Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année
http://www.isima.fr/~leborgne

Complément : fonctions complexes et théorème de d'Alembert

Gilles Leborgne

22 novembre 2010

Table des matières

1 Rappels sur $\mathbb{C}$

On utilise la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On rappelle que $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$. Ainsi $z \in \mathbb{C}$ peut être représenté par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, et si on note :

$$\mathbb{C} \ni 1 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \ni i \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

alors tout complexe s'écrit :

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \simeq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Notons $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. L'espace $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, .)$ est un corps pour l'addition usuelle $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, et pour la multiplication :

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

En particulier, $i^2 = -1$.

Pour $z = x+iy$, on note $\bar{z} = x-iy$ (le conjugué) et $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = ||\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}||_{\mathbb{R}^2}$ (le module de z qui est égal à la norme euclidienne du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$). En particulier $z\bar{z} = |z|^2$. Et donc l'inverse d'un $z \neq 0$ est donné par :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Remarque 1.1 Interprétation. Avec la notation complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, tout complexe z s'écrit :

$$z = \rho e^{i\theta},$$

où $\rho = |z|$ est le module (l'amplitude), et θ est la phase, i.e. l'angle du vecteur (x, y) avec l'axe des x (quand $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$).

Et le produit complexe a été construit dans le but de multiplier les modules en additionnant les phases : si $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, on obtient :

$$z_1 z_2 = (\rho_1 \rho_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

En particulier, interprété dans $\mathbb{R}^2$, multiplier par $z = \rho e^{i\theta}$ revient à faire un homothétie de rapport ρ et une rotation d'angle θ. En particulier, $z^{-1} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$ quand $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, i.e. interprété dans $\mathbb{R}^2$, multiplier par z^{-1} revient à faire un homothétie de rapport $\frac{1}{\rho}$ et une rotation d'angle $-\theta$. Cela revient à munir $\mathbb{R}^2$ d'une structure de corps pour le produit associé $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul de $\mathbb{R}^2$ est inversible pour cette structure, et :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

∴

$\mathbb{C}$ est muni d'une structure topologique à l'aide de la norme $|.| : z \in \mathbb{C} \to |z| \in \mathbb{R}_+$ (le module). En particulier, les boules ouvertes sont identifiables aux boules de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne) :

$$\begin{aligned} B(z_0, R) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \\ \simeq B(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, R) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2\}. \end{aligned}$$

Et un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est identifié à l'ouvert de $\mathbb{C}$ noté encore U (pour alléger les notations).

Définition 1.2 On appelle fonction complexe une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2 Fonctions complexes dérivables

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient P et $Q : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs réelles. Et soit :

$$\vec{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \to \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ses dérivées partielles sont définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} & (= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{f}(x+h, y) - \vec{f}(x, y)}{h}), \\ \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} & (= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{f}(x, y+h) - \vec{f}(x, y)}{h}). \end{cases} \tag{2.1}$$

Et le développement limité de $\vec{f}$ est donné par, en un point (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y) &= \vec{f}(x_0, y_0) + d\vec{f}(x_0, y_0).\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(||(x-x_0, y-y_0)||_{\mathbb{R}^2} \\ &= \vec{f}(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(||(x-x_0, y-y_0)||_{\mathbb{R}^2}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

(Utilisation de la matrice jacobienne de $\vec{f}$.)

On considère maintenant U comme un ouvert de $\mathbb{C}$. On définit $f : U \to \mathbb{C}$ par :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad \text{quand} \quad z = x + iy$$

Définition 2.1 Une fonction complexe $f : U \to \mathbb{C}$ est dite dérivable en $z_0 \in U$ ssi la limite suivante existe :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.3}$$

i.e. ssi il existe un complexe noté $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \tag{2.4}$$

Et f dérivable équivaut à f admet un développement limité au premier ordre (immédiat) :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + o(z - z_0). \tag{2.5}$$

En particulier, avec $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, puis avec $f'(z_0) = \alpha_0 + i\beta_0$, cela s'écrit :

$$P(x,y) + iQ(x,y) = P(x_0,y_0) + iQ(x_0,y_0) + ((x-x_0) + i(y-y_0))(\alpha_0 + i\beta_0) + o(z-z_0), \tag{2.6}$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(z-z_0). \tag{2.7}$$

On en déduit :

Théorème 2.2 *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable, on a, pour $z \in U$:*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y). \end{aligned} \right. \tag{2.8}$$

Ce sont les relations dites de Cauchy–Riemann. Et ainsi on a :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Preuve. Avec $f'(z) = \alpha + i\beta$, on compare (2.2) et (2.7) pour obtenir (2.8), d'où (2.9).

Remarque 2.3 La réciproque de ce théorème est vraie, à savoir, si f vérifie les relations de Cauchy–Riemann dans un ouvert U, alors f y est dérivable : c'est le théorème de Looman–Menchoff (difficile).

Interprétation géométrique de la dérivation. Le développement limité :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

dit que pour passer de $f(z_0)$ à $f(z)$ (au voisinage de z_0) on applique la transformation $f'(z_0) = \alpha_0 + i\beta_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ au déplacement $(z - z_0)$ (vrai au premier ordre). Exprimé dans $\mathbb{R}^2$, on applique la "rotation∘homothétie" $\begin{pmatrix} \alpha_0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$ au vecteur $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$. C'est la "rotation∘homothétie" $\rho_0^2 \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}$. C'est d'ailleurs le sens du développement limité (2.5) qui peut se lire $f(z) - f(z_0) = \rho_0 e^{i\theta_0}(z - z_0) + o(z - z_0)$.

Remarque 2.4 Parmi toutes les fonctions $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^2$ dérivables (différentiables), il n'y a que celles qui vérifient les relations de Cauchy–Riemann qui sont dérivables au sens des fonctions complexes : ce sont celles dont la matrice jacobienne est la matrice d'une "rotation∘homothétie", cf. (2.7). Il n'y a donc que "très peu" de fonctions complexes $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dérivables (quand on les interprète comme fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) :

Théorème 2.5 *La somme $f+g$, le produit fg, la composée $f \circ g$ de fonctions complexes dérivables sont dérivables (là où cela a un sens), de dérivées respectives $f' + g'$, $f'g + fg'$ et $(f' \circ g)g'$.*

Preuve. Exercices.

Remarque 2.6 Interprétation géométrique de $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$. Le théorème précédent indique que $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$: la dérivée de la composée est donc le produit dérivées des f' et g', i.e. le produit des"homothéties-rotations" f' et g'.

En termes de fonctions $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ où $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ quand $f = f_1 + if_2$ et $g = g_1 + ig_2$ avec les $f_k, g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a $d(\vec{f} \circ \vec{g}) = d\vec{f} \circ \vec{g}.d\vec{g}$ (pour les différentielles correspondantes). Pour les matrices jacobiennes correspondantes, qui sont des matrices de "homothéties∘rotations" d'après les relations de Cauchy–Riemann, on obtient donc une "homothétie∘rotation" de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identifiable à $f' \circ g.g' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Exemple 2.7 Toute fonction monôme est dérivable dans $\mathbb{C}$. En effet, une telle fonction est de la forme $f(z) = z^n$, $n \geq 0$ et, pour $n \geq 1$ on a $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + ... + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}$. D'où $(z^n)' = nz^{n-1}$. ∴

Exemple 2.8 Toute fonction polynôme est dérivable dans $\mathbb{C}$. En effet, tout monôme est dérivable, et on applique le théorème précédent. ∴

Exemple 2.9 Toute fraction rationnelle est dérivable dans $\mathbb{C}$ ailleurs qu'en ses pôles.

En effet, $\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z_0^n} = \frac{z_0^n - z^n}{z^n z_0^n}$ donne $(\frac{1}{z^n})' = -n\frac{1}{z^{n+1}}$, ou encore $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$. Et on applique le théorème précédent après décomposition en éléments simples. ∴

Exemple 2.10 La conjugaison $f : z \to \bar{z}$ n'est pas dérivable : les conditions de Cauchy–Riemann (2.8) ne sont pas vérifiées.

Alors que la fonction vectorielle associée $\vec{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ est bien dérivable (symétrie par rapport à l'axe des x). Et sa matrice jacobienne (représentant sa différentielle dans la base canonique) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mais cette matrice n'est pas celle d'une "rotation$\circ$homothétie". ∴

Remarque 2.11 On peut également considérer f comme une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$: notons $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ donnée par $\tilde{f}(x, y) = f(z)$ quand $z = x + iy$. On a alors :

$$d\tilde{f}(x, y) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)\, dy \quad \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}), \tag{2.10}$$

et son développement limité s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= \tilde{f}(x_0, y_0) + df(x_0, y_0). \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(||(x - x_0, y - y_0)||_{\mathbb{R}^2}) \\ &= \tilde{f}(x_0, y_0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) + o(||(x - x_0, y - y_0)||_{\mathbb{R}^2}), \end{aligned}$$

où $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont des complexes. Et avec (2.6) on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha_0 + i\beta_0 = f'(z_0), \\ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = -\beta_0 + i\alpha_0 = if'(z_0). \end{cases} \tag{2.11}$$

∴

Notations. Avec (2.11) on pose :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) & (= \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) & (= \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)). \end{cases} \tag{2.12}$$

Ce sont aussi les expressions de $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ exprimées dans $\mathbb{C}$, cf. (2.1).

Connaissant $x, y \in \mathbb{R}$, on connaît $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. Réciproquement, connaissant z et $\bar{z}$ on en déduit $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. On souhaite avoir pour variables z et $\bar{z}$ au lieu de x et y.

On introduit alors les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ de telles sortes qu'ils vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}, \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial z} - i\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}), \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}). \end{cases}$$

Et on obtient à l'aide des conditions de Cauchy–Riemann (2.8) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z}(z) = f'(z) & (= \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial(P+iQ)}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial(P+iQ)}{\partial y}(x,y))), \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 & (= \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial(P+iQ)}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial(P+iQ)}{\partial y}(x,y))). \end{cases}$$

En particulier :

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\,dz = f'(z)\,dz.$$

Sachant que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = [\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}] + i[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}]$, une autre manière d'exprimer les conditions de Cauchy-Riemann est de dire que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

3 Intégration

Dans $\mathbb{R}^2$ on se donne une courbe régulière $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On note $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ (la courbe géométrique). Dans $\mathbb{C}$, la courbe $\vec{r}$ est notée :

$$z : t \in [a,b] \to z(t) = x(t) + iy(t).$$

Et avec $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt$, on définit dz par :

$$dz = dx + idy \qquad \text{i.e.} \qquad z'(t)\,dt = (x'(t) + iy'(t))\,dt.$$

Définition 3.1 Pour $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ avec Ω ouvert de $\mathbb{C}$ contenant Γ, on définit :

$$\int_\Gamma f\,dz \overset{\text{déf}}{=} \int_{t=a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt. \tag{3.1}$$

Donc, si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \in \mathbb{C}$ quand $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ avec $P, Q \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$ (ici Ω est considéré comme ouvert de $\mathbb{R}^2$), on a :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f\,dz = &\int_{t=a}^{b} [P(x(t),y(t))\,x'(t) - Q(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt \\ &+ i\int_{t=a}^{b} [Q(x(t),y(t))\,x'(t) + P(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarque 3.2 Si on pose $\vec{f} : (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, quand $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \in \mathbb{C}$ (toujours avec $z = x + iy$), on a :

$$\mathbb{C} \ni \quad \int_\Gamma f\,dz \quad \simeq \quad \vec{F} = \int_{t=a}^{b} \Big(\begin{pmatrix} x'(t) & -y'(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{pmatrix} . \vec{f}(x(t),y(t))\Big)\,dt \quad \in \mathbb{R}^2,$$

i.e. on applique l'homothétie$\circ$rotation $z' \in \mathbb{C} \simeq \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ à $\vec{f}$, puis on intègre sur Γ. Et si $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ on a $\int_\Gamma f\,dz = F_1 + iF_2$.

∴

Exemple 3.3 Soit $f(z) = -y + ix$ quand $z = x + iy$. Et $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ le paramétrage du cercle Γ avec $t \in [0, 2\pi]$. On obtient avec (3.2) :

$$\int_\Gamma f\,dz = R^2 \int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t) - (\cos t)(\cos t)\,dt + iR^2 \int_0^{2\pi} -\sin t(\cos t) + \cos t(-\sin t)\,dt = 0.$$

∴

Proposition 3.4 *La valeur $\int_\Gamma f\,dz$ ne dépend que du sens de parcours de Γ.*

Preuve. Soit $z : t \in [a,b] \to z(t) \in \mathbb{C}$ un paramétrage donné de Γ. Soit $\varphi : u \in [c,d] \to t = \varphi(u) \in [a,b]$ un difféomorphisme.

Soit $\zeta = z \circ \varphi : u \in [c,d] \to \zeta(u) \in \mathbb{C}$ un nouveau paramétrage de la courbe, i.e. $\zeta(u) = z(t)$ quand $t = \varphi(u)$. Et donc $z'(t) = \frac{\zeta'(u)}{\varphi'(u)}$ quand $t = \varphi(u)$. D'où :

$$\int_{t\in[a,b]} f(z(t))z'(t)\,dt = \int_{u\in[c,d]} f(\zeta(u))\frac{\zeta'(u)}{\varphi'(u)}|\varphi'(u)|\,du = \pm \int_{u\in[c,d]} f(\zeta(u))\zeta'(u)\,du,$$

$+$ quand φ est croissante, et la valeur est indépendante du paramétrage, et $-$ si φ est décroissante, et la valeur voit son signe s'inverser. ∎

Exemple 3.5 Soit $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ quand $z = x+iy$. Et Γ le cercle paramétré dans le sens trigo par $\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,dz = \int_\Gamma \frac{dz}{z} &= \int_\Gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} 0\,d\theta + i\int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi,\end{aligned}$$

car $x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}d(R^2) = 0$, et sur Γ on a $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta}{R^2}d\theta = d\theta$. Noter qu'une des définitions possibles de π est d'ailleurs $\pi = \frac{1}{2i}\int_\Gamma \frac{dz}{z}$. ∎

Exemple 3.6 Exercice précédent, mais avec Γ le cercle paramétré en sens inverse : $\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos(2\pi-\theta) \\ R\sin(2\pi-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(-\theta) \\ R\sin(-\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi]$. Ici on a $d\vec{r} = \begin{pmatrix} R\sin(-\theta) \\ -R\cos(-\theta) \end{pmatrix} d\theta$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,dz = \int_\Gamma \frac{dz}{z} &= \int_\Gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} 0\,d\theta + i\int_0^{2\pi} (-1)d\theta = -2i\pi,\end{aligned}$$

valeur opposée à la précédente. ∎

Exercice 3.7 Montrer que sur le bord de tout pavé $P = [a,b] \times [c,d]$ contenant $(0,0)$ en son intérieur, on a $\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$, où $\Gamma = \partial P$ est le bord de P paramétré dans le sens trigo. ∎

Proposition 3.8 *Si f est dérivable dans l'ouvert Ω de bord Γ régulier et si f' est continue dans Ω, alors :*

$$\int_\Gamma f'(z)\,dz = 0.$$

pour toute courbe fermée Γ contenue dans Ω.

Preuve. Par définition, $\int_\Gamma f'(z)\,dz = \int_a^b f'(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b (f\circ z)'(t)\,dt = f(z(b)) - f(z(a))$. Et si la courbe est fermée on a $z(b) = z(a)$.

N.B. : si on se ramène à $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ quand $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, cela s'écrit également :

$$\int_\Gamma d\vec{f}(x,y).d\vec{r} = \int_a^b d(\vec{f}\circ\vec{r}) = (\vec{f}\circ\vec{r})(b) - (\vec{f}\circ\vec{r})(a) = \vec{f}(B) - \vec{f}(A),$$

quand $B = \vec{r}(b)$ et $A = \vec{r}(a)$. Et quand la courbe est fermée, on a $B = A$. ∎

Proposition 3.9 *Pour $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue sur un chemin Γ régulier image de $z : t \in [a,b] \to z(t) \in \mathbb{C}$, on a :*

$$|\int_\Gamma f(z)\,dz| \le ||f||_{\Gamma,\infty}\,|\Gamma|,$$

où $|\Gamma| = \int_\Gamma |z'(t)|\,dt$ est la longueur de Γ, et où $||f||_{\Gamma,\infty} = \sup_{z\in\Gamma}|f(z)|$.

Preuve. On a $\int_\Gamma f(z)\,dz =^{\text{déf}} \int_{t=a}^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_{t=a}^b g(t)\,dt$ où $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ est la fonction continue $g(t) = f(z(t))\,z'(t)$ (un chemin régulier est au moins C^1).

Et on a $|\int_{t=a}^b g(t)\,dt| \le \int_{t=a}^b |g(t)|\,dt$. D'où $|\int_\Gamma f(z)\,dz| \le \int_{t=a}^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt$. ▪

Exercice 3.10 Montrer que pour une fonction complexe $g : U \to \mathbb{C}$ continue, on a $|\int_{t=a}^b g(t)\,dt| \le \int_{t=a}^b |g(t)|\,dt$.

Réponse. On applique le théorème des accroissements finis pour les fonctions dérivables $\vec{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ affirmant que, si $||\vec{\varphi}'(t)||_{\mathbb{R}^n} \le \psi'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ (où $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable), alors $||\int_a^b \vec{\varphi}'(t)\,dt|| \le \int_a^b \psi'(t)\,dt$. Ici on a $\vec{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$ et $\psi'(t) = \sqrt{g_1(t)^2 + g_2(t)^2}$ où on a posé $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ avec $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Cela a un sens car $t \to \sqrt{g_1(t)^2 + g_2(t)^2}$ étant continue, elle admet une primitive qu'on note ψ, et $t \to \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$ étant continue, elle admet une primitive qu'on note $\vec{\varphi}$. ▪

4 Théorème de Cauchy–Goursat

Définition 4.1 Un pavé (fermé) de $\mathbb{R}^2$ est un rectangle $[a,b] \times [c,d]$ où $a < b$ et $c < d$. Un pavé (fermé) dans $\mathbb{C}$ est un ensemble de type $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ où $a < b$ et $c < d$.

On note ∂P le bord du pavé P, i.e. l'union des segments constituant son bord, et on suppose ∂P orienté dans le sens trigonométrique (i.e. on considère un paramétrage de ∂P dans le sens trigonométrique).

Définition 4.2 Une fonction complexe $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifie la propriété du pavé ssi, pour tout pavé $P \subset U$:

$$\int_{\partial P} f(z)\,dz = 0.$$

Théorème 4.3 *(de Cauchy–Goursat) Toute fonction complexe $f : U \to \mathbb{C}$ qui est dérivable vérifie la propriété du pavé.*

Preuve. (Pris dans [1].) Soit P un pavé, $P \subset U$. On subdivise P en 4 pavés égaux P_1,...,P_4, et on oriente les bords de P et des P_i dans le sens trigonométrique. On a :

$$\int_{\partial P} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial P_i} f(z)\,dz.$$

On note Q_1 l'un des pavés P_i qui maximise $|\int_{\partial P_i} f(z)\,dz$; on a :

$$|\int_{\partial P} f(z)\,dz| \le 4|\int_{\partial Q_1} f(z)\,dz|.$$

On itère le procédé avec Q_1 subdivisé en 4 pavés égaux, et on note Q_2 l'un des 4 sous-pavés qui maximise $|\int_{\partial(\text{sous-pavé } Q_1)} f(z)\,dz|$. On obtient :

$$|\int_{\partial P} f(z)\,dz| \le 4^2|\int_{\partial Q_2} f(z)\,dz|.$$

On itère, et à l'étape k on a :

$$|\int_{\partial P} f(z)\,dz| \le 4^k|\int_{\partial Q_k} f(z)\,dz|.$$

Les pavés Q_k forment une suite décroissante (on a $Q_{k+1} \subset Q_k$), de diamètre $d_k = \dfrac{d_0}{2^k}$ (où d_0 est le diamètre de P). Comme $d_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $a \in \mathbb{C}$ (i.e. il existe

$a \in \mathbb{C}$ t.q. $Q_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \{a\}$). Et f étant dérivable en a on a, il existe $\varepsilon > 0$:

$$|f(z) - f(a) - (z-a)f'(a)| \leq \varepsilon |z-a|, \qquad \text{dans un voisinage de } a.$$

Un polynôme ayant une primitive, ∂Q_k étant fermé, on a $\int_{\partial Q_k} f(a) + (z-a)f'(a)\,dz = 0$ (car $= \int_{\partial Q_k} [f(a)z + \frac{(z-a)^2}{2} f'(a)]'\,dz$), et donc :

$$|\int_{\partial Q_k} f(z)\,dz| \leq \varepsilon \,|\int_{\partial Q_k} |z-a|\,dz|.$$

Notant $|\partial Q_k|$ la longueur de ∂Q_k, on obtient :

$$|\int_{\partial Q_k} f(z)\,dz| \leq \varepsilon\,|\partial Q_k|\,d_k \leq \varepsilon\, 2^{-k}|\partial P|\,\frac{d_0}{2^k} = \varepsilon\,|\partial P|\,\frac{d_0}{4^k}.$$

D'où :

$$|\int_{\partial P} f(z)\,dz| \leq \varepsilon\, d_0 |\partial P|.$$

Et quitte à faire $k \to \infty$, on peut prendre ε aussi petit que souhaité. ∎

5 Théorème de d'Alembert

Théorème 5.1 *(de d'Alembert) Tout polynôme complexe non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. (Pris dans [1].) C'est un corollaire du théorème de Cauchy–Goursat. Notons :

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad n \geq 1.$$

Supposons que p n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$. On définit alors, la fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pour tout $z \neq 0$, par :

$$\frac{z^{n-1}}{p(z)} = \frac{1+\varepsilon(z)}{z}, \qquad \lim_{|z|\to\infty} \varepsilon(z) = 0,$$

(on a $\varepsilon(z) = \frac{1}{1+\frac{a_1}{z}+\ldots\frac{a_n}{z^n}} - 1$). Et $\frac{z^{n-1}}{p(z)}$ est dérivable dans tout $\mathbb{C}$ (fraction rationnelle définie sur tout $\mathbb{C}$), donc vérifie la propriété du pavé (théorème de Cauchy–Goursat). Donc :

$$\int_{\partial P} \frac{dz}{z} + \int_{\partial P} \frac{\varepsilon(z)\,dz}{z} = 0.$$

En particulier, pour tout pavé $P = [-M, M]^2$ (avec $M > 0$: dont l'intérieur contient 0) :

$$(2\pi =) \quad |\int_{\partial P} \frac{dz}{z}| = |\int_{\partial P} \frac{\varepsilon(z)\,dz}{z}|$$

Puis pour tout $\alpha > 0$, il existe M assez grand tel que $|\varepsilon(z)| \leq \alpha$ pour tout $z \in \partial P$, et donc, cf. proposition 3.9 :

$$(2\pi =) \quad |\int_{\partial P} \frac{\varepsilon(z)\,dz}{z}| \leq ||\frac{\varepsilon}{z}||_{\Gamma,\infty}\, 8M \leq 8\alpha,$$

ce qui est absurde dès qu'on prend $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Donc, que p n'ait pas de racine est absurde. ∎

Références

[1] Leborgne D. : *Calcul différentiel complexe.* Collection Que sais-je n°2560, PUF, 1991.

[2] Rudin W. : *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[3] Polyà G. : *Fonctions d'une variable complexe.* http ://promenadesmaths.free.fr/