Notes de cours de l'ISIMA, deuxième année
http://www.isima.fr/~leborgne

Convolution de fonctions

Gilles Leborgne

17 novembre 2017

[Paragraphe extrait du cours de distribution.]

Table des matières

2 Convolution

2.1 Notations $\check{f}$ et $\tau_x\check{f}$

Définition 2.1 Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\check{f}(x) = f(-x). \tag{2.1}$$

Autrement dit $\check{f} = f \circ g$ où $g(x) = -x$.
(Le graphe de $\check{f}$ est le symétrique du graphe de f par rapport à "l'axe des y".)

Définition 2.2 Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $c \in \mathbb{R}$ on définit la translatée $\tau_c(f) =^{\text{noté}} \tau_c f$ de f par :

$$\tau_c f(x) = f(x-c). \tag{2.2}$$

Autrement dit $\tau_c f = f \circ h_c$ où $h_c(x) = x - c$.
(Le graphe de $\tau_c f$ est le translaté du graphe de f de c : en particulier $(\tau_c f)(c) = f(0)$.)

Exercice 2.3 Montrer que :

$$\widecheck{\tau_c f} = \tau_{-c}\check{f}. \tag{2.3}$$

Autrement dit, les opérateurs $\check{}$ et τ_c ne commutent pas pour $c \neq 0$: $(\check{} \circ \tau_c)(f) = (\tau_{-c} \circ \check{})(f)$.

Réponse. $\widecheck{\tau_c f}(x) = \tau_c f(-x) = f(-x-c) = \check{f}(x+c) = \tau_{-c}\check{f}(x)$. ▪

Proposition 2.4 *Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et pour $c\in\mathbb{R}$, on a :*

$$\mathrm{supp}\check{f} = -\mathrm{supp}f, \qquad \mathrm{supp}(\tau_c f) = \mathrm{supp}f + c, \qquad \mathrm{supp}(\tau_c\check{f}) = -\mathrm{supp}f + c. \tag{2.4}$$

Immédiat sur un dessin. En particulier, si $\mathrm{supp}f \subset [a,b]$ *où* $a \leqslant b$*, alors :*

$$\mathrm{supp}(\check{f}) \subset [-b,-a], \qquad \mathrm{supp}(\tau_c f) \subset [a+c, b+c], \qquad \mathrm{supp}(\tau_c\check{f}) \subset [-b+c, -a+c]. \tag{2.5}$$

Preuve. Pour $\check{f}$: on a $\{x : \check{f}(x) \neq 0\} = \{x : f(-x) \neq 0\} = \{-y : f(y) \neq 0\}$, d'où, en prenant l'adhérence, $\mathrm{supp}\check{f} = -\mathrm{supp}f$.

Pour $\tau_c f$: on a $\{x : \tau_c f(x) \neq 0\} = \{x : f(x-c) \neq 0\} = \{y+c : f(y) \neq 0\}$, d'où, en prenant l'adhérence, $\mathrm{supp}\tau_c f = \mathrm{supp}f + c$. ▟

2.2 Définition de la convolution

On rappelle que si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions (mesurables), alors $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée formellement par :

$$(f*g)(x) = \int_{t\in\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}^n} f(t)\tau_x\check{g}(t)\,dt, \tag{2.6}$$

intégrale qui dépend du paramètre x. En particulier, si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors pour chaque x on a $\tau_x\check{g} \in L^2(\mathbb{R})$ (car $\int_{t\in\mathbb{R}} |g(x-t)|^2\,dt = \int_{s\in\mathbb{R}} |g(s)|^2\,ds < \infty$), et donc :

$$(f*g)(x) = (f, \tau_x\check{g})_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Dans la suite, pour simplifier la présentation, on considèrera essentiellement le cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$.

Exemple 2.5 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = 1_{\mathbb{R}}$, on a $(f * 1_{\mathbb{R}})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt =$ constante, et donc l'application $f \to f * 1_{\mathbb{R}}$ est la fonction “aire sous la courbe f” (indépendante de x). ▟

Exemple 2.6 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \Pi_k = k1_{[\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}]}$, on a $(f*g)(x) = k\int_{-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} f(x-t)\,dt =$ la “valeur moyenne de f à travers une fenêtre de largeur $\frac{1}{k}$ centrée en x”. Dessin.

La “mesure” d'une fonction f à travers un appareil d'une certaine précision est une application de type $M_k : f \to M_k(f) = f * \Pi_k$, avec donc $M_k(f)(x)$ approchant $f(x)$, approximation d'autant meilleure que k est grand, i.e. que l'appareil est précis. L'appareil idéal (de précision parfaite) est $M_\infty : f \to M_\infty(f) = f(x)$, soit $M_\infty = \delta_0$, voir plus loin. ▟

Proposition 2.7 *Quand elle est définie, l'opération $*$ est distributive et commutative :*

$$g*f = f*g, \qquad f*(g_1 + \lambda g_2) = f*g_1 + \lambda f*g_2, \tag{2.7}$$

d'où le nom de “produit” (commutatif) de convolution. Et on a :

$$\widetilde{f*g} = \check{f}*\check{g}, \qquad \text{et} \qquad \tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g). \tag{2.8}$$

Et :

$$\begin{cases} (f \text{ et } g \text{ paires}) \text{ ou } (f \text{ et } g \text{ impaires}) \Rightarrow\ f*g \text{ paire}, \\ (f \text{ paire et } g \text{ impaire}) \text{ ou } (f \text{ impaire et } g \text{ paire}) \Rightarrow\ f*g \text{ impaire}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Preuve. $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\,du = (g*f)(x)$ donne la commutativité. Et la distributivité résulte de la distributivité de la multiplication de $\mathbb{R}$ et de la linéarité de l'intégrale.

Puis $(\check{f}*\check{g})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(-t)g(-x+t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(-x-u)\,du = (f*g)(-x)$.

Puis $\tau_a(f*g)(x) = (f*g)(x-a) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-a-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\tau_a g(x-t)\,dt = (f*\tau_a g)(x)$ et $f*g = g*f$.

Puis $(f*g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-x-t)\,dt$: si g est paire, alors $(f*g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(-u)g(x-u)\,dt$, d'où si f est paire alors $(f*g)(-x) = (f*g)(x)$, et si f est impaire alors $(f*g)(-x) = -(f*g)(x)$; et $f*g = g*f$. ▟

Proposition 2.8 *Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction convolée $f * g$ vérifie (quand elle a un sens) :*

$$\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g}. \tag{2.10}$$

Preuve. On a $(f * g)(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{t\in \mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g}} f(t)\tau_x\breve{g}(t)\,dt$.

Cas simple : $\mathrm{supp}f = [a,b]$ et $\mathrm{supp}g = [c,d]$, avec $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, donc $\mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g = [a{+}c, b{+}d]$. Et $\mathrm{supp}\tau_x\breve{g} = [-d{+}x, -c{+}x]$, donc $\mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g} = [a,b] \cap [-d{+}x, -c{+}x]$, donne $\mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g} = \varnothing$ ssi soit $a > -c{+}x$ soit $b < -d{+}x$, i.e. ssi $x < a{+}c$ ou $x > b{+}d$. Donc $\mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g} = \varnothing$ dès que $x \notin [a{+}c, b{+}d]$, donc $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g$.

Cas général : on a $(f * g)(x) = 0$ dès que $\mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g} = \varnothing$. Et $\exists t \in \mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g}$ ssi $\exists t \in \mathrm{supp}f$ et $t \in x - \mathrm{supp}g$, i.e. ssi $\exists t \in \mathrm{supp}f$ et $x \in t + \mathrm{supp}g$ ($\subset \mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g$). Donc si $x \notin \mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g$ alors $\mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g} = \varnothing$ donc $(f * g)(x) = 0$. Donc $\{x : (f * g)(x) \neq 0\} \subset \mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g$. D'où (2.10). ▟

Remarque 2.9 Rappel : la somme de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé : prendre $F = \mathbb{N}^* = \{n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $G = \{-k + \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\}$ qui donne $F + G = \{n - k + \frac{1}{k},\ k, n \in \mathbb{N}^*\}$. Ici $\mathbb{R} - F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n, n{+}1[$ et $\mathbb{R} - G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}]-k + \frac{1}{k}, -k{+}1 + \frac{1}{k-1}[$ sont des ouverts (union d'ouverts), donc F et G sont fermés, mais $F + G$ contient la suite $(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 0 dans $\mathbb{R}$, avec $0 \notin F + G$, donc $F + G$ n'est pas fermé.

Rappel : la somme d'un compact et d'un fermé est un fermé : soit K compact et G fermé, soit (z_n) une suite dans $K{+}G$ qui converge vers z dans $\mathbb{R}$. Montrons que $z \in K{+}G$. On a $z_n = k_n + g_n$, et quitte à extraire une sous-suite, on a $k_n \to k$ dans K. Donc $g_n = z_n - k_n \in G$ converge vers $z - k$, avec G fermé, donc $g =^{\text{déf}} z - k \in G$, donc $z = k + g \in K + G$, donc $K + G$ est fermé. ▟

2.3 Stabilité par convolution : $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Proposition 2.10 *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $|f| * |g| \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, avec :*

$$||f * g||_1 \leqslant ||f||_1 ||g||_1. \tag{2.11}$$

Preuve. On a, si ça a un sens :

$$\begin{aligned} ||f * g||_{L^1} &= \int_{x\in\mathbb{R}} |(f * g)(x)|\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}} |\int_{t\in\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt|\,dx. \\ &\leqslant \int_{x\in\mathbb{R}} (\int_{t\in\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt)dx = \int_{x\in\mathbb{R}} (|f| * |g|)(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ la fonction $f \otimes g : (x,y) \to f(x)g(y)$ (fonction à variables séparées) est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Et on peut appliquer Fubini :

$$\infty > ||f||_{L^1} ||g||_{L^1} = \int_{(y,t)\in\mathbb{R}^2} |f(y)|\,|g(t)|\,dtdy = \int_{(x,t)\in\mathbb{R}^2} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dtdx,$$

où on a utilisé le changement de variable $F : (y,t) \in \mathbb{R}^2 \to F(y,t) = \begin{pmatrix} x = F_1(y,t) = y{+}t \\ t = F_2(y,t) = t \end{pmatrix}$, difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, de jacobien $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix}(y,t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ qui donne $(dtdy) = |1|\,(dtdx) = (dtdx)$. D'où $||f * g||_{L^1} \leqslant ||f||_{L^1} ||g||_{L^1} < \infty$, i.e. (2.11). ▟

Exercice 2.11 Montrer (2.11) à l'aide du théorème d'intégration de Tonelli (cours d'intégration).

Réponse. Rappel de Tonelli : si la fonction $h : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ satisfait aux deux hypothèses :

$$\int_{y\in\Omega_2} |h(x,y)|\,dy < \infty \quad \text{p.p. } x \quad \text{et} \quad \int_{x\in\Omega_1} \Big(\int_{y\in\Omega_2} |h(x,y)|\,dy \Big)\,dx < \infty \tag{2.13}$$

alors $h \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, et alors on peut inverser l'ordre d'intégration (Fubini).

Ici on pose $h(t,x) = |f(t)|\,|g(x-t)|$ et on vérifie les hypothèses : commençant par intégrer en x à t fixé, il vient, à t fixé :

$$\int_{x\in\mathbb{R}} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dx = |f(t)|(\int_{x\in\mathbb{R}} |g(x-t)|\,dx) = |f(t)|(\int_{y\in\mathbb{R}} |g(y)|\,dy) \leqslant |f(t)|\,||g||_1 < \infty, \tag{2.14}$$

puis :

$$\int_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\,||g||_1\,dt \leqslant ||g||_1 \int_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \leqslant ||g||_1\,||f||_1 < \infty. \tag{2.15}$$

D'où le résultat. ▟

Exemple 2.12 $f(t) = g(t) = e^{-t}1_{\mathbb{R}_+}(t)$. On a $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 < \infty$, et $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Et $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t}1_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-(x-t)}1_{\mathbb{R}_+}(x-t)\,dt = \int_{t=0}^x e^{-t}e^{-(x-t)}1_{\mathbb{R}_+}(x)\,dt = \int_0^x e^{-x}1_{\mathbb{R}_+}(x)\,dt = xe^{-x}1_{\mathbb{R}_+}(x)$, intégrable sur $\mathbb{R}$, donc on a bien $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. ▟

Exercice 2.13 Montrer que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ sont positives et $f \leqslant g$, alors $f*h \leqslant g*h$.

Réponse. On a $(f*h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h(x-t)\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} g(t)h(x-t)\,dt = (h*g)(x)$. ▟

Remarque 2.14 L'inégalité (2.11) obtenue est une inégalité où à gauche on a de fait une intégrale double, cf. (2.12), alors qu'à droite on a un produit des deux intégrales simples.

En particulier, $||f*g||_1$ (calcul d'une intégrale double) n'a rien à voir avec le produit $||fg||_1$ (calcul d'une intégrale simple) qui en général n'a pas de sens pour f et g dans $L^1(\mathbb{R})$.

Par exemple, f et g données par $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}1_{]0,1]}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ (car $\int_0^1 |\frac{1}{\sqrt{t}}|\,dt = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2 < \infty$), mais $(fg)(t) = \frac{1}{t}1_{]0,1]}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors que $f*g$ donnée par $(f*g)(x) = \int_t \frac{1}{\sqrt{|t|}}\frac{1}{\sqrt{|x-t|}}\,dt$ est dans $L^1(\mathbb{R})$: cette fonction est définie p.p., et plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et n'est pas définie en x=0, mais ce n'est pas gênant puisque, ici, seul le caractère intégrable (au sens de Lebesgue) nous intéresse (notion de presque partout) : autrement dit on a $L^1(\mathbb{R}^*) = L^1(\mathbb{R})$ car $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ et l'ensemble singleton $\{0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue . En particulier, on a vu que $\int_{\mathbb{R}} |f*g|(x)\,dx \leqslant ||f||_1||g||_1 < \infty$. ▟

On rappelle que $g \in L^p(\mathbb{R})$ ssi $|g|^p \in L^1$, et qu'alors $||g||_p = (||\,|g|^p||_{L^1})^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$ est une norme dans $L^p(\mathbb{R})$, cf. cours intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.15 *Soit $p \in [1,\infty]$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$. Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R})$, autrement dit $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, et on a :*

$$||f*g||_p \leqslant ||f||_1||g||_p. \tag{2.16}$$

Preuve. Le cas $p = 1$ vient d'être traité, et le cas $p = \infty$ est immédiat car alors $|(f*g)(x)| \leqslant ||g||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$. Supposons donc $1 < p < \infty$.

On va utiliser l'inégalité de Hölder : soit q l'exposant conjugué de p, donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; quand $\alpha \in L^q$ et $\beta \in L^p$ alors $\alpha\beta \in L^1(\mathbb{R})$ et $||\alpha\beta||_1 \leqslant ||\alpha||_q||\beta||_p$ (voir cours d'intégration). On a :

$$\int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)|g|(x-t)\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}} |f|^{\frac{1}{q}}(t)|f|^{\frac{1}{p}}(t)|g|(x-t)\,dt \tag{2.17}$$

On pose $\alpha = |f|^{\frac{1}{q}} \in L^q(\mathbb{R})$, donc $\alpha^q = |f| \in L^1(\mathbb{R})$.

À x fixé, on pose $\beta_x(t) = |f(t)|^{\frac{1}{p}}||g|(x-t)$, donc $\beta_x(t)^p = |f(t)||g|^p(x-t)$. Et $\int_{t\in\mathbb{R}} \beta_x(t)^p\,dt = \int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)\,|g|^p(x-t)\,dt = (|f|*|g|^p)(x)$ est bien défini car $|f| \in L^1(\mathbb{R})$, $|g|^p \in L^1(\mathbb{R})$, cf. (2.11). Donc $\beta_x \in L^p(\mathbb{R})$. Donc (Hölder) :

$$\begin{aligned}\int_{t\in\mathbb{R}} |f|^{\frac{1}{q}}(t)|f|^{\frac{1}{p}}(t)|g|(x-t)\,dt &\leqslant (\int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)\,dt)^{\frac{1}{q}}(\int_{t\in\mathbb{R}} |f|(t)|g|^p(x-t)\,dt)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||f||_1^{\frac{1}{q}}(|f|*|g|^p)(x)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc, avec (2.17) :

$$|(|f|*|g|)|^p(x) \leqslant ||f||_1^{\frac{p}{q}}\,|(|f|*|g|^p)(x)|. \tag{2.19}$$

D'où $|(f*g)|^p$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ avec :

$$||\,|f*g|^p||_1 \leqslant ||f||_1^{\frac{p}{q}}\,||f||_1\,||\,|g|^p||_1. \tag{2.20}$$

Comme $1 + \frac{p}{q} = p$, on a (2.16). (Démonstration similaire dans $\mathbb{R}^n$.) ▟

2.4 Dérivation et convolution

Proposition 2.16 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, si $g \in L^p(\mathbb{R})$ pour un $p \in [1,\infty]$, si g est dérivable dans $\mathbb{R}$, et si $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$ (i.e. g' est bornée), alors $f * g$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et :*

$$(f * g)' = f * g'. \tag{2.21}$$

Preuve. Les hypothèses indiquent que $f * g$ et $f * g'$ ont un sens.

(2.21) signifie $\dfrac{d}{dx}\Big(\displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\Big) = \displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(f(t)g(x-t)\Big)\,dt$. C'est vrai grâce au théorème de convergence dominée : l'intégrant $h(x,t) = f(t)g(x-t)$ est dérivable en x (car g l'est), de dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = f(t)g'(x-t)$, et $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant ||g'||_\infty|f(t)|$, avec $||g'||_\infty|f| \in L^1(\mathbb{R})$ fonction dominante intégrable indépendante de x. ■

2.5 Stabilité de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ par convolution "bornée"

Le résultat suivant sera généralisé à la convolution des distributions.

Proposition 2.17 *Soit $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

1- Si $\mathrm{supp}g$ est compact, alors $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2- Si $\mathrm{supp}f$ et $\mathrm{supp}g$ sont tous deux limités à gauche (ou tous deux limités à droite), alors $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

3- Les hypothèses $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ sont insuffisantes.

Preuve. Pour tout $\alpha < \beta$ on veut $f * g \in L^1([\alpha,\beta])$, i.e. $\int_{x=\alpha}^\beta (\int_{t=a}^b |g(t)f(x-t)|\,dt)\,dx < \infty$. On a :

$$\int_{x=\alpha}^\beta |(f*g)(x)|\,dx \leqslant \int_{x=\alpha}^\beta (\int_{t=a}^b |g(t)f(x-t)|\,dt)\,dx \tag{2.22}$$

1- g à support compact, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{supp}(g) \subset [a,b]$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour inverser l'ordre des intégrations dans (2.22), appliquons le théorème de Fubini–Tonelli.

À t fixé, $\int_{x=\alpha}^\beta |g(t)f(x-t)|\,dx = |g(t)|\int_{x=\alpha}^\beta |f(x-t)|\,dx = |g(t)|\int_{x=\alpha-t}^{\beta-t} |f(y)|\,dy < \infty$ car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Et pour $t \in [a,b]$ on a $\alpha - t \geqslant \alpha - b$ et $\beta - t \leqslant \beta - a$, donc $\int_{x=\alpha-t}^{\beta-t} |f(y)|\,dy \leqslant \int_{x=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy$. Donc $\displaystyle\int_{t=a}^b \int_{x=\alpha}^\beta |g(t)f(x-t)|\,dxdt \leqslant \int_{t=a}^b |g(t)| \int_{x=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy\,dt = \int_{t=a}^b |g(t)|\,dt \int_{x=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy < \infty$ car $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Donc on peut échanger l'ordre des intégrations dans (2.22) :

$$\begin{aligned}\int_{x=\alpha}^\beta |(f*g)(x)|\,dx &\leqslant \int_{t=a}^b |g(t)|(\int_{x=\alpha}^\beta |f(x-t)|\,dx)\,dt = \int_{t=a}^b |g(t)| \int_{y=\alpha-t}^{\beta-t} |f(y)|\,dy\,dt \\ &\leqslant \int_{t=a}^b |g(t)| \int_{y=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy\,dt \leqslant ||g||_{L^1} \int_{y=\alpha-b}^{\beta-a} |f(y)|\,dy < \infty.\end{aligned}$$

Vrai pour tout α, β, donc $f * g$ est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2- Supports limités à gauche : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{supp}f \subset [a,\infty[$ et $\mathrm{supp}g \subset [b,\infty[$. Donc, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{supp}\tau_x\breve{g} \subset]-\infty, -b+x]$. Donc $\mathrm{supp}f \bigcap \mathrm{supp}\tau_x\breve{g} \subset [a, -b+x]$, et avec Fubini on a :

$$\begin{aligned}\int_{x=\alpha}^\beta |(f*g)(x)|\,dx &\leqslant \int_{x=\alpha}^\beta \int_{t=a}^{-b+x} |f(t)\tau_x\breve{g}(t)|\,dt\,dx \leqslant \int_{x=\alpha}^\beta \int_{t=a}^{-b+\beta} |f(t)g(x-t)|\,dt\,dx \\ &= \int_{t=a}^{-b+\beta} \int_{x=\alpha}^\beta |f(t)g(x-t)|\,dx\,dt = \int_{t=a}^{-b+\beta} \int_{y=\alpha-t}^{\beta-t} |f(t)g(y)|\,dy\,dt \\ &\leqslant \int_{t=a}^{-b+\beta} \int_{y=\alpha+b-\beta}^{\beta-a} |f(t)g(y)|\,dy\,dt \leqslant \int_{t=a}^{-b+\beta} |(f(t)|\,dt \int_{y=\alpha+b-\beta}^{\beta-a} |g(y)|\,dy,\end{aligned}$$

fini car f et g sont $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Idem pour supports limités à droite.

3- On prend $f(t) = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = e^{-t}1_{\mathbb{R}_+}(t)$ donc $g \in L^1(\mathbb{R})$; alors $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}e^{-(x-t)}\,dt = \int_0^\infty e^{-x}\,dt = \infty$. ■

2.6 Régularisation par convolution

2.6.1 Régularisation d'une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

On rappelle que si Ω est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \text{supp} f \text{ compact}\}$.

Proposition 2.18 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.*
Si de plus supp$f$ *est compact alors $f * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Preuve. $(f*\varphi)(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)\,dt$ est une intégrale qui dépend du paramètre x. Appliquons le théorème de convergence dominée : notons $h(x,t) = f(t)\varphi(x-t)$. À t fixé, l'intégrant $h(t,x)$ est C^k en x puisque φ l'est, de dérivée k-ième en x vérifiant $|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(t,x)| = |f(t)|\,|\varphi^{(k)}(x-t)| \leqslant C_k|f(t)|$ où $C_k = ||\varphi^{(k)}||_\infty$.

1- Cas $f \in L^1(\mathbb{R})$ (plus simple à rédiger) : $|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(t,x)|$ est bornée indépendamment de x par la fonction $C_k f \in L^1(\mathbb{R})$, d'où $f*\varphi$ est C^k pour tout k (et on peut dériver sous le signe somme).

2- Cas $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Ici $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que $f*\varphi$ est C^∞ en x_0. Comme φ est à support compact, $\exists a,b \in \mathbb{R}$ t.q. $\text{supp}(\varphi) \subset [a,b]$, donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{supp}(\tau_x\check{\varphi}) \subset [-b+x, -a+x]$. Donc pour tout $x \in]x_0-1, x_0+1[$ (voisinage ouvert de x_0) :

$$\text{supp}(\tau_x\check{\varphi}) \subset [-b+x_0-1, -a+x_0+1] \overset{\text{noté}}{=} K.$$

Donc pour tout $x \in]x_0-1, x_0+1[$, avec $C_k = ||\varphi^{(k)}||_\infty$:

$$h(x,t) = f(t)\varphi(x-t)1_K(t), \qquad |\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(t,x)| \leqslant C_k|f(t)1_K(t)|,$$

majoration indépendante de $x \in]x_0-1, x_0+1[$, et avec $f1_K \in L^1(\mathbb{R})$ car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et K est compact. D'où $f*\varphi \in C^k(]x_0-1, x_0+1[)$, en particulier en x_0, ce pour tout x_0 et tout k.

Et si supp$f$ est borné, alors supp$(f*\varphi)$ est borné, cf. (2.10), donc $f*\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ∎

Exercice 2.19 Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, si $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, si supp$f$ et supp$g$ sont tous deux limités à gauche (ou tous deux limités à droite), alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$. ∎

2.6.2 Suite régularisante ou approximation de l'identité

Définition 2.20 Une fonction intégrable f est dite de masse unité ssi $\int f(x)\,dx = 1$ (souvent défini avec l'hypothèse supplémentaire $f \geqslant 0$).

Définition 2.21 On appelle suite régularisante une suite $(\varphi_k)_{\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_k(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{supp}(\varphi_k) \subset [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}], \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\,dx = 1 \qquad \text{(masse unité)}. \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Définition similaire dans $\mathbb{R}^n$ où $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ est remplacé par la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{k}$.

(On verra que $(\varphi_k)_{\mathbb{N}^*}$ approxime la masse de Dirac au sens des distributions, et la masse de Dirac est l'identité du produit de convolution, d'où le nom "approximation de l'identité".)

Soit ζ la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\zeta(x) = \left\{\begin{array}{ll} \exp(-\frac{1}{1-x^2}), & \forall x \in]-1,1[, \\ 0, & \forall x \notin]-1,1[. \end{array}\right. \tag{2.24}$$

On pose :

$$\gamma_1(x) = \frac{\zeta(x)}{||\zeta||_{L^1}}, \qquad \text{puis} \qquad \gamma_k(x) = k\,\gamma_1(kx), \quad k \geqslant 1. \tag{2.25}$$

Proposition 2.22 *La suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.*

Preuve. Comme $\zeta \geqslant 0$, on a $\gamma_1 \geqslant 0$.

Comme $\zeta \geqslant 0$ et ζ non identiquement nulle, on a $||\zeta||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |\zeta(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x)\,dx > 0$.

Donc $\int_{\mathbb{R}} \gamma_1(x)\,dx = \frac{1}{||\zeta||_{L^1}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(x)\,dx = \frac{1}{||\zeta||_{L^1}} ||\zeta||_{L^1} = 1$.

Donc $\int_{\mathbb{R}} \gamma_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} k\,\gamma_1(kx)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(y)\,dy = 1$.

Comme $\gamma_1 > 0$ et $k \geqslant 0$ on a $\gamma_k \geqslant 0$.

Et $\gamma_1(x) \neq 0$ ssi $k \in]-1,1[$. Donc $\gamma_k(x) \neq 0$ ssi $kx \in]-1,1[$. D'où $\text{supp}(\gamma_k) = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$. ▪

2.6.3 Régularisation C^∞ d'une fonction $1_{[a,b]}$

Proposition 2.23 *Soit $a < b$. Soit (φ_k) une suite régularisante. Dès que k est assez grand, à savoir dès que $\frac{1}{k} \leqslant \frac{b-a}{2}$, la fonction $1_{[a,b]} * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie, pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 0 \leqslant (1_{[a,b]} * \varphi_k)(x) \leqslant 1, \\ (1_{[a,b]} * \varphi_k)(x) = 1 \text{ pour } x \in [a+\dfrac{1}{k}, b-\dfrac{1}{k}], \\ \text{supp}(1_{[a,b]} * \varphi_k) = [a-\dfrac{1}{k}, b+\dfrac{1}{k}]. \end{cases} \tag{2.26}$$

(Et on conserve ce résultat si on ouvre l'intervalle $]a,b[$.)

Cas particulier $(\varphi_k) = (\gamma_k)$ donnée en (2.25) : de plus $\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{1}{2}$.

Dans $\mathbb{R}^n$: la fonction $1_K * \varphi_k$ est également dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, avec $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, avec $\text{supp}(\varphi) \subset K + B(\vec{0}, \frac{1}{k})$, et avec $\varphi = 1$ sur $K - B(\vec{0}, \frac{1}{k})$, où $B(\vec{0}, \frac{1}{k})$ est la boule unité de centre $\vec{0}$ et rayon $\frac{1}{k}$.

Preuve. On a $\varphi = 1_{[a,b]} * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, cf. prop. 2.18. On a $\text{supp}\tau_x(\widetilde{1_{[a,b]}}) = [x-b, x-a]$ et $\text{supp}\varphi_k = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, donc :

$$\varphi(x) = \int_{t \in \mathbb{R}} \varphi_k(t) \tau_x(\widetilde{1_{[a,b]}})(t)\,dt = \int_{t \in [x-b, x-a] \bigcap [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]} \varphi_k(t)\,dt, \tag{2.27}$$

et la fonction φ_k est positive d'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \varphi_k = 1$. D'où $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

Et si $x - b > \frac{1}{k}$ ou si $x - a < -\frac{1}{k}$, alors $\varphi(x) = \int_{\varnothing} ... = 0$, d'où $\text{supp}(\varphi) \in [a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}]$.

Et si $x - b < -\frac{1}{k}$ et si $x - a > \frac{1}{k}$, alors $[x - b, x - a] \subset [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, donc $\varphi(x) = 1$.

Cas particulier $(\varphi_k) = (\gamma_k)$: on a $\varphi(a) = \int_{u \in [a-b, 0] \bigcap [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]} \gamma_k(u)\,du = \int_{u \in [\frac{-1}{k}, 0]} \gamma_k(u)\,du = \frac{1}{2}$, dès que $\frac{1}{k} < b - a$, car γ_k est paire et $\int_{u \in [\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}]} \gamma_k(u)\,du = 1$. Idem : $\varphi(b) = \frac{1}{2}$.

Exercice dans $\mathbb{R}^n$. ▪

Exercice 2.24 Donner une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f = \exp$ sur $[-1, 1]$ et $0 \leqslant f \leqslant \exp$ sur $\mathbb{R}$, où $\exp : x \to e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction exponentielle.

Réponse. On "tronque de manière régulière" la fonction exp : on pose $g = 1_{[-2,2]} * \varphi_1$. Avec (2.26) on a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $g(x) = 1$ sur $[-1, 1]$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Cette fonction g est notre fonction de "troncature régulière". On pose $f(x) = \exp(x)g(x)$: la fonction f convient, car produit de deux fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$, donc est $C^\infty(\mathbb{R})$, et $\text{supp}g$ est borné, et trivialement $\text{supp}f \subset \text{supp}g$, donc $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ▪

Corollaire 2.25 *Soit $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $c < d \in \mathbb{R}$. Si $[c, d] \subset]a, b[$ alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$ qui vaut 1 sur $[c, d]$, et telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. (Dessin).*

Dans $\mathbb{R}^n$: si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact tel que $K \subset \Omega$, alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 sur K et telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

Preuve. Soit (γ_k) une suite régularisante. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(c-a, b-d)$ (dessin), soit $e = c-\varepsilon$ et $f = d+\varepsilon$. Soit k t.q. $\frac{1}{k} \leqslant \frac{f-e}{2}$ et $\frac{1}{k} < \varepsilon$. La fonction $\varphi = 1_{[e,f]} * \varphi_k$ convient, cf. proposition précédente.

Dans $\mathbb{R}^n$: soit $K = \text{supp}\varphi$ et soit $\varepsilon = d(K, \mathbb{R}^n - \Omega) > 0$ la distance de K à $\mathbb{R}^n - \Omega$. Soit $K_\varepsilon = K + \overline{B}(0, \frac{\varepsilon}{2})$... on continue comme précédemment avec la fonction $\varphi = 1_{K_\varepsilon} * \gamma_k$. ▪

Corollaire 2.26 *Soit (φ_k) une suite régularisante. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1- Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ t.q.$\frac{1}{k} < r$, la fonction produit :

$$f_{r,k} \overset{\text{déf}}{=} f\,(1_{]x_0-r,x_0+r[} * \varphi_k), \tag{2.28}$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et est égale à f dans un voisinage de x_0. Plus précisément on a $f_{r,k} = f$ sur $]x_0-r+\frac{1}{k}, x_0+r-\frac{1}{k}[$ avec $\mathrm{supp} f_{r,k} \subset]x_0-r-\frac{1}{k}, x_0+r+\frac{1}{k}[$.

De plus, si f est bornée, alors $||f - f_{r,k}||_\infty \leqslant ||f||_\infty$.

2- Plus généralement, soit $\varepsilon > 0$, et soit $f \in C^\infty([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])$. Alors pour $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{k} < r$, on a $f_{r,k} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f_{r,k} = f$ dans un voisinage de x_0. Plus précisément on a $f_{r,k} = f$ sur $]x_0-r+\frac{1}{k}, x_0+r-\frac{1}{k}[$ avec $\mathrm{supp} f_{r,k} \subset]x_0-r-\frac{1}{k}, x_0+r+\frac{1}{k}[$.

3- De plus, si f est bornée, alors $||f_{r,k}||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)} \leqslant ||f||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)}$.

Ainsi que $||f - f_{r,k}||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)} \leqslant ||f||_{L^\infty(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)}$

Preuve. 1- Soit $\psi_{r,k} = 1_{]x_0-r,x_0+r[} * \varphi_k$. On a $\psi_{r,k} \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $f_{r,k} \in C^\infty(\mathbb{R})$.. Soit $I_- =]x_0-r+\frac{1}{k}, x_0+r-\frac{1}{k}[$ et soit $I_+ =]x_0-r-\frac{1}{k}, x_0+r+\frac{1}{k}[$. On a $\psi_{r,k} = 1$ dans I_-, donc $f_{r,k} = f$ dans I_- et $\psi_{r,k} = 0$ dans I_+, donc $f_{r,k} = 0$ dans $\mathbb{R} - I_+$. D'où 2-.

3- Et $0 \leqslant 1_{]x_0-r,x_0+r[} * \varphi_k \leqslant 1$, donc $0 \leqslant |f_{r,k}(x)| \leqslant |f(x)|$ et $|f(x) - f_{r,k}(x)| \leqslant |f(x)|$. ▪

Exercice 2.27 Soit f en escalier avec $\mathrm{supp} f$ borné. Soit $(\varphi_k)_{\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante. Alors pour k assez grand on a $f * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $||f * \varphi_k||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ et $||f - f * \varphi_k||_\infty \leqslant ||f||_\infty$.

Réponse. Ici $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ avec $a_1 < ... < a_n$, $f = \sum_{i=1}^{n-1} c_i 1_{[a_i,a_{i+1}]}$. On prend $\frac{1}{k} \leqslant \min_i(\frac{a_{i+1}-a_i}{2})$. Et $f * \varphi_k$ vérifie les propriétés demandées (démarche de la prop. 2.23). ▪

2.7 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$

2.7.1 Convergence L^p et convergence p.p. des régularisées

Proposition 2.28 *Soit $g = 1_{[a,b]}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante.*

1- Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a la convergence dans $L^p(\mathbb{R})$:

$$\varphi_k * 1_{[a,b]} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1_{[a,b]} \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}), \tag{2.29}$$

i.e. $||1_{[a,b]} - \varphi_k * 1_{[a,b]}||_{L^1(\mathbb{R})} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour $p = \infty$ (cas L^∞) c'est faux.

2- Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ on a la convergence simple presque partout :

$$\varphi_k * 1_{[a,b]} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1_{[a,b]} \quad \text{presque partout.} \tag{2.30}$$

3- On conserve ces résultats pour $g = \sum_{i=1}^n c_i\, 1_{[a_i,b_i]} \in L^p(\mathbb{R})$ fonction en escalier.

Preuve. 1- Cas $p = 1$. On a $1_{[a,b]} = \varphi_k * 1_{[a,b]}$ sauf sur $K = [a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}] \bigcup [b-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}]$ (pour $k > \frac{1}{2(b-a)}$) ensemble de longueur $|K| = \frac{4}{k}$ sur lequel $|1_{[a,b]}(x) - (\varphi_k * 1_{[a,b]})(x)| \leqslant 1$. Donc $||1_{[a,b]} - \varphi_k * 1_{[a,b]}||_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \int_K dx = \frac{4}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cas $1 < p < \infty$. Calcul similaire avec $|(1_{[a,b]}(x) - \varphi_k * 1_{[a,b]}(x))^p| \leqslant 1$, et même conclusion.

Cas $p = \infty$. Comme $\varphi_k * g \in C^0(\mathbb{R})$, on a $||\varphi_k * \varphi||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(\varphi_k * \varphi)(x)|$. Prenons la suite régularisante $\varphi_k = \gamma_k$, cf. (2.25). Soit $k > \frac{1}{2(b-a)}$. On a $(\varphi_k * 1_{[a,b]})(b) = \frac{1}{2}$, cf. (2.27). Donc $|1_{[a,b]}(b) - (\varphi_k * 1_{[a,b]})(b)| = \frac{1}{2}$, donc $||1_{[a,b]} - \varphi_k * 1_{[a,b]}||_\infty$ ne tend pas vers 0 quand $k \to \infty$. On ne converge pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

2- Soit $x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$, et $d(x) = \min(d(x,a), d(x,b)) > 0$, faire un dessin. Soit $k > \frac{1}{d(x)}$. On a $(\varphi_k * 1_{[a,b]})(x) = 1_{[a,b]}(x)$, cf. proposition 2.23, donc $|\varphi_k * 1_{[a,b]})(x) - 1_{[a,b]}(x)| \longrightarrow_{k\to\infty} 0$. D'où (2.30).

3- Une fonction en escalier est une somme finie de fonctions indicatrices d'intervalles. ▪

Corollaire 2.29 *Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante. On a :*

1-

$$\text{si} \quad f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 \leqslant p < \infty, \quad \text{alors} \quad \varphi_k * f \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}). \tag{2.31}$$

2-

$$\text{si} \quad f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 \leqslant p < \infty \quad \text{alors} \quad \varphi_k * f \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{presque partout}, \tag{2.32}$$

où ici on suppose de plus que $\{f{=}\infty\}$ ensemble fini de points (exemple $L^1(\mathbb{R})$ et $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$).

Preuve. 1) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Donc il existe une suite croissante $(g_n)_{\mathbb{N}^*}$ de fonctions en escaliers qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_ε t.q. $||f - g_{N_\varepsilon}||_{L^p} < \varepsilon$. Et soit K_ε t.q., pour tout $k \geqslant K_\varepsilon$, $||g_{N_\varepsilon} - \varphi_k * g_{N_\varepsilon}||_{L^p} < \varepsilon$, cf. (2.29). On a :

$$||f - \varphi_k * f||_{L^p} \leqslant ||f - g_{N_\varepsilon}||_{L^p} + ||g_{N_\varepsilon} - \varphi_k * g_{N_\varepsilon}||_{L^p} + ||\varphi_k * g_{N_\varepsilon} - \varphi_k * f||_{L^p},$$

et (2.16) :

$$||\varphi_k * f - \varphi_k * g_{N_\varepsilon}||_{L^p} = ||\varphi_k * (f - g_{N_\varepsilon})||_{L^p} \leqslant ||\varphi_k||_{L^1}||f - g_{N_\varepsilon}||_{L^p} = ||f - g_{N_\varepsilon}||_{L^p} < \varepsilon,$$

puisque $||\varphi_k||_{L^1} = 1$. Donc pour $k \geqslant K_\varepsilon$ on a $||f - \varphi_k * f||_{L^p} < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$, d'où (2.31).

2) Soit $(g_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge p.p. vers f. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$|f - \varphi_k * f|(x) = |f - g_n|(x) + |g_n - \varphi_k * g_n|(x) + |\varphi_k * (g_n - f)|(x)$$

Si f est bornée alors $||f - g_n||_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, et donc :

$$|(\varphi_k * (g_n - f))(x)| \leqslant \int_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_k(t)(g_n - f)(x{-}t)|\, dt \leqslant ||f - g_n||_\infty \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(t)|\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puisque $||\varphi_k||_{L^1} = 1$. D'où (2.32) (démarche similaire à la précédente).

Cas $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\{f{=}\infty\}$ ensemble fini : soit $x \notin \{f{=}\infty\}$ et $d_x = d(x, \{f{=}\infty\})$. Alors f est bornée dans le voisinage $]x{-}\frac{d_x}{2}, x{+}\frac{d_x}{2}[$ de x et on applique le résultat précédent avec $k > \frac{1}{d_x}$. ∎

2.7.2 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$

On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ qui sont à support compact dans $\mathbb{R}$.

Les résultats sont présentés dans $\mathbb{R}$, et restent valables dans $\mathbb{R}^n$.

Et le cas $p = \infty$ est à exclure : l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$: la fonction $f = 1_{\mathbb{R}}$ (constante) vérifie $||f - \varphi||_\infty \geqslant 1$ quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, car $\varphi(x) = 0$ à l'extérieur du support borné de φ.

Théorème 2.30 *Pour $1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$:*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ ||f - \varphi||_{L^p} < \varepsilon. \tag{2.33}$$

Autrement dit, toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ peut être approchée "aussi près que souhaité dans $L^p(\mathbb{R})$" par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

En particulier, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante, notant $\psi_k = \varphi_k * (f1_{[-k,k]})$ (régularisée de la fonction tronquée $f1_{[-k,k]}$), alors la suite $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Preuve. (Par troncature et régularisation.) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, soit $\theta_k = 1_{[-k,k]}$. Considérons $f\theta_k$ (la fonction f tronquée). On a $|f\theta_k| \leqslant |f|$ sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, donc $f\theta_k \in L^p(\mathbb{R})$. On a $\text{supp}(f\theta_k) \subset [-k, k]$.

Soit $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ une suite régularisante et soit $\psi_k = \varphi_k * (f\theta_k)$ (la tronquée régularisée). On a $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, cf. prop. 2.18, avec $\text{supp}(\psi_k) \subset \text{supp}\varphi_k + \text{supp}(f\theta_k) \subset [-k{-}\frac{1}{k}, k{+}\frac{1}{k}]$ cf. (2.10).

Montrons que $\psi_k \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$. On a :

$$f - \psi_k = f - \varphi_k * (f\theta_k) = (f - \varphi_k * f) + (\varphi_k * f - \varphi_k * (f\theta_k)).$$

On a $\varphi_k * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$, cf. (2.31), et on a :

$$||\varphi_k * (f - f\theta_k)||_{L^p} \leqslant ||\varphi_k||_{L^1}||f - f\theta_k||_{L^p} = ||f - f\theta_k||_{L^p} = \int_{x\notin[-k-\frac{1}{k}, k+\frac{1}{k}]} |f(x)|^p\, dx,$$

car $||\varphi_k||_{L^1} = 1$, et le membre de droite est le reste de l'intégrale convergente, donc tend vers 0 quand $k \to \infty$. Donc $||f - \psi_k||_{L^p} \longrightarrow_{k\to\infty} 0$. ∎

2.8 Lemme de Lebesgue

Un résultat de convergence qu'on n'obtient pas avec le théorème de convergence dominée, et qui utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$:

Lemme 2.31 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\lim_{t\to\infty} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\sin(tx)\,dx = 0$. Interprétation : dès que la fonction sinus "oscille assez vite" (i.e. t "assez grand") l'intégrale (valeur moyenne) est proche de 0 (dessin).*

Preuve. (Ici, à x fixé, $g_x(t) = f(x)\sin(tx)$ ne converge pas quand $t \to \infty$: passer à la limite sous le signe $\int$ n'a pas de sens.)

1- Pour $f = 1_{[a,b]}$, où $a < b$, on a $\int_a^b \sin(tx)\,dx = [-\frac{\cos(tx)}{t}]_{x=a}^b = \frac{\cos(ta)-\cos(tb)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2- Donc pour g en escalier on a $\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, comme somme finie d'intégrales convergeant vers 0. Donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists T_\varepsilon > 0$, $\forall t > T_\varepsilon$, $\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx < \varepsilon$.

3- Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (donc en particulier continue). Donc, pour $\varepsilon > 0$, $\exists g$ en escalier t.q. $||f-g||_{L^1} < \varepsilon$. Le 2- indique qu'il existe T_ε t.q. pour tout $t \geqslant T_\varepsilon$ on a $|\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx| < \varepsilon$. D'où, pour tout $t > T_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\sin(tx)\,dx| &\leqslant \int_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\,dx + |\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\sin(tx)\,dx| \\ &\leqslant ||f-g||_{L^1} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

4- Puis $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, d'où le résultat en reprenant la démarche du 3-. ∎

2.9 Partition de l'unité

2.9.1 $1_\mathbb{R}$ comme somme de régularisées (partition de l'unité de $\mathbb{R}$)

On rappelle que $\tau_c\varphi : x \to \tau_c\varphi(x) = \varphi(x-c)$.

Proposition 2.32 *(Partition de l'unité de $\mathbb{R}$.) Soit $(\gamma_n)_\mathbb{N}$ la suite régularisante paire donnée par (2.25). Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$, et on fixe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}$. On pose :*

$$\varphi = \gamma_n * 1_{[a,b]}, \tag{2.34}$$

la régularisée de $1_{[a,b]}$. En particulier $\varphi = 1$ sur $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ et $\operatorname{supp}\varphi = [a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$.

Soit $d = b-a$ (distance de a à b = largeur de l'intervalle $[a, b]$). On a :

$$\begin{cases} \varphi + \tau_d\varphi = 1 \quad \text{sur} \quad [a+\frac{1}{n}, b+d-\frac{1}{n}], \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(\varphi+\tau_d\varphi) = [a-\frac{1}{n}, b+d+\frac{1}{n}], \\ \tau_{-d}\varphi + \varphi = 1 \quad \text{sur} \quad [a-d+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}], \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(\tau_{-d}\varphi+\varphi) = [a-d-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}], \end{cases} \tag{2.35}$$

Faire un dessin. Et de même, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$ où $k < \ell$:

$$\tau_{kd}\varphi + \tau_{(k+1)d}\varphi + \dots + \tau_{(\ell-1)d}\varphi + \tau_{\ell d}\varphi = 1 \qquad \text{sur} \qquad [a+kd+\frac{1}{n}, b+\ell d-\frac{1}{n}], \tag{2.36}$$

et de support $[a+kd-\frac{1}{n}, b+\ell d+\frac{1}{n}]$. Et donc :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{kd}\varphi = 1_\mathbb{R}, \tag{2.37}$$

formule de partition de l'unité de $\mathbb{R}$ (la fonction constante $1_\mathbb{R}$).

Preuve. On reprend le calcul (2.27), avec $\mathrm{supp}(\tau_d 1_{[a,b]}) = \mathrm{supp}(1_{[a+d,b+d]})$. En particulier :

$$\varphi(x) = \int_{t\in[x-b,x-a]} \gamma_n(t)\,dt, \qquad \tau_d\varphi(x) = \varphi(x-d) = \int_{t\in[x-b-d,x-a-d]} \gamma_n(t)\,dt.$$

Et $d > 0$, donc :

$$\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = \int_{J_x} \gamma_n(t)\,dt, \qquad J_x = [x-b-d, x-a]\bigcap[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

1- Si $x-a \leqslant -\frac{1}{n}$, soit $x \leqslant a-\frac{1}{n}$, alors $\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = 0$.
1'- Si $x-b-d \geqslant \frac{1}{n}$, soit $x \geqslant b+d+\frac{1}{n}$, alors $\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = 0$.
2- Si $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset [x-b-d, x-a]$, soit $-\frac{1}{n} \geqslant x-b-d$ et $\frac{1}{n} \leqslant x-a$, soit $x \in [a+\frac{1}{n}, b+d-\frac{1}{n}]$ alors $\varphi(x) + \tau_d\varphi(x) = 1$
3- Et dans les autres cas $0 \leqslant \varphi(x) + \tau_d\varphi(x) \leqslant 1$.
D'où $(2.35)_1$. Puis de même $(2.35)_2$. D'où (2.36) par récurrence, d'où (2.37). ▪

2.9.2 Partition de l'unité dans $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 2.33 *Soit K un compact contenu dans une réunion finie d'ouverts $\bigcup_{j=1}^m \Omega_j$. Alors il existe des compacts $K_j \subset \Omega_j$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^m \mathring{K}_j$.*

Preuve. Pour $x \in K$, soit $j_x \in [1, m]_{\mathbb{N}}$ t.q. $x \in \Omega_{j_x}$, et soit r_{j_x} t.q. $B(x, 2r_{j_x}) \subset \Omega_{j_x}$. Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, r_{j_x})$ et K compact, il existe un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} B(x_k, r_{j_{x_k}})$. On pose $K_j = \bigcup_{\substack{k=1,\dots,\ell \\ x_k\in\Omega_j}} \overline{B(x_k, r_{j_{x_k}})}$, réunion finie de compacts donc compact, et $K \subset \bigcup_{j=1}^m \mathring{K}_j$, avec $K_j \subset \bigcup_{\substack{k=1,\dots,\ell \\ x_k\in\Omega_j}} B(x_k, 2r_{j_{x_k}}) \subset \Omega_j$. ▪

Lemme 2.34 *Soit Ω un ouvert et soit un compact $K \subset \Omega$. Soit $f \in C^0(\Omega)$ t.q. $f_{|K} = 1$. Alors f est strictement positive dans un voisinage ouvert de K : $\exists\varepsilon > 0$, $\forall x \in K + B(0, \varepsilon)$, $f(x) > 0$.*

Exercice 2.35 Montrer à l'aide des suites que si K est compact dans Ω ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $K + B(0, \varepsilon) \subset \Omega$ (donc que K est à plus d'une distance ε du bord de Ω).

Réponse. Sinon, pour tout ε, en particulier $\varepsilon = \frac{1}{m}$, on a $(K+B(0, \frac{1}{m})) \cap (\mathbb{R}^n-\Omega) \neq \emptyset$. Donc il existe $x_m \in K$ et $z_m \in B(0, \frac{1}{m})$ t.q. $x_m + z_m \in (\mathbb{R}^n-\Omega)$. On a construit une suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers 0. Et on a construit une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans K, et comme K est compact, la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ a une sous-suite convergente $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans K ; notons $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_{m_k} \in K$. Donc la suite $(x_{m_k} + z_{m_k})_{\mathbb{N}^*}$ converge vers $x_\infty + 0 = x_\infty$; et $(x_{m_k} + z_{m_k})_{\mathbb{N}^*}$ est une suite dans le fermé $(\mathbb{R}^n-\Omega)$ (complémentaire d'un ouvert), donc sa limite $x_\infty \in \mathbb{R}^n-\Omega$. Avec $x_\infty \in \Omega$: absurde.

En particulier $x_\infty \in \Omega$ (car $K \subset \Omega$). ▪

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe $r > 0$ t.q le compact $K + \overline{B(0, r)} =^{\text{noté}} K_r$ est tout entier dans Ω . Soit $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{1}{N} < r$. Supposons le lemme faux, i.e. $\forall\varepsilon = \frac{1}{n}$ où $n > N$, $\exists x_n \in K + B(0, \frac{1}{n})$ t.q. $f(x_n) = 0$. On a construit une suite $(x_n)_{n>N}$ telle que $f(x_n) = 0$ pour tout n. Et $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ appartient au compact K_r, donc on peut extraire une sous suite convergente dans K_r, soit $x_\infty \in K_r$ la limite. Mieux, $x_\infty \in K$ car K est fermé : sinon $x_\infty \in \mathbb{R}^n - K$ ouvert, donc $\exists\varepsilon > 0$ t.q. $B(x_\infty, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - K$, donc $d(x_\infty, K) \geqslant \varepsilon$, absurde par construction de la suite (x_n). Et comme f est continue et $x_n \to x_\infty$, on a $f(x_\infty) = 0$. Et comme $x_\infty \in K$ on a $f(x_\infty) = 1$. Absurde car $x_\infty \in K \subset \Omega$: donc le lemme est vrai. ▪

Proposition 2.36 *(Partition de l'unité.) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ dont on considère un recouvrement fini $\bigcup_{j=1}^m \Omega_j \supset K$, les Ω_j étant des ouverts de $\mathbb{R}^n$.*

Il existe alors m fonctions $\chi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ telles que $0 \leqslant \chi_j \leqslant 1$ pour tout $j = 1, ..., m$ et :

$$\chi_1(x) + ... + \chi_m(x) = 1 \qquad \textit{dans un voisinage ouvert de } K. \tag{2.38}$$

Preuve. On applique le lemme 2.33 : soit m compacts $K_j \subset \Omega_j$ t.q. $K \subset \bigcup_{j=1}^m \mathring{K}_j$.

Soit alors $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ une fonction qui vaut 1 sur K_j (une telle fonction existe d'après le corollaire 2.25). En particulier $\sum_{i=1}^m \psi_i$ est une fonction C^∞ strictement positive dans un voisinage ouvert de de K. On pose dans $\mathbb{R}^n$:

$$\chi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{i=1}^m \psi_i(x)}. \tag{2.39}$$

On vérifie immédiatement que les χ_j conviennent. ∎

2.10 $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ et résultat de "projection"

Lemme 2.37 *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. On suppose :*

$$\textit{hypothèse :}\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{2.40}$$

Alors, avec q le conjugué de p défini par $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ quand $1<p<\infty$:

$$\textit{conclusion :}\quad \begin{cases} p=1 : & \forall \psi \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ t.q. supp}\psi \text{ compact}, & \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx = 0,\\ p\in]1,\infty[: & \forall \psi \in L^q(\mathbb{R}) \text{ t.q. supp}\psi \text{ compact}, & \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx = 0,\\ p=\infty : & \forall \psi \in L^1(\mathbb{R}) \text{ t.q. supp}\psi \text{ compact}, & \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx = 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Preuve. Cas $p=1$. Soit ψ en escalier avec suppψ borné, i.e. $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists a_1,...,a_k,c_1,...,c_k \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < ... < a_k$, $\psi = \sum_{i=1}^{k-1} c_i 1_{[a_i,a_{i+1}]}$. Soit (γ_n) une suite régularisante et soit $\psi_n \stackrel{\text{déf}}{=} \psi * \gamma_n$. On a $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \psi(x)$ p.p., avec $||\psi-\psi_n||_\infty \leqslant ||\psi||_\infty$, cf. exercice 2.27. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a_1,a_k]}(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

grâce au théorème de convergence dominée : notant $g(n,x) = (f1_{[a_1,a_k]})(x)(\psi(x)-\psi_n(x))$ l'intégrant, à x fixé $\psi(x)-\psi_n(x) \to 0$ p.p. donne $g(n,x) \to 0$, avec $|g(n,x)| \leqslant ||\psi||_\infty |(f1_{[a_1,a_k]})(x)|$ majoration indépendante de n par une fonction intégrable. Donc $(2.41)_1$ est vraie pour les fonctions en escalier.

Soit $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ à support borné. Soit $(e_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge p.p. vers ψ, avec $(e_n(x))_{\mathbb{N}}$ croissante positive si $\psi(x) \geqslant 0$ et $(e_n(x))_{\mathbb{N}}$ décroissante négative si $\psi(x) \leqslant 0$ (voir cours d'intégration). Donc on a $||e_n||_\infty \leqslant ||\varphi||_\infty < \infty$ pour tout n.

Comme $\exists a > 0$ t.q. supp$\psi \subset [-a,a]$, quitte à remplacer les e_n par $e_n 1_{[-a,a]}$, on peut considérer les (e_n) toutes à support dans $[-a,a]$. Et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi(x)-e_n(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[-a,a]}(x)(\psi(x)-e_n(x))\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

grâce au théorème de convergence dominée : à x fixé $\psi(x)-e_n(x) \to 0$ p.p., et $|f(x)(\psi(x)-e_n(x))| \leqslant ||\psi||_\infty ||f1_{[-a,a]}||_{L^1(\mathbb{R})}$ majoration indépendante de n par une fonction intégrable. Donc $(2.41)_1$ est vraie pour les fonctions bornées à support borné.

Cas $p \in]1,\infty[$. Soit q t.q. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Cas ψ en escalier avec suppψ borné : même suite (ψ_n) que précédemment : ici $f1_{[a_1,a_k]} \in L^p(\mathbb{R})$ et $\psi,\psi_n \in L^q(\mathbb{R})$ pour tout n (trivial). Et Hölder : $|\int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a_1,a_k]}(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx| \leqslant ||f1_{[a_1,a_k]}||_{L^p}||\psi-\psi_n||_{L^q} \to 0$.
Soit $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ à support borné. Même suite (e_n) que précédemment. Et Hölder.

Cas $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Cas ψ en escalier avec suppψ borné : même suite (ψ_n) que précédemment : ici $f1_{[a_1,a_k]} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi,\psi_n \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout n (trivial). Et : $|\int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a_1,a_k]}(x)(\psi(x)-\psi_n(x))\,dx| \leqslant ||f1_{[a_1,a_k]}||_\infty ||\psi-\psi_n||_{L^1} \to 0$.
Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ à support borné. Même suite (e_n) que précédemment... ∎

Proposition 2.38 *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. On a :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \text{ p.p.}. \tag{2.42}$$

Preuve. $\Leftarrow$: trivial. C'est $\Rightarrow$ qu'il s'agit d'établir. Avec le lemme 2.37 :

Cas $p = 1$: on prend $\psi(x) = 0$ quand $x \notin]-k,k[$ et quand $f(x) = 0$, et sinon $\psi(x) = 1$ si $f(x) > 0$ et $\psi(x) = -1$ si $f(x) < 0$. Donc $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ à support borné et $0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)1_{]-k,k[}(x)|\,dx$. Comme $|f1_{]-k,k[}| \geqslant 0$, on déduit $|f1_{]-k,k[}| = 0$ p.p., voir cours d'intégration, donc $f1_{]-k,k[} = 0$ donc $f = 0$ sur $]-k,k[$, vrai pour tout k.

Cas $p \in]1,\infty[$: on prend $\psi(x) = 0$ quand $x \notin]-k,k[$ et quand $f(x) = 0$, et sinon $\psi(x) = f(x)^{p-1}$ si $f(x) > 0$ et $\psi(x) = -|f(x)|^{p-1}$ si $f(x) < 0$. Soit q le conjugué de p donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a $|\psi(x)|^q = |f(x)|^{q(p-1)} = |f(x)|$ pour $x \in]-k,k[$ et 0 ailleurs. Donc $\psi \in L^q(\mathbb{R})$. Avec $f1_{[-k,k]} \in L^p(\mathbb{R})$. Donc $(f1_{[-k,k]})\psi \in L^1(\mathbb{R})$ avec $(f1_{[-k,k]})\psi = |f|^p 1_{[-k,k]} \geqslant 0$ d'intégrale nulle, donc $f = 0$ sur $[-k,k]$, vrai pour tout k.

Cas $p = \infty$: dual du cas $p = 1$. On prend $\psi(x) = 0$ quand $x \notin]-k,k[$ et quand $f(x) = 0$, et sinon $\psi(x) = 1$ si $f(x) > 0$ et $\psi(x) = -1$ si $f(x) < 0$. Comme $[-k,k]$ est borné et ψ borné, $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\int_{\mathbb{R}} f1_{[-k,k]}\psi = 0$, avec $f1_{[-k,k]}\psi = |f|1_{[-k,k]} \geqslant 0$, donc $|f|1_{[-k,k]} = 0$ p.p., donc $f = 0$ sur $[-k,k]$, vrai pour tout k. ∎