Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année
http://isimath.fr.st

Équations différentielles : exercices

Gilles Leborgne

16 avril 2003

Exercices

1 Équations différentielles à variables séparées

Résoudre :

E1 $y' = y^2 e^{-x}$.

E2 $x^2 y' = 1 + y$.

2 Équations différentielles linéaires

Résoudre :

E3 $y' + y = \sin x$.

E4 $y' = 3x^2 - \frac{y}{x}$ avec $y(1) = 5$.

3 Équations différentielles homogènes, Bernoulli, Riccati

Résoudre :

E5 $y' = \frac{1}{x^2} y^2 - \frac{1}{x} y + 1$.

E6 $y' + xy = xy^2$.

E7 $y' = \frac{y}{x+y}$.

E8 $(x - 2y)y' = 2x - y$.

E9 $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^4} y^{\frac{-3}{4}}$.

E10 $y' = -\frac{1}{x} y^2 + \frac{2}{x} y$

4 Systèmes différentiels linéaires

Résoudre et donner une résolvante :

E11 $\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = 5x_1 - 4x_2 \end{cases}$

E12 $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$

E13 $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = 6x_1 - x_2 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases}$

E14 $\vec{x}' = A.\vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

E15 $\vec{x}' = A.\vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

E16 $\vec{x}' = A.\vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

E17 $\vec{x}' = A.\vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E18 $\vec{x}' = A.\vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ avec la CI $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Réponses

1 Équations différentielles à variables séparées

R1 $y(x) = \dfrac{1}{e^{-x} + c}$ (pour les valeurs de c adequat), et $y = 0$.

R2 $y = -1 + ce^{-\frac{1}{x}}$, pour $\neq 0$.

2 Équations différentielles linéaires

R3 $y = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$.

R4 $y = \dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{17}{4x}$.

3 Équations différentielles homogènes, Bernoulli, Riccati

R5 Riccati : $y(x) = x + \dfrac{x}{c - \ln|x|}$.

R6 Riccati et Bernoulli : $y = \dfrac{1}{1 + c^{\frac{x^2}{2}}}$.

R7 Homogène : $y \ln|y| - x = cy$.

R8 homogène : $xy - x^2 - y^2 = c$.

R9 Bernoulli : $y = \dfrac{1}{x}\left(c - \dfrac{7}{5}x^{\frac{-5}{4}}\right)^{\frac{4}{7}}$.

R10 Riccati et Bernoulli : $y = 2 + \dfrac{2}{cx^2 - 1}$.

4 Systèmes différentiels linéaires

R11 $\begin{cases} x_1 = 7c_1e^{3t} \\ x_2 = 5c_1e^{3t} + c_2e^{-4t} \end{cases}$

R12 $\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2e^{2t} \\ x_2 = -c_1 + c_2e^{2t} \end{cases}$

R13 $\begin{cases} x_1 = c_1 + 2c_2e^{3t} - c_3e^{-4t} \\ x_2 = 6c_1 + 3c_2e^{3t} + 2c_3e^{-4t} \\ x_3 = -13c_1 - 2c_2e^{3t} + c_3e^{-4t} \end{cases}$

R14 $R(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ 0 & e^{-t}(\cos t - 2\sin t) & e^{-t}(\sin t + 2\cos t) \\ e^{-2t} & 3e^{-t}\cos t & 3e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$

R15 $R(t) = \begin{pmatrix} 2e^{4t} & (1-2t)e^{4t} \\ -e^{4t} & te^{4t} \end{pmatrix}$

R16 $R(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{5t} & 27te^{5t} \\ 0 & 3e^{5t} & (3+27t)e^{5t} \\ 0 & -e^{5t} & (2-9t)e^{5t} \end{pmatrix}$

R17 $R(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3e^{3t} & e^t & 0 \\ 0 & 2e^{3t} & 0 & -2e^t \\ 1 & 2e^{3t} & 0 & -2e^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$

R18 $x_1(t) = (5+2t)e^{6t}$ et $x_2(t) = (3+2t)e^{6t}$.