Stokes et éléments finis P_1-bulle–P_1 : présentation détaillée de l'élimination locale des bulles

Gilles Leborgne

15 septembre 2008

Table des matières

1 Notations

On se place dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bord $\Gamma = \partial\Omega$.

On note de manière générique : pour deux fonctions $p, q \in L^2(\Omega)$ à valeurs scalaires :

$$(p,q)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega p(\vec{x})\, q(\vec{x})\, d\Omega,$$

ainsi que $(p,q)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma p(\vec{x})\, q(\vec{x})\, d\Gamma$ quand $p, q \in L^2(\Gamma)$.

Pour deux fonctions $\vec{u}, \vec{v} \in L^2(\Omega)^n$ à valeurs vectorielles, avec $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ u^n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ en coordonnées cartésiennes, et notation similaire pour $\vec{v}$:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u^i(\vec{x})\, v^i(\vec{x})\, d\Omega = \sum_{i=1}^n (u^i, v^i)_{L^2(\Omega)}.$$

Pour deux fonctions $M, N \in L^2(\Omega)^{n^2}$ à valeurs matricielles, avec $M = [M_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ et notation similaire pour N :

$$(M,N)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega M_{ij}(\vec{x}) N_{ij}(\vec{x})\, d\Omega = \sum_{i,j=1}^n (M_{ij}, N_{ij})_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, notant $\nabla\vec{u} = [\frac{\partial u^i}{\partial x_j}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ la matrice jacobienne de $\vec{u}$ en coordonnées cartésiennes, notation similaire pour $\nabla\vec{v}$, ces notations permettent de retrouver l'intégration par parties

$$(-\Delta\vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)} = (\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})_{L^2(\Omega)} - (\nabla\vec{u}.\vec{n}, \vec{v})_{L^2(\Gamma)}, \tag{1.1}$$

quand de plus $u \in H^2(\Omega)$. En effet :

$$\begin{aligned}(-\Delta\vec{u},\vec{v})_{L^2(\Omega)} &= \sum_i(-\Delta u^i,v^i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{ij}(-\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_j^2},v^i)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{ij}(\frac{\partial u^i}{\partial x_j},\frac{\partial v^i}{\partial x^j})_{L^2(\Omega)} - (\frac{\partial u^i}{\partial x_j}n_j,v^i)_{L^2(\Gamma)} \\ &= (\nabla\vec{u},\nabla\vec{v})_{L^2(\Omega)} - (\nabla\vec{u}.\vec{n},\vec{v})_{L^2(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

2 P_1-bulle en vitesse, P_1 en pression : les équations discrétisées

On se place dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\varepsilon \geq 0$. Pour fixer les idées, on impose les conditions de Dirichlet à la vitesse : $\vec{u}_\Gamma = \begin{pmatrix} u_\Gamma^1 \\ u_\Gamma^2 \end{pmatrix}$ est la vitesse imposée sur $\Gamma = \partial\Omega$.

On note V_h l'espace vectoriel des fonctions P_1-bulle qui sont nulles au bord, et on note Q_h l'espace vectoriel des fonctions P_1 qui sont nulles en un point donné.

On veut résoudre : trouver $\vec{u}_h \in (u_\Gamma^1{+}V_h) \times (u_\Gamma^2{+}V_h)$ et $p_h \in Q_h$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} (\nabla\vec{u}_h,\nabla\vec{v}_h)_{L^2} - (p_h,\mathrm{div}\vec{v}_h)_{L^2}, = (\vec{f},\vec{v}_h)_{L^2}, \qquad \forall\vec{v}_h \in V_h^2, \\ (\mathrm{div}\vec{u}_h,q_h)_{L^2} - \varepsilon(p_h,q_h)_{L^2} = 0, \qquad \forall q_h \in Q_h. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

La condition inf-sup discrète est satisfaite (élément fini mini de Fortin) et ce problème est bien posé.

Notons $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_h = \begin{pmatrix} v_h^1 \\ v_h^2 \end{pmatrix}$, ainsi que $\vec{f} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$. L'équation (2.1) s'écrit en prenant successivement $\vec{v}_h = \begin{pmatrix} w_h \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $\vec{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ w_h \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{l} (\vec{\nabla}u_h^1,\vec{\nabla}w_h) - (p_h,\dfrac{\partial w_h}{\partial x}) = (f^1,w_h), \qquad \forall w_h \in V_h, \\ (\vec{\nabla}u_h^2,\vec{\nabla}w_h) - (p_h,\dfrac{\partial w_h}{\partial y}) = (f^2,w_h), \qquad \forall w_h \in V_h, \\ (\dfrac{\partial u_h^1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_h^2}{\partial y},q_h)_{L^2} - \varepsilon(p_h,q_h)_{L^2} = 0, \qquad \forall q_h \in Q_h, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

ou encore :

$$\left\{\begin{array}{l} (\dfrac{\partial u_h^1}{\partial x},\dfrac{\partial w_h}{\partial x}) + (\dfrac{\partial u_h^1}{\partial y},\dfrac{\partial w_h}{\partial y}) - (p_h,\dfrac{\partial w_h}{\partial x}) = (f^1,w_h), \qquad \forall w_h \in V_h, \\ (\dfrac{\partial u_h^2}{\partial x},\dfrac{\partial w_h}{\partial x}) + (\dfrac{\partial u_h^2}{\partial y},\dfrac{\partial w_h}{\partial y}) - (p_h,\dfrac{\partial w_h}{\partial y}) = (f^2,w_h), \qquad \forall w_h \in V_h, \\ (\dfrac{\partial u_h^1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_h^2}{\partial y},q_h)_{L^2} - \varepsilon(p_h,q_h)_{L^2} = 0, \qquad \forall q_h \in Q_h. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Soient n_t le nombre de triangles du maillage éléments finis, et n_n le nombre de noeuds de ce maillage (le nombre de sommets du maillage). Les fonctions de base P_1 seront notées $(\phi_i)_{i=1,\dots,n_t}$ et les fonctions de base des bulles seront notées $(\psi_K)_{K=1,\dots,n_t}$.

On rappelle qu'une fonction bulle ψ_K de base est donnée par le produit des 3 fonctions P_1 de base sur le triangle K :

$$\psi_K = \phi_{k_1}\phi_{k_2}\phi_{k_3},$$

où k_1,k_2,k_3 sont les 3 numéros (globaux) des 3 sommets (locaux 1, 2 et 3) du triangle K. Et ψ_K est nulle dans $\Omega - K$.

On notera :

$$p_h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n_n} p^i\phi_i(\vec{x}),$$

la décomposition d'une fonction $p_h \in V_h$ sur la base P_1, et on notera :

$$\left\{ \begin{aligned} u(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{n_n} u^i \phi_i(\vec{x}) + \sum_{K=1}^{n_t} \alpha^K \psi_K(\vec{x}), \\ v(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{n_n} v^i \phi_i(\vec{x}) + \sum_{K=1}^{n_t} \beta^K \psi_K(\vec{x}). \end{aligned} \right. \tag{2.4}$$

la décomposition d'une fonction $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in (u_\Gamma^1 + V_h) \times (u_\Gamma^2 + V_h)$ sur la base P_1-bulle–P_1.

Remarque 1 Si $\varepsilon > 0$, on pose $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$ et le problème (2.1) s'écrit :

$$(\nabla \vec{u}_h, \nabla \vec{v}_h) + \lambda(\Pi_{Q_h} \mathrm{div} \vec{u}_h, \Pi_{Q_h} \mathrm{div} \vec{v}_h) = (\vec{f}, \vec{v}_h), \tag{2.5}$$

où $\Pi_{Q_h} : L^2(\Omega) \to Q_h$ est l'opérateur de projection L^2 sur Q_h, i.e. si $p \in L^2(\Omega)$, alors $p_h = \Pi_{Q_h} q$ est défini par $(p_h, q_n)_{L^2} = (p, q_h)_{L^2}$ pour tout $q_h \in Q_h$.

3 Élimination des d.d.l. associés aux bulles

d.d.l. = degré de liberté = d.o.f. = degree of freedom.

3.1 Équations relatives aux bulles

On note $(k_j)_{j=1,2,3}$ les numéros (globaux) des 3 sommets du triangle K. On va prendre $w_h = \psi_K$ dans $(2.2)_1$.

On a, ψ_K étant nulle à l'extérieur de K :

$$(\nabla u, \nabla \psi_K)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla \psi_K)_{L^2(K)} = \sum_{j=1}^{3} u^{k_j} (\nabla \phi_{k_j}, \nabla \psi_K)_{L^2(K)} + \alpha^K (\nabla \psi_K, \nabla \psi_K)_{L^2(K)}. \tag{3.1}$$

On remarque que, par intégration par parties immédiate :

$$(\nabla \phi_i, \nabla \psi_K)_{L^2(K)} = 0, \tag{3.2}$$

car $= \int_K -\Delta \phi_i \, \psi_K + \int_{\partial K} \nabla \phi_i . \vec{n} \, \psi_K$ avec $\Delta \phi_i = 0$ (les ϕ_i sont affines sur K) et $\psi_{K|\partial K} = 0$ (les bulles sont nulles sur le bord de K. Donc (3.1) se résume à : pour tout ψ_K :

$$(\nabla u, \nabla \psi_K)_{L^2(\Omega)} = \alpha^K (\nabla \psi_K, \nabla \psi_K)_{L^2(K)},$$

résultat indépendant des valeurs de u aux sommets des triangles.

Puis, ψ_K étant nulle à l'extérieur de K, on a :

$$(p, \frac{\partial \psi_K}{\partial x})_{L^2(\Omega)} = (p, \frac{\partial \psi_K}{\partial x})_{L^2(K)} = \sum_{j=1}^{3} p^{k_j} (\phi_{k_j}, \frac{\partial \psi_K}{\partial x})_{L^2(K)},$$

et :

$$(f_1, \psi_K)_{L^2(\Omega)} = (f_1, \psi_K)_{L^2(K)}.$$

D'où $(2.2)_1$ donne :

$$\alpha_K = \frac{1}{||\nabla \psi_K||^2} \Big((f_1, \psi_K)_{L^2(K)} + \sum_{j=1}^{3} p^{k_j} (\phi_{k_j}, \frac{\partial \psi_K}{\partial x})_{L^2(K)} \Big) \tag{3.3}$$

De même $(2.2)_2$ donne :

$$\beta_K = \frac{1}{||\nabla \psi_K||^2} \Big((f_2, \psi_K)_{L^2(K)} + \sum_{j=1}^{3} p^{k_j} (\phi_{k_j}, \frac{\partial \psi_K}{\partial y})_{L^2(K)} \Big). \tag{3.4}$$

3.2 Équations relatives aux sommets

On prend $w_h = \phi_i$ pour un des $i = 1, ..., n_n$. Alors $(2.2)_1$ réécrite comme :

$$\sum_{k=1}^{n_t}\Big((\nabla u, \nabla\phi_i)_K - (p, \frac{\partial\phi_i}{\partial x})_K\Big) = \sum_{k=1}^{n_t}(f_1, \phi_i)_K,$$

devient :

$$\sum_{k=1}^{n_t}\Big(\sum_{j=1}^{3} u^{k_j}(\nabla\phi_{k_j}, \nabla\phi_i)_K + \alpha^K(\nabla\psi_K, \nabla\phi_i)_K - \sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \frac{\partial\phi_i}{\partial x})_K\Big) = \sum_{k=1}^{n_t}(f_1, \phi_i)_K.$$

Toujours avec $(\nabla\psi_K, \nabla\phi_i)_K = 0$, cf. (3.2) : les composantes α^K disparaissent.

Donc les équations $(2.2)_1$ (en u) pour tout ϕ_i se résument à :

$$\sum_{k=1}^{n_t}\Big(\sum_{j=1}^{3} u^{k_j}(\nabla\phi_{k_j}, \nabla\phi_i)_K - \sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \frac{\partial\phi_i}{\partial x})_K\Big) = \sum_{K=1}^{n_t}(f_1, \phi_i)_K. \tag{3.5}$$

De même les équations $(2.2)_2$ (en v) : pour tout ϕ_i :

$$\sum_{k=1}^{n_t}\Big(\sum_{j=1}^{3} v^{k_j}(\nabla\phi_{k_j}, \nabla\phi_i)_K - \sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \frac{\partial\phi_i}{\partial y})_K\Big) = \sum_{K=1}^{n_t}(f_2, \phi_i)_K. \tag{3.6}$$

Donc les ddl (α_K et β_K) correspondant aux bulles n'interviennent pas dans ces équations en vitesse.

Pour les équations $(2.2)_3$ (en pression), on a pour tout $1 \leq i \leq n_n$:

$$-(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \phi_i)_\Omega - \varepsilon(p, \phi_i)_\Omega = 0,$$

soit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_t}\Big(& \sum_{j=1}^{3} u^{k_j}(\frac{\partial\phi_{k_j}}{\partial x}, \phi_i)_K + \alpha^K(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i)_K \\ &+ \sum_{j=1}^{3} v^{k_j}(\frac{\partial\phi_{k_j}}{\partial y}, \phi_i)_K + \beta^K(\frac{\partial\psi_K}{\partial y}, \phi_i)_K \\ &+ \varepsilon\sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \phi_i)_K\Big) = 0.\end{aligned}$$

On remplace α_K et β_K par leurs valeurs (3.3) et (3.4), et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_t}\Big(& \sum_{j=1}^{3} u^{k_j}(\frac{\partial\phi_{k_j}}{\partial x}, \phi_i)_K + \frac{1}{||\nabla\psi_K||^2}\Big((f_1, \psi_K)_K + \sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \frac{\partial\psi_K}{\partial x})_K\Big)(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i)_K \\ &+ \sum_{j=1}^{3} v^{k_j}(\frac{\partial\phi_{k_j}}{\partial y}, \phi_i)_K + \frac{1}{||\nabla\psi_K||^2}\Big((f_2, \psi_K)_K + \sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \frac{\partial\psi_K}{\partial y})_K\Big)(\frac{\partial\psi_K}{\partial y}, \phi_i)_K \\ &+ \varepsilon\sum_{j=1}^{3} p^{k_j}(\phi_{k_j}, \phi_i)_K\Big) = 0,\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_t}\Big(& \sum_{j=1}^{3} u^{k_j}(\frac{\partial\phi_{k_j}}{\partial x}, \phi_i)_K + v^{k_j}(\frac{\partial\phi_{k_j}}{\partial y}, \phi_i)_K \\ &+ \sum_{j=1}^{3} p^{k_j}\{\varepsilon(\phi_{k_j}, \phi_i)_K + \frac{1}{||\nabla\psi_K||^2}[(\phi_{k_j}, \frac{\partial\psi_K}{\partial x})_K(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i)_K + (\phi_{k_j}, \frac{\partial\psi_K}{\partial y})_K(\frac{\partial\psi_K}{\partial y}, \phi_i)_K]\}\Big) \\ &= +\sum_{k=1}^{nt}\frac{1}{||\nabla\psi_K||^2}\big((f_1, \psi_K)_K(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i)_K + (f_2, \psi_K)_K(\frac{\partial\psi_K}{\partial y}, \phi_i)_K\big)\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3 Bilan

Les équations (3.5), (3.6), et (3.7) donnent le système à résoudre où les bulles ont disparues : il y a $3 * n_n$ équations à résoudre pour les $3 * n_n$ inconnues u^i, v^i, p^i pour $i = 1, ..., n_n$.

Si on ne souhaite représenter le résultat en vitesse uniquement aux sommets du maillage, ce résultat est suffisant.

Si de plus on souhaite représenter le résultat en vitesse au milieu de mailles (isobarycentre), on récupère ensuite les composantes α_K et β_K des bulles à l'aide de (3.3) et (3.4).

4 Calculs numériques

4.1 Rappels

On se donne un triangle $K = (A, B, C)$ où $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$.

On effectue le changement de variable sur le triangle de référence $\hat{K} = ((0,0), (1,0), (0,1))$:

$$\int_K f(x,y)\, dxdy = \int_{\hat{K}} \hat{f}(u,v)\, J(u,v)\, dudv$$

où :

$$(x,y) = F(u,v), \quad J(u,v) = |\det(\nabla F)|, \quad \hat{f}(u,v) = f(F^{-1}(u,v))$$

Pour un triangle k, on a :

$$J = 2\mathcal{A} = 2(\text{aire de } k)$$

En particulier :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c_2 - a_2}{J}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a_1 - c_1}{J}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a_2 - b_2}{J}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{b_1 - a_1}{J}$$

Et :

$$\int_K \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dxdy = \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \hat{f}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{f}(u,v)}{\partial v} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) J(u,v)\, dudv$$

Sur le triangle de référence, les fonctions de base sont :

$$\phi_1(u,v) = 1 - u - v, \quad \phi_2(u,v) = u, \quad \phi_3(u,v) = v$$

et la bulle est la fonction, donnée avec ses dérivées :

$$\hat{b}(u,v) = 27uv(1-u-v), \quad \frac{\partial \hat{b}}{\partial u} = 27v(1-2u-v), \quad \frac{\partial \hat{b}}{\partial v} = 27u(1-u-2v)$$

4.2 Calculs

On rappelle que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{v=0}^{1} v\,(1-v)^n\, dv = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \\ \displaystyle\int_{v=0}^{1} v^2\,(1-v)^n\, dv = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{v=0}^{1} v\,(1-v)^2\, dv = \frac{1}{12}, \quad \int_{v=0}^{1} v\,(1-v)^3\, dv = \frac{1}{20}, \quad \int_{v=0}^{1} v\,(1-v)^4\, dv = \frac{1}{30}, \\ \displaystyle\int_{v=0}^{1} v^2\,(1-v)^2\, dv = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}, \quad \int_{v=0}^{1} v^2\,(1-v)^3\, dv = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}, \\ \displaystyle\int_{v=0}^{1} v^2\,(1-v)^5\, dv = \frac{2}{6*7*8} = \frac{1}{2^3*3*7} = \frac{1}{168}, \end{cases}$$

Puis, avec les valeurs des intégrales :

$$
\begin{aligned}
&v(1-2u-v)(1-u-v) = v(1-v)(1-u) - 2uv(1-u) - v^2(1-v) + 2uv^2,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{7}{120} - 2\frac{1}{40} - \frac{1}{30} + 2\frac{1}{60} = \frac{1}{120},\\
&u(1-u-2v)(1-u-v) = u(1-u)^2 - uv(1-u) - 2uv(1-u) + 2uv^2,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{20} - 3\frac{1}{40} + 2\frac{1}{60} = \frac{1}{120},\\
&v(1-2u-v)u = uv(1-v) - 2u^2v,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{40} - 2\frac{1}{60} = -\frac{1}{120},\\
&u(1-u-2v)u = u^2(1-u) - 2u^2v,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{30} - 2\frac{1}{60} = 0,\\
&v^2(1-2u-v)^2 = v^2(1-v)^2 - 4v^2(1-v)u + 4v^2u^2,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{60} - 4\frac{1}{120} + 4\frac{1}{180} = \frac{1}{180},\\
&v(1-2u-v)u(1-u-2v) = uv(1-v)(1-u) - 2u^2v(1-u) - 2uv^2(1-v) + 4u^2v^2,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{72} - 2\frac{1}{120} - 2\frac{1}{120} + 4\frac{1}{180} = \frac{1}{360},\\
&u^2v^2(1-u-v)^2 = u^2v^2(1-u)^2 - 2u^2(1-u)v^3 + u^2v^4,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{3*168} - 2\frac{1}{4*168} + \frac{1}{5*168} = \frac{1}{30*168} = \frac{1}{5040} = \frac{1}{2^4*3^2*5*7}.\\
&uv(1-u-v)(1-u-v) = uv(1-u)^2 - 2u(1-u)v^2 + uv^3,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{2*30} - 2\frac{1}{3*30} + \frac{1}{4*30} = \frac{1}{12*30}.\\
&uv(1-u-v)u = u^2v(1-u) - u^2v^2,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{2*60} - \frac{1}{3*60} = \frac{1}{12*30}.\\
&uv(1-u-v)v = uv^2(1-u) - uv^3,\\
&\qquad \longrightarrow \frac{1}{3*30} - \frac{1}{4*30} = \frac{1}{12*30}.
\end{aligned}
$$

1.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial x}\,dxdy = \int_{y=a}^{b}\int_{x=ymin}^{ymax} \frac{\partial b}{\partial x}\,dxdy$$
$$= \int_{y=a}^{b} [b(x,y)]_{xbordinf}^{xborsup}\,dy = \int_{y=a}^{b} 0\,dy = 0$$

2.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial x}\phi_1\,dxdy = \int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})\hat{\phi}_1\,J\,dudv$$
$$= 27(c_2-a_2)\int_{\hat{K}} v(1-2u-v)(1-u-v)\,dudv + 27(a_2-b_2)\int_{\hat{K}} u(1-u-2v)(1-u-v)\,dudv$$
$$= \frac{27}{120}((c_2-a_2)+(a_2-b_2)) = \frac{9}{40}(c_2-b_2)$$

3.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial x}\phi_2\,dxdy = \frac{9}{40}(a_2-c_2)$$

4.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial x}\phi_3\,dxdy = \frac{9}{40}(b_2-a_2)$$

5.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial y}\phi_1\,dxdy = \int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})\hat{\phi}_1\,J\,dudv$$
$$= 27(a_1-c_1)\int_{\hat{K}} v(1-2u-v)(1-u-v)\,dudv + 27(b_1-a_1)\int_{\hat{K}} u(1-u-2v)(1-u-v)\,dudv$$
$$= \frac{27}{120}((a_1-c_1)+(b_1-a_1)) = \frac{9}{40}(b_1-c_1)$$

6.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial y}\phi_2\,dxdy = \frac{9}{40}(c_1-a_1)$$

7.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial y}\phi_3\,dxdy = \frac{9}{40}(a_1-b_1)$$

8.

$$\int_K \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x}\,dxdy = \int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})^2\,J\,dudv$$
$$= \int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})^2\,J\,dudv$$
$$= \frac{1}{J}(c_2-a_2)^2\int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u})^2\,dudv + \frac{2}{J}(c_2-a_2)(a_2-b_2)\int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\,dudv + \frac{1}{J}(a_2-b_2)^2\int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial v})^2\,dudv$$
$$= \frac{27^2}{2\mathcal{A}}(\frac{(c_2-a_2)^2}{180} + \frac{2(c_2-a_2)(a_2-b_2)}{360} + \frac{(a_2-b_2)^2}{180})$$
$$= \frac{81}{40\mathcal{A}}((c_2-a_2)^2 + (c_2-a_2)(a_2-b_2) + (a_2-b_2)^2)$$

9.

$$
\begin{aligned}
\int_K \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}\,dxdy &= \int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})^2 \, J\, dudv \\
&= \int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + (\frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})^2 \, J\, dudv \\
&= \frac{1}{J}(a_1-c_1)^2\int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial u})^2\,dudv + \frac{2}{J}(a_1-c_1)(b_1-a_1)\int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{b}}{\partial u}\frac{\partial \hat{b}}{\partial v}\,dudv + \frac{1}{J}(b_1-a_1)^2\int_{\hat{K}} (\frac{\partial \hat{b}}{\partial v})^2\,dudv \\
&= \frac{27^2}{2\mathcal{A}}(\frac{(a_1-c_1)^2}{180} + \frac{2(a_1-c_1)(b_1-a_1)}{360} + \frac{(b_1-a_1)^2}{180}) \\
&= \frac{81}{40\mathcal{A}}((a_1-c_1)^2 + (a_1-c_1)(b_1-a_1) + (b_1-a_1)^2)
\end{aligned}
$$

10.

$$
\begin{aligned}
\int_K b^2\,dxdy &= \int_{\hat{K}} \hat{b}^2\,J\,dudv = 27^2|J|\int_{\hat{K}} u^2v^2(1-u-v)^2\,dudv \\
&= \frac{27^2|J|}{2^4 * 3^2 * 5 * 7} = \mathcal{A}\frac{81}{280}
\end{aligned}
$$

11.

$$
\begin{aligned}
\int_K b\phi_1\,dxdy &= \int_{\hat{K}} \hat{b}\hat{\phi}_1\,J\,dudv = 27|J|\int_{\hat{K}} uv(1-u-v)(1-u-v)\,dudv \\
&= \frac{27 * 2 * \mathcal{A}}{12 * 30} = \mathcal{A}\frac{3}{20} \\
&= \int_{\hat{K}} \hat{b}\hat{\phi}_2\,J\,dudv = \int_{\hat{K}} \hat{b}\hat{\phi}_3\,J\,dudv
\end{aligned}
$$

5 Élimination de la pression

Cas $\varepsilon > 0$.

On veut résoudre, cf. (2.5) :

$$(\nabla\vec{u}_h, \nabla\vec{v}_h) + \lambda(\Pi_{Q_h}\mathrm{div}\vec{u}_h, \Pi_{Q_h}\mathrm{div}\vec{v}_h) = (\vec{f}, \vec{v}_h).$$

On écrit encore :

$$\left\{\begin{array}{l}(\nabla\vec{u}_h, \nabla\vec{v}_h) - (p_h, \mathrm{div}\vec{v}_h) = (\vec{f}, \vec{v}_h),\\ (\mathrm{div}\vec{u}_h, q_h) - \varepsilon(p_h, q_h) = 0,\end{array}\right. \tag{5.1}$$

où $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$. Donc pour l'équation en q_h, pour $1 \leq i \leq n_n$:

$$\sum_{j=1}^{n_n} u^j(\frac{\partial\phi_j}{\partial x}, \phi_i) + \sum_{K=1}^{n_t} \alpha^K(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i) + \sum_{j=1}^{n_n} v^j(\frac{\partial\phi_j}{\partial y}, \phi_i) + \sum_{K=1}^{n_t} \beta^K(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i) - \varepsilon\sum_{j=1}^{n_n} p^j(\phi_j, \phi_i) = 0.$$

Avec intégration numérique $(\phi_j, \phi_i) = 0$ si $j \neq i$ (approximation par la règle du trapèze pour des éléments P_1), et donc :

$$p^i = \frac{\lambda}{||\phi_i||^2}\Big[\sum_{j=1}^{n_n} u^j(\frac{\partial\phi_j}{\partial x}, \phi_i) + \sum_{K=1}^{n_t} \alpha^K(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}, \phi_i) + \sum_{j=1}^{n_n} v^j(\frac{\partial\phi_j}{\partial y}, \phi_i) + \sum_{K=1}^{n_t} \beta^K(\frac{\partial\psi_K}{\partial y}, \phi_i)\Big].$$

On peut ainsi éliminer p_h dans $(5.1)_1$.

Il faut choisir : soit on élimine les p^j, soit on élimine les α^K et β^K.