langle d\sigma_a, \psi\rangle = \int \psi(x')\sqrt{1 + |\nabla\varphi_a(x')|^2}\, dx' = \int \psi\, d\sigma_a.$$

Puis, à partir des propriétés locales, on passe aux propriétés globales : on recouvre $K = \overline{\Omega}$ (compact) par un nombre fini d'ouverts 'cylindriques'. Quitte à considérer des unions de tels ouverts, on note ce recouvrement $\Omega_0 \bigcup (\bigcup_{j=1}^m \Omega_j)$, où on a noté Ω_0 l'ouvert d'intersection vide avec ∂K et où $\Omega_j \bigcap \partial K \neq \varnothing$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. On se donne alors une partition de l'unité $\chi_0 + \chi_1 + ... + \chi_m$ relative à ce recouvrement, et on définit l'élément de surface au voisinage de $\vec{x} \in \partial K$ par :
$$d\sigma = \sum_{i=1}^m \chi_i(x') d\sigma_{a_i} \tag{17.4}$$

On a ainsi une mesure globale sur $\partial\Omega$ (on fait la somme finie des mesures locales dans leurs repères adaptées).

Puis on définit l'intégrale de surface d'une fonction continue f par :

$$\langle d\sigma, f\rangle = \int_{\partial\Omega} f(\vec{x})\, d\sigma(\vec{x}) \tag{17.5}$$

Enfin, on rappelle que pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ on a en $\vec{x} \in \partial\Omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{n}) - f(\vec{x})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_1} n_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} n_n = \nabla f.\vec{n} \tag{17.6}$$

C'est la dérivée de f dans la direction $\vec{n}$. Attention, ici f est une fonction des n variables '(x', x_n)' et a un sens dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$ et non seulement sur la surface $\partial\Omega$ (variété d'ordre $n-1$). Alors que la surface $\partial\Omega$ est définie (localement) comme une fonction φ des $n-1$ variables x'.

17.1.2 Formule de Stokes

On note $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. On commence par une propriété locale grâce aux fonctions à support compact, et on regarde le cas d'une frontière 'plane'.

Lemme 17.3 *Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ et si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors, notant $t = x_n$:*
pour $i = 1, ..., n-1$:

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t+\varphi(x'))\, dx'dt = \int_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} f(x', \varphi(x'))\, \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x_i}\, dx' \tag{17.7}$$

et pour $i = n$:

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t+\varphi(x'))\, dx'dt = -\int_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} f(x', \varphi(x'))\, dx' \tag{17.8}$$

Et ceci est conservé si φ et f sont C^1 à support compact.

Preuve. On applique le théorème de Fubini en posant $g(x', t) = f(x', t+\varphi(x'))$ qui est C^∞ et qui donne :

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x', t)\, dx_1 ... dx_{n-1} dt = 0 \tag{17.9}$$

(en intégrant d'abord en x_1 sur $]-\infty, \infty[$, g étant à support compact.)

Et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x', t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x', t+\varphi(x')) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t+\varphi(x'))\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x') \tag{17.10}$$

Il vient donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x', t+\varphi(x'))\, dx'dt = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t+\varphi(x'))\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x')\, dx'dt \tag{17.11}$$

Et φ étant indépendant de x_n on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x', t+\varphi(x'))\, dx'dt = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x') \Big[f(x', t+\varphi(x'))\Big]_{t=0}^{\infty} dx' \tag{17.12}$$

d'où (17.7) pour $i = 1$ f étant à support compact. Et même calcul pour $i \leqslant n-1$.

Pour $i = n$, on a directement, φ ne dépendant pas de x_n :

$$\int\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t+\varphi(x'))\, dx'dt = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[f(x', t+\varphi(x'))\right]_{t=0}^{\infty} dx' \tag{17.13}$$

f étant à support compact, i.e. (17.8). ∎

On en déduit :

Théorème 17.4 *(Formule de Stokes) Pour un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\tilde{\Omega})$ où $\tilde{\Omega}$ est un voisinage de Ω, on a, pour $i = 1, ..., n$:*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\,dx = \int_{\partial\Omega} f(\vec{x})\,n_i\,d\sigma(\vec{x}) \tag{17.14}$$

où $\vec{n} = (n_1, ..., n_n)$ est le vecteur unitaire extérieur à Ω.

Et donc, pour tout champ de vecteur $\vec{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est C^1 dans un voisinage de Ω :

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{X})\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{X}.\vec{n}\,d\sigma(\vec{x}) \tag{17.15}$$

(formule de Stokes.)

(On rappelle que pour $\vec{X} : (x_1, ..., x_n) \to \begin{pmatrix} X_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ X_n(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur C^1 donné, on a $\operatorname{div}(\vec{X}) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$.)

Preuve. On applique le lemme précédent : on considère le compact régulier $K = \overline{\Omega}$, et le recouvrement fini $\Omega_0 \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ de la définition de $d\sigma$. Et on prend une partition de l'unité relative à $\bigcup_{j=0}^m \Omega_j$ avec laquelle on a :

$$f = \sum_{j=0}^m f\chi_j = \sum_{j=0}^m f_j, \qquad f_j \stackrel{\text{déf}}{=} f\chi_j$$

Et on applique le lemme précédent à chaque f_j, ce qui donne, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x', t + \varphi(x'))\,dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j(x', \varphi(x'))\,\frac{\partial \varphi(x')}{\partial x_i}\,dx'.$$

Puis on passe de $\mathbb{R}^n_+$ à Ω : pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on prend pour φ la fonction déterminant localement $\partial\Omega$; on obtient, pour tout $0 \leqslant j \leqslant m$, grâce à (17.2) :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x', t + \varphi(x'))\,dx = \int_{\partial\Omega} f_j\,[n_i.\sqrt{1 + |\nabla\varphi|^2})\,dx'] = \int_{\partial\Omega} f_j\,n_i\,d\sigma$$

Puis comme $\sum_{j=0}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \sum_{j=1}^m f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, on en déduit (17.14) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Le cas $i = n$ est immédiat avec le lemme précédent et la définition de $\vec{n}$ donnée en (17.2) ainsi que de l'élément de surface $d\sigma$ défini en (17.3). D'où la formule (17.14) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Et la formule de Stokes (17.15) s'en déduit puisque :

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{X})\,dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(\vec{x})\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} X_i\,n_i\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} \vec{X}.\vec{n}\,d\sigma \tag{17.16}$$

17.1.3 Intégration par parties et formule de Green

De la formule (17.14) on déduit immédiatement :

Théorème 17.5 *(Intégration par parties) Si f et g sont deux fonctions C^1 dans un voisinage d'un ouvert régulier Ω de $\mathbb{R}^n$, on a, pour tout $i = 1, ..., n$:*

$$\int_\Omega f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,g\,dx + \int_{\partial\Omega} f\,g\,n_i\,d\sigma \tag{17.17}$$

Preuve. C'est la formule (17.14) appliquée à la fonction fg.

Et de la formule de Stokes (17.15) on déduit immédiatement :

Théorème 17.6 *(Formule de Green) Si f et g sont deux fonctions C^2 dans un voisinage d'un ouvert régulier Ω de $\mathbb{R}^n$, on a, pour tout $i = 1, ..., n$:*

$$\int_\Omega (f\,\Delta g - \Delta g\,f)\,dx = \int_{\partial\Omega} (f\,\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}\,g)\,d\sigma \tag{17.18}$$

Preuve. On considère le champ de vecteur $\vec{X} = f\nabla g$ qui donne $\operatorname{div}\vec{X} = f\Delta g + \nabla f.\nabla g$, auquel on applique la formule de Stokes, et de même pour le champ de vecteur $\vec{Y} = g\nabla f$, et on fait la différence des deux formules trouvées.

17.2 Formule des sauts dans l'espace et formule de Rankine-Hugoniot

17.2.1 Formule des sauts dans l'espace

C'est la contrepartie du cas 1-D, paragraphe 4.9.3, pour une fonction C^1 et C^0 par morceaux sur $\mathbb{R}^n$.

Soit Ω un ouvert régulier de bord $\partial\Omega$, et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ supposée régulière par morceaux : on suppose $f \in C^1(\Omega)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n - \Omega)$ avec de plus f prolongeable au bord : d'une part en une fonction $f_{int} \in C^1(\overline{\Omega})$ (intérieure), et d'autre part en une autre fonction $f_{ext} \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n - \Omega})$ (extérieure).

On applique alors le résultat du cas 1-D, paragraphe 4.9.3, où maintenant l'élément de surface orthogonal à la direction x_1 a pour mesure $n_1\, d\sigma$:

Proposition 17.7 *Pour la fonction f C^1 par morceaux définie ci-dessus, on a au sens des distributions, pour tout $i = 1, ..., n$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + \big(f_{ext} - f_{int}\big) n_i\, d\sigma, \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{17.19}$$

où $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$ est la dérivée usuelle de f.

Preuve. Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors f étant $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x})\, d\Omega = -\int_{\Omega\cup(\mathbb{R}^n-\Omega)} f(\vec{x})\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x})\, d\Omega \tag{17.20}$$

On applique la formule d'intégration par parties (17.17) sur chaque morceaux (f y est C^1) :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega f(\vec{x})\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x})\, d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} f_{int}(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, n_i\, d\sigma \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n-\Omega} f(\vec{x})\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x})\, d\Omega = -\int_{\mathbb{R}^n-\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} f_{ext}(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, (-n_i)\, d\sigma \end{array}\right. \tag{17.21}$$

($\vec{n}$ est la normale extérieure pour Ω et $-\vec{n}$ est la normale extérieure pour $\mathbb{R}^n - \Omega$.) On en déduit :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\rangle = \int_{\Omega\cup(\mathbb{R}^n-\Omega)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (f_{ext} - f_{int})(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, n_i\, d\sigma \tag{17.22}$$

ceci étant vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, c'est le résultat annoncé. ∎

Remarque 17.8 La formule des sauts (17.19) est aussi notée, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}(\vec{x}) + \big(f(\vec{x}+0\vec{n}) - f(\vec{x}-0\vec{n})\big) n_i\, d\sigma = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}(\vec{x}) + \big[f\big] n_i\, d\sigma \tag{17.23}$$

où $\big[f\big]$ dénote le saut de f à travers $\partial\Omega$. Et si $\vec{x} \notin \partial\Omega$, alors f est dérivable en $\vec{x}$, et la dérivée au sens des distributions est identifiable à la dérivée usuelle : la mesure $d\sigma$ à son support dans $\partial\Omega$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur $\partial\Omega$, on a $\langle d\sigma, \varphi\rangle = 0$. ∎

Remarque 17.9 Une fonction d'une seule variable x_1, cas traité au paragraphe 4.9.3, se comporte comme le cas n-D où Ω est un cylindre d'axe x_1, la normale sortante en 'entrée' (à gauche) du cylindre valant $\vec{n}(-1, 0, ..., 0)$. On retrouve alors : (i) $\sigma_0 = f(\vec{x}+0) - f(\vec{x}-0) = -f(\vec{x}+0\vec{n}) + f(\vec{x}-0\vec{n})$ et (ii) $n_1\, d\sigma = -1\, \sigma_0\delta_0$. Et on retrouve

$$f' = \{f'\} + \sigma_0\delta_0, \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \tag{17.24}$$

La formule n-D peut s'en déduire heuristiquement en notant que la dérivée dans la direction 1 ne dépend pas des autres directions, et en particulier, le taux de variation de f dans la direction 1 ne dépend pas de l'inclinaison de la surface par rapport sur l'axe x_1 (qui dépend des autres directions) mais uniquement de l'aire de la surface projeté, i.e., de $n_1\, d\sigma$. ∎

17.2.2 Formule de Rankine-Hugoniot

On considère les variable $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$. Un choc (type 'onde de choc') est décrit par la discontinuité d'une fonction $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ notée $u(t, \vec{x})$ le long d'une surface Σ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Le problème est alors de décrire les lois de conservations sur Σ, surface supposée régulière. La normale à la frontière Σ est notée $\vec{n} = (n_0, n_1, ..., n_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Une loi de conservation de $u(t, \vec{x})$ est décrite par :

$$\frac{\partial u(t, \vec{x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{f}(u(t, \vec{x})) = 0 = \frac{\partial u(t, \vec{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f_i(u(t, \vec{x}))\big) \tag{17.25}$$

au sens des distributions, la fonction $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ notée $\vec{f}(v) = \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_n(v) \end{pmatrix}$ étant une fonction qui est $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

On déduit de la formule des sauts que la densité par rapport à $d\sigma$ vaut :

$$\big[u(x + 0\vec{n}) - u(x - 0\vec{n})\big]\, n_0 + \sum_{i=1}^{n} \big[f_i(u(x + 0\vec{n}) - f_i(u(x - 0\vec{n})\big]\, n_i = 0 \tag{17.26}$$

où avec le notation des sauts :

$$\big[u\big]\, n_0 + \sum_{i=1}^{n} \big[f_i \circ u\big]\, n_i = 0 \tag{17.27}$$

C'est la formule de Rankine–Hugoniot qui permet la description du choc (de la dérivée de la discontinuité de u au sens des distribution).

17.3 Équations aux dérivées partielles

Pour $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on cherche une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de l'équation :

$$A * u = f \tag{17.28}$$

pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas où $A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \delta_0$ est une combinaison linéaire de masse de Dirac et de ses dérivées, l'équation de convolution est l'équation aux dérivées partielles :

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} = f \tag{17.29}$$

17.3.1 Existence et unicité dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Proposition 17.10 *On se place dans l'algèbre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions à support compact. Si $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ admet une solution élémentaire $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$,*

(i) il existe au moins une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de (17.29) à savoir $u = E * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

(ii) il existe au plus une solution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, c'est $u = E * f$,

(iii) si A est inversible dans l'algèbre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, i.e., s'il existe une solution élémentaire $E = A^{-1}$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ donnée par $u = A^{-1} * f$.

Preuve. Ayant au moins deux des distributions ayant des supports compacts, à savoir A et f, le produit de convolution est associatif et :

$$A * (E * f) = (A * E) * f = \delta_0 * f = f \tag{17.30}$$

d'où $u = E * f$ est solution. De plus, si on suppose u à support compact, alors le produit de convolution suivant est associatif et donne :

$$u = (E * A) * u = E * (A * u) = E * f \tag{17.31}$$

et donc u s'il existe est unique. Et si A a un inverse dans l'algèbre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. si A^{-1} existe, $A^{-1} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $A^{-1} * f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors $u = A^{-1} * f$ est bien solution dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

17.3.2 Équation de Laplace dans $\mathbb{R}^3$: distributions et fonctions harmoniques

Définition 17.11 Une fonction (resp. distribution) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0 \tag{17.32}$$

Les fonctions solutions de cette équation sont appelées fonctions harmoniques, et dans $\mathbb{R}^2$, ce sont les parties réelles de fonctions holomorphes (voir par exemple Rudin [10] chapitre 11).

Proposition 17.12 *La fonction $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \frac{1}{|\vec{r}|} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.*

Preuve. En effet :

$$\forall \vec{r} \neq 0, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{x} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \qquad \Delta \frac{1}{r} = 0 \tag{17.33}$$

∎

Il reste donc à voir ce qui se passe en 0. Noter que $E = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$ est une fonction localement intégrable de $\mathbb{R}^3$ et définit une distribution régulière. Par contre, ce n'est pas une distribution à support compact.

Proposition 17.13 *Une solution élémentaire $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ du Laplacien : $\Delta\delta_0 * E = \Delta E = \delta_0$ est :*

$$E = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \tag{17.34}$$

où $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ si $\vec{r} = (x, y, z)$ est le rayon vecteur.

Preuve. On note S_ε la sphère de centre 0 et de rayon ε, et on pose :

$$f_\varepsilon(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{r} & r \geqslant \varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & r \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{17.35}$$

(faire le dessin.) Un calcul direct montre que $\Delta f_\varepsilon = 0$ dans $\mathbb{R}^3 - S_\varepsilon$: f_ε est harmonique dans $\mathbb{R}^3 - S_\varepsilon$. Et comme f_ε converge presque partout vers $\frac{1}{r}$ quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit que $f_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{r}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Et donc :

$$\Delta \frac{1}{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta f_\varepsilon \tag{17.36}$$

(continuité de la dérivée dans $\mathcal{D}'$.)

D'autre part, la fonction f_ε est continue sur S_ε, et la formule des sauts donne au sens des distributions :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\vec{x}) = \left\{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}\right\}(\vec{x}) + \big(f_\varepsilon(\vec{x} + 0\vec{n}) - f_\varepsilon(\vec{x} - 0\vec{n})\big) n_1 \, d\sigma = \left\{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}\right\}(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{-x}{r^3}, & r > \varepsilon \\ 0, & r < \varepsilon \end{cases} \tag{17.37}$$

On applique la formule des sauts à $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\vec{x})$ et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\varepsilon(\vec{r})}{\partial x^2} &= \left\{\frac{\partial^2 f_\varepsilon(\vec{r})}{\partial x^2}\right\} + [\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\vec{r} + 0.\vec{n}) - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\vec{r} - 0.\vec{n})] \, n_1 \, d\sigma_\varepsilon \\ &= \left\{\frac{\partial^2 f_\varepsilon(\vec{r})}{\partial x^2}\right\} - \frac{x}{r^3} \, n_1 \, d\sigma_\varepsilon \end{aligned} \tag{17.38}$$

D'où :

$$\Delta f_\varepsilon = 0 - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{r^3} \, d\sigma_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} \, d\sigma_\varepsilon \tag{17.39}$$

puisque sur la sphère $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. D'où, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle \Delta f_\varepsilon, \varphi \rangle = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} \varphi(\vec{r}) \, d\sigma_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(0) 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle \tag{17.40}$$

D'où $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta_0$, et $E = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$ est une solution élémentaire. ∎

17.3.3 Équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$

On en déduit :

Proposition 17.14 *Si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ alors l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$:*

$$\Delta u = f \tag{17.41}$$

admet une solution u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ donnée par :

$$u = E * f = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} * f \tag{17.42}$$

Cette solution est $C^\infty(\mathbb{R}^3 - \mathrm{supp}(f))$ et tend vers 0 à l'infini.

(Il y a d'autres solutions, à savoir $u + v$ où v est harmonique. Par contre on montrera que $u = E * f$ est la seule solution qui tend vers 0 à l'infinie. $f \in \mathcal{E}'$ représente une distribution de charge en électricité par exemple.)

Preuve. Puisque $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, la proposition 17.10 nous dit qu'effectivement $E * f$ est solution.

Maintenant, f étant à support compact, pour $\vec{r}$ fixé, si $\vec{r} \notin \mathrm{supp}(f)$, alors pour tout $\vec{x} \in \mathrm{supp}(f)$ on a $\vec{r}-\vec{x} \neq 0$ et :

$$(E * f)(\vec{r}) = \langle f(\vec{x}), E(\vec{r}-\vec{x})\rangle = \int_{\vec{x}\in\mathrm{supp}(f)} f(\vec{x})\, E(\vec{r}-\vec{x})\, d\vec{x} \tag{17.43}$$

(Écriture intégrale abusive si f n'est pas une fonction.) Et $E * f$ est bien C^∞ au voisinage de $\vec{r}$ puisque $\vec{x} \to E(\vec{r}-\vec{x})$ est C^∞ sur un voisinage de $\mathrm{supp}(f)$ (dérivation sous le crochet).

Il reste à montrer que $u = E * f$ tend vers 0 à l'infini : f est une distribution à support compact donc d'ordre fini (proposition 19.8). Soit m l'ordre de f. On a, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, si K est un voisinage de $\mathrm{supp} f$ et si $\vec{r} \notin K$:

$$(f * E)(\vec{r}) = \langle f_{\vec{x}}, E(\vec{r}-\vec{x})\rangle \leqslant C \sup_{\vec{x}\in K,\, |\alpha|\leqslant m} |E^{(\alpha)}(\vec{r}-\vec{x})| \tag{17.44}$$

Toutes les dérivées de $\frac{1}{r}$ étant des fractions rationnelles d'ordre $\frac{1}{r^k}$ pour $k \geqslant 1$ tendent vers 0 quand $r \to \infty$. Et on obtient $(f * E) \to 0$ quand $r \to \infty$. ∎

Corollaire 17.15 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est harmonique, i.e. $\Delta u = 0$, alors u est une fonction $C^\infty(\Omega)$. Autrement dit, les seules distributions harmoniques sont les fonctions harmoniques et celles-ci sont $C^\infty(\Omega)$.*

Preuve. Il s'agit de montrer qu'en $\vec{r} \in \Omega$ donné, u est C^∞. On se ramène à une distribution à support compact $v = \varphi u$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vaut 1 dans un voisinage $\omega \subset \Omega$ de $\vec{r}$. Dans ce cas :

$$v = \delta_0 * v = (E * \Delta\delta_0) * v = E * (\Delta\delta_0 * v) = E * \Delta v \tag{17.45}$$

le produit de convolution étant associatif puisque deux des trois distributions sont à support compact. Et d'après la proposition précédente, avec ici $f = \Delta v$, si $\vec{r} \notin \mathrm{supp}(\Delta v)$, alors $E * \Delta v$ est C^∞ au voisinage de $\vec{r}$, donc v est C^∞ au voisinage de $\vec{r}$.

Mais dans le voisinage ω, φ étant constante, $\Delta v = \Delta u\varphi + 2\nabla u.\nabla\varphi + u\Delta\varphi = 0+0+0 = 0$. Donc $\vec{r} \notin \mathrm{supp}(\Delta v)$ et $v = u\varphi$ est C^∞ en $\vec{r}$. Donc $u = v/\varphi$ est C^∞ au voisinage de $\vec{r}$. ∎

Il reste à voir qu'une fonction harmonique ne tend pas vers 0 à l'infini.

17.3.4 Principe du maximum et fonctions harmoniques

On vient de voir que les fonctions harmoniques étaient $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. On a aussi :

Proposition 17.16 *(Propriété de la moyenne.) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction harmonique dans Ω. Alors si $B(\vec{r}_0, R) \subset \Omega$, où $B(\vec{r}_0, R)$ est une boule de centre $\vec{r}_0$ de rayon R de frontière S_R, on a :*

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R} u(\vec{r})\, d\sigma_R \tag{17.46}$$

Autrement dit, pour u harmonique, la valeur de u en $\vec{r}_0$ est complètement déterminée par les valeurs de u au bord S_R.

Preuve. On sait que $u \in C^\infty(\Omega)$, et il s'agit de montrer que :

$$\langle 4\pi\delta_0, u\rangle = \langle \frac{1}{R^2} d\sigma_R, u\rangle \tag{17.47}$$

On considère la fonction continue g_R sur $\mathbb{R}^3$:

$$g_R(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{r} - \frac{1}{R}, & \text{si } r \geqslant R \\ 0, & \text{si } r < R \end{cases} \tag{17.48}$$

qui donne (voir le calcul de f_ε dans la démonstration de la proposition 17.13) :

$$\Delta g_R = \frac{1}{R^2} d\sigma_R - 4\pi\delta_0 \tag{17.49}$$

On en déduit (17.47). ∎

Corollaire 17.17 *(Principe du maximum) Une fonction harmonique non constante dans Ω atteint ses maximum et minimum au bord $\partial\Omega$.*

Preuve. Soit $u_M = u(\vec{r}_M)$ le maximum de u atteint en $\vec{r}_M$. La fonction $v = u - u_M$ vérifie $v(\vec{r}_M) = 0$, elle est harmonique et C^∞, et si elle n'est pas identiquement nulle on a $v(\vec{r}_M) < 0$ dans une boule de centre $\vec{r}_M$ d'après la propriété de la moyenne. Absurde, donc $u = cste = u_M$. ∎

Corollaire 17.18 *Si u est une fonction harmonique qui tend vers 0 à l'infini dans $\mathbb{R}^3$, alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et R tel que $|u(\vec{r})| \leqslant \varepsilon$ pour $r > R$. Et pour $\vec{r}_0$ donné, $\vec{r}_0$ est centre de la boule de rayon $|\vec{r}_0| + R$, et l'inégalité de la moyenne donne $u(\vec{r}_0) \leqslant \frac{1}{4\pi}\varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $u(\vec{r}_0) = 0$. ∎

Remarque 17.19 Démonstration alternative du principe du maximum. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ simplement connexe de frontière Γ, soit $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ t.q. $\Delta u = 0$, soit $m = \sup_{\vec{x}\in\Gamma} u(\vec{x})$, soit $M = \sup_{\vec{x}\in\bar{\Omega}} u(\vec{x})$. Comme $\bar{\Omega}$ est compact, le sup est atteint dans $\bar{\Omega}$. Supposons M atteint dans Ω : on a $M > m$ et il existe $\vec{x}_0 \in \Omega$ tel que $M = u(\vec{x}_0)$. Soit $d = \sup_{\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n} ||\vec{x} - \vec{y}||_{\mathbb{R}^n}$ le “diamètre” de Ω, et soit $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$v(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \frac{M-m}{2d^2} ||\vec{x} - \vec{x}_0||^2_{\mathbb{R}^n}. \tag{17.50}$$

Comme $||\vec{x} - \vec{x}_0||_{\mathbb{R}^n} \leqslant d^2$ et $\vec{x}_0$ donne le sup de u on a :

$$\begin{cases} \forall \vec{x} \in \Gamma \quad : \quad v(\vec{x}) \leqslant m + \dfrac{M-m}{2d^2} d^2 = \dfrac{M+m}{2} < M, \\ v(\vec{x}_0) = u(\vec{x}_0) = M. \end{cases} \tag{17.51}$$

Comme v est continu (car u et la norme le sont), v atteint donc son maximum dans Ω (pas sur Γ) en un point $\vec{x}_1 \in \Omega$. Comme v est C^2 (car u l'est et $||\vec{x} - x_0||^2$ est un polynôme du second ordre en $\vec{x}$) en le maximum $\vec{x}_1$ on a $dv(\vec{x}_1) = 0$ et nécessairement $\frac{\partial^2 v}{\partial (x^i)^2}(\vec{x}_1) \leqslant 0$ pour tout i, donc $\Delta v(\vec{x}_1) \leqslant 0$. Comme $||\vec{x} - \vec{x}_0||^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n (x^i - x^i_0)^2$, on a $\Delta(||\vec{x} - \vec{x}_0||^2_{\mathbb{R}^n}) = 2n$, et donc :

$$\Delta v(\vec{x}_1) = \Delta u(\vec{x}_1) + \frac{n(M-m)}{d^2} = 0 + \frac{n(M-m)}{d^2} > 0. \tag{17.52}$$

Absurde puisque $\Delta v(\vec{x}_1) \leqslant 0$. Donc $m < M$ est une hypothèse absurde.

∎

17.3.5 Retour à l'équation de Poisson

Corollaire 17.20 *Si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors la seule solution de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$:*

$$\Delta u = f \tag{17.53}$$

qui s'annule à l'infini est :

$$u = E * f = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} * f \tag{17.54}$$

cette solution étant $C^\infty(\mathbb{R}^3 - \text{supp}(f))$.

Preuve. Si $\Delta u = f$ alors $\Delta(u - E * f) = 0$, et donc $u - E * f$ est une fonction harmonique. Et si elle s'annule à l'infini, elle est identiquement nulle d'après le corollaire précédent. ∎

18 Annexe : topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ et ordre d'une distribution

18.0.1 Algèbre

• Un groupe $(E,+)$ est un ensemble E muni d'une loi interne $+$ (appelé addition quand un groupe sera complété par une structure d'anneau), i.e. une application $+ : (f,g) \in E \times E \to +(g,f) =^{\text{noté}} f+g \in E$, i.e. t.q. $f,g \in E$ implique $f+g \in E$ (stabilité), qui

(i) est associative, i.e. $(f+g)+h = f+(g+h)$ pour tout $f,g,h \in E$,

(ii) admet un élément neutre $e \in E$, i.e. $\exists e \in E$ t.q. $e+f = f+e = f$ pour tout $f \in E$ (appelé élément nul quand $+$ est l'addition),

(iii) tout élément $f \in E$ admet un opposé dans E, i.e. il existe $g \in E$ tel que $f+g = g+f = e$. Et cet opposé est alors unique : si h est un autre opposé, alors $g = (h+f)+g = h+(f+g) = h$.

Et le groupe est commutatif (ou abélien) si $f+g = g+f$ pour tout f et g dans E.

• Un anneau $(E,+,*)$ est un groupe commutatif $(E,+)$ muni d'une loi interne $* : (f,g) \in E \times E \to f*g \in E$ (appelé un produit) qui

(i) est associative, i.e. $(f*g)*h = f*(g*h)$ pour tout $f,g,h \in E$,

(ii) admet un élément neutre δ, i.e. $\exists \delta \in E$ t.q. $\delta * f = f * \delta = f$ pour tout $f \in E$, appelé élément unité,

(iii) est distributive par rapport à $+$, i.e. $(f+g)*h = f*h + g*h$ pour tout $f,g,h \in E$.

Et un anneau est commutatif si $f*g = g*f$ pour tout $f,g \in E$. Et dans un anneau, si l'inverse existe, il est unique (même preuve que pour un groupe).

• Un corps est un anneau t.q. tout élément $\neq e$ (élément neutre de $+$) admet un inverse : $\forall f \in E - \{e\}$, $\exists g \in E$ t.q. $f*g = g*f = \delta$. Et un corps est commutatif si c'est en particulier un anneau commutatif (noter qu'on définit parfois un corps comme étant un "corps commutatif").

• Un espace vectoriel $(E,+,.)$ sur un corps K est un groupe commutatif $(E,+)$ muni d'une loi externe $. : (\lambda, f) \in K \times E \to \lambda.f \in E$ t.q., si on note 1 l'élément unité du corps K :

(i) $1.f = f$, pour tout $f \in E$,

(ii) $\lambda.(f+g) = \lambda.f + \lambda.g$, pour tout $\lambda \in K$ et tous $f,g \in E$,

(iii) $(\lambda+\mu).f = \lambda.f + \mu.f$, pour tous $\lambda,\mu \in K$ et tout $f \in E$,

(iv) $(\lambda\mu).f = \lambda.(\mu.f)$, pour tous $\lambda,\mu \in K$ et tout $f \in E$.

Ces 4 lois impliquent également que, si on note 0 l'élément nul du corps K :

(v) $0.f = 0$ pour tout $f \in E$, et

(vi) $\lambda.e = e$ pour tout $\lambda \in K$, où e est l'élément nul de $(E,+)$, et généralement également noté $e = 0$.

• Une algèbre $\mathcal{A} = (E,+,*,.)$ sur un corps K est

(i) un anneau $(E,+,*)$,

(ii) un espace vectoriel $(E,+,.)$ sur K, et

(iii) $\lambda.(f*g) = (\lambda.f)*g = f*(\lambda.g)$, pour tout $\lambda \in K$ et $f,g \in E$ (compatibilité . et $*$).

Et que cette algèbre est commutative si $(E,+,*)$ est un anneau commutatif.

Exemple 18.1 Algèbre $(\mathbb{R}^{n^2},+,\times,.)$ des matrices carrées $n*n$ réelles est une algèbre non commutative sur le corps $K = \mathbb{R}$ des réels (et sur le corps $K = \mathbb{C}$ des complexes). ▟

19 * Annexe : topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ et ordre d'une distribution

Cette annexe est hors programme, un résultat simple à retenir étant la proposition 19.10 : une distribution ayant son support réduit à un point $\{a\}$ est une combinaison linéaire (somme finie) de dérivées de δ_a.

19.1 topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$

19.1.1 Rappels

On rappelle qu'une fonction est continue sur Ω si elle est continue en tout point $x \in \Omega$:

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_{x,\varepsilon}, \quad \forall y \in \Omega, \quad |x-y| < \eta_{x,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \tag{19.1}$$

Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,\infty[$.

On rappelle qu'une fonction est uniformément continue sur Ω si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in \Omega, \quad |x-y| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \tag{19.2}$$

Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, \infty[$: il existe $\varepsilon > 0$, on prend $\varepsilon = 1$ par exemple, tel que pour un η quelconque, on peut trouver (il existe) x et y, et on prend $y = 2x$ tels que $|x - y| < \eta$ et $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{y-x}{xy}| = |\frac{1}{2x}| \geqslant 1$: prendre $x < \eta$ avec $x \leqslant \frac{1}{2}$.

Puis on rappelle que toute fonction continue sur un compact K y est uniformément continue et atteint son sup et son inf. Et on note alors :

$$||f||_{K,\infty} = \sup_{x \in K} |f(x)| \overset{\text{noté}}{=} p_{K,0}(f). \tag{19.3}$$

On désigne par $C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions définies et m-fois continûment dérivables dans l'ouvert Ω.

19.1.2 Norme sur $C^m(K)$

Soit $m \in \mathbb{N}$ et K compact $\subset \Omega$. Toute fonction continue étant uniformément continue sur un compact, on munit $C^m(K)$ de la topologie de la convergence uniforme, i.e., on considère la norme sur $C^m(K)$:

$$p_{K,m}(f) = \sum_{j=0}^{m} p_{K,0}(f) \qquad (= \sum_{j=0}^{m} ||f^{(j)}||_{K,\infty}). \tag{19.4}$$

En particulier, $p_{K,0} = \sup_{x \in K} |f(x)| = ||f||_\infty$ est la norme de la convergence uniforme sur $C^0(K)$, et $C^0(K)$ muni de cette norme est normé et complet : c'est un espace de Banach (normé et complet). De même, les $(C^m(K), p_{K,m})$ sont des espaces de Banach.

Lemme 19.1 *Soit K compact, soit $\varepsilon > 0$ et soit $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leqslant \varepsilon\}$ (voisinage compact de K). Alors si $\varphi \in C^0(K_\varepsilon)$ alors :*

$$||\varphi||_{K_\varepsilon,\infty} \leqslant ||\varphi||_{K,\infty} + \varepsilon ||\varphi'||_{K_\varepsilon,\infty}. \tag{19.5}$$

Preuve. Pour $x \in K_\varepsilon$ et $x_0 \in K$ t.q. $x_0 \in \overline{B}(x, \varepsilon)$ (toujours possible par définition de K_ε), il existe $c \in [x_0, x]$ t.q. (théorème des accroissements finis) :

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(c)| \leqslant ||\varphi||_{K,\infty} + \varepsilon ||\varphi'||_\infty.$$

∴

19.1.3 Topologie et distance sur $C^\infty(K)$

Soit K compact $\subset \Omega$. L'espace $C^\infty(K) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(K)$ est muni de la famille de normes $(p_{K,m})_{m \in \mathbb{N}}$ qui lui confère la structure d'espace métrique complet pour la distance :

$$d(f, g) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \min(1, p_{K,m}(f - g)), \tag{19.6}$$

mais $C^\infty(K)$ n'est pas un espace normé complet : il n'existe pas de norme qui le rende complet (complet uniquement pour des distances).

19.1.4 Topologie et distance sur $C^m(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a $\Omega = \displaystyle\bigcup_{K \text{ compact} \subset \Omega} K$.

On a $C^m(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{K \text{ compact} \subset \Omega} C^m(K)$, et dans $C^m(\Omega)$ on considère la famille de semi-normes $(p_{K,m})_{K \text{ compact} \subset \Omega}$.
On considère alors $(C^m(\Omega), (p_{K,m})_{K \text{ compact} \subset \Omega})$, i.e. $C^m(\Omega)$ muni de la famille de semi-normes $(p_{K,m})_{K \text{ compact} \subset \Omega}$.
La convergence d'une suite $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $C^m(\Omega)$ vers une fonction $\psi \in C^\infty(\Omega)$ s'exprime donc comme : pour tout K compact $\subset \Omega$, on a $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers ψ dans $C^m(K)$ (où on a implicitement considéré les restrictions à K), i.e. :

$$\forall K \text{ compact} \subset \Omega, \quad p_{K,m}(\psi_j - \psi) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{19.7}$$

Plus simplement, si $(K_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante exhaustive de compact de Ω (telle que $K_k \subset K_{k+1}$ et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k = \Omega$), on considère les $p_{k,m} =^{\text{déf}} p_{K_k,m}$, et on dispose ainsi d'une famille de normes $(p_{k,m})_{k \in \mathbb{N}}$ dans $C^m(\Omega)$. D'où la distance sur $C^m(\Omega)$ (comme en (19.6)) :

$$d(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min(1, p_{k,m}(f - g)). \tag{19.8}$$

Et $C^m(\Omega)$ a ainsi une structure d'espace métrique complet.

19.1.5 Topologie et distance sur $C^\infty(\Omega)$

On munit $C^\infty(\Omega)$ de la famille de semi-normes $(p_{K,m})_{\substack{K \text{ compact } \subset\Omega \\ m\in\mathbb{N}}}$. La convergence d'une suite (ψ_j) de $C^\infty(\Omega)$ vers une fonction $\psi \in C^\infty(\Omega)$ s'exprime donc comme :

$$\forall K \text{ compact} \subset \Omega, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad p_{K,m}(\psi_j - \psi) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{19.9}$$

Et $C^\infty(\Omega)$ a ainsi une structure d'espace métrique complet (mais il n'y a pas de norme qui le rende complet), voir par exemple l'annexe Espaces de Fréchet dans Bony [2] ou voir Zuily [15] chapitre 1).

Plus simplement pour $C^\infty(\Omega)$, si $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante exhaustive de compact de Ω, on considère les $p_{k,m} \stackrel{\text{déf}}{=} p_{K_k,m}$, et on dispose ainsi sur $C^\infty(\Omega)$ d'une famille de normes $(p_{k,m})_{k,m\in\mathbb{N}}$. Et quitte à prendre $k = m$, on pose $p_m \stackrel{\text{déf}}{=} p_{m,m}$, et on déduit une distance sur $C^\infty(\Omega)$ comme en (19.6) :

$$d(f,g) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \min(1, p_m(f-g)). \tag{19.10}$$

19.1.6 Topologie et distance sur $\mathcal{D}(\Omega)$

On prend pour topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ celle induite de $C^\infty(\Omega)$, i.e. on considère l'espace topologique $(\mathcal{D}(\Omega), (p_{K,m})_{\substack{K \text{ compact } \subset\Omega \\ m\in\mathbb{N}}})$ (qui est donc métrisable, cf. (19.10)). Mais ici avec l'avantage :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \text{ compact } \subset\Omega} C^\infty(K), \tag{19.11}$$

car si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\text{supp}\varphi \subset \Omega$ et donc $\varphi \in C^\infty(\text{supp}\varphi)$ avec $\text{supp}\varphi$ compact dans Ω.

La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ pour cette topologie s'exprime alors simplement comme : une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ssi :

$$\exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact t.q.} \quad \begin{cases} 1)\ \text{supp}\varphi \in K, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \\ 2)\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad (\text{dans } \mathbb{R}), \end{cases} \tag{19.12}$$

cf. (19.9).

19.1.7 Relation avec la topologie sur $\mathcal{S}$

La topologie sur $\mathcal{S}$ a été définie à l'aide des semi-normes $\tilde{p}_{k,\ell}$, cf. (11.7). Et donc la topologie de $\mathcal{S}$ est plus restrictive que la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui se "contente" des semi-normes $\tilde{p}_{0,m}$. Donc si on converge au sens de $\mathcal{S}$, alors on converge au sens $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

19.2 Définition des distributions

La définition 3.5 s'écrit alors aussi (ayant une topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc des applications continues $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ et avec $\mathcal{D}(\Omega)$ donné par (19.11)) :

Définition 19.2 On appelle distribution T tout élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R}) = \mathcal{D}'(\Omega)$ ensemble des formes linéaires continues sur $(\mathcal{D}(\Omega), (p_{K,m})_{\substack{K \text{ compact } \subset\Omega \\ m\in\mathbb{N}}})$. I.e. :

$$\begin{aligned} &\forall K \text{ compact} \subset \Omega, \quad \exists m_K \in \mathbb{N}, \quad \exists C_K > 0 \quad \text{t.q. :} \\ &\qquad\qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ vérifiant } \text{supp}(\varphi) \subset K, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,m_K}(\varphi). \end{aligned} \tag{19.13}$$

(Sur tout compact K, l'image $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ est bornée par un antécédent.)

I.e., toute fonctionnelle $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ linéaire telle que (continuité en 0) :

$$T(\varphi) \underset{\varphi\to 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0. \tag{19.14}$$

19.3 Ordre d'une distribution

Définition 19.3 Lorsque m peut être choisi indépendamment de K, on dit que la distribution est d'ordre fini, et le plus petit de tels m est appelé l'ordre de la distribution. Sinon la distribution est d'ordre infini. Donc, une distribution est d'ordre fini ssi :

$$\begin{aligned}&\exists m \in \mathbb{N}, \quad \forall K \text{ compact} \subset \Omega, \quad \exists C_K > 0 \quad \text{t.q. :}\\ &\qquad\qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ vérifiant } \mathrm{supp}(\varphi) \subset K, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,m}(\varphi),\end{aligned} \tag{19.15}$$

et l'ordre de la distribution est le plus petit des entiers m satisfaisant (19.15).

Exemple 19.4 Une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ définit une distribution T_f d'ordre 0 puisque pour tout compact K et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\int_K f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant ||f||_{L^1}\, p_{K,0}(\varphi)$. ▲

Exemple 19.5 Puisque $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \leqslant 1\, p_{K,0}(\varphi)$, la masse de Dirac définit une distribution d'ordre 0 .

Et la dérivée de la masse de Dirac définit une distribution d'ordre 1.

Et la distribution $\sum_{k \leqslant m} \delta_0^{(k)}$ est d'ordre m.

Et la distribution $\sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k^{(k)}$ est d'ordre infini.

(Noter que la quantité $\sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_0^{(k)}$ ne définit pas une distribution : prendre une fonction qui au voisinage de 0 vaut $\varphi(x) = e^x$ et pour laquelle $\langle \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_0^{(k)}, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} 1 = \infty$. C'est également une conséquence de la proposition suivante.) ▲

Proposition 19.6 *La somme d'une distribution d'ordre m et d'une distribution d'ordre n est une distribution d'ordre $\leqslant \max(m,n)$.*

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre m alors T' est d'ordre $\leqslant m+1$.

Preuve. Soit S d'ordre m et T d'ordre n, avec $m \leqslant n$. Comme $p_{K,m}(\varphi) \leqslant p_{K,n}(\varphi)$ on déduit $|\langle S, \varphi \rangle| + |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C p_{K,n}(\varphi)$ (détails à écrire).

Soit T d'ordre k. On a $|\langle T', \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi' \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,m}(\varphi') = |\langle T, \varphi' \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,m+1}(\varphi)$ (détails à écrire).

Si $T = T_f$ avec $f \in C^1$ alors T_f est d'ordre 0 et $(T_f)' = T_{(f')}$ est aussi d'ordre 0 : l'inégalité n'est pas stricte.

Si $T = \delta_0$, distribution d'ordre 0, alors $T = \delta_0'$, distribution d'ordre 1 : l'inégalité est optimale. ▲

Exemple 19.7 Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $H_a = 1_{[a,\infty[}$ la fonction de Heaviside en a. Alors la distribution $(T_{fH_a})' =^{\text{noté}} (fH_a)' = f'H_a + f(a)\delta_a$ est une distribution d'ordre 0.

Et $(T_{fH_a})'' = (T_{f'H_a})' + f(a)\delta_a'$ est une distribution d'ordre 1. ▲

19.4 Distribution à support compact

Proposition 19.8 *Toute distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ (à support compact dans Ω) est d'ordre fini : il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout voisinage compact K de $\mathrm{supp}T$, on a :*

$$\exists C_K > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,m}(\varphi). \tag{19.16}$$

Preuve. On a avec (19.13) : si $K \subset \Omega$ et K compact, il existe $C_K > 0$ et m_K t.q. :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ t.q. } \mathrm{supp}(\varphi) \subset K, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,m_K}(\varphi) \tag{19.17}$$

Montrons que m_K est indépendant de K (contenant $\mathrm{supp}(T)$).

Soit A un voisinage compact de $\mathrm{supp}T$, et soit A_ε un voisinage compact de A (donc $\mathrm{supp}T \subset \mathring{A} \subset A \subset \mathring{A}_\varepsilon$).

Soit $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.q. $\mathrm{supp}\chi_\varepsilon \subset A$ et $\chi_\varepsilon(x) = 1$ sur A_ε.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a $\varphi - \chi_\varepsilon\varphi = 0$ sur A_ε voisinage compact de $\mathrm{supp}T$, et donc $\langle T, \varphi - \chi\varphi \rangle = 0$, i.e. :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_\varepsilon\varphi \rangle.$$

On a $\chi_\varepsilon\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon\varphi) \subset A$, et donc :

$$|\langle T, \chi_\varepsilon\varphi \rangle| \leqslant C p_{A,m_A}(\chi_\varepsilon\varphi).$$

Et avec la formule de Leibniz, on a pour $\alpha \leqslant m_A$:

$$||(\chi_\varepsilon\varphi)^{(\alpha)}||_{A,\infty} \leqslant \sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j\, ||\chi_\varepsilon^{(j)}||_\infty ||\varphi^{(\alpha-j)}||_{A,\infty} \leqslant D_{\varepsilon,\alpha}\, p_{A,\alpha}(\varphi),$$

où $D_{\varepsilon,\alpha}$ est une constante qui fait intervenir les coefficients binoniaux et les $||\chi_\varepsilon^{(j)}||_\infty$ pour $j \leqslant \alpha$. Et donc, comme $D_{\varepsilon,\alpha}\, p_{A,\alpha}(\varphi) \leqslant D_{\varepsilon,\alpha}\, p_{A,m_A}(\varphi)$ pour $\alpha \leqslant m_A$:

$$|\langle T,\varphi\rangle| = |\langle T,\chi\varphi\rangle| \leqslant E_{\varepsilon,m_A}\, p_{A,m_A}(\varphi), \qquad \text{où} \qquad E_{\varepsilon,m_A} = \sum_{\alpha=0}^{m_A} D_{\varepsilon,\alpha}.$$

Et donc :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T,\varphi\rangle| \leqslant E_{\varepsilon,m_A}\, p_{A,m_A}(\varphi). \tag{19.18}$$

Donc si K est un compact quelconque dans Ω, on a :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega) \text{ vérifiant } \mathrm{supp}(\varphi)\subset K, \quad |\langle T,\varphi\rangle| \leqslant E_{\varepsilon,m_A}\, p_{A,m}(\varphi), \tag{19.19}$$

puisque (19.18) est vrai sans hypothèse sur suppφ. Donc T est au plus d'ordre m_A. ∎

Corollaire 19.9 *Soit $T\in\mathcal{E}'(\Omega)$ et soit m son ordre.*

$$\textit{si } \varphi\in\mathcal{D}(\Omega) \textit{ est t.q. } \forall\alpha\leqslant m,\ \varphi^{(\alpha)}_{|\mathrm{supp}T} = 0, \quad \textit{alors } \langle T,\varphi\rangle = 0. \tag{19.20}$$

(Si φ et ses dérivées $\varphi^{(\alpha)}$ pour $\alpha\leqslant m$ sont nulles sur supp$T$*, alors $\langle T,\varphi\rangle = 0$.) (Vérification immédiate pour les masses de Dirac et leurs dérivées.)*

Le cas particulier des distributions à support réduit à un point est donné par :

Proposition 19.10 *Les distributions ayant leur support réduit à un point $\{a\}$ sont des combinaisons linéaires (somme finie) de dérivées de δ_a.*

Preuve. Une telle combinaison linéaire s'écrit $\sum_{j=0}^k c_j\delta_a^{(j)}$ (somme finie) et à son support réduit à $\{a\}$. Réciproquement, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec supp$T = \{a\}$. Alors T est d'ordre fini car T est à support compact. Soit m son ordre.

On considère le développement de Taylor de φ à l'ordre m au voisinage de a :

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^m \frac{(x-a)^j}{j!}\varphi^{(j)}(a) + r(x) \tag{19.21}$$

où $r\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'annule en a ainsi que toutes dérivées jusqu'à l'ordre m et donc $\langle T,r\rangle = 0$ d'après le corollaire précédent. On en déduit que, pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{j=0}^m \varphi^{(j)}(a)\langle T,\frac{(x-a)^j}{j!}\rangle + 0, \tag{19.22}$$

soit :

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{j=0}^k c_j\langle\delta_a^{(j)},\varphi\rangle \qquad \text{où} \qquad c_j = (-1)^j\langle T,\frac{(x-a)^j}{j!}\rangle. \tag{19.23}$$

∎

Références

[1] Artola M. : Distributions et équations aux dérivées partielles, *Traité généralités, A1230a.* Techniques de l'Ingénieur.

[2] Bony J.-M. : *Analyse.* Éditions de l'École Polytechnique, 1988.

[3] Dupraz J. : La théorie des distributions et ses applications. Cepadues, 1977.

[4] Goulaouic C. : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel, Ed. de l'école Polytechnique, 1982.

[5] Guichardet A. : *Calcul intégral, maîtrise de mathématiques C2.* Collection U, Armand Colin.

[6] Hervé M. : *Transformation de Fourier et distributions.* Puf, 1986.

[7] Lachand-Robert T. : Analyse harmonique, distributions, convolution, *Traité généralités, A142.* Techniques de l'Ingénieur.

[8] Meyer Y. : Le traitement du signal et l'analyse mathématique. *Annales de l'Institut Fourier.* Tome 50, n°2 (2000), pp.593-632.

[9] Roddier F. : *Distributions et transformation de Fourier.* Ediscience.

[10] Rudin W. : *Analyse réelle et complexe.* Masson.

[11] Schwartz L. : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann 1997.

[12] Schwartz L. : *Théorie des distributions.* Hermann 1997.

[13] Spiegel M.R. : *Analyse de Fourier et application aux problèmes de valeurs aux limites.* Mc Graw Hill, Série Schaum.

[14] Trèves F. : *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernel.* Academic Press.

[15] Zuily C. : *Problèmes de distributions avec solutions détaillées.* Hermann.

[16] `http://wims.unice.fr/wims/`

[17] `http://fr.wikipedia.org/wiki/Portail:Math%C3%A9matiques`