Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année
http://www.isima.fr/leborgne

Équations différentielles

Gilles Leborgne

21 décembre 2006

Table des matières

1 Définitions et théorèmes généraux

Cette partie est très largement inspirée du livre de H. Cartan, cours de calcul différentiel, aux éditions Hermann.

Soit E un espace de Banach (un espace vecoriel normé complet) sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$), et on notera $||x||_E$ la norme d'un élément $x \in E$. Lorsque les résultats seront valables sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, la notation K désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans les exemples on prendra généralement $E = \mathbb{R}$ muni de la norme valeur absolue, ou $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. On notera I un intervalle $[t_0, T]$ de $\mathbb{R}$, et Ω un ouvert de E.

On considèrera des fonctions φ différentiables sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Lorsque explicitement on aura $E = \mathbb{R}^n$, on notera $\vec{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ une telle fonction. Par exemple $\vec{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ décrit une trajectoire d'une particule : à "l'instant t" elle se trouve au point $\vec{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^n$, et la dérivée $\vec{\varphi}\,'(t) \in \mathbb{R}^n$ représente sa vitesse à l'instant t.

Une équation différentielle générale est une équation de la forme :

$$F(t, x, x') = 0,$$

où $F : I \times E \times E \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée (supposée C^0).

Dans le cas particulier où F peut s'écrire sous la forme $F(t, x, x') = x' - f(t, x)$, on dit que l'équation différentielle est sous forme normale. On regardera principalement dans ce cours les équations différentielles sous forme normale, i.e. qu'on résoudra :

$$x' = f(t, x),$$

où f est une fonction C^0 donnée.

Et une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation différentielle de cette forme.

Dans la suite $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega \subset E$ est un ouvert d'un espace de Banach E, et très souvent on prendra $E = \mathbb{R}^n$.

1.1 Équations différentielles du premier ordre

Soit f une fonction donnée de $I \times \Omega$ à valeurs dans E :

$$f : \begin{pmatrix} I \times \Omega & \to E \\ (t, x) & \mapsto f(t, x) \end{pmatrix}$$

Définition 1.1 Si f est une application continue donnée sur $I\times\Omega$, on appelle équation différentielle (sous forme normale) l'équation notée :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{1.1}$$

L'inconnue de cette équation est une fonction $x = \varphi : \begin{cases} I & \to E \\ t & \mapsto x(t) = \varphi(t) \end{cases}$ qui vérifie :

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)). \tag{1.2}$$

L'habitude fait qu'on note souvent la fonction inconnue $x = \varphi : t \to x(t) = \varphi(t)$. Attention néanmoins : le membre de droite de (1.1) est une fonction $f : (t,x) \to f(t,x)$ qui dépend de deux variables (indépendantes) t et x, et n'est pas définie comme une fonction $g : t \to g(t) = f(t,x(t))$ (fonction d'une seule variable). C'est uniquement l'équation (1.1) qui permet de lier les variables t et x en une relation $t \to x(t)$ (ou bien d'ailleurs comme la relation inverse $x \to t(x)$).

On préférera donc utiliser les notations t et x pour désigner des valeurs (indépendantes entre elles) de l'espace $I\times\Omega$, et la notation $\varphi(t)$ au lieu de $x(t)$ lorsque t et x sont liés par la relation $x = \varphi(t)$, relation déduite de l'équation (1.1).

Définition 1.2 (Définition d'une solution de l'équation différentielle.) Une solution de l'équation différentielle (1.1) est une fonction $\varphi : I \to E$ telle que :

1. pour tout $t \in I$, $(t,\varphi(t)) \in I \times \Omega$ (domaine de définition de f), et
2. pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ (équation).

En particulier, on n'oubliera pas de vérifier la première condition (sinon $f(t,\varphi(t))$ n'est pas défini).

Une interprétation de la solution φ : les valeurs $f(t,x) = v$ sont des vitesses qu'on peut mesurer en tous les points de $I \times \Omega$, et à partir de ces vitesses on veut reconstituer les trajectoires $t \to \varphi(t)$ des particules qui en $x = \varphi(t)$ sont animés de la vitesse $v = f(t,x)$ (équation (1.1) ou (1.2) sous la forme $\frac{dx}{dt} = v$).

Il est clair que si φ est solution sur un intervalle I, φ est également solution sur tout intervalle $J \subset I$.

Définition 1.3 (Solution maximale.) On appelle solution maximale une solution φ de (1.1) telle que I soit intervalle maximale, i.e. telle que $\varphi : I \to E$ soit solution et telle qu'il n'existe pas d'intervalle $J \supsetneq I$ (strictement plus grand que I) sur lequel φ soit solution.

1.2 Condition initiale et théorème de Cauchy–Lipschitz

Définition 1.4 (Condition initiale.) On appelle condition initiale de l'équation différentielle (1.1) une valeur $(t_0,x_0) \in I \times \Omega$ telle que l'inconnue cherchée satisfasse à la condition $\varphi(t_0) = x_0$.

Définition 1.5 (Problème de Cauchy.) Une équation différentielle avec condition initiale s'appelle problème de Cauchy.

Un problème de Cauchy est donc un problème où, pour $f \in C^0(I \times \Omega; E)$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$ donnés, il faut trouver une (ou les) solution(s) x de :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

i.e. il faut trouver une (ou des) fonctions(s) φ telles que :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)), \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 1.6 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de E. Une fonction continue $f : I\times\Omega \to E$ est dite “localement lipschitzienne en x uniformément en t” si pour tout $(t_0,x_0)\in I\times\Omega$, il existe un voisinage U_0 de t_0 et V_0 de x_0, avec $U_0\subset I$ et $V_0\subset\Omega$, et un réel $k_0>0$ tel que :

$$\forall t\in U_0,\quad \forall(x_1,x_2)\in V_0^2\quad :\quad ||f(t,x_1)-f(t,x_2)||_E\le k_0||x_1-x_2||_E. \tag{1.5}$$

Et on dit que la fonction continue $f : \mathbb{R}\times E\to E$ est globalement lipschitzienne en x uniformément en t si :

$$\exists k>0,\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad \forall(x_1,x_2)\in E^2\quad :\quad ||f(t,x_1)-f(t,x_2)||_E\le k||x_1-x_2||_E. \tag{1.6}$$

On a alors :

Théorème 1.7 *(de Cauchy–Lipschitz.) Si $f : (t,x)\in I\times\Omega\to f(t,x)\in E$ est continue et est localement lipschitzienne en x uniformément en t, et si (t_0,x_0) est un point intérieur à $I\times\Omega$, alors il existe $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que le problème de Cauchy (1.4) ait une solution unique maximale dans $[t_0-\alpha,t_0+\beta]$.*

Si $f : (t,x)\in\mathbb{R}\times E\to f(t,x)\in E$ est continue et est globalement lipschitzienne en x uniformément en t, alors il existe une unique solution φ au problème de Cauchy (1.4) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Preuve. Si on a une solution φ, on a :

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(u,\varphi(u))\,du. \tag{1.7}$$

Soit alors la fonction $A(\varphi)$ donnée par $A(\varphi)(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(u,\varphi(u))\,du$. On a ainsi défini une fonctionnelle $A : \varphi\to A(\varphi)$. Soit $a>0$ tel que $[t_0-a,t_0+a]\subset I$. Choisissons pour domaine de définition de A l'ensemble $C^0([t_0-a,t_0+a];E)$ muni de sa norme $||.||_\infty$ usuelle qui en fait un espace de Banach : $||\varphi||_\infty=\sup_{t\in[t_0-a,t_0+a]}||\varphi(t)||_E$. Il est immédiat que si $\varphi\in C^0$ alors $A(\varphi)\in C^0$.

Montrons que A a un unique point fixe, i.e. qu'il existe une unique solution φ de (1.7). On a :

$$\begin{aligned}||(A(\varphi)-A(\psi))(t)||_E&=||\int_{t_0}^t f(u,\varphi(u))-f(u,\psi(u))\,du||_E\le\int_{t_0}^t k_0||\varphi(u))-\psi(u)||_E\,du\\&\le ak_0||\varphi-\psi||_\infty.\end{aligned}$$

Donc $||A(\varphi)-A(\psi)||_\infty\le ak_0||\varphi-\psi||_\infty$, et choisissant $a<\frac{1}{k_0}$, la fonction A est contractante. Donc elle a un et un seul point fixe. Il existe donc une solution unique φ définie sur $[t_0-a,t_0+a]$ pour un $a>0$ (suffisamment petit).

Montrons que cette solution peut être prolongée en une solution maximale. On considère $A^2=A\circ A$. On obtient :

$$\begin{aligned}||(A^2(\varphi)-A^2(\psi))(t)||_E&\le k_0\int_{t_0}^t||A(\varphi)(u)-A(\psi)(u)||_E\,du\le k_0^2\int_{t_0}^t\int_{t_0}^u||\varphi(v)-\psi(v)||_E\,dv\,du\\&\le k_0^2\int_{t_0}^t(u-t_0)||\varphi-\psi||_\infty\,du\le\frac{k_0^2|t-t_0|^2}{2}||\varphi-\psi||_\infty.\end{aligned}$$

Et par récurrence, $||A^p(\varphi)-A^p(\psi)||_\infty\le\frac{k_0^p|t-t_0|^p}{p!}||\varphi-\psi||_\infty$. D'où on peut choisir a aussi grand que souhaité, pour que, avec p assez grand on ait $\frac{k_0^pa^p}{p!}<1$. Ainsi A^p est contractante et admet un unique point fixe. Mais A^p et A on nécessairement le même point fixe, qui est la limite de la suite $(A^n(\varphi_0))$ pour un φ_0 donné, et donc de la suite $(A^{np}(\varphi_0))$. Et donc le point fixe de A^p est celui de A, plus précisément est un prolongement du point fixe de A. Et on peut donc prolonger la solution φ trouvée en une solution maximale. ∎

1.3 Exemples

1.3.1 Primitive

Pour $f(t,x)=f(t)$ qui ne dépend que de t (avec f continue), la solution se calcule directement à l'aide d'une primitive de f : $\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\tau)\,d\tau$. Pour appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz, il faut uniquement que f soit continue en t étant donnée qu'elle est trivialement Lipschitz en x.

1.3.2 Séparation des variables

Pour $f(t,x)=f(x)$ qui ne dépend que de x (avec f continue), et on aura une équation différentielle à variables séparées : on écrit $\frac{dx}{f(x)}=dt$, d'où $\int\frac{dx}{f(x)}=t+$cste.

Exercice 1.8 Pour $f(t,x)=x$, résoudre l'équation différentielle $x'=f(t,x)$.

Réponse. La fonction f est trivialement globalement lipschitzienne en x.

La solution est connue : on doit résoudre $\varphi'(t)=\varphi(t)$ et la solution est donnée par $\varphi(t)=ce^t$ sur tout $\mathbb{R}$ où c est calculée à l'aide de la condition initiale : ici $x_0=ce^{t_0}$, i.e. $c=x_0e^{-t_0}$.

Retrouvons cette solution en séparant les variables. On résout $\frac{dx}{dt}=x$ et donc pour $x\neq 0$ on résout $\frac{dx}{x}=dt$. D'où $\int_{x_0}^x\frac{du}{u}=\int_{t_0}^t d\tau+c$ avec $c\in\mathbb{R}$ constante d'intégration. Pour que l'intégrale de gauche soit définie, il faut que x_0 et x soient non nuls de même signe, et on obtient alors $\ln\frac{x}{x_0}=t-t_0+c$. D'où $\frac{x}{x_0}=e^{t-t_0+c}$, i.e. $x(t)=(x_0e^{c-t_0})e^t$.

Cette solution n'est a priori définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (en particulier une C.I. ne peut pas être donnée telle que $x_0=0$). Et on note que si $x_0=0$ alors la solution constante $x=0$ est trivialement solution et c'est la seule d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Et on a trouvé : 1- si $x_0>0$ alors il existe $c_1\in\mathbb{R}$ telle que $x(t)=(x_0e^{c_1-t_0})e^t$, et trivialement cette solution est prolongeable sur $\mathbb{R}$ tout entier et la fonction prolongée est trivialement solution. Et 2- si $x_0<0$ alors il existe $c_2\in\mathbb{R}$ telle que $x(t)=(x_0e^{c_2-t_0})e^t$ et trivialement cette solution est prolongeable sur $\mathbb{R}$ tout entier et la fonction prolongée est trivialement solution.

Donc dans tous les cas, on a une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier (solution maximale) qui est $\varphi(t)=ce^t$, avec $c=x_0e^{-t_0}$ pour la condition initiale $\varphi(t_0)=x_0$. ▪

Exercice 1.9 Pour $f(t,x)=x^2$, résoudre l'équation différentielle $x'=f(t,x)$ avec condition initiale $x(t_0)=x_0$.

Réponse. f est trivialement localement lipschitzienne en x uniformément en t sur tout ensemble $\mathbb{R}\times]M,M[$ (mais elle n'est pas globalement lipschitzienne). On a $\frac{dx}{x^2}=dt$ dès que $x\neq 0$. D'où si x_0 et x ont même signe (et sont non nuls), l'intégrale $\int_{x_0}^x\frac{dx}{x^2}$ est convergente et on obtient $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}=t+c$, soit $x(t)=\frac{x_0}{1-x_0(t+c)}$. Noter que si $x_0=0$ alors $\varphi(t)=0$ est solution triviale. Supposons $x_0\neq 0$.

La condition initiale $x(t_0)=x_0$ donne $1=\frac{1}{1-x_0(t_0+c)}$, et comme $x_0\neq 0$ on a $c=-t_0$. D'où $x(t)=\frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)}$ est la solution correspondant à la condition initiale.

Cette solution n'a de sens que pour t dans un intervalle contenant t_0 tel que $1-x_0(t-t_0)\neq 0$, i.e. $t\neq\frac{1}{x_0}+t_0$. D'où une solution maximale possible est $x(t)=\frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)}$ pour $t\in]-\infty,\frac{1}{x_0}+t_0[$ si $x_0>0$ et pour $t\in]\frac{1}{x_0}+t_0,\infty[$ si $x_0<0$. Et on vérifie immédiatement que $\varphi(t)=\frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)}$ vérifie $\varphi'(t)=x_0\frac{+x_0}{(1-x_0(t-t_0))^2}=\varphi(t)^2$ sur les intervalles de définition.

La démarche précédente nous dit qu'a priori cette solution est valide pour $x(t)$ ayant même signe que x_0. En fait le résultat final est plus général pour une solution maximale : le dénominateur change de signe suivant l'intervalle qu'on choisit. Ainsi si $x_0>0$ alors $x(t)>0$ sur $]-\infty,\frac{1}{x_0}+t_0[$ mais $x(t)<0$ sur $]\frac{1}{x_0}+t_0,\infty[$. ▪

1.3.3 Équation différentielle homogène

Pour $x'=f(\frac{x}{t})$, on parle d'équation différentielle homogène. On fait le changement de fonction $u(t)=\frac{x(t)}{t}$ pour se ramener à une équation différentielle à variables séparées.

Comme $x(t)=t\,u(t)$ on obtient $\frac{dx}{dt}(t)=u(t)+t\frac{du}{dt}(t)=f(\frac{x(t)}{t})=f(u(t))$, d'où ((formellement) $u\,dt+t\,du=f(u)\,dt$, i.e. :

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dt}{t},$$

équation différentielle à variables séparées à résoudre. Puis connaissant u, on en déduit x, et on vérifie que x est bien solution.

Exemple 1.10 Résoudre $xy'=\frac{y^2}{x}+y$ avec condition initiale $y(x_0)=y_0$.

Réponse. Ici on a changé de notation, avec donc $y=y(x)$ la fonction inconnue de la variable x. (On peut préférer les notations : résoudre $tx'=\frac{x^2}{t}+x$ avec ici $x=x(t)$ la fonction inconnue de la variable t.)

L'équation différentielle normalisée est $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}$. Ici on a donc $f(u)=u^2+u$ où on a posé $u(x)=\frac{y(x)}{x}$, i.e. $y(x)=x\,u(x)$, et donc $y'(x)=u(x)+xu'(x)$ avec $y'(x)=f(u(x))=u^2(x)+u(x)$. D'où formellement $u+x\,\frac{du}{dx}=u^2+u$, i.e. $\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$. D'où $\frac{-1}{u}=\ln|x|+c$. D'où $u(x)=\frac{-1}{\ln|x|+c}$. Tout ceci lorsque ça a un sens (calcul formel pour le moment). D'où $y(x)=xu(x)=\frac{-x}{\ln|x|+c}$. La solution trouvée n'a de sens que sur

$\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Et $y(x_0) = \frac{-x_0}{\ln|x_0|+c}$ qui n'a de sens que si $x_0 \neq 0$, auquel cas $c = -\frac{x_0}{y_0} - \ln|x_0|$, et donc $y(x) = \frac{x}{\frac{x_0}{y_0} - \ln\frac{|x|}{x_0}}$.

Vérifions qu'elle est effectivement solution. On a $y'(x) = -\frac{1}{\ln|x|+c} - x\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln|x|+c)^2} = -\frac{1}{\ln|x|+c} + \frac{1}{(\ln|x|+c)^2} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$. Donc y est la solution cherchée, et c'est la seule, car $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ est localement lipschitzienne en y au voisinage de tout point (x,y) t.q. $x \neq 0$.

Et on remarque $y(x) = \frac{x}{c-\ln|x|} \longrightarrow_{x\to 0} = 0$ et on peut prolonger par continuité cette solution par $y(0) = 0$. Puis $y'(x) = \frac{(c-\ln|x|)-x(\frac{-1}{x})}{(c-\ln|x|)^2} = o(\frac{1}{\ln|x|}) \longrightarrow_{x\to 0} 0$ et donc qu'on peut prolonger y' en 0 par continuité avec $y'(0) = 0$. Finalement la solution trouvée $y(x) = \frac{x}{c-\ln|x|}$ est solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Si $x_0 = 0$ alors $y = 0$ est solution pour la condition initiale $y(0) = 0$, mais on ne peut pas conclure que c'est la seule, car $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ n'est pas localement lipchitzienne (ici elle n'est même pas définie) au voisinage de $x = 0$.

D'ailleurs ici toutes les solutions trouvées (quelque soit y_0) vérifient $y(0) = 0$: il n'y a pas unicité pour la condition initiale $y(0) = 0$.

Si $x_0 = 0$ et si on veut $y_0 \neq 0$, la solution doit vérifier pour $x \neq 0$ (au voisinage de 0) : $y(x) = \frac{-x}{\ln|x|+c}$ et donc $y(0) = 0$ par prolongement par continuité. Donc il n'existe pas de solution pour les conditions initiales $y(0) \neq 0$. ▟

Exemple 1.11 Résoudre $y' = \frac{y}{x+y}$ (mettre cette équation sous forme homogène). ▟

2 Équations différentielles linéaires

On notera K l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans les problèmes où les coefficients sont réels, $K = \mathbb{R}$ et on cherchera une solution réelle, même s'il est commode de commencer par chercher une solution complexe (choisissant alors $K = \mathbb{C}$).

2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre dans K

L'équation différentielle linéaire s'écrit simplement :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \ \in K, \quad x(t_0) = x_0 \ \in K, \tag{2.1}$$

où a et b sont deux fonctions continues de I dans K, et où $t_0 \in I$ et $x_0 \in K$ sont donnés. Une solution est alors une fonction φ telle que $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$ pour tout $t \in I$ et telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

On rappelle que la méthode de résolution est (ou bien voir la proposition 3.13) :
1- On cherche les solutions φ_h de l'équation homogène :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x. \tag{2.2}$$

2- Puis on cherche une solution particulière φ_p de :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t). \tag{2.3}$$

3- La solution de (2.1) est $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$, telle que $\varphi(0) = x_0$.

2.2 Solution homogène

Les solutions sont de la forme, pour $t_0, t \in I$:

$$\varphi_h(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}, \tag{2.4}$$

où $C \in K$. Et toute fonction de cette forme est solution. Vérification immédiate.

Définition 2.1 La fonction $t \in I \to Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}$ (pour $C \in K$ quelconque) est appelée solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène (2.2).

En particulier, pour la condition initiale $\varphi_h(t_0) = x_0$ la solution homogène est :

$$\varphi_h(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} \tag{2.5}$$

Remarque 2.2 On en déduit en particulier que si $x = \varphi_h$ est non nul en un point, alors x est non nul en tout point (la fonction exponentielle ne s'annulle pas), et en particulier x garde un signe constant. Et si x est nul en un point, alors $x \equiv 0$ est solution, et l'unicité de la solution indique que c'est l'unique solution. Et on vérifie immédiatement que $Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}$ est solution, et donc on a trouvé toutes les solutions. ▞

Remarque 2.3 Une autre méthode pour trouver la solution est de séparer les variables, en écrivant :

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt$$

dès que $x \neq 0$. On en déduit formellement que pour $t \in I$ (avec I intervalle où a est continue) :

$$\log x = \int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau + c \quad \text{si } x{>}0, \quad \log(-x) = \int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau + c \quad \text{si } x{<}0,$$

où c est une constante quelconque, soit :

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}$$

où $C = \pm e^c$ est une constante réelle. La fonction $t \to x(t)$ devant être dérivable, on en déduit que la solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ est $x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$. ▞

2.3 Solution particulière

Pour trouver une solution particulière de (2.1), on utilise la méthode baptisée 'méthode de variation de la constante' : si on note

$$\varphi_{h1}(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau},$$

la solution homogène pour la condition initiale $x(t_0) = 1$, on remarque que cette fonction ne s'annule jamais. Ainsi pour trouver une solution φ_p (particulière) de (2.1) :

$$\varphi_p'(t) = a(t)\varphi_p(t) + b(t), \qquad \forall t \in I, \tag{2.6}$$

il suffit de trouver une fonction $C : t \in I \to \alpha(t) \in K$ telle que sur I :

$$\varphi_p(t) = C(t)\varphi_{h1}(t). \tag{2.7}$$

(Méthode dite de variation de la constante dans (2.4).) Connaissant C on aura φ_p.

On fait ainsi un changement de fonction inconnnue : la nouvelle fonction inconnue est $t \to C(t)$. Remplaçant $\varphi_p(t)$ par $C(t)\varphi_{h1}(t)$ dans (2.6), on trouve :

$$C'(t)\varphi_{h1}(t) + C(t)\varphi_{h1}'(t) = a(t)C(t)\varphi_{h1}(t) + b(t).$$

Mais φ_{h1} satisfaisant à l'équation différentielle homogène, et il reste :

$$C'(t)\varphi_{h1}(t) = b(t)$$

d'où, pour $t_0 \in I$:

$$C(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(\tau)}{\varphi_{h1}(\tau)}\,d\tau + c = \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds}\,d\tau + c,$$

avec $c \in K$ une constante d'intégration. D'où $\varphi_p(t) = C(t)\varphi_{h1}(t)$:

$$\varphi_p(t) = (\int_{t_0}^t b(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds}\,d\tau + c)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}.$$

En particulier pour $c = 0$ on a une solution particulière :

$$\varphi_p(t) = (\int_{t_0}^t b(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds}\,d\tau)\, e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}, \tag{2.8}$$

qui correspond à la solution vérifiant $\varphi_p(t_0) = 0$.

Remarque 2.4 Cette solution particulière s'écrit aussi :

$$\varphi_p(t) = \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{\int_\tau^t a(s)\,ds}\, d\tau. \tag{2.9}$$

Attention : pour dériver φ_p on commencera par réécrire φ_p sous la forme (2.8) (produit de fonctions), alors que la forme (2.9) se présente comme :

$$\varphi_p(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau) d\tau$$

et n'est pas dérivable directement (t est à la fois borne de l'intégrale et paramètre de l'intégrant) pour g quelconque, voir annexe. On peut donc éviter d'utiliser l'écriture (2.9), et priviligier l'écriture (2.8). ∴

2.4 Conclusion et exemples

Avec (2.5) et (2.8), ayant $\varphi_p(t_0) = 0$ dans (2.8), on impose $C = x_0$ pour la solution homogène (2.4), et la solution de (2.1) est donc :

$$\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} + \Big(\int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds}\, d\tau\Big)\, e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}. \tag{2.10}$$

Exemple 2.5 Pour a une constante et b une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on souhaite résoudre :

$$\frac{dx}{dt} = ax + b(t), \quad x(0) = x_0.$$

1- L'équation homogène a pour solution générale sur $\mathbb{R}$: $\varphi_h(t) = Ce^{at}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

2- On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = C(t)e^{at}$, i.e. pour trouver $\varphi_p(t)$ on cherche $C(t)$. Cette fonction satisfait à :

$$C'(t)e^{at} = b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et donc $C(t) = \int_0^t b(\tau)e^{-a\tau}\,d\tau$ convient, et $\varphi_p(t) = e^{at}\int_0^t b(\tau)e^{-a\tau}\,d\tau$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$.

3- On en déduit que $\varphi(t) = Ce^{at} + e^{at}\int_0^t b(\tau)e^{-a\tau}\,d\tau$ est une solution générale sur $\mathbb{R}$, et la condition initiale $x(0) = x_0$ donne $C = x_0$. ∴

Exemple 2.6 Résoudre, suivant les valeurs de t_0 et de x_0 :

$$(1-t^2)\frac{dx}{dt} - 2tx = t^2, \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.11}$$

Première méthode : on commence par mettre cette équation sous forme normale :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1-t^2}x + \frac{t^2}{1-t^2}.$$

C'est une équation différentielle linéaire, de type (2.1) où $a(t) = \frac{2t}{1-t^2}$ et $b(t) = \frac{t^2}{1-t^2}$ sont continues sur $I_1 =]-\infty,-1[$, $I_2 =]-1,1[$ et $I_3 =]1,\infty[$. On est donc assuré de l'existence d'une solution sur chacun des intervalles I_i. Par exemple, pour $t_0 > 1$, la condition initiale $x(t_0) = x_0$ donne l'existence et l'unicité de la solution sur I_3. Il restera à voir si la solution est maximale sur I_3, ou bien si elle peut être prolongée à gauche de I_3. On regardera également les cas particuliers de conditions initiales (t_0, x_0) pour lesquelles $t_0 = \pm 1$.

1- Cherchons un solution dans I_3, i.e. on suppose ici que $t_0 \in I_3$. L'équation homogène est $x' = \frac{-2t}{t^2-1}x$ et a pour solution générale, pour tout $t \in I_3$:

$$\varphi_h(t) = \tilde{C}e^{\int_{t_0}^t \frac{-2\tau}{\tau^2-1}d\tau} = \tilde{C}e^{-\ln(t^2-1)+\ln(t_0^2-1)} = C\frac{1}{t^2-1},$$

où $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ et $C = \tilde{C}(t_0^2-1) \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = C(t)\frac{1}{t^2-1}$:

il vient $\varphi_p'(t) = C'(t)\frac{1}{t^2-1} + C(t)\frac{-2t}{(t^2-1)^2}$, et donc C vérifie l'équation différentielle :

$$C'(t)\frac{1}{t^2-1} = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

D'où $C'(t) = -t^2$ et $C(t) = -\frac{t^3}{3}+\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. Prenons $\beta = 0$ pour obtenir la solution particulière $\varphi_p(t) = -\frac{1}{3}\frac{t^3}{t^2-1}$. D'où la solution cherchée : si $t_0 \in I_3$, alors pour tout $t \in I_3$:

$$\varphi(t) = \frac{C - \frac{1}{3}t^3}{t^2-1} \tag{2.12}$$

où C est déterminé à l'aide de la condition initiale $\varphi(t_0) = \frac{C-\frac{1}{3}t_0^3}{t_0^2-1}$ i.e. $C = x_0(t_0^2-1) + \frac{1}{3}t_0^3$.

Question qui reste à résoudre : est-ce que φ est solution maximale, ou bien est-ce que φ peut-être prolongée sur I_2, voire ensuite sur I_1 (i.e. sur $\mathbb{R}$ tout entier) ? Avant de répondre à cette question, résolvons l'équation différentielle sur I_2 et sur I_1.

2- (et 3-) Cherchons un solution dans I_2 (resp. I_1), i.e. on suppose ici que $t_0 \in I_2$ (resp. I_1). la solution cherchée est également donnée, pour tout $t \in I_2$ (resp. I_1) par (2.12).

4- Regardons le problème de la solution maximale : plaçons-nous sur I_3 par exemple. La solution est maximale sur I_3 dès que $\varphi(t) \to \pm\infty$ quand $t \to 1$. C'est le cas si $C \neq \frac{1}{3}$ dans (2.12) : donc la solution est maximale sur I_3 dès que la condition initiale satisfait à : $t_0 \in I_3$ et $x_0 \neq \frac{1}{3}\frac{1-t_0^3}{t_0^2-1}$, i.e. si $t_0 \in I_3$ et $x_0 \neq -\frac{1}{3}\frac{t_0^2+t_0+1}{t_0+1}$.

Si $C = \frac{1}{3}$ (i.e. si $x_0 = \frac{-1}{3}\frac{t_0^2+t_0+1}{t_0+1}$) alors la solution (2.12) s'écrit, pour tout $t \in I_3$:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{3}\frac{t^2+t+1}{t+1}, \tag{2.13}$$

et elle peut être prolongée au gauche de $t = 1$ car elle est C^1 sur $]-1,\infty[$. Il reste à vérifier si cette solution est bien solution de l'équation différentielle (2.11) : vérification facile (exercice).

Donc, si $t_0 \in I_3$ (i.e. $t_0 > 1$) et si $x_0 = \frac{-1}{3}\frac{t_0^2+t_0+1}{t_0+1}$, alors la solution est définie sur $]-1,\infty[$. Mais elle explose en $t = -1$, et donc est maximale sur $]-1,\infty[$. On laisse en exercice les cas où $t_0 \in I_2$ ou I_1.

5- Il reste les cas $t_0 = \pm 1$. Dans ces cas l'équation différentielle doit être satisfaite au point $t_\varepsilon = t_0 + \varepsilon$, et au au voisinage de t_ε, elle est donc de la forme (2.12). Et cette solution doit être prolongeable en t_0. Ce point a été traité juste au dessus : ce n'est possible, par exemple pour $t_0 = 1$ que si $x_0 = \frac{-1}{3}\frac{t_0^2+t_0+1}{t_0+1} = -\frac{1}{2}$, auquel cas la solution est donnée par (2.13) sur $]-\infty,1[$ si $t_0 = -1$, et sur $]1,\infty[$ si $t_0 = 1$. ▪

Exemple 2.7 On reprend l'exemple précédent. Deuxième méthode de résolution, pour cette équation différentielle très particulière : on remarque que l'équation s'écrit :

$$((1-t^2)x)' = t^2.$$

On pose alors $y(t) = (1-t^2)x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, d'où on déduit que sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = \frac{t^3}{3} + c,$$

où c est une constante. On ne peut en déduire la valeur de x qu'aux points où $t \neq 1, -1$:

$$\forall i = 1,2,3, \quad \forall t \in I_i, \quad x(t) = \frac{1}{3}\frac{t^3+3c}{1-t^2}.$$

On vérifie que x ainsi trouvé est bien solution de (2.11), et que c'est la solution cherchée dans chaque I_i lorsque $t_0 \in I_i$ (existence et unicité sur les intervalles I_i pour $i = 1,2,3$ avec le théorème de Cauchy–Lipschitz). Ensuite, même démarche que précédemment pour le prolongement de la solution, et pour les cas $t_0 = \pm 1$. ▪

Exemple 2.8 Résoudre $x' = \dfrac{x}{t} + 1$.

On montrera que la solution est donnée par $\varphi(t) = ct + t\ln(|t|)$ (sur quels intervalles ? prolongeable ?) où c est à déterminer en fonction de conditions initiales. ▪

Exemple 2.9 Résoudre $x' = -\dfrac{x}{t} + e^x$.

On montrera que la solution est donnée par $\varphi(t) = \frac{c}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}$ (sur quels intervalles ? prolongeable ?) où c est à déterminer en fonction de conditions initiales.

Exemple 2.10 Résoudre $x' + tx = 2$.

On montrera que la solution est donnée sur $\mathbb{R}$ par par $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(c + 2\int_0^t e^{\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau)$ où c est à déterminer en fonction de conditions initiales.

2.5 Equation de Bernoulli et Riccati

2.5.1 Equation de Bernoulli

Pour $f(t,x) = a(t)x + b(t)x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et a et b fonctions de t, on aura une équation de Bernoulli dans le cas $\alpha \neq 1$ (sinon l'ED est linéaire). Pour la résoudre, on fait le changement de fonction donné par $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$.

Exemple 2.11 Résoudre $xy' + y - xy^3 = 0$.

Réponse. On a pour $x \neq 0$: $y' = -\frac{1}{x}y + y^3$. Ici, $\alpha = 3$ et on pose $z(x) = y^{-2}(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, d'où $y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$. Intéressons nous au cas d'une condition initiale $(x = x_0, y(x_0) > 0)$, i.e. au cas $y(x) = +\frac{1}{\sqrt{z(x)}} = z(x)^{-\frac{1}{2}}$. On obtient $y'(x) = -\frac{1}{2}z'(x)z(x)^{-\frac{3}{2}}$, d'où l'ED devient : $-\frac{1}{2}xz'(x)z(x)^{-\frac{3}{2}} + z(x)^{-\frac{1}{2}} + xz(x)^{-\frac{3}{2}} = 0$, soit $z'(x) = 2\frac{z(x)}{x} + 2$. Une solution particulière est $z_p(x) = -2x$ est la solution homogène est $z_h(x) = cx^2$, d'où $z(x) = cx^2 - 2x$, d'où $y(x) = \frac{1}{\sqrt{cx^2-2x}}$, lorsque la CI est donnée pour $y(x_0) > 0$, solution qui a un sens, soit sur $I_1 =]-\infty, \frac{2}{c}[$, soit sur $I_2 =]\frac{2}{c}, \infty[$ (suivant que $x_0 \in I_1$ ou $\in I_2$).

Lorsque la CI est donnée pour $y(x_0) < 0$: exercice.

Lorsque la CI est donnée pour $y(x_0) = 0$, alors $y(x) = 0$ pour tout x est solution.

Exemple 2.12 Résoudre $y' + \frac{y}{x} = 3x^2y^3$.

Réponse. Solution générale $y(x) = \sqrt{\frac{1}{cx^2-6x^3}}$.

2.5.2 Equation de Riccati

Pour $f(t,x) = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$ où les a_i sont des fonctions de t, on aura une équation différentielle de Riccati. Pour la résoudre, on cherche une solution particulière $\varphi_p(t)$ (souvent facile à trouver), et on fait le changement de fonction en posant $x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{z(t)}$. On obtient alors une équation différentielle linéaire en z qu'on résout, dont on déduit x.

Exemple 2.13 Résoudre $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x$: (i)- trouver un polynôme simple solution, et (ii)- résoudre. (iii)- Que se passe-t-il pour les conditions initiales (CI) $y(1) = 0$, $y(1) = 1$, $y(1) = 1.5$, $y(1) = 2$?

Réponse. Ici $f(x,y) = \frac{y^2}{x} - \frac{(2x+1)y}{x} + x + 2$ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ où elle est C^∞. (i)- Visiblement $y(x) = x$ est solution particulière. Cette solution ne peut convenir que si la CI vérifie $y(x_0) = x_0$. Il s'agit de trouver les autres solutions (correspondant à d'autres CI).

(ii)- On cherche la fonction $z(x)$ telle que $y(x) = x + \frac{1}{z(x)}$, donc telle que $y'(x) = 1 - \frac{z'(x)}{z^2(x)}$. D'où dans l'ED : $x(1 - \frac{z'(x)}{z^2(x)}) - (x + \frac{1}{z(x)})^2 + (2x+1)(x + \frac{1}{z(x)}) = x^2 + 2x$, soit, après multiplication par z^2 : $z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{x}$. Cette ED linéaire a une solution particulière évidente $z_p = 1$ et pour solution homogène $z_h(x) = cx$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ où $c \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale sur $\mathbb{R}$ donnée par $z(x) = cx + 1$ pour $c \in \mathbb{R}$ quelconque. D'où $y(x) = x + \frac{1}{cx+1}$ est solution de l'ED de Riccati proposée.

(iii)- Pour la CI $y(1) = 0$, on obtient $0 = 1 + \frac{1}{c+1}$ d'où $c = -2$ et la solution est $y(x) = x + \frac{1}{1-2x}$ définie sur $]\frac{1}{2}, \infty[$ (intervalle qui contient $x = 1$). Pour la CI $y(1) = 1$, on obtient $1 = 1 + \frac{1}{c+1}$ ce qui est impossible, et la solution est la solution particulière $y(x) = x$. Pour la CI $y(1) = 2$, on obtient $2 = 1 + \frac{1}{c+1}$, d'où $c = 0$ et $y(x) = x + 1$, solution définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.14 Résoudre $xy' = y^2 + y - 2$?

Réponse. Solution générale $y(x) = \frac{c+2x^3}{c-x^3}$.

2.5.3 Equation de Lagrange et de Clairaut

Pour l'équation différentielle $x = tf(x') + g(x')$, pour f et g fonctions définies sur E, on aura une équation de Lagrange. En particulier, si $f(x') = x'$, l'équation de lagrange $x = tx' + g(x')$ est appelée équation de Clairaut.

3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

On notera K l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans les problèmes où les coefficients sont réels, $K = \mathbb{R}$ et on cherchera une solution réelle, même s'il est commode de commencer par chercher une solution complexe (choisissant alors $K = \mathbb{C}$). Et on supposera toujours que E est un espace de Banach sur le corps K. Pour les systèmes différentiels on prendra $E = K^n$, i.e. $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$.

N.B. : la variable t (le “temps”) sera toujours une variable réelle.

3.1 Définitions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (non vide).

Définition 3.1 Une application $f : I \times E \to E$ notée $f(t,x)$ est dite linéaire en x si :

$$f(t,x) \overset{\text{déf}}{=} a(t)(x), \quad \forall x \in E,$$

où $a : I \to L(E)$ est une fonction continue sur I. (On rappelle que $L(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E, i.e. l'ensemble des applications linéaires de $E \to E$.)

La linéarité de f en x s'écrit, pour tout $t \in I$, tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in K$:

$$f(t, x + \lambda y) = f(t,x) + \lambda f(t,y) \quad \text{ou bien} \quad a(t)(x + \lambda y) = a(t)(x) + \lambda a(t)(y).$$

Exemple 3.2 Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, la base et le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ étant fixés, un endomorphisme est représenté par une matrice. On écrira alors :

$$a(t)(x) = A(t).\vec{x}$$

où A est la fonction matricielle $t \in I \to A(t)$ matrice $n * n$, i.e. à t donné, $A \in \mathbb{R}^{n^2}$. ▟

Exemple 3.3 Avec $E = \mathbb{R}$: avec $I = \mathbb{R}$, prendre par exemple $f(t,.) = a(t)(.)$ où $a(t) = 1$, $a(t) = t^2$; et avec $I =]0, \infty[$, un exemple est donné par $a(t) = \frac{1}{t}$. Ce n'est donc pas a qui est linéaire : mais pour chaque t, c'est $a(t) : E \to E$ qui l'est. ▟

Notation : Pour chaque t, La fonction $a(t) : x \in E \to a(t)(x) \in E$ étant linéaire, on note, pour tout $t \in I$ et tout $x \in E$:

$$a(t)(x) = a(t).x.$$

Définition 3.4 Une application $f : I \times E \to E$ notée $f(t,x)$ est dite affine en x si :

$$f(t,x) \overset{\text{déf}}{=} a(t)(x) + b(t), \quad \forall x \in E,$$

où $a : I \to L(E)$ et $b : I \to E$ sont des fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 3.5 L'équation différentielle $x' = f(t,x)$ est dite linéaire si f est affine en x (attention donc), i.e. si elle est de la forme :

$$x' = a(t).x + b(t). \tag{3.1}$$

L'équation différentielle est dite linéaire homogène si f est linéaire en x, i.e. si elle est de la forme :

$$x' = a(t).x. \tag{3.2}$$

On dit également qu'elle est linéaire sans second membre, sous entendue qu'elle s'écrit $x' - a(t)x = 0$.

Et une solution d'une équation différentielle linéaire est donc une fonction $\varphi : I \to E$ qui vérifie :

$$\varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t), \quad \forall t \in I, \tag{3.3}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ où a et b sont continues, et qu'elle satisfait la condition initiale (t_0, x_0) si $\varphi(t_0) = x_0$.

3.2 Cas particulier : système différentiel du premier ordre

Dans le cas particulier où $E = E_1 \times ... \times E_n$ est le produit cartésien des espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$, on a $x \in E = E_1 \times ... \times E_n$ et $f(t,x) \in E = E_1 \times ... \times E_n$. On pourra alors noter $\vec{x}$ au lieu de x et $\vec{f}$ au lieu de f et le problème de Cauchy (1.3) s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \tag{3.4}$$

ou encore si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\vec{f}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\vec{x}) \end{pmatrix}$ où les $f_i : [0,T] \times E \to E_i$ sont n fonctions données :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = x_{01}, \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{0n}. \end{cases} \tag{3.5}$$

On dit qu'on a dans ce cas un système différentiel du premier ordre. La fonction inconnue $\varphi : I \to E$ est alors notée $\vec{\varphi}$, et on note $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle inconnue, les fonctions inconnues $\varphi_i : I \to E_i$ étant les n fonctions scalaires composantes de $\vec{\varphi}$.

Le système différentiel est un système dit couplé : chaque fonction φ_i inconnue dépend des autres valeurs inconnues φ_j pour $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_1(t_0) = x_{01}, \\ \vdots \\ \varphi_n(t_0) = x_{0n}. \end{cases}$$

La condition initiale est donc ici un couple $(t_0, \vec{x}_0) \in I \times E$ telle que la fonction (vectorielle) inconnue cherchée satisfasse à $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Cette CI (vectorielle) est donc composée des n CI (t_0, x_{0i}). Et on dit également qu'on a dans ce cas n conditions initiales (une pour chacune des fonctions φ_i).

Exemple 3.6 Le système :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

est un système différentiel (linéaire) : ici $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si on pose $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \\ f_2(t, x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$, on a l'équation différentielle $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$, i.e. le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

à résoudre.

On verra que ce système est un système différentiel linéaire (à coefficients constants), et qu'on l'écrira sous la forme matricielle :

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

où A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. L'unicité de la solution sera obtenue une fois des conditions initiales imposées. ▲

Exemple 3.7 Le système :

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

est un système différentiel (non linéaire si, à t fixé, f_1 ou f_2 sont non linéaires en x_1 ou x_2).

Si on impose des conditions initiales $x_1(t_0) = x_{01}$ et $x_2(t_0) = x_{02}$, on peut linéariser ce système dans le cas où $f_1(t,.,.)$ et $f_2(t,.,.)$ sont C^1 au voisinage de (x_{01}, x_{02}). On a alors :

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_{01}, x_{02}) + (x_1 - x_{01})\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x_{01}, x_{02}) + (x_2 - x_{02})\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_{01}, x_{02}) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \\ x_2' = f_2(t, x_{01}, x_{02}) + (x_1 - x_{01})\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x_{01}, x_{02}) + (x_2 - x_{02})\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x_{01}, x_{02}) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \end{cases}$$

Notant $A_{x_{01},x_{02}}(t) = J(\vec{f})_0(t)$ la matrice jacobienne de $\vec{f}$ en (x_{01}, x_{02}) à t fixé, on peut connaître une solution approchée $\tilde{\vec{x}}$ du problème linéarisé :

$$\tilde{\vec{x}}' = A_{x_{01},x_{02}}(t)\tilde{\vec{x}} + \vec{b}(t) \qquad \text{où} \qquad \vec{b}(t) = \vec{f}(t, x_{01}, x_{02}) - A_{x_{01},x_{02}}(t)\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{01} \end{pmatrix}.$$

Cela ne peut cependant donner une approximation raisonnable $\tilde{\vec{\varphi}}(t)$ de la solution cherchée $\vec{\varphi}(t)$ (pour la condition initiale $\vec{x}_0$) que dans un voisinage de t_0. ▲

3.3 Cas particulier : équation différentielle linéaire d'ordre n

3.3.1 Équation différentielle d'ordre n

On regarde le cas particulier d'un système différentiel d'ordre 1 où $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, \dots, x_n) = x_2 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) = x_n \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Et le problème de Cauchy $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ avec C.I. $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ est donc donné par :

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = x_{01}, \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{0n}. \end{cases}$$

On pose alors $x = x_1$, d'où $x_n' = x_{n-1}'' = ... = x_1^{(n)} = x^{(n)}$, et on obtient immédiatement l'équation différentielle :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_{01}, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}. \end{cases}$$

dite équation différentielle d'ordre n : en particulier, une équation différentielle d'ordre n possède n conditions initiales (scalaires).

Réciproquement, étant donnée une équation différentielle d'ordre n sous la forme $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ on peut la mettre immédiatement sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 : on définit les fonctions f_i par :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, ..., x_n) = x_2 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, x_1, ..., x_n) = x_n \\ f_n(t, x_1, ..., x_n) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \end{cases}$$

et le système différentiel à résoudre est (3.5) (en fait, seule l'inconnue $x = x_1$ nous intéresse).

Donc une équation différentielle d'ordre n est un cas particulier d'un système différentiel. Et la condition initiale est $(t_0, \vec{x}_0) = (t_0, x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$. On dit aussi qu'on a n conditions initiales $x(t_0)$,...,$x^{(n-1)}(t_0)$ (à l'instant t_0).

3.3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre n

On regarde le cas particulier d'un système différentiel d'ordre 1 quand $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}$, où b et les a_i sont des fonctions de t. Le système différentiel $\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b}$ s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_1 x_n + \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + b, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = x_{01}, \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{0n}. \end{cases} \tag{3.6}$$

En particulier, on a $x_2 = x_1'$, $x_3 = x_2' = x_1''$, ..., $x_{n-1} = x_1^{n-1}$ et donc l'inconue $x_1 =^{\text{notée}} x$ est solution de l'équation différentielle :

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_{01}, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}. \end{cases}$$

dite équation différentielle (scalaire) d'ordre n avec ses n conditions initiales (les n constantes d'intégration).

Réciproquement, une équation différentielle d'ordre n sous la forme

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b, \quad \text{avec} \quad x(t_0) = x_{01}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}, \tag{3.7}$$

peut être mise immédiatement sous la forme du système différentiel d'ordre 1 (3.6) : pour cela on pose $x_1 = x$ et on introduit (on cherche) également $n-1$ autres fonctions qu'on note $x_2, ..., x_n$ qui vérifient les equations $x_j = x_{j-1}'$ avec pour $2 \leq j \leq n-1$ et les C.I. $x_i(t_0) = x_{0i}$. (Donc x_j est une dérivée de x_{j-i}.)

Et le système différentiel à résoudre est (3.6). En fait, seule l'inconnue $x = x_1$ nous intéresse, les autres fonctions x_i pour $i \geq 2$ étant des intermédiaires de calcul.

Interprétation. $x_1 = x$ est la solution cherchée, solution de (3.7), qui peut s'interpréter comme une trajectoire, i.e. $x_1(t)$ est la position à l'instant t ; $x_2 = x'$ est la vitesse ; $x_3 = x''$ est l'accélération...

Donc une équation différentielle d'ordre n est un cas particulier d'un système différentiel. Et la condition initiale $(t_0, \vec{x}_0) = (t_0, x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$ est alors équivalente aux « n conditions initiales scalaires $x(t_0)$,...,$x^{(n-1)}(t_0)$ » (à l'instant t_0).

Exemple 3.8 Soit l'équation différentielle :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t), \quad \text{avec} \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta, \tag{3.8}$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On renomme $x = x_1$ et on introduit l'inconne supplémentaire x_2 telle que $x_2 = x' = x_1'$ (dérivée de x_1). On doit donc résoudre : trouver les fonctions x_1 et x_2 t.q. :

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = a(t)x_2 + b(t)x_1 + c(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = \alpha, \\ x_2(0) = \beta. \end{cases}$$

Le système différentiel linéaire à résoudre est donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix},$$

avec la C.I. $(0, (\alpha, \beta))$, i.e. $x_1(0)=\alpha$ et $x_2(0)=\beta$. On obtiendra les fonctions solutions $t \to x_1(t)$ et $t \to x_2(t)$.

Interprétation : $x_1(t)$ donne la position cherchée $x(t)$ à l'instant t, solution de (3.8), et $x_2(t) = x'(t)$ donne la vitesse à l'instant t. ∎

3.4 Premiers résultats dus à la linéarité

Proposition 3.9 *Si φ et ψ sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (3.2) alors $\varphi + \lambda\psi$ est également solution de (3.2), ce pour tout $\lambda \in K$.*

Preuve. On pose On a $\zeta = \varphi + \lambda\psi$ et on vérifie que $\frac{d\zeta}{dt} = a(t).\zeta$ car $\frac{d(\varphi+\lambda\psi)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \lambda\frac{d\psi}{dt}$ et $a(t).(\varphi + \lambda\psi) = a(t).\varphi + \lambda a(t).\psi$. ∎

Par contre, ce résultat est faux pour ψ et φ solutions de l'équation différentielle non homogène (3.1) (lorsque $b \neq 0$). On a cependant :

Proposition 3.10 *Si ψ est solution de l'équation différentielle linéaire (non homogène) (3.1), et si φ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène (3.2) alors $\psi + \lambda\varphi$ est également solution de (3.1), ce pour tout $\lambda \in K$.*

Preuve. Démonstration similaire à la précédente. ∎

3.5 Structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

Pour $(t_0, x_0) \in I \times E$ donné, on considère l'équation différentielle linéaire homogène avec condition initiale :

$$\frac{dx}{dt} = a(t).x, \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.9}$$

(On prend pour I l'intervalle maximal où a est continu.) Le théorème de Cauchy–Lipschitz nous permet d'utiliser la :

Notation. On note $\varphi_{t_0,x_0} : t \in I \to \varphi_{t_0,x_0}(t) \in E$ la solution de (3.9), pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, i.e. :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_{t_0,x_0}}{dt}(t) = a(t).\varphi_{t_0,x_0}(t), \quad \forall t \in I, \\ \varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Et pour $t_0 \in I$ on note :

$$S_{t_0} = \{\varphi_{t_0,x_0} : x_0 \in E\}$$

l'ensemble des solutions de (3.9) (l'instant initial t_0 fixé et on fait varier x_0).

Proposition 3.11 *S_{t_0} est un sous-espace vectoriel de $C^1(I,E)$ (linéarité de l'équation différentielle), et à $t_0 \in I$ donné, l'application*

$$\begin{cases} \Phi_{t_0} : E \to S_{t_0} \\ \qquad x_0 \ \mapsto \varphi_{t_0,x_0} \text{ solution de (3.9)} \end{cases}$$

est un isomorphisme de E sur S_{t_0} (i.e. une application linéaire bijective). D'où S_{t_0} est un espace vectoriel de dimension 1.

Preuve. 1- S_{t_0} est stable : si φ_{t_0,x_0} et φ_{t_0,y_0} sont dans S_{t_0}, pour x_0 et $y_0 \in E$, alors, pour $\alpha \in K$:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\varphi_{t_0,x_0}+\alpha\varphi_{t_0,y_0})}{dt}(t) &= \dfrac{d\varphi_{t_0,x_0}}{dt}(t) + \alpha\dfrac{d\varphi_{t_0,y_0}}{dt}(t) = a(t)\varphi_{t_0,x_0}(t) + \alpha\varphi_{t_0,y_0}(t) \\ &= a(t)(\varphi_{t_0,x_0}+\alpha\varphi_{t_0,y_0})(t), \quad \forall t \in I, \\ (\varphi_{t_0,x_0}+\alpha\varphi_{t_0,y_0})(t_0) &= \varphi_{t_0,x_0}(t_0) + \alpha\varphi_{t_0,y_0}(t_0) = x_0 + \alpha y_0 \in E, \end{cases}$$

et donc $(\varphi_{t_0,x_0} + \alpha\varphi_{t_0,y_0})$ est solution de (3.9) pour la condition initiale $(t_0, x_0 + \alpha y_0)$. Donc $(\varphi_{t_0,x_0} + \alpha\varphi_{t_0,y_0}) \in S_{t_0}$. Ayant $S_{t_0} \subset C^1(I,E)$, on en déduit que S_{t_0} est un s.e.v. de $C^1(I,E)$.

2- Le calcul précédent donne $(\varphi_{t_0,x_0} + \alpha\varphi_{t_0,y_0}) = \varphi_{t_0,x_0+\alpha y_0}$ par unicité de la solution de (3.9). D'où Φ_{t_0} linéaire : $\Phi_{t_0}(x_0 + \alpha y_0) = \Phi_{t_0}(x_0) + \alpha\Phi_{t_0}(y_0)$ pour tout $\alpha \in K$ et $x_0, y_0 \in E$, égalité qui n'est autre que $\varphi_{t_0,x_0+\alpha y_0}(t) = \varphi_{t_0,x_0}(t) + \alpha\varphi_{t_0,y_0}(t)$ associée à la C.I. $x_0 + \alpha y_0 = x_0 + \alpha y_0$ (!).

3- Φ_{t_0} est bijective par application du théorème de Cauchy–Lipschitz (existence donc surjective, et unicité donc injective). ∎

Remarque 3.12 On note également $\varphi_{t_0,x_0}(t) \stackrel{\text{noté}}{=} \varphi(t;t_0,x_0)$ pour tout $t \in I$: cela permet d'étudier les variations de φ en fonction de x_0 par exemple, à l'aide de $\frac{\partial\varphi(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}$. ∎

3.6 Application : méthode de résolution des systèmes différentiels dans K^n

On en déduit le principe général de résolution d'un système différentiel linéaire :

Proposition 3.13 *Pour résoudre l'équation différentielle linéaire avec condition initiale (problème de Cauchy) dans le cas $E = K^n$:*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = a(t).\vec{x} + \vec{b}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \tag{3.10}$$

pour $t_0 \in I$ et $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ donnés, il suffit de résoudre l'équation différentielle linéaire homogène :

$$\frac{d\vec{\varphi}_h}{dt}(t) = a(t).\vec{\varphi}_h(t),$$

i.e. de trouver une base $(\vec{\varphi}_i)_{i=1,\dots,n}$ de S_{t_0} (de dimension n), et de trouver une solution particulière $\vec{\varphi}_p$ de l'équation différentielle linéaire (non homogène) :

$$\frac{d\vec{\varphi}_p}{dt}(t) = a(t).\vec{\varphi}_p(t) + \vec{b}(t).$$

La solution de (3.10) est alors donnée par $\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n c_i\vec{\varphi}_i + \vec{\varphi}_p$, où les $c_i \in K$ sont calculées à l'aide de la condition initiale $\vec{x}_0$ (qui donne le système de n équations à n inconnues $\vec{\varphi}(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i\vec{\varphi}_i(t_0) + \vec{\varphi}_p(t_0) = \vec{x}_0$).

Preuve. Les propositions précédentes 3.9 et 3.10 indiquent que $\sum_{i=1}^n c_i\vec{\varphi}_i + \varphi_p$ est bien solution, et $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n c_i\vec{\varphi}_i(t_0) + \vec{\varphi}_p(t_0)$ donne les c_i, sachant que les $\vec{\varphi}_i$ étant indépendantes, le système est inversible. ∎

4 Résolution des systèmes différentiels linéaires

4.1 Introduction

La fonction inconnue $x=\varphi$ est à valeurs $\varphi(t)$ dans K^n, et pour cette raison on la notera $\vec{x}=\vec{\varphi}$ (fonction à valeurs vectorielles) : ce sera donc la solution de l'équation différentielle trouver $\vec{x}$ t.q. :

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t).\vec{x}+\vec{b}(t), \quad \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0, \tag{4.1}$$

i.e. trouver la fonction $\vec{\varphi}:I\to K^n$ t.q. :

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt}(t)=A(t).\vec{\varphi}(t)+\vec{b}(t), \quad \vec{\varphi}(t_0)=\vec{x}_0, \tag{4.2}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0\in I$, et $\vec{b}:I\to K^n$ et $A:I\to L(K^n)$ sont des applications continues. On peut donc représenter l'application linéaire $A(t)$ à l'aide d'une matrice (une fois une base de K^n donnée), matrice qu'on notera (abusivement pour ne pas surcharger les notations) $A(t)$. Donc :

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}=[a_{ij}(t)]_{1\le i,j\le n}, \qquad \vec{b}(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

où les $b_i:I\to K$ et $a_{ij}:I\to K$ sont des fonctions continues.

Et l'équation différentielle à résoudre s'écrit : trouver la fonction $\vec{x}:I\to K^n$, i.e. les n fonctions $x_i:I\to K$ telles que (relations couplant les x_i) :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t)=a_{11}(t)x_1(t)+\ldots+a_{1n}(t)x_n(t)+b_1(t), \\ \vdots \\ x_n'(t)=a_{n1}(t)x_1(t)+\ldots+a_{nn}(t)x_n(t)+b_n(t), \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x_1(0)=x_{10}, \\ \vdots \\ x_n(0)=x_{n0}, \end{array}\right. \tag{4.3}$$

i.e., trouver la fonction vectorielle $\vec{\varphi}:I\to K^n$, i.e. les n fonctions scalaires $\varphi_i:I\to K$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1'(t)=a_{11}(t)\varphi_1(t)+\ldots+a_{1n}(t)\varphi_n(t)+b_1(t), \\ \vdots \\ \varphi_n'(t)=a_{n1}(t)\varphi_1(t)+\ldots+a_{nn}(t)\varphi_n(t)+b_n(t), \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(0)=x_{10}, \\ \vdots \\ \varphi_n(0)=x_{n0}, \end{array}\right. \tag{4.4}$$

(système couplé, i.e. les fonctions x_i dépendent des fonctions x_j pour $1\le j\le n$.)

Et avec les n conditions initiales $\varphi_i(0)=x_{i0}$, le théorème de Cauchy–Lipschitz donne l'existence et l'unicité de la solution du système différentiel (4.3).

Exemple 4.1 Avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, le système $\vec{x}'=A\vec{x}+\vec{b}$ correspond à : l'inconnue est une fonction à valeurs vectorielles $\vec{x}:t\in\mathbb{R}\to\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$; ou encore, les inconnues sont deux fonctions à valeurs scalaires $x_i:t\to x_i(t)\in\mathbb{R}$ pour $i=1,2$, qui sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'=2x_1+x_2+b_1(t), \\ x_2'=x_1+2x_2+b_2(t), \end{array}\right.$$

auquel on ajoute une condition initiale (vectorielle) $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ donnée : $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$ donné ; on encore on ajoute les conditions initiales (scalaires) $\left\{\begin{array}{l} x_1(0)=x_{10} \\ x_2(0)=x_{20} \end{array}\right.$ donnés. ▟

Remarque 4.2 Une méthode de résolution consistera à découpler les relations (4.3) quand c'est possible, i.e. à diagonaliser A quand cette matrice est diagonalisable. ▟

4.2 Système différentiel homogène : solution générale et exemples de résolution

On se place dans le cas où $\vec{b}(t) = 0$. On cherche donc à résoudre le système différentiel homogène :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t).\vec{x}, \quad \text{avec} \quad \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0. \tag{4.5}$$

sur un intervalle I sur lequel A est continu.

On fera attention aux notations qui peuvent paraître malheureuses...

1-Etant donnée une solution $\vec{\varphi}$ de (4.5), on notera $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$, i.e les $\varphi_i = (\vec{\varphi})_i$ sont les composantes de $\vec{\varphi}$.

2- Quand on parlera de n solutions du système différentiel (4.5), on les notera $\vec{\varphi}_1$,...,$\vec{\varphi}_n$, chacune vérifiant $\vec{\varphi}_j\,'(t) = A(t)\vec{\varphi}_j(t)$.

Et pour chaque solution $\vec{\varphi}_j$ de (4.5), on notera $\vec{\varphi}_j = \begin{pmatrix} \varphi_{1j} \\ \vdots \\ \varphi_{nj} \end{pmatrix}$, i.e. que $\varphi_{ij} = (\vec{\varphi}_j)_i$ est la i-ème composante de $\vec{\varphi}_j$.

Cela permettra d'écrire la fonction matricielle (la résolvante) $R = \left(\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \end{pmatrix} \;\; \dots \;\; \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n \end{pmatrix} \right)$ dont la j-ème colonne est donnée par la fonction $\vec{\varphi}_j$ comme étant la fonction matricielle $R = [\varphi_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$: le j correspondant à la colonne, et le i à la ligne.

4.2.1 Calcul des solutions : la résolvante

On considère le système différentiel homogène (4.5).

Définition 4.3 Soient $\vec{\varphi}_j : I \to K^n$ n solutions du système différentiel homogène (4.5) (pour $j = 1, ..., n$). Si les $\vec{\varphi}_j$ sont des fonctions indépendantes, alors la fonction matricielle $R : I \to \mathbb{R}^{n^2}$ définie par $R = \left(\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \end{pmatrix} \;\; \dots \;\; \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n \end{pmatrix} \right)$, i.e. par $R(t) = \left(\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(t) \end{pmatrix} \;\; \dots \;\; \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n(t) \end{pmatrix} \right)$ pour tout $t \in I$, est appelée une résolvante du système différentielle. On dit également que R est une matrice wronskienne, ou encore que R est une matrice fondamentale.

Proposition 4.4 *Soient n solutions $(\vec{\varphi}_j)_{1\le j\le n}$ de (4.5) indépendantes, et soit R la résolvante associée. Alors si $\vec{\varphi}$ est solution de (4.5), il existe $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ t.q., pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\vec{\varphi}(t) = R(t).\vec{c}, \tag{4.6}$$

i.e.

$$\vec{\varphi}(t) = \left(\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(t) \end{pmatrix} \;\; \dots \;\; \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n(t) \end{pmatrix} \right).\vec{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{\varphi}_j(t). \tag{4.7}$$

Et le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$ est calculé à l'aide de la C.I. $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$, i.e. les constantes $c_j \in K$ sont calculées en résolvant le système :

$$R(t_0).\vec{c} = \vec{x}_0. \tag{4.8}$$

Preuve. Les $(\vec{\varphi}_j)_{1\le j\le n}$ sont n solutions indépendantes de S_{t_0} espace de dimension n : c'est une base de S_{t_0}. Et une solution $\vec{\varphi}$ de (4.5) est un élément de S_{t_0}, d'où (4.7), qui s'écrit également sous la forme (4.6).

Puis prenant la valeur en t_0 il vient $\vec{\varphi}(t_0) = R(t_0).\vec{c}$, i.e. $R(t_0).\vec{c} = \vec{x}_0$, où $\vec{c}$ est le vecteur de composantes c_i. Le fait que $R(t_0)$ est inversible est donné au paragraphe suivant. ▪

4.2.2 Test d'indépendance linéaire : le wronskien

On considère le système différentiel homogène (4.5).

Définition 4.5 Le wronskien en $t \in I$ est la fonction $w : I \to \mathbb{R}$ définie comme étant le déterminant de la résolvante (de la matrice wronskienne), i.e. est donné en tout $t \in I$ par :

$$w(t) = \det(R(t)).$$

Remarque 4.6 Rappel : n fonctions f_i sont indépendantes ssi, les α_i étant n scalaires :

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0) \quad \Longrightarrow \quad (\forall i = 1, ..., n, \quad \alpha_i = 0).$$

Ou encore ssi :

$$(\forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (\forall i = 1, ..., n, \quad \alpha_i = 0).$$

Et si par exmple on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$ avec $\alpha_n \neq 0$ alors $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_n} f_i = 0$, i.e. f_n est combinaison linéaire des autres f_i. ▪

Proposition 4.7 *Soit $t_0 \in I$ et, pour $j = 1, ..., n$, soient $\vec{\varphi}_j : I \to K^n$ n solutions du système différentiel homogène (4.5). On a : les $\vec{\varphi}_j$ sont indépendantes ssi les vecteurs $\vec{\varphi}_j(t_0)$ sont indépendants, i.e. ssi le wronskien en t_0 est non nul. I.e. les $\vec{\varphi}_j$ sont indépendantes ssi*

$$w(t_0) = \det(R(t_0)) = \det\left(\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(t_0) \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n(t_0) \end{pmatrix} \right) \neq 0.$$

Preuve. Notons $\vec{x}_{0j} = \vec{\varphi}_j(t_0)$, i.e. $(t_0, \vec{x}_{0j})$ est la C.I. pour $\vec{\varphi}_j$. Donc $\vec{\varphi}_j = \vec{\varphi}_{t_0,\vec{x}_{0j}} = \Phi_{t_0}(\vec{x}_{0j})$, voir proposition 3.11.

1- $\Leftarrow$: On suppose que les vecteurs $\vec{x}_{0j} = \vec{\varphi}_j(t_0)$ sont indépendants. Alors Φ_{t_0} étant un isomorphisme, les fonctions $\Phi_{t_0}(\vec{x}_{0j}) = \vec{\varphi}_{t_0,\vec{x}_{0j}} = \vec{\varphi}_j$ sont indépendantes.

2- $\Rightarrow$: On suppose les fonctions $\vec{\varphi}_j$ indépendantes, i.e. les $\vec{\varphi}_{t_0,\vec{x}_{0j}}$ indépendantes, i.e. les $\Phi_{t_0}(\vec{x}_{0j})$ indépendantes. Mais Φ_{t_0} bijectif : donc les $\vec{x}_{0j}$ sont indépendants. ▪

Remarque 4.8 Autre démonstration (sans passer explicitement par l'isomorphisme Φ_{t_0}) :

1- $\Leftarrow$: quitte à rénuméroter, si $\vec{\varphi}_n$ dépend des $\vec{\varphi}_j$ pour $j = 1, ..., n$, alors $\vec{\varphi}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{\varphi}_j$ et en particulier en t=t_0, on a $\vec{\varphi}_n(t_0) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{\varphi}_j(t_0)$, d'où $w(t_0) = 0$: les vecteurs $\vec{x}_{01}$,...,$\vec{x}_{0n}$ sont dépendants. Donc, si les $\vec{x}_{01}$,...,$\vec{x}_{0n}$ sont indépendants alors les $\vec{\varphi}_j$ sont indépendantes.

2- $\Rightarrow$: si les $\vec{x}_{0j}$ sont dépendants, alors, quitte à renuméroter, on peut supposer que $\vec{x}_{0n} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{x}_{jn}$, i.e. que $\vec{\varphi}_n(t_0) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{\varphi}_j(t_0)$. Mais alors, posant $\vec{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{\varphi}_j(t)$ pour tout $t \in I$, la solution $\vec{\psi}$ est l'unique solution (théorème de Cauchy–Lipschitz) qui en t_0 vaut $\vec{\varphi}_n(t_0)$. Donc $\vec{\psi} = \vec{\varphi}_n$ et la fonction $\vec{\varphi}_n$ est donc combinaison linéaire des $\vec{\varphi}_j$ pour $j = 1, ..., n$. Donc, si les $\vec{\varphi}_j$ sont indépendantes, alors les $\vec{x}_{0j}$ sont indépendants. ▪

On en déduit :

Corollaire 4.9 *Si le wronskien est nul en un point $t_0 \in I$, alors il est nul en tout point $t \in I$, et s'il est non nul en un point alors il est non nul en tout point :*

$$\exists t \in I : w(t) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad w(t) \neq 0,$$

et :

$$\exists t \in I : w(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad w(t) = 0.$$

Preuve. S'il existe $t \in I$ t.q. $w(t) = 0$ on le renomme $t = t_0$ et on le prend pour la C.I. Et le théorème précédent donne que les φ_j sont dépendantes, i.e. que (quitte à renuméroter) $\vec{\varphi}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{\varphi}_j$ pour des $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Donc pour tout $u \in I$ on a $\vec{\varphi}_n(u) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{\varphi}_j(u)$ et donc $w(u) = 0$. Donc s'il existe un t t.q. $w(t) = 0$ alors pour tout t on a $w(t) = 0$.

Et s'il existe un t t.q. $w(t) \neq 0$ c'est forcément vrai pour tout t : sinon il existerait t_0 t.q. $w(t_0) = 0$ et on vient de voir que cela impliquerait $w(t) = 0$ pour tout t : c'est absurde. ▪

Exercice 4.10 On note $\vec{e}_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ le j-ème vecteur de base de K^n. Soit $t_0 \in I$. Montrer que les n fonctions solutions $\vec{\varphi}_j$ du système différentiel homogène (4.5) qui satisfont aux conditions initiales $\vec{\varphi}_j(t_0) = \vec{e}_j$ sont indépendantes.

Réponse. On a $w(t_0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{e}_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = I$, la matrice identité de K^n, dont le déterminant vaut $1 \neq 0$. Donc les solutions $\vec{\varphi}_{t_0,\vec{e}_i}$ sont indépendantes. En particulier pour tout t on a $w(t) \neq 0$.

N.B. : Cependant, ces fonctions $\vec{\varphi}_{t_0,\vec{e}_i}$ ne sont pas forcément simples à calculer : on préferera souvent trouver une base $(\vec{\varphi}_i)$ simple à trouver, et en général les $\vec{\varphi}_i$ ne vérifieront pas la condition initiale $\vec{\varphi}_i(t_0)=\vec{e}_i$. ▪

Exercice 4.11 Soient $\vec{\psi}_j$ les solutions de (4.5) pour les C.I. $\vec{\psi}_j(t_0) = \vec{e}_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ le j-ème vecteur canonique de base. Soit $R_{t_0} : t \to \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1(t) \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{\psi}_n(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ la résolvante associée.

Soient $\vec{\varphi}_j$ les solutions de (4.5) pour les C.I. $\vec{\varphi}_j(t_0) = \vec{a}_j$ où $(\vec{a}_j)_{i=1,...,n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comment calculer la résolvante $R : t \to \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(t) \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$?

Réponse. Comme $\vec{\varphi}_i$ est solution de (4.5), il existe $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\vec{\varphi}_i = R_{t_0}.\vec{c}$. Et $\vec{\varphi}(t_0) = R_{t_0}(t_0).\vec{c} = I.\vec{c}$, donc $\vec{\varphi}_i = R.\vec{a}_j$, i.e. pour tout $t \in I$ on a $\vec{\varphi}_i(t) = R(t).\vec{a}_j$. Donc $R(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{t_0}(t).\vec{a}_1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} R_{t_0}(t).\vec{a}_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, i.e. $R(t) = R_{t_0}(t).P$ où $P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{a}_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage. ▪

Exemple 4.12 Dans le cas 1-D, le système différentiel est une équation différentielle et (4.5) s'écrit $x' = a(t)x$. Une résolvante est donc la matrice 1*1 donnée par (2.5). ▪

4.2.3 Exemple de résolution, cas A à coefficients constants et diagonalisable

On se donne une matrice constante A et le système différentiel :

$$\vec{x}' = A.\vec{x}. \tag{4.9}$$

Ici $I = \mathbb{R}$ est l'intervalle maximale de la solution (donnée par le théorème de Cauchy–Lipschitz car une fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$).

Proposition 4.13 *Soit $\vec{v} \in K^n$ vecteur constant non nul, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $\vec{\varphi} : K \to K^n$ donnée par $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$.*

On a $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ est solution de (4.9) ssi $(\lambda, \vec{v}) \in K \times K^n$ est un couple "valeur propre–vecteur propre' de A.

Et si A est diagonalisable de valeurs propres les λ_j associés aux vecteurs propres les $\vec{v}_j$ (pour $j = 1, ..., n$) où les $\vec{v}_j$ forment une base de K^n, alors une résolvante est donnée par :

$$R(t) = \begin{pmatrix} (e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1) & \dots & (e^{\lambda_n t}\vec{v}_n) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Preuve. Supposons que $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ est solution avec $\vec{v} \neq 0$. Par dérivation il vient :

$$\vec{\varphi}\,'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v},$$

avec $\vec{\varphi}$ solution donc $\vec{\varphi}\,'(t) = A.\vec{\varphi}(t)$ donc ici $\vec{\varphi}\,'(t) = A.(e^{\lambda t}\vec{v}) = e^{\lambda t}A\vec{v}$. On en déduit que $\lambda\vec{v} = A.\vec{v}$, et donc que $(\lambda, \vec{v}) \in K \times K^n$ est un couple 'valeur propre–vecteur propre' de A.

Réciproquement, soit $(\lambda, \vec{v})$ un couple 'valeur propre–vecteur propre' de A. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$. Alors on a immédiatement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'une part :

$$\vec{\varphi}\,'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = \lambda\vec{\varphi}(t),$$

et d'autre part :

$$A.\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}A.\vec{v} = e^{\lambda t}\lambda\vec{v} = \lambda\vec{\varphi}(t).$$

Et on a bien $\vec{\varphi}\,'(t) = A.\vec{\varphi}(t)$, i.e. $\vec{\varphi}$ est solution.

Enfin, si A est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres $(\vec{v}_j)_{j=1,...,n}$, et les fonctions $t \in \mathbb{R} \to \vec{\varphi}_j(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j \in K^n$ pour $j = 1, ..., n$ sont indépendantes car en $t = 0$ les vecteurs $\vec{\varphi}_j(0) = \vec{v}_j$ sont indépendants (donc le wronskien est non nul). D'où la résolvante. ▪

Exemple 4.14 Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le système $\vec{x}' = A\vec{x}$ avec condition initiale $(0, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix})$, où $\alpha, \beta \in K$, s'écrit :

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1 + 2x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = \alpha, \\ x_2(0) = \beta, \end{cases}$$

et l'intervalle d'étude est $I = \mathbb{R}$ car A fonction matricielle constante est continue sur tout $\mathbb{R}$. La matrice A a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1$ associée à $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\lambda_2 = 3$ associée à $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit 2 solutions indépendantes :

$$\vec{\varphi}_1(t) = e^t \vec{v}_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\varphi}_2(t) = e^{3t} \vec{v}_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Une résolvante est donc donnée par la fonction matricielle R définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$R(t) = \left(\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(t) \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_2(t) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que les solutions sont indépendantes car les vecteurs C.I. $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont indépendants : en effet les valeurs propres associées sont distinctes, ou encore directement :

$$w(0) = \det(R(0)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Et toute solution est donnée sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de $\vec{\varphi}_1$ et de $\vec{\varphi}_2$: pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{\varphi}(t) = c_1 \vec{\varphi}_1(t) + c_2 \vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

qu'on peut écrire sous la forme $\vec{\varphi}(t) = R(t).\vec{c}$.

Étant donné une condition initiale (vectorielle) $\vec{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on peut alors calculer c_1 et c_2 :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{\varphi}(0) = R(0).\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

D'où $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, soit $c_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ et $c_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$: la solution cherchée, correspondant aux conditions initiales $\vec{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est donc :

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) e^t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) e^{3t} \\ -\frac{1}{2}(\alpha - \beta) e^t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) e^{3t} \end{pmatrix},$$

i.e. les fonctions $t \to x_1(t)$ et $t \to x_2(t)$ cherchées sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta) e^t + \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) e^{3t}, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{2}(\alpha - \beta) e^t + \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) e^{3t}. \end{cases}$$

▲

Exercice 4.15 Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3, \\ x_2' = x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_2 + x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = \alpha, \\ x_2(0) = \beta, \\ x_3(0) = \gamma. \end{cases}$$

Commencer par le mettre sous la forme $\vec{x}' = A.\vec{x}$, montrer que les valeurs propres de A sont 1, $1 \pm \sqrt{2}$ associées par exemple resp. aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$, et donner 3 fonctions solutions générales, une résolvante et déterminer la solution cherchée. ▲

Exercice 4.16 Résoudre le système $\vec{x}' = A\vec{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs propres sont -3, et 1 (double) associées par exemple resp. aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donner 3 fonctions solutions et une résolvante. ▪

Exercice 4.17 Soit A une matrice diagonalisable, soit $(\vec{v}_j)_{j=1,...,n}$ des vecteurs propres de A formant une base de $\mathbb{R}^n$, et soit P la matrice dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs $\vec{v}_j$ (matrice de passage). Prouver que $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale des valeurs propres de A.

Réponse. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ la matrice diagonale des valeurs propres de A. On veut que $AP = PD$. Or on a $AP = A\Big((\vec{v}_1)...(\vec{v}_n)\Big) = \Big((A\vec{v}_1)...(A\vec{v}_n)\Big)$, et on a $PD = \Big((\vec{v}_1)...(\vec{v}_n)\Big)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & & \\ & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Big((\lambda_1\vec{v}_1)...(\lambda_n\vec{v}_n)\Big)$. Et on a $A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$. Donc on a bien $AP = PD$. ▪

Exercice 4.18 Soit A une matrice diagonale. Trouver une résolvante qui est une matrice diagonale.

Réponse. 1- Première méthode : si $A = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ est diagonale alors les vecteurs $\vec{e}_i$ de la base canonique sont vecteurs propres associée. Donc la résolvante en t est la matrice diagonale $R(t) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_i t})$.

2- Deuxième méthode : si $A = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ est diagonale alors le système $\vec{x}' = A\vec{x}$ est totalement découplé : on doit résoudre $x_i' = \lambda_i x_i$ pour tout $i = 1, ..., n$, d'où $x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$ est une solution générique. Et on a immédiatement $\vec{\varphi}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{e}_i$ solution de $\vec{x}' = A\vec{x}$. D'où le résultat. ▪

Exercice 4.19 Montrer que si A est diagonalisable, le changement de base vers une base $(\vec{v}_i)_{i=1,...,n}$ formée de vecteurs propres de A rend le système $\vec{x}' = A\vec{x}$ totalement découplé.

Réponse. Soit P la matrice de passage (les colonnes sont les vecteurs propres de A choisis) et $D = P^{-1}AP$ la matrice diagonale associée à A. On doit donc résoudre $\vec{x}' = PDP^{-1}\vec{x}$, soit $P^{-1}\vec{x}' = DP^{-1}\vec{x}$. On pose $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$, et on a $\vec{y}' = D\vec{y}$. Ce système est totalement découplé, d'où une base triviale $\vec{y}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{e}_i$ de solutions. D'où $\vec{x}_i(t) = P\vec{y}_i(t) = e^{\lambda_i t}P\vec{e}_i$, et on retrouve $\vec{x}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ où $\vec{v}_i = P\vec{e}_i$ est le i-ème vecteur propre. ▪

4.2.4 Exemple de résolution, cas A à coefficients constants et non diagonalisable

On se donne une matrice constante A et le système différentiel $\vec{x}' = A\vec{x}$: ici $I = \mathbb{R}$.

Proposition 4.20 *On suppose que A a une valeur propre double λ_1 associée au vecteur propre $\vec{v}_1 \neq 0$ telle que l'espace propre associé soit de dimension 1 , i.e.* $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1\}$ *(donc A n'est pas diagonalisable). Dans ce cas on définit le vecteur propre généralisé $\vec{v}_2$ associé à la valeur propre λ_1 par :*

$$(A - \lambda_1 I).\vec{v}_2 \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad (A - \lambda_1 I)^2.\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Alors, la fonction définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_1 t}\,(I + (A - \lambda_1 I)\,t).\vec{v}_2 \tag{4.11}$$

est solution de $\vec{x}' = A\vec{x}$ sur $\mathbb{R}$, et est indépendante de la solution $\vec{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1$.

Preuve. Montrons que $\vec{\varphi}_2$ donnée par (4.11) est solution. On a d'une part :

$$\vec{\varphi}_2{}'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\,(I + (A - \lambda_1 I)\,t).\vec{v}_2 + e^{\lambda_1 t}\,(A - \lambda_1 I).\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{\varphi}_2(t) + e^{\lambda_1 t}\,(A - \lambda_1 I).\vec{v}_2,$$

et d'autre part, comme $A = (A - \lambda_1 I) + \lambda_1 I$:

$$\begin{aligned} A.\vec{\varphi}_2(t) &= (A - \lambda_1 I).\vec{\varphi}_2(t) + \lambda_1 I.\vec{\varphi}_2(t) \\ &= (A - \lambda_1 I).e^{\lambda_1 t}\,(I + (A - \lambda_1 I)\,t).\vec{v}_2 + \lambda_1\vec{\varphi}_2(t) \\ &= e^{\lambda_1 t}\,(A - \lambda_1 I).\vec{v}_2 + 0 + \lambda_1\vec{\varphi}_2(t), \end{aligned}$$

car $(A - \lambda_1 I)^2.\vec{v}_2 = 0$. Donc on a bien $\vec{\varphi}_2{}'(t) = A.\vec{\varphi}_2(t)$.

Puis soit $R(t) = \Big((\vec\varphi_1(t))\ (\vec\varphi_2(t))\Big)$. On a $\det(R(0)) = \det\Big((\vec v_1)(\vec v_2)\Big)$ et $\vec v_1$ et $\vec v_2$ sont indépendants (sinon $\vec v_2 \in \mathrm{Vect}\{\vec v_1\}$ ce qui est faux car $(A-\lambda_1 I).\vec v_2 \neq \vec 0$). Donc $\det(R(0)) \neq 0$ et $R(t)$ est une résolvante : $\vec\varphi_1$ et $\vec\varphi_2$ sont indépendantes. ∎

Exemple 4.21 Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice (bloc de Jordan) n'est pas diagonalisable : la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est double et associée au vecteur propre $\vec v_1 = \vec e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendrant l'espace propre $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}\{\vec v_1\}$.

Une première solution est donnée par la proposition 4.13 :

$$\vec\varphi_1(t) = e^t \vec v_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puis $(A-I)^2 = 0$, d'où un vecteur $\vec v_2 \in \mathrm{Ker}((A-I)^2) = \mathbb{R}^2$ tel que $\vec v_2 \notin \mathrm{Ker}(A-I)$ est donné par exemple par $\vec v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où une deuxième solution (indépendante de $\vec\varphi_1$) est donnée par la proposition 4.20 :

$$\vec\varphi_2(t) = e^t\,(I + (A-I)\,t).\vec v_2 = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

D'où une résolvante $R(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$, et toute solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$\vec\varphi(t) = R(t).\vec c = c_1\vec\varphi_1(t) + c_2\vec\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2te^t \\ c_2e^t \end{pmatrix},$$

où $\vec c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si on impose la condition initiale $(0, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix})$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ayant $\vec\varphi = R.\vec c$, il vient $\vec\varphi(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, d'où $c_1 = \alpha$ et $c_2 = \beta$. Et la solution cherchée est $\vec\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta te^t \\ \beta e^t \end{pmatrix}$. ∎

Exercice 4.22 Résoudre l'équation différentielle $x''+2x'+x = 0$ avec les C.I. $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$ à l'aide du système différentiel d'ordre 1 associé.

Réponse. On pose $x_1 = x$ et $x_2 = x_1'$. On doit donc résoudre $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caratéristique de A est $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)(-2-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ (noter la similitude avec $x'' + 2x' + x$). D'où $p(\lambda) = (\lambda+1)^2$ et une valeur propre double $\lambda = -1$. Et $(A + I)\vec v = 0$ donne par exemple $\vec v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et tout autre solution est proportionnelle à $\vec v_1$. Ici A n'est pas diagonalisable. Puis $(A+I)^2 = 0$. Choisissons $\vec v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou tout autre vecteur indépendant de $\vec v_1$. On obtient $(I + (A+I)\,t).\vec v_2 = \vec v_2 + \begin{pmatrix} t & t \\ -t & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$, d'où la résolvante $R(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$, d'où la solution générale $\vec x(t) = R(t)\vec c$ avec $\vec c \in \mathbb{R}^2$ qcq, d'où en particulier $x_1(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$ est la solution générale cherchée.

Où si on préfère $x(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$ est la solution générale pour $a, b \in \mathbb{R}$. La C.I. $x(0) = 0$ impose $a = 0$, d'où $x(t) = bte^{-t}$, d'où $x'(t) = (b - bt)e^{-t}$, et la C.I. $x'(0) = 1$ impose $b = 1$. Finalement $x(t) = te^{-t}$ est la solution cherchée.

Noter qu'on peut également calculer les constantes c_1 et c_2 à l'aide du système : $\begin{pmatrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{pmatrix} = R(0).\vec c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ qui donne $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$, d'où $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$. On retrouve la position $x_1(t) = te^{-t}$ et on a en plus la vitesse $x_2(t) = (1-t)e^{-t}$. ∎

Remarque 4.23 La solution $\vec{\varphi}_2$ trouvée $= e^{\lambda_1 t}\,(I+(A-\lambda_1 I)\,t).\vec{v}_2$ n'a rien de mystérieux : on va voir qu'une résolvante est donnée par $R(t)=e^{At}$ où e^B est l'exponentielle de la matrice B définie par $e^B = I + t\,B + \frac{t^2}{2!}\,B^2 + ...$ D'où toute solution est donnée par $\vec{\varphi}(t) = e^{At}.\vec{c} = e^{\lambda_1 t}e^{(A-\lambda_1 I)t}.\vec{c}$, où $\vec{c}$ est un vecteur quelconque de K^2. Comme :

$$e^{(A-\lambda_1 I)t} = I + t\,(A{-}\lambda_1 I) + \frac{t^2}{2!}\,(A{-}\lambda_1 I)^2 + ...,$$

et ayant choisit pour vecteur $\vec{v}_2$ un vecteur vérifiant $(A-\lambda_1 I)^2.\vec{v}_2 = 0$, il vient :

$$e^{(A-\lambda_1 I)t}.\vec{v}_2 = I.\vec{v}_2 + t(A-\lambda_1 I).\vec{v}_2 + 0... = (I + t(A-\lambda_1 I)).\vec{v}_2.$$

Et la solution proposée (4.11) n'est autre que $\vec{\varphi}_2(t) = e^{At}.\vec{v}_2 = e^{\lambda_1 t}\,e^{(A-\lambda_1 I)t}.\vec{v}_2$. ∎

Exemple 4.24 Soit $\theta\in\mathbb{R}$, et soit $A = \begin{pmatrix} 1-a\cos\theta\sin\theta & a\cos^2\theta \\ -a\sin^2\theta & 1+a\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$. Résoudre $\vec{x}' = A\vec{x}$. Traitez le cas $\theta = \frac{\pi}{4}$, avec soit $a=4$ soit $a=2$.

(Remarque : on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A est construite comme $= R_\theta.\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.R_\theta^{-1}$.) ∎

4.3 Quelques propriétés de la résolvante

On rappelle que la résolvante (ou matrice fondamentale, ou matrice wronskienne) du système différentiel homogène (4.5) une fonction matricielle $R : I \to K^{n^2}$ dont les colonnes sont formées par n solutions indépendantes de (4.5), voir définition 4.3, et que toute solution du système différentiel homogène (4.5) est de la forme $\vec{\varphi} : t\in I \to \vec{\varphi}(t) = R(t)\vec{c} \in K^n$ où $\vec{c}\in K^n$ (vecteur constant).

Et qu'une résolvante n'est pas unique, voir exemple 4.11.

La définition de la résolvante donne :

Corollaire 4.25 *Une résolvante R de (4.5) satisfait à :*

$$R' = AR.$$

Preuve. Egalité des colonnes : R est de la forme $t\in I \to R(t) = \left(\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1(t)\end{pmatrix} \;\cdots\; \begin{pmatrix}\vec{\varphi}_n(t)\end{pmatrix}\right)$. Donc $R'(t) = \left(\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1{}'(t)\end{pmatrix} \;\cdots\; \begin{pmatrix}\vec{\varphi}_n{}'(t)\end{pmatrix}\right)$, et $AR(t) = \left(\begin{pmatrix}A\vec{\varphi}_1(t)\end{pmatrix} \;\cdots\; \begin{pmatrix}A\vec{\varphi}_n(t)\end{pmatrix}\right)$. On a bien $R' = AR$ sur I. ∎

Notation. On note $R_{t_0} : t \to R_{t_0}(t)$ la résolvante telle que $R_{t_0}(t_0) = I$ matrice identité de K^n, i.e. on note R_{t_0} la solution de l'équation différentielle $R' = AR$ pour la condition initiale $R_{t_0}(t_0) = I$.

Donc les colonnes de R_{t_0} sont formées des solutions $\vec{\varphi}_j$ qui vérifient la condition initiale $\vec{\varphi}_j(0){=}\vec{e}_j$ (le j-ième vecteur de base), i.e. $\vec{\varphi}_j = \vec{\varphi}_{t_0,\vec{e}_j}$.

Si on connaît cette résolvante R_{t_0}, le calcul d'une solution de (4.5) pour la condition initiale $\vec{x}(t_0){=}\vec{x}_0$ est donné par :

Corollaire 4.26 *La solution du système différentiel homogène (4.5) pour la condition initiale $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ est donnée par, pour tout $t\in I$:*

$$\vec{\varphi}(t) = R_{t_0}(t).\vec{x}_0.$$

Preuve. La fonction définie pour tout $t\in I$ par $\vec{\varphi}(t) = R_{t_0}(t)\vec{x}_0$ est solution (comme combinaison linéaire de solutions). Comme en t_0 elle prend la valeur $\vec{\varphi}(t_0) = I.\vec{x}_0 = \vec{x}_0$, c'est la solution cherchée. ∎

Exercice 4.27 Soit le système :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Le mettre sous la forme $\vec{x}' = A\vec{x}$. Donner la matrice A, et montrer que la solution générale est donnée par $\vec{x}(t) = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout $c_1, c_2 \in K$. Donner une résolvante $R(t)$, et trouver la résolvante R_0.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont -1, de vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, et 2, de vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où une résolvante $R(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$, et pour tout $\vec{c} \in K^2$, la fonction $\vec{\varphi}(t) = R(t)\vec{c}$ est solution.

La résolvante $R_0(t)$ est celle vérifiant $R_0(0) = I$. On veut donc trouver les solutions $\varphi_j(t) = R(t)\vec{c}_j$ pour $j = 1, 2$ (i.e. on veut trouver les $\vec{c}_j$) vérifiant $\varphi_j(0) = \vec{e}_j = R(0)\vec{c}_j$.

On a $R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $R(0)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{c}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\varphi_1(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} + 2e^{2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$ et $\varphi_2(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{2t} \\ 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$, d'où
$R_0(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} + 2e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{2t} & 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$ est la résolvante cherchée (on vérifie que $R_0(0) = I$). ∴

Exercice 4.28 Montrer la propriété suivante de la résolvante $R_{t_0}(t) = R(t, t_0)$: si t_0, t_1 et t sont dans I, alors :

$$R(t, t_0) = R(t, t_1)R(t_1, t_0)$$

(produit matriciel), et $R(t, t_0) = R_{t_0}(t)$ est un isomorphisme d'inverse $R(t_0, t) = R_t(t_0)$.

Réponse. Il suffit de vérifier que $R(t, t_0)$ et $S(t) = R(t, t_1)R(t_1, t_0) = R_{t_1}(t).R_{t_0}(t_1)$ satisfont à la même équation différentielle $R' = AR$ avec la même condition initiale $S(t_0) = I = R(t_0, t_0)$.

1- $R(t_1, t_0)$ est une matrice constante, et donc $S'(t) = R_{t_1}'(t).R(t_1, t_0) = A.R_{t_1}(t).R(t_1, t_0) = A.S(t)$. Et $R_{t_0}'(t) = A.R_{t_0}(t) = A.R_{t_1}(t).R(t_1, t_0) = A.R_{t_0}(t)$. Donc S et R_{t_0} satisfont à la même équation différentielle.

2- $R(t_1, t_0).\vec{x}_0 = R_{t_0}(t_1).\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_1)$ où $\vec{\varphi} : t \to \vec{\varphi}(t) = R_{t_0}(t).\vec{x}_0$ est la solution pour la C.I. $\vec{x}_0$ puisque $\vec{\varphi}(t_0) = R_{t_0}(t_0).\vec{x}_0 = \vec{x}_0$. Puis $R(t_0, t_1).(R(t_1, t_0).\vec{x}_0) = R_{t_1}(t_0).\vec{\varphi}(t_1) =^{\text{noté}} \vec{\psi}(t_0)$ est la valeur de la solution $\vec{\psi} : t \to \vec{\psi}(t) = R_{t_1}(t).\vec{\varphi}(t_1)$ qui vérifie $\vec{\psi}(t_1) = I.\vec{\varphi}_1(t_1) = \vec{\varphi}(t_1)$. Comme $\vec{\varphi}$ et $\vec{\psi}$ sont deux solutions pour une même condition initiale au temps t_1, on en déduit que $\vec{\varphi} = \vec{\psi}$. Et donc $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0) = \vec{x}_0$, et donc que $R(t_0, t_1).(R(t_1, t_0).\vec{x}_0) = \vec{x}_0 = S(t_0).\vec{x}_0$.

Comme $R(t_0, t_0) = I$ par définition de R_{t_0}, on déduit que R et S satisfont au même système différentiel avec la même C.I. et donc que $R = S$. ∴

Exercice 4.29 Soit le système différentiel découplé :

$$\vec{z} = A.\vec{z}, \qquad A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où A et B sont des matrices carrées données. Montrer qu'une résolvante est donnée par $R_A = \begin{pmatrix} R_B & 0 \\ 0 & R_C \end{pmatrix}$, où R_B (resp. R_C) est une résolvante de $\vec{x}' = B.\vec{x}$ (resp. de $\vec{y}' = C.\vec{y}$).

Preuve. La fonction matricielle $R(t) = \begin{pmatrix} R_B(t) & 0 \\ 0 & R_C(t) \end{pmatrix}$ satisfait trivialement $R' = A.R$, est inversible (d'inverse immédiat), donc est une résolvante. ∴

∴

4.4 Système différentiel non homogène et variation de la constante

4.4.1 Espace des solutions

On s'intéresse maintenant au système différentiel non homogène (4.3) :

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t), \tag{4.12}$$

avec $\vec{b} \neq 0$, et A et $\vec{b}$ fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$. On rappelle le théorème général pour les équations différentielles :

Théorème 4.30 *Si R est une résolvante pour le système différentiel homogène $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ et si $\vec{\varphi}_p : I \to K^n$ est une solution particulière du système différentiel non homogène (4.12), alors pour tout $\vec{c} \in K^n$, $\vec{\varphi} : t \in I \to \vec{\varphi}(t) = R(t)\vec{c} + \vec{\varphi}_p(t) \in K^n$ est solution de (4.12) et c'est la solution générale. Donc l'espace des solutions de (4.12) est un espace affine de dimension n.*

Preuve. En effet, la solution $\vec{\varphi}$ de (4.12) vérifie $\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_p$ est solution du système différentiel homogène (4.5), d'où il existe $\vec{c} \in K^n$ tel que $\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_p = R.\vec{c}$. Et réciproquement, si $\vec{c} \in K^n$ alors $\vec{\varphi}_p + R.\vec{c}$ est trivialement solution de (4.12). ▪

4.4.2 Calcul d'une solution particulière : variation de la constante

On veut trouver une solution particulière $\vec{\varphi}_p$ sous la forme $\vec{\varphi}_p(t) = R(t)\vec{c}(t)$: $R(t)$ étant inversible, si on connaît $\vec{c}$ on connaît $\vec{\varphi}_p$. On a :

$$\vec{\varphi}_p{}'(t) = A\vec{\varphi}_p(t) + \vec{b}(t) \quad \Rightarrow \quad R'(t)\vec{c}(t) + R(t)\vec{c}\,'(t) = AR(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t),$$

et puisque la résolvante satisfait à l'équation différentielle homogène $R' = AR$ on en déduit :

$$R(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t). \tag{4.13}$$

D'où ($R(t)$ étant inversible) :

$$\vec{c}\,'(t) = R^{-1}(t)\vec{b}(t).$$

C'est un système différentiel immédiat à intégrer (ligne par ligne) :

$$\vec{c}(t) = \vec{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)\vec{b}(\tau)\,d\tau$$

En particulier pour $\vec{c}(t_0) = 0$, on en déduit la solution particulière $\vec{\varphi}_p(t) = R(t).\vec{c}(t)$, i.e. :

$$\vec{\varphi}_p(t) = R(t)\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)\vec{b}(\tau)\,d\tau.$$

(C'est une solution particulière correspondant à la condition initiale $\vec{\varphi}_p(t_0) = 0$.) On vérifie effectivement que $\vec{\varphi}_p$ est bien solution : on a :

$$\vec{\varphi}_p{}'(t) = R'(t)\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)\vec{b}(\tau)\,d\tau + R(t)R^{-1}(t)\vec{b}(t),$$

avec :

$$A\vec{\varphi}_p(t) = AR(t)\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)\vec{b}(\tau)\,d\tau = R'(t)\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)\vec{b}(\tau)\,d\tau,$$

d'où $\vec{\varphi}_p{}'(t) = A\vec{\varphi}_p(t) + \vec{b}(t)$.

Exercice 4.31 Plutôt que de calculer $R^{-1}(t)$ (coût élevé pour n grand), peut-on trouver $\vec{c}(t)$ à l'aide de la méthode LU ?

Réponse. On doit résoudre (4.13), i.e. $R(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t)$, soit $L(t)U(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t)$. On pose $\vec{z}(t) = U(t)\vec{c}\,'(t)$, d'où $L(t)z(t) = \vec{b}(t)$ qu'on résout séquentiellement : d'abord z_1, puis z_2, puis... z_n (descente). Puis on résout $U(t)\vec{c}\,'(t) = z(t)$ séquentiellement : d'abord c_n', puis c_{n-1}', puis... c_1'. Puis on intègre.

Noter qu'il faut faire une décompostion $LU = L(t)U(t)$ de $R(t)$ à chaque instant t. Une autre méthode de résolution est proposée au paragraphe suivant. ▪

Exercice 4.32 Résoudre le système différentiel :

$$\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

▪

4.4.3 Cas A diagonalisable, diagonalisation et variation de la constante

Pour calculer une solution particulière (pour le système différentiel non homogène), la méthode de variation de la constante n'est pas forcément très agréable avec la résolvante R trouvée, puisqu'il faut commencer par résoudre (4.13) (ou bien calculer R^{-1}). Il serait plus facile (et rapide) d'avoir une matrice R diagonale.

C'est possible lorsque A est diagonalisable à coefficients constants : $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ est une matrice diagonale quand P est la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres associés.

Le problème (4.12) s'ecrit :

$$\vec{x}' = PDP^{-1}\vec{x} + \vec{b},$$

soit de manière équivalente (P étant inversible) :

$$P^{-1}\vec{x}' = DP^{-1}\vec{x} + P^{-1}\vec{b},$$

et on pose $\vec{z} = P^{-1}\vec{x}$, i.e. $\vec{x} = P\vec{z}$, et $\vec{g} = P^{-1}\vec{b}$: on cherche donc $\vec{z}$ solution de, sachant P matrice constantes (A est supposée constante) :

$$\vec{z}' = D\vec{z} + \vec{g}$$

La matrice D étant diagonale, on s'est ramené à résoudre un système complètement découplé, i.e. on est ramené à résoudre les n équations différentielles scalaires :

$$z_i' = \lambda_i z_i + g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Il est facile de trouver les solutions générales (équations différentielles scalaires).

Il reste à calculer $\vec{x} = P\vec{z}$ ce qui donne la solution particulière cherchée.

Exercice 4.33 Résoudre le système $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4e^{3t} \end{pmatrix}$.

Réponse. A est une matrice constante et $\vec{b}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$. L'intervalle d'étude est donc $I = \mathbb{R}$.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$ associées aux vecteurs propres $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ associée à la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{g} = P^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 - e^{3t} \\ -2 + 3e^{3t} \end{pmatrix}$. On résout alors les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} z_1'(t) = 2z_1 + 2 - e^{3t}, \\ z_2'(t) = 6z_2 - 2 + 3e^{3t}. \end{cases}$$

Calculer alors $z_1(t)$ et $z_2(t)$ et en déduire $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. ▲

Remarque 4.34 On rappelle que lorsque A est symétrique réelle, on peut choisir des vecteurs propres formant une base orthonormale, et la matrice de passage P est alors une matrice orthogonale, i.e. telle que $P^{-1} = P^t$: et P^{-1} est donc obtenue sans calcul. Ce n'est pas le cas de l'exercice précédent. ▲

4.5 Passage d'une solution complexe à une solution réelle

Lorsqu'un système différentiel $\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b}$ est à coefficients réels, i.e. A matrice réelle et $\vec{b}$ fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, la solution cherchée doit être donnée sous forme réelle. Mais quand les valeurs propres de A sont complexes, les solutions trouvées avec les calculs des sections précédentes sont à valeurs complexes. À partir des solutions complexes, il s'agit alors de retrouver les solutions réelles.

Proposition 4.35 *Si A matrice réelle a une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ non réelle, alors le vecteur propre associé $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ est non réel. De plus $\bar{\lambda}$ est également valeur propre de A associée au vecteur propre $\bar{\vec{v}}$, et $\vec{v}$ et $\bar{\vec{v}}$ sont indépendants (deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont indépendants).*

Preuve. On a $A.\vec{v} = \lambda\vec{v}$ avec A réel. Donc si $\vec{v}$ est réel ($\in \mathbb{R}^n$) alors λ est réel, et donc si $\lambda \notin \mathbb{R}$ alors $\vec{v} \notin \mathbb{R}^n$.

Puis l'équation conjuguée de $A.\vec{v} = \lambda\vec{v}$ est $\bar{A}.\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}}$, et on a $A = \bar{A}$ (car A est réelle) d'où $A.\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}}$, i.e. $\bar{\vec{v}}$ est vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$.

Enfin, si $\vec{v}$ et $\bar{\vec{v}}$ sont dépendants, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\vec{v} = c\bar{\vec{v}}$, et donc $A.\vec{v} = \lambda\vec{v}$ et $A.\vec{v} = cA.\bar{\vec{v}} = c\bar{\lambda}\bar{\vec{v}}$, et donc $\lambda\vec{v} = c\bar{\lambda}\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\vec{v}$, et donc $\lambda = \bar{\lambda}$ (un vecteur propre est non nul), donc $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou encore $\vec{v}$ et $\bar{\vec{v}}$ sont associés à la même valeur propre), contraire à l'hypothèse. ∴

Exemple 4.36 Soit à résoudre le système différentiel réel :

$$\vec{x}' = A\vec{x} + b, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -4 + 2i$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -4 - 2i$, associées aux vecteurs propres par exemple $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \bar{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit la solution homogène générale : $\vec{\varphi}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$ où c_1 et c_2 sont complexes.

Mais le problème était posé dans $\mathbb{R}$, cette solution complexe $\vec{\varphi}_h$ trouvée n'est pas satisfaisante : on souhaite trouver des solutions réelles. Il suffit pour cela de trouver deux solutions indépendantes réelles du système différentiel homogène. ∴

Proposition 4.37 *Pour le système différentiel homogène $\vec{x}' = A\vec{x}$, lorsque A est une matrice réelle dont une valeur propre $\lambda = \alpha + i\beta$ est complexe (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$) associée au vecteur propre $\vec{v} = \vec{x} + i\vec{y}$ (avec $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^n$) : on forme les deux solutions complexes indépendantes $\vec{\varphi}_{c1}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ et $\vec{\varphi}_{c2}(t) = \bar{\vec{\varphi}}_{c1}(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\vec{v}}$ (pour tout $t \in I$), et deux solutions réelles sont données sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_{r1} &= \mathrm{Re}(\vec{\varphi}_1) \qquad (= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_{c1} + \bar{\vec{\varphi}}_{c1}) = e^{\alpha t}(\vec{x}\cos(\beta t) - \vec{y}\sin(\beta t))), \\ \vec{\varphi}_{r2} &= \mathrm{Im}(\vec{\varphi}_1) \qquad (= \frac{1}{2i}(\vec{\varphi}_{c1} - \bar{\vec{\varphi}}_{c1}) = e^{\alpha t}(\vec{x}\sin(\beta t) + \vec{y}\cos(\beta t))). \end{aligned}$$

De plus, si $\vec{b}$ est une fonction vectorielle réelle et si $\vec{\varphi}_p$ est une solution particulière (complexe) du système différentiel non homogène $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$, alors $\frac{1}{2}(\vec{\varphi}_p + \bar{\vec{\varphi}}_p) = \mathrm{Re}(\vec{\varphi}_p)$ est une solution particulière réelle.

Preuve. Les fonctions $\vec{\varphi}_{c1}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{x} + i\vec{y})$ et $\vec{\varphi}_{c2}(t) = \bar{\vec{\varphi}_{c1}}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}(\vec{x} - i\vec{y})$, sont deux solutions indépendantes (étant associées à deux valeurs propres distinctes). Et il en est de même de $\vec{\varphi}_{r1}(t) = \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_{c1} + \vec{\varphi}_{c2}) = Re(\vec{\varphi}_{c1})$ et $\vec{\varphi}_{r2}(t) = \frac{1}{2i}(\vec{\varphi}_{c1} - \vec{\varphi}_{c2}) = Im(\vec{\varphi}_{c1})$. En effet, les fonctions $\vec{\varphi}_{c1}$ et $\vec{\varphi}_{c2}$ sont bien solutions car elles sont combinaisons linéaires de solutions, et elles sont indépendantes, car si elles ne l'étaient pas $\vec{\varphi}_{c1}$ et $\vec{\varphi}_{c2}$ ne le seraient pas non plus car $\vec{\varphi}_{c1} = \vec{\varphi}_{r1} + i\vec{\varphi}_{r2}$ et $\vec{\varphi}_{c2} = \vec{\varphi}_{r1} - i\vec{\varphi}_{r2}$.

Et un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_{r1} &= \mathrm{Re}(\vec{\varphi}_{c1}) = e^{\alpha t}\mathrm{Re}((\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(\vec{x} + i\vec{y})) = e^{\alpha t}(\vec{x}\cos(\beta t) - \vec{y}\sin(\beta t)), \\ \vec{\varphi}_{r2} &= \mathrm{Im}(\vec{\varphi}_{c1}) = e^{\alpha t}\mathrm{Im}((\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(\vec{x} + i\vec{y})) = e^{\alpha t}(\vec{y}\cos(\beta t) + \vec{x}\sin(\beta t)). \end{aligned}$$

Et si $\vec{\varphi}_p$ est solution particulière de (4.12), i.e., $\vec{\varphi}_p{}' = A\vec{\varphi}_p + \vec{b}$, alors $\bar{\vec{\varphi}}_p$ est également solution particulière car A et $\vec{b}$ sont des fonctions réelles. Donc, la combinaison linéaire $\frac{1}{2}(\vec{\varphi}_p + \bar{\vec{\varphi}}_p)$ vérifie $\frac{1}{2}\vec{\varphi}_p{}' + \frac{1}{2}\bar{\vec{\varphi}}_p{}' = A(\frac{1}{2}(\vec{\varphi}_p + \bar{\vec{\varphi}}_p)) + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}$, et donc $\frac{1}{2}(\vec{\varphi}_p + \bar{\vec{\varphi}}_p)$ est aussi solution, i.e. $\frac{1}{2}(\vec{\varphi}_p + \bar{\vec{\varphi}}_p) = \mathrm{Re}(\vec{\varphi}_p)$ est solution réelle. ∴

Exemple 4.38 Fin de l'exemple précédent 4.36. Deux solutions indépendantes du système différentiel homogène sont données par, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{\varphi}_{c1}(t) = e^{(-4+2i)t}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{(-4+2i)t}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad \text{et} \quad \vec{\varphi}_{c2}(t) = \bar{\vec{\varphi}}_{c1}(t).$$

On en déduit deux solutions homogènes réelles indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{\varphi}_{r1}(t) = \mathrm{Re}(\vec{\varphi}_{c1})(t) = e^{-4t}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t)) = \begin{pmatrix} -2e^{-4t}\sin(2t) \\ e^{-4t}\cos(2t) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_{r2}(t) = \mathrm{Im}(\vec{\varphi}_{c1})(t) = e^{-4t}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t)) = \begin{pmatrix} 2e^{-4t}\cos(2t) \\ e^{-4t}\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

La solution homogène générale sous forme réelle est donnée par :

$$\vec{\varphi}_h(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-4t}(-r_1\sin(2t) + r_2\cos(2t)) \\ e^{-4t}(r_1\cos(2t) + r_2\sin(2t)) \end{pmatrix}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière est ici immédiate donnée par une solution constante vérifiant $A\vec{\varphi}_p + b = 0$, i.e. $\vec{\varphi}_p(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et la solution générale réelle est donc donnée par $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_h(t) + \vec{\varphi}_p$. ▟

Exemple 4.39 Toujours dans le cas A matrice réelle. Montrer que la resolvante $R_r(t)$ construite à partir de solutions réelles et qui donne toutes les solutions réelles $\vec{\varphi}_r(t) = R_r(t).\vec{c}$ pour $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ donne également toutes les solutions complexes $\vec{\varphi}_c(t) = R_r(t).\vec{c}$ pour $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$.

Réponse. Traitons le cas des matrices 2×2 où A n'a pas de valeurs propres réelles. Soit une résolvante complexe $R_c(t) = (\,(\vec{\varphi}_{c1}(t))\,(\vec{\varphi}_{c2}(t))\,)$ où $\vec{\varphi}_{c_2} = \bar{\vec{\varphi}}_{c_1}$ dont les colonnes associées à des valeurs propres complexes sont conjuguées. Toute solution complexe est de la forme $\vec{\varphi}(t) = R_c(t).\vec{v} = v_1\vec{\varphi}_{c_1}(t) + v_2\vec{\varphi}_{c_2}(t)$ où $v_1 = a_1 + ib_1$ et $v_2 = a_2 + ib_2$ sont des complexes quelconques et où $\vec{\varphi}_{c_1}(t) = \vec{\varphi}_{r_1}(t) + i\vec{\varphi}_{r_2}(t)$. Donc $\vec{\varphi}(t) = (a_1+ib_1)(\vec{\varphi}_{r_1}(t)+i\vec{\varphi}_{r_2}(t)) + (a_2+ib_2)(\vec{\varphi}_{r_1}(t)-i\vec{\varphi}_{r_2}(t)) = (a_1+ib_1+a_2+ib_2)\vec{\varphi}_{r_1}(t) + (a_1+ib_1-a_2-ib_2)\vec{\varphi}_{r_2}(t) = z_1\vec{\varphi}_{r_1}(t) + z_2\vec{\varphi}_{r_2}(t) = R_r(t).\vec{z}$: toute solution complexe s'exprime à l'aide de $R_r(t)$. Même démarche pour les matrices $n \times n$. ▟

Exercice 4.40 Résoudre $\vec{x}' = A\vec{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que 2 et $-1 + i\sqrt{3}$ sont valeurs propres associées resp. aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}i \\ -3+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$. Donner 3 fonctions solutions indépendantes, une résolvante, et la solution avec membre de droite $\vec{b}(t) = (0, \sin(\sqrt{3}x), 0)$ correspondant à la C.I. $(0, 1, 0)$. ▟

Exercice 4.41 Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ donné. Résoudre $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ pour $\vec{b}$ fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse. La matrice A est une matrice de rotation d'angle $+\theta$: la vitesse $\vec{x}'$ est donc tournée d'un angle θ relativement à la position $\vec{x}$. On suppose $\theta \neq 0(\pi)$, sinon A est diagonale et le système est découplé : solution simple.

Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$. Le discriminant réduit vaut $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$ Les racines sont $\lambda_\pm = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$. Le vecteur propre associé à λ_+ est donné par $\begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, et par exemple $\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. D'où $\vec{v}_- = \bar{\vec{v}}_+$. On pose $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$. D'où deux solution indépendantes $\vec{\varphi}_+(t) = e^{(c+is)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\varphi}_-(t) = \bar{\vec{\varphi}}_+(t)$. D'où une résolvante (complexe) $R(t) = \begin{pmatrix} ie^{(c+is)t} & -ie^{(c-is)t} \\ e^{(c+is)t} & e^{(c-is)t} \end{pmatrix}$ (les colonnes sont conjuguées l'une de l'autre).

La matrice A étant réelle on cherche une résolvante réelle. Deux solutions réelles indépendantes sont données par $\vec{\psi}_1(t) = \mathrm{Re}(\vec{\varphi}_+(t))$ et $\vec{\psi}_1(t) = \mathrm{Im}(\vec{\varphi}_-(t))$. Comme $\vec{\varphi}_+(t) = e^{ct}\begin{pmatrix} (\cos(st) + i\sin(st))i \\ \cos(st) + i\sin(st) \end{pmatrix}$ on obtient $\vec{\psi}_1(t) = e^{ct}\begin{pmatrix} -\sin(st) \\ \cos(st) \end{pmatrix}$ et $\vec{\psi}_2(t) = e^{ct}\begin{pmatrix} \cos(st) \\ \sin(st) \end{pmatrix}$. D'où une résolvante réelle $R_r(t) = e^{ct}\begin{pmatrix} -\sin(st) & \cos(st) \\ \cos(st) & \sin(st) \end{pmatrix}$. D'où toute solution du système différentiel homogène est donné par $\vec{\varphi}(t) = R_r(t).\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, i.e. $x_1(t) = e^{ct}(-r_1\sin(st) + r_2\cos(st))$ et $x_2(t) = e^{ct}(r_1\cos(st) + r_2\sin(st))$.

Remarque : il est plus facile de considérer cette équation dans $\mathbb{C}$ au sens où, posant $z = x_1 + ix_2$, le système différentiel homogène $\vec{x}' = A.\vec{x}$ s'écrit comme équation différentielle $z' = e^{i\theta}z$. On a alors immédiatement les solutions $z = z_0\, e^{e^{i\theta}t} = z_0\, e^{(c+is)t}$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$. Notant $z_0 = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient $z(t) = \rho e^{ct}e^{i(st+\alpha)}$, i.e. $x_1(t) = \rho e^{ct}\cos(st+\alpha)$ et $x_2(t) = \rho e^{ct}\sin(st+\alpha)$. On retrouve le résultat précédent.

Puis on cherche une solution particulière $\vec{\varphi}_p$ soit sous la forme $\vec{\varphi}_p(t) = R_r(t).\vec{c}(t)$ (méthode de variation de constante dans $\mathbb{R}^n$), soit sous la forme $\vec{\varphi}_p(t) = R_r(t).\vec{c}(t)$ (méthode de variation de constante dans $\mathbb{C}^n$) et on prend $\frac{1}{2}(\vec{\varphi}_p + \bar{\vec{\varphi}}_p)$ comme solution particulière réelle. ∴

Exercice 4.42 Calculer $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Résoudre $\vec{x}' = A\vec{x}$. Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. ∴

Exercice 4.43 Hors programme. Résoudre $\vec{x}'(t) = A(t).\vec{x}(t)$ où $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Réponse. Ici la matrice A n'est pas constante. On pose $z = x_1 + ix_2$ et on met le problème sous forme complexe $z'(t) = e^{it}z(t)$. On en déduit que $z(t) = z_1 e^{\int_0^t e^{i\tau}d\tau} = z_0 e^{-ie^{it}}$ (avec $z_0 = z_1 e^{i}$) : en effet, en dérivant on trouve $z'(t) = z_0 e^{it}e^{-ie^{it}} = e^{it}z(t)$, et l'espace des solutions étant de dimension 1, toute solution est proportionnelle à $e^{-ie^{it}}$.

Comme $-ie^{it} = e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{it} = e^{i(t-\frac{\pi}{2})} = \cos((t-\frac{\pi}{2}) + i\sin(t-\frac{\pi}{2}) = \sin t - i\cos t$, on a donc $z(t) = z_0 e^{\sin t}e^{-i\cos t}$. Notant $z_0 = \rho e^{i\alpha}$ on obtient $z(t) = \rho e^{\sin t}e^{i(\alpha-\cos t)}$, et donc $x_1(t) = \rho e^{\sin t}\cos(\alpha - \cos t)$ et $x_2(t) = \rho e^{\sin t}\sin(\alpha - \cos t)$ où ρ et α sont données par les C.I. ∴

Exercice 4.44 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + 1, \\ x_2' = x_1 - x_2 + 1, \\ x_3' = 5x_3 - 3x_4 + 1, \\ x_4' = 3x_3 - x_4 + 4. \end{cases}$$

avec pour condition initiale $(t = 0; \vec{x}(0) = (1, 1, 2, 2))$. ∴

Exercice 4.45 Résoudre le problème de Cauchy

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}.$$

∴

4.6 Exponentielle de matrice et application au cas A non diagonalisable

4.6.1 Exponentielle de matrice

Pour traiter le cas où les valeurs propres de multiplicité $\nu \geq 2$ sont associées à un espace propre de dimension $\leq \nu-1$, on commence par rappeler la notion d'exponentielle d'endomorphismes (applications linéaires de E dans E) dans un Banach.

Soit E un espace de Banach, sa norme étant notée $||.||_E$ (un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet pour la norme choisie). On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E dans E, i.e. l'ensemble des application linéaires continues de E dans E. On rappelle qu'une application linéaire $\ell : E \to E$ est continue si elle est continue sur la boule unité, et on définit alors sa norme par :

$$||\ell|| = \sup_{x\in E} \frac{||\ell(x)||_E}{||x||_E}.$$

On rappelle que pour un réel t (ou un complexe t) :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

(le membre de droite est une série entière de rayon $+\infty$.)

Pour les endomorphismes continus $A \in L(E)$, on note :

$$S_n(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}.$$

Il est immédiat que si $A \in L(E)$ alors $S_n(A) \in L(E)$. (Même définition pour les matrices qui représentent un endomorphisme dans une base donnée lorsque $E = K^n$.)

Théorème 4.46 *Pour $A \in L(E)$, la suite $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L(E)$ vers une limite notée $\exp(A) = e^A$:*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \tag{4.15}$$

et on a :

$$||e^A||_{L(E)} \leq e^{||A||_{L(E)}}.$$

De plus, la suite (S_n) converge uniformément vers exp *sur tout borné de $L(E)$.*

Preuve. Pour $A \in L(E)$ fixé, la suite $(S_n(A))$ est de Cauchy car :

$$||S_{n+m}(A) - S_n(A)||_{L(E)} \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{||A||_{L(E)}^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{||A||_{L(E)}^k}{k!}.$$

La dernière somme est le reste de $e^{||A||}$ qui tend vers 0 avec n. Comme E est complet (c'est un Banach par hypothèse), $L(E)$ l'est aussi, et donc, pour $A \in L(E)$ donné, la suite $(S_n(A))$ est convergente dans $L(E)$ vers une limite qu'on note $\exp(A)$, et on a immédiatement $||\exp(A)||_{L(E)} \leq e^{||A||_{L(E)}}$.

De plus pour tout $R > 0$ et tout $A \in L(E)$ tel que $||A||_{L(E)} < R$ on a :

$$||\exp(A) - S_n(A)||_{L(E)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{||A||_{L(E)}^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergence vers 0 étant indépendante de A dans le borné boule de rayon R dans $L(E)$, on a la convergence uniforme sur tout borné de $L(E)$. ∎

Exemple 4.47 Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et I la matrice identité, on a $e^{\alpha I}$ est la matrice $e^\alpha I$.

Réponse. $e^{\alpha I} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} I^k = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = I e^\alpha$. ∎

Exemple 4.48 Si A est une matrice m-nilpotente, i.e. telle que $A^m = 0$ alors, montrer que e^A est une somme finie = polynôme de degré $m-1$ en A.

Réponse. Une telle matrice A vérifie $A^m = 0$ pour un $m \in \mathbb{N}$, et l'exponentielle donnée par (4.15) se réduit donc à $e^A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A^k}{k!}$. ∎

Exemple 4.49 Si A est diagonalisable, i.e. de la forme $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, montrer que $e^A = Pe^D P^{-1}$.

Réponse. On a $\frac{1}{2!}A^2 = \frac{1}{2!}(PDP^{-1})^2 = \frac{1}{2!}(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = \frac{1}{2!}PD^2P^{-1}$. Et le terme générique de l'exponentielle est $\frac{1}{k!}(PDP^{-1})^k = \frac{1}{k!}PD^kP^{-1}$ (récurrence immédiate). ∎

Remarque 4.50 **Attention.** En général :

$$e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A.$$

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $e^A = I + A$ (car $A^2 = 0$) et $e^B = I + B$, d'où $e^A e^B = I + A + B + AB = I + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (qui est d'ailleurs différent de $e^B e^A = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$), alors que $e^{A+B} = I\cosh(1) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sinh(1)$ car $(A+B)^2 = I$.

Mais dans cet exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: les matrices A et B ne commutent pas. ∎

Proposition 4.51 *Lorsque les matrices A et B commutent, i.e. lorsque $AB = BA$, on a :*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Preuve. Admis : exercice (on pourra se servir de la définition qui suit). ▪

Exemple 4.52 Montrer que toute exponentielle de matrice est un carré.

Réponse. $\exp(A) = (\exp(A/2))^2$ car A commute avec elle-même. ▪

On rappelle que pour les scalaires on a également $e^t = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, et on a également :

Définition 4.53 Une autre définition de la fonction exponentielle est donnée par :

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n. \tag{4.16}$$

En effet, avec la formule du binôme :

$$e^A - (1 + \frac{A}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}) A^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Et $\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} \geq 0$ d'où :

$$\begin{aligned} ||e^A - (1 + \frac{A}{n})^n|| &\leq \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}) ||A||^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} ||A||^k \\ &= e^{||A||} - \left(1 + \frac{||A||}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

cette dernière expression tendant vers 0 (résultat connu dans $\mathbb{R}$: $e^t = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$).

Remarque 4.54 On peut également noté que l'application $\exp : L(E) \to L(E)$ est continue et localement lipschitzienne :

$$||e^A - e^B|| \leq e^M ||A - B||,$$

dès que $M \geq \max(||A||, ||B||)$.

En effet, on a $e^A - e^B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k - B^k}{k!}$ et :

$$A^k - B^k = A^{k-1}(A - B) + A^{k-2}(A - B)B + \ldots + (A - B)B^{k-1},$$

d'où :

$$||A^k - B^k|| \leq k \max(||A||^{k-1}, ||B||^{k-1}) ||A - B|| \leq k M^{k-1} ||A - B||,$$

d'où le résultat. ▪

4.6.2 Application aux systèmes différentiels

Soit le système différentiel à matrice A constante :

$$\vec{x}' = A.\vec{x}. \tag{4.17}$$

(Donc intervalle d'étude $I = \mathbb{R}$.)

Proposition 4.55 *Une résolvante du système différentiel (4.17) est $R(t) = e^{At}$.*

Et une solution du système différentiel homogène (4.17) pour la condition initiale $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ est donnée par $\vec{\varphi}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}_0$.

Preuve. La convergence uniforme sur tout borné permet de dériver terme à terme :

$$\exp'(At) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = A\exp(At),$$

et donc $\exp(At)$ est solution de l'équation $R' = A.R$. Comme $\exp(A0) = I$ (condition initiale pour $t = 0$) est inversible, les colonnes de $\exp(tA)$ forment une famille de n fonctions indépendantes : $R(t) = e^{At}$ est une résolvante. ∎

On ne se sert pas directement de l'expression $\exp(tA)$ pour calculer la solution, car c'est trop coûteux de le calculer en chaque t. On préfère passer par le calcul des valeurs propres. Commençons par le cas simple déjà vu au paragraphe précédent où la matrice A est diagonalisable.

Proposition 4.56 *Si A est diagonalisable, $D = P^{-1}AP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ matrice diagonale des valeurs propres et P matrice inversible dont les colonnes sont formées de vecteurs propres, alors :*

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_i t})P^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.18}$$

les λ_i étant comptés autant de fois que leur multiplicité.

(Le calcul de la résolvante e^{At} à l'aide de (4.18) coûte donc le prix d'une diagonalisation.)

Preuve. On a $tA = tPDP^{-1} = P(tD)P^{-1}$ avec $tD = \mathrm{diag}(t\lambda_i)$ diagonale. D'où $e^{At} = \sum \frac{1}{k!}(P(tD)P^{-1})^k = Pe^{tD}P^{-1}$ avec $e^{t\mathrm{diag}(\lambda_i)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_i})$. D'où le résultat. ∎

Remarque 4.57 Une autre résolvante avait été trouvée avec la proposition 4.13 page 20. ∎

On peut noter un résultat simple avec les exponentielles de matrice (la démarche sera utilisée lorsque A n'est pas diagonalisable).

Proposition 4.58 *Pour $\vec{c} \in K^n$ (vecteur constant), $t \in \mathbb{R}$ et A matrice constante, on a :*

$$\begin{aligned} &1)\ \ e^{\lambda It} = e^{\lambda t}I \quad \text{et donc} \quad e^{\lambda It}\vec{c} = e^{\lambda t}\vec{c}, \ \text{et} \\ &2)\ \ e^{At} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t} \quad \text{et donc} \quad e^{At}\vec{c} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\vec{c}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En particulier, si $\vec{v}$ est vecteur propre associé à la valeur propre λ alors $e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} = \vec{v}$:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} = \vec{v}.$$

Et on retrouve le résultat de la proposition 4.13 : si A est diagonalisable, ses valeurs propres étant notées λ_i associées aux vecteurs propres $\vec{v}_i$, alors des fonctions de base indépendantes solutions de $\vec{x}' = A\vec{x}$ sont données par les $\vec{\varphi}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$.

Preuve. 1- est trivial : $\sum_0^\infty \frac{\lambda^k t^k I^k}{k!} = \sum_0^\infty \frac{\lambda^k t^k}{k!} I$.

Et 2- car It commute avec toute matrice et en particulier avec At et avec $(A - \lambda I)t$, d'où avec le 1- : $e^{At} = e^{\lambda It+(A-\lambda I)t} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}$.

Puis, si $\vec{v}$ est vecteur propre associé à la valeur propre λ alors $t(A-\lambda I).\vec{v} = 0$ et donc $e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} = I.\vec{v} = \vec{v}$.

Et une résolvante est donnée par $R(t)$ dont les colonnes sont les $e^{At}\vec{c}_i$ dès que les vecteurs $\vec{c}_i$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ (ce sont des solutions et le wronskien en $t = 0$ est non nul). Résultat en particulier vrai si on prend les $\vec{c}_i = \vec{v}_i$ pour lesquels $e^{At}\vec{v}_i = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$. ∎

4.6.3 Cas A non diagonalisable

On regarde le cas où la matrice A a une valeur propre multiple de degré $\nu \geq 2$ associée à un espace propre de dimension $\mu \leq \nu - 1$. On s'intéresse toujours aux solutions du système homogène $\vec{x}' = A.\vec{x}$.

Exemple 4.59 Cas du système différentiel $\vec{x}' = A\vec{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: A a pour valeur propre $\lambda_1 = 1$ de multiplicité $\nu = 2$ associé à l'espace propre $K_1 = \mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}\{\vec{e}_1\}$ (sous-espace vectoriel engendré par le premier vecteur de base de K^2). Et $\mu = \dim(K_1) = 1 < \nu = 2$ et on ne dispose avec les résultats précédents que de la solution $\vec{\varphi}_1(t) = e^t\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour avoir la solution générale du système différentiel $\vec{x}' = A\vec{x}$ il manque une fonction $\vec{\varphi}_2$ solution indépendante de $\vec{\varphi}_1$ (l'espace des solutions est de dimension $n = 2$). ∴

L'idée pour trouver les $\nu - \mu$ solutions manquantes est de voir si par hasard une fonction $e^{At}.\vec{y}$ ne serait pas simple à calculer pour certains vecteurs $\vec{y}$ (on rappelle que la matrice $R(t) = e^{At}$ est une résolvante et que toute solution est de la forme $\vec{\varphi}(t) = e^{At}.\vec{y}$).

C'est déjà le cas pour les vecteurs propres $\vec{y}_i$ asociés à la valeur propre λ_i puisqu'on a vu que $e^{At}\vec{y}_i = e^{\lambda_i t}\vec{y}_i$ (car $e^{At}\vec{y}_i = e^{\lambda_i t}e^{(A-\lambda_i I)t}\vec{y}_i$) et $e^{(A-\lambda_i I)t}\vec{y}_i = \vec{y}_i$, voir proposition 4.58).

On admet le théorème suivant :

Théorème 4.60 *Pour A matrice donné, soit $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ son polynôme caractéristique décomposé (dans $\mathbb{C}$) sous la forme :*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}, \qquad r_1 + \dots + r_m = n. \tag{4.20}$$

On a pris ici les λ_i deux à deux distincts : les λ_i sont les valeurs propres de multiplicité r_i. Alors notant $E_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$ on a :

$$\dim(E_i) = r_i \quad \text{et} \quad K^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_n. \tag{4.21}$$

(Donc K^n est la somme directe des sous-espaces E_i et il suffit donc d'avoir une base de chaque sous-espace E_i pour avoir une base de K^n.)

En particulier $(A - \lambda_i I)$ restreint au sous espace E_i est nilpotent d'indice r_i, i.e. pour tout $\vec{y}_i \in E_i$ on a $(A - \lambda_i I)^{r_i}\vec{y}_i = 0$ (par définition de E_i), et pour $\vec{y}_i \in E_i$ on a :

$$e^{At}\vec{y}_i = e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{r_{i-1}} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i I)^k\vec{y}_i \tag{4.22}$$

(somme finie.)

Preuve. Admis. Voir par exemple Avez [3], appendice 5, pour la démonstration de (4.21). Idée :

La démonstration de (4.21) vient de (4.19) avec $t = 1$, à savoir $e^A = e^{\lambda_i}e^{A-\lambda_i I}$, et, pour $\vec{y}_i \in E_i$ et $k \geq r_i$, de $(A - \lambda_i I)^k\vec{y}_i = 0$ (par définition de E_i). On aura au prélable noté que l'espace propre $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$ est inclu dans E_i, puisque si $(A - \lambda_i I)\vec{y} = 0$ alors a fortiori $(A - \lambda_i I)^{r_i}\vec{y} = 0$ pour $r_i \geq 1$.

Et la démonstration de (4.22) est alors immédiate : on a $e^{At} = e^{\lambda_i t}e^{(A-\lambda_i I)t}$ et
$e^{(A-\lambda_i I)t}\vec{y}_i = \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i I)^k\vec{y}_i + \sum_{k=r_i}^{\infty} 0$,
car par définition de E_i, si $k \geq r_i$ on a $(A - \lambda_i I)^k\vec{y}_i = (A - \lambda_i I)^{k-r_i}(A - \lambda_i I)^{r_i}\vec{y}_i = 0$. ∴

On en déduit les solutions du système différentiel $x' = Ax$:

Proposition 4.61 *Si λ_i est valeur propre de A associé au vecteur propre $\vec{y}_{i1}$ alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\vec{\varphi}_{i1}(t) = e^{\lambda_i t}\vec{y}_{i1}$ est solution du système différentiel homogène.*

Si λ_i est valeur propre de multiplicité ν_i associé à l'espace propre $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$ de dimension μ_i, on trouve ainsi μ_i fonctions indépendantes $\vec{\varphi}_{ik} = e^{\lambda_i t}\vec{y}_{ik}$ pour $k = 1, ..., \mu_i$ où les $(\vec{y}_{ik})_{k=1,...,\mu_i}$ forment une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$.

Si $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$ est de dimension $\mu_i < \nu_i$ (cas A non diagonalisable), et, posant $\ell_1 = \mu_i + 1$, si $\vec{y}_{i\ell_1}$ est un vecteur tel que :

$$(A - \lambda_i I)^2\vec{y}_{i\ell_1} = 0 \quad \text{et} \quad (A - \lambda_i I)\vec{y}_{i\ell_1} \neq 0,$$

alors la fonction vectorielle $\vec{\varphi}_{i\ell_1}(t) = e^{At}\vec{y}_{i\ell_1}$ (solution de (4.17)) est calculée simplement par :

$$\vec{\varphi}_{i\ell_1}(t) = e^{\lambda_i t}(I + (A - \lambda_i I)t)\vec{y}_{i\ell_1}, \tag{4.23}$$

et cette solution est indépendante des $\vec{\varphi}_{ik}$ pour $0 \leq k \leq \mu_i$. Et cette solution, étant à valeurs dans E_i, est indépendante des fonctions solutions associées à un vecteur propre $\lambda_j \neq \lambda_i$.

Si $\mu_i+1=\nu_i$ on a une famille de ν_i solutions indépendantes relatives à la valeur propre λ_i. Sinon on calcule par récurrence : on pose $\ell_k=\mu_i+k$ et :

$$(A-\lambda_i I)^{k+1}\vec{y}_{\ell_k}=0 \quad et \quad (A-\lambda_i I)^k\vec{y}_{\ell_k}\neq 0, \quad pour\ 1\le k\le \nu_i-\mu_i,$$

et on obtient ainsi $\nu_i-\mu_i$ fonctions solutions associées à λ_i :

$$\vec{\varphi}_{\ell_k}(t)=e^{\lambda_i t}(I+(A-\lambda_i I)t+\ldots+\frac{(A-\lambda_i I)^k t^k}{k!})\vec{y}_{\ell_k},$$

toutes les fonctions ainsi définies formant une famille indépendante.

Preuve. Sachant que e^{At} est une résolvante, $e^{At}\vec{c}$ est une fonction vectorielle solution de $\vec{x}'=A\vec{x}$. Et si $(A-\lambda I)^2\vec{y}=0$ alors $(A-\lambda I)^k\vec{y}=0$ pour tout $k\ge 2$ et donc : $e^{(A-\lambda I)t}\vec{y}=(I+(A-\lambda I)t+0)\vec{y}$, d'où le calcul simple de $\vec{\varphi}_{i\ell_1}$.

Il reste à voir si $\vec{\varphi}_{i\ell_1}$ est une fonction indépendante des fonctions $e^{\lambda_i t}\vec{y}_{ik}$ pour $k=1,...,\mu_i$. Mais en $t=0$, $\vec{\varphi}_{i\ell_1}(0)=\vec{y}_{i\ell_1}\notin \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)$ (sinon $\vec{y}_{i\ell_1}$ serait vecteur propre). Et donc $\vec{\varphi}_{i\ell_1}$ est bien indépendante des $e^{\lambda_i t}\vec{c}_i$ où $\vec{c}_i$ est vecteur propre associé à λ_i.

Et la récurrence est immédiate. ∎

Exemple 4.62 On considère le système différentiel homogène $\vec{x}'=A\vec{x}$ où $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. La valeur propre $\lambda_1=1$ est multiple d'ordre 2 associée à l'espace propre $\mathrm{Vect}\{\vec{e}_1\}$ de dimension 1, et on ne connaît qu'une fonction propre $\vec{\varphi}_1(t)=e^t\vec{e}_1=\begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$.

Pour en trouver une seconde, on calcule $(A-I)^2$. Ici $(A-I)^2=0$ (la matrice $A-I$ est nilpotente dans $\mathbb{R}^2$), et donc tous les vecteurs $\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ satisfont à $(A-I)^2\vec{y}=0$. On prend un $\vec{y}$ indépendant de $\vec{e}_1$, par exemple $\vec{y}=\vec{e}_2$ (second vecteur de base), d'où une seconde solution :

$$\vec{\varphi}_2(t)=e^t(I+(A-I)t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} \quad (=e^{At}.\vec{e}_2=e^t(e^{At-It}.\vec{e}_2)).$$

Une résolvante est donc donnée par $R(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}$, et la solution générale par $c_1\vec{\varphi}_1(t)+c_2\vec{\varphi}_2(t)=R(t)\vec{c}$ pour $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ quelconque dans K^n. ∎

Exercice 4.63 On considère le système différentiel homogène $\vec{x}'=A\vec{x}$ où $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. La valeur propre $\lambda_1=1$ est multiple d'ordre 3 associée à l'espace propre $\mathrm{Vect}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ de dimension 2, et on a deux fonctions propres $\vec{\varphi}_1(t)=e^t\vec{e}_1$ et $\vec{\varphi}_2(t)=e^t\vec{e}_2$.

Montrer qu'une troisième solution (indépendante) est donnée par $\vec{\varphi}_3(t)=e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$. ∎

Exercice 4.64 On considère le système différentiel homogène $\vec{x}'=A\vec{x}$ où $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. La valeur propre $\lambda_1=1$ est multiple d'ordre 3 associée à l'espace propre $\mathrm{Vect}\{\vec{e}_1\}$ de dimension 1, et on ne connaît qu'une fonction propre $\vec{\varphi}_1(t)=e^t\vec{e}_1$.

Montrer que 2 autres solutions indépendantes sont données par $e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e^t\begin{pmatrix}t^2\\t\\1\end{pmatrix}$. ∎

Exercice 4.65 Résoudre $\vec{x}'=A\vec{x}$ pour $A=\begin{pmatrix}4&1&3\\0&4&1\\0&0&4\end{pmatrix}$: montrer que la solution générale est donnée par $c_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{4t}\begin{pmatrix}3t+\frac12t^2\\t\\1\end{pmatrix}$, et écrire une résolvante (on vérifiera que $(A-4I)^3=0$). ∎

Exercice 4.66 Résoudre $\vec{x}' = A\vec{x}$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Réponse. Des solutions indépendantes sont données par $e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^{4t}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^{2t}\begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ▪

Remarque 4.67 En particulier sur E_i, toute solution est de la forme :

$$\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_{r_i}(t) \end{pmatrix}$$

où les p_j sont des polynômes de degré $< r_i$. Mais toutes les $\vec{\varphi}(t)$ ci-dessus ne sont pas solutions : seules celles correspondant au théorème ci-dessus le sont, le nombre de coefficients indépendants devant être égale à r_i alors que le vecteur ci-dessus est écrit pour nr_i coefficients. ▪

Exercice 4.68 Résoudre $\vec{x}' = A.\vec{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ▪

Exercice 4.69 Résoudre le système différentiel :

$$\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

▪

Exercice 4.70 Résoudre le système différentiel :

$$\vec{x}' = A.\vec{x} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

▪

Exercice 4.71 Résoudre le système différentiel :

$$\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ te^{-2t} \\ t^2e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

▪

4.7 Équations différentielles d'ordre n à coefficients constants

4.7.1 Rappels

On applique les résultats du paragraphe précédent aux équations différentielles d'ordre n écrites sous la forme :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b, \tag{4.25}$$

où les a_i sont des constantes (pour $1 \le i \le n$) et $b : \mathbb{R} \to K$ est une fonction continue.

Cette équation s'écrit aussi comme :

$$y^{(n)} = \begin{pmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + b.$$

On pose :

$$\begin{cases} x_1{=}y, \\ x_2{=}y'(=x_1'), \\ \vdots \\ x_n{=}y^{(n-1)}(=x_{n-1}') \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

et on se ramène à un système différentiel d'ordre 1 :

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}. \tag{4.27}$$

Et on sait donc résoudre un tel système : on peut calculer $\vec{x}$, donc en particulier $x_1 = y$ qui est la solution cherchée.

Proposition 4.72 *Si $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ est solution de (4.27), alors $y = x_1$ est solution de (4.25). Et réciproquement, si y est solution de (4.25), alors $\vec{x} = (y, y', ..., y^{n-1})$ est solution de (4.27).*

Preuve. Posant $y = x_1$, les $n-1$ premières équations du système (4.27) donnent séquentiellement $y' = x_1' = x_2$, puis ..., $y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n$, et la dernière équation donne (4.25).

Réciproquement, c'est immédiat (par construction de $\vec{x}$). ∎

Définition 4.73 Le polynôme caractéristique de (4.25) est le polynôme défini par :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{4.28}$$

On rappelle que ce polynôme caractéristique est obtenu quand on cherche une solution de la forme $y = e^{\lambda t}$ à l'équation homogène (4.25) (donc quand $b = 0$).

Proposition 4.74 *Le polynôme caractéristique est aussi donné par, avec A donné par (4.26) :*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I). \tag{4.29}$$

Preuve. Démonstration par récurrence. Notons A_n la matrice A dans le cas $\mathbb{R}^n$. On développe le déterminant de $A_n - \lambda I_n$ par rapport à la première colonne : on obtient :

$$\det(A_n - \lambda I_n) = -\lambda \det(A_{n-1} - \lambda I_{n-1}) + (-1)^{n-1}(-a_n),$$

i.e. $\det(A_n - \lambda I_n) = -\lambda P(\lambda_{n-1}) + (-1)^n a_n = P(\lambda)$. ∎

Exemple 4.75 Pour $n = 2$, on considère $y'' + a_1y' + a_2y = b$ soit $y'' = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + b$. On pose $\begin{cases} y = x_1, \\ y' = x_2, \end{cases}$ puis $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \vec{b}$, qui s'écrit bien sous la forme $\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b}$.

On peut alors résoudre ce système, i.e. on calcule x_1 et x_2, donc on connaît la solution $x_1 = y$ cherchée.

Réciproquement, partant du système différentiel (4.27), on a $x_1' = x_2$ d'où $x_1'' = x_2'$ d'où $x_1'' = -a_2x_1 - a_1x_2 + b = -a_2x_1 - a_1x_1' + b$ ce qui est l'équation en $x_1 = y$ annoncée. ∎

4.7.2 Équations différentielles homogènes d'ordre n à coefficients constants

On s'intéresse pour commencer à l'équation homogène associée :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \tag{4.30}$$

Cette équation s'écrit aussi comme le système (4.27), où on a posé $\vec{b} = 0$.

Pour résoudre (4.30), on ne s'intéresse en fait qu'à la première composante x_1 de $\vec{x}$ solution du système différentiel homogène associé à (4.27) : on va s'intéresser à une méthode plus simple de calcul de fonctions solutions.

Comme le système différentiel (4.27) admet une solution générale dans un espace de dimension n, l'équation différentielle (4.30) (équation en x_1) admet une solution générale dans un espace vectoriel de dimension au plus n : si $\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{\varphi}_j(t)$ où les $\vec{\varphi}_j$ sont des fonctions indépendantes, l'équation différentielle (4.30) admet pour solution générale $y(t) = x_1(t) = \sum_{j=1}^n c_i \varphi_{1j}(t)$ (où les φ_{ij} sont les composantes de $\vec{\varphi}_j$).

On va montrer qu'en fait, l'équation différentielle (4.30) admet une solution générale dans un espace vectoriel de dimension égal à n.

Pour cela on introduit le polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Exercice 4.76 Montrer avec A donnée dans (4.26), en développant le déterminant par rapport à la première colonne (puis calcul par récurrence), que :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

C'est l'expression usuelle du polynôme caractéristique, dont l'obtention formelle se lit avec (4.30) où les dérivations $y^{(k)}$ sont transformées en monôme λ^k, pour $k = 0, ..., n$. ▲

P est de degré n, donc est de la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}, \qquad r_1 + \ldots + r_m = n, \tag{4.31}$$

où les λ_i sont les racines (complexes) de P distinctes 2 à 2 et de multiplicité respectives r_i.

Exemple 4.77 En déduire que si les racines de P sont toutes simples, alors la solution générale de (4.30) est donnée par $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t}$, résultat déjà vu. Le théorème suivant traite le cas général (cas éventuel de racines multiples). ▲

Théorème 4.78 *Si le polynôme caractéristique s'écrit $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^n$, alors λ_i est racine de multiplicité n et l'équation différentielle (4.30) admet n solutions $(\varphi_{ik})_{k=1,\ldots,n}$ indépendantes données par :*

$$\varphi_{i1}(t) = e^{\lambda_i t},\ \varphi_{i2}(t) = te^{\lambda_i t},\ \ldots, \varphi_{in}(t) = t^{n-1}e^{\lambda_i t}. \tag{4.32}$$

(Donc, pour une équation différentielle d'ordre n, l'espace $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$ est toujours de dimension 1, quelque soit la multiplicité de la valeur propre λ_i.)

Et si le polynôme caractéristique est donné par (4.31), la solution générale de (4.30) est donnée par :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{k_i=1}^{r_i} \alpha_{ik_i} t^{k_i} e^{\lambda_i t},$$

où les n valeurs α_{ik_i} sont des constantes quelconques (dans $\mathbb{C}$).

Preuve. On commence par noter que toute solution est C^∞, car A est une matrice constante. On note D l'opérateur de dérivation défini sur l'espace C^∞ par $D(y) = y'$, puis $D^2 = D \circ D$ l'opérateur de dérivation seconde et $D^n = D \circ D^{n-1}$ l'opérateur de dérivation d'ordre n. L'équation différentielle (4.30) s'écrit alors :

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} D y + a_n y = 0.$$

Et on note $P(D)$ l'opérateur de dérivation défini sur l'espace C^∞ par :

$$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n.$$

On a immédiatement :

$$P(D) = (D - \lambda_1)^{r_1} \ldots (D - \lambda_m)^{r_m}.$$

(La notation produit correspond ici à la composition.) En effet, développant le second terme, on trouve pour coefficient des D^k les coefficients des λ^k du polynome caractérisque dont les deux formes sont écrites en (4.31).

On doit résoudre $P(D)(y)=0$, i.e. :

$$(D-\lambda_1)^{r_1}\dots(D-\lambda_m)^{r_m}(y)=0$$

Intéressons-nous au i-ème terme :

$$P_i(D)=(D-\lambda_i)^{r_i}$$

Il est clair que si pour une fonction f donnée $P_i(D)(f)=0$ alors $P(D)(f)=0$, car les opérateurs de dérivation $(D-\lambda_i)^{r_i}$ commutent entre eux.

1- On va montrer que les fonctions $t^k e^{\lambda_i t}$ pour $1\le k\le r_i-1$ satisfont à $P_i(D)(t^k e^{\lambda_i t})=0$, i.e. que pour tout polynôme q_i de degré $\le r_i-1$ on a $P_i(D)(q_i(t)e^{\lambda_i t})=0$: on a :

$$(D-\lambda_i)(q_i(t)e^{\lambda_i t})=D(q_i(t)e^{\lambda_i t})-\lambda_i(q_i(t)e^{\lambda_i t})=[Dq_i(t)]e^{\lambda_i t}+0$$

et par récurrence :

$$P_i(D)(q_i(t)e^{\lambda_i t})=(D-\lambda_i)^{r_i}(q_i(t)e^{\lambda_i t})=[D^{r_i}q_i(t)]e^{\lambda_i t}$$

Mais q_i est par hypothèse de degré $\le r_i-1$ et donc $P_i(D)(q_i(t)e^{\lambda_i t})=0$. On a donc bien vérifier que les fonctions $t^k e^{\lambda_i t}$ pour $1\le i\le m$ et $1\le k\le r_i-1$ sont solutions de (4.30).

2- Il reste à montrer qu'elles sont indépendantes : donnons-nous des constantes α_{ik_i} telles que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k_i=1}^{r_i}\alpha_{ik_i}t^{k_i}e^{\lambda_i t}=0.$$

Il s'agit de montrer que les α_{ik_i} sont tous nuls. Il est équivalent de montrer que, si les p_i sont des polynômes de degré $\le r_i-1$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{m}p_i(t)e^{\lambda_i t}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

alors les polynômes sont identiquement nuls. On va le montrer par récurrence. S'il y a une seule racine notée λ_1 (donc multiple d'ordre n), on a $p_1(t)e^{\lambda_1 t}=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc $p_1(t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc p_1 est le polynôme nul. S'il y a 2 racines on doit montrer que, avec $\beta=\lambda_2-\lambda_1\neq 0$:

$$p_1(t)+p_2(t)e^{\beta t}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

En dérivant r_1 fois, p_1 étant de degré $\le r_i-1$, il vient :

$$0+D^{r_1}(p_2(t)e^{\beta t})=0=(\beta^{r_1}p_2(t)+r_1\beta^{r_1-1}p_2'(t)+\dots+p_2^{(r_1)}(t))e^{\beta t}$$

d'où $\beta^{r_1}p_2(t)+r_1\beta^{r_1-2}p_2'(t)+\dots+p_2^{(r_1)}(t)=0$ d'où $p_2=0$ (en effet, par identification des termes de plus haut degré, on obtient que le coefficient de ce terme doit être nul, donc le coefficient du terme de plus haut degré de p_2 est nul). (Calcul éventuel annexe : $D^r(p_2(t)e^{\beta t})=[\sum_{k=0}^{r}\binom{k}{r}\beta^k p_2^{(r-k)}]e^{\beta t}$.)

Puis on fait l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{i=1}^{m-1}p_i(t)e^{\lambda_i t}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

implique que les p_i sont tous nuls dès qu'ils sont respectivement de degré $\le r_i-1$. Et on considère :

$$\sum_{i=1}^{m}p_i(t)e^{\lambda_i t}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad \text{où}\quad d^\circ(p_i)\le r_i-1,\quad \forall i=1,...,m,$$

i.e., notant $\gamma_i=\lambda_i-\lambda_m(\neq 0)$:

$$\sum_{i=1}^{m-1}p_i(t)e^{\gamma_i t}+p_m(t)=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Alors, en dérivant r_m fois, il vient :

$$\sum_{i=1}^{m-1}P_i(t)e^{\gamma_i t}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad \text{où}\quad P_i(t)=\gamma_i^{r_m}p_i(t)+r_m\gamma_i^{r_m-1}p_i'(t)+\dots+p_i^{(r_m)}(t)$$

et les P_i sont tous des polynômes et t de degré $\le r_i-1$. Par hypothèse de récurrence, les P_i sont identiquement nuls, et donc les p_i sont identiquement nuls (voir calcul précédent, les β_i étant non nuls). ∎

Corollaire 4.79 *Pour le système différentiel $\vec{x}' = A\vec{x}$ (où A est donné par (4.26) et $\vec{b} = \vec{0}$) associé à (4.30), si λ_i est valeur propre de $A-\lambda I$ de multiplicité r_i, on dispose de r_i solutions indépendantes données par :*

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ \lambda_i e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Exemple 4.80 Pour $n = 2$, on considère $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ pour a_1 et a_2 dans $\mathbb{C}$. Donner la solution générale lorsque le polynôme caractéristique P a 2 racines distinctes, et lorsque P a une racine double. Dans le cas où a_1 et a_2 sont 2 réels, on donnera la solution générale sous forme de solutions réelles (lorsque les racines du polynôme caractéristique sont complexes, on donnera une solution en cosinus et sinus). ∴

Exemple 4.81 Soit à résoudre l'équation différentielle (d'Euler) homogène :

$$t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0.$$

Se restreindre à $t \in]0, \infty[$. Poser $t = e^s$ et $z(s) = y(t)$, et montrer que z est une fonction qui vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficient constant. Résoudre l'équation en z trouvée, et en déduire la fonction y cherchée. ∴

À i fixé et $k \in [1, r_i]$, pour un des φ_{ik} donnés dans (4.32), on note $\vec{\varphi}_{ik}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{ik}(t) \\ \varphi'_{ik}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{ik}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$.

Corollaire 4.82 *Si le polynôme caractéristique s'écrit $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^n$, alors les fonctions $(\vec{\varphi}_{ik})_{k=1,\ldots,n}$ sont n solutions indépendantes du système différentiel associé (4.27).*

Et si le polynôme caractéristique est donné par (4.31), alors les fonctions $(\vec{\varphi}_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,r_i}}$ sont n solutions indépendantes du système différentiel associé (4.27).

Preuve. Cas d'une seule valeur propre λ_1 de multiplicité n. Alors que $\vec{\varphi}_{1k}$ est solution de $\vec{x}' = A.\vec{x}$ car φ_{1k} est solution de (4.30), voir proposition 4.72.

Puis le wronskien vaut $w(0) = \det[\,(\vec{\varphi}_{i1}'(0)) \quad \ldots \quad (\vec{\varphi}_{in}'(0))\,]$. C'est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls : le j-ème terme de la diagonale vaut $(j-1)!$. Donc $w(0) = \Pi_{i=0}^{n-1}(j!) \neq 0$ et les solutions sont indépendantes, i.e. $R(t)$ matrice dont les colonnes sont les $\vec{\varphi}_{ik}(t)$ est une résolvante.

Puis si le polynôme caractéristique est donné par (4.31), la matrice $R(t)$ dont les colonnes sont les $\vec{\varphi}_{ik}(t)$ est une résolvante : on groupe les colonnes en fonctions des valeurs propres, chaque groupe de colonnes est constitué de fonctions indépendantes (voir début preuve), et les différents groupes de colonnes sont constitués de fonctions exponentielles d'exposant λ_i tous différents. ∴

4.7.3 Équations différentielles non homogènes d'ordre n à coefficients constants : variations des constantes

On considère l'équation différentielle (4.25).

On la met sous la forme du système différentiel d'ordre 1 (4.27), et la solution y cherchée est donnée par $y = x_1$.

Et dans le cas d'un système différentiel d'ordre 1 on sait trouver une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante (constante vectorielle) : si $R(t)$ est une résolvante, une solution particulière $\vec{\varphi}_p$ est cherchée sous la forme

$$\vec{\varphi}_p(t) = R(t).\vec{c}(t),$$

et c'est $\vec{c}(t)$ qu'on cherche, i.e. les n fonctions $c_i(t)$ pour $i = 1, ..., n$ (les composantes de $\vec{c}$).

Le corollaire 4.82 nous donne une résolvante particulière $R(t) =^{\text{notée}} (\,(\vec{\varphi}_1) \quad \ldots \quad (\varphi_n)\,)$. D'où :

Corollaire 4.83 *Les fonctions $(c_i(t))_{i=1,\dots,n}$ peuvent être choisies vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \varphi_1(t)c_1'(t) + \dots + \varphi_n(t)c_n'(t) = 0, \\ \varphi_1'(t)c_1'(t) + \dots + \varphi_n'(t)c_n'(t) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-1)}c_n'(t) = b(t), \end{cases} \tag{4.34}$$

une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre n étant alors donnée par $\varphi_p(t) = \varphi_1(t)c_1(t) + \dots + \varphi_n(t)c_n(t)$.

Preuve. Notons $\vec{\varphi}_p(t) = R(t).\vec{c}(t)$. On cherche $\vec{c}(t)$ telle que $\vec{\varphi}_p(t)$ soit une solution particulière (possible car une résolvante est inversible). De $\vec{\varphi}_p' = A.\vec{\varphi}_p + \vec{b}$ et de $R' = A.R$, on déduit $R(t).\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t)$, ce qui est le système (4.34). ∎

Cas particulier des équations différentielles d'ordre 2 : on peut tout faire “à la main”.

Notons λ_1 et λ_2 les racines du polynôme caratéristique, et notons $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et, soit $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, soit $\varphi_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ si $\lambda_1 = \lambda_2$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont donc deux solutions indépendantes de l'équation différentielle d'ordre 2. Alors :

Lemme 4.84 *Pour une équation différentielle d'ordre 2, pour le système différentiel associé, les deux fonctions $\vec{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ et $\vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ sont 2 solutions homogènes indépendantes.*

Preuve. Première démonstration. On vérifie l'assertion : on a $\vec{\varphi}_1\,'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_1''(t) \end{pmatrix}$ et on a $A.\vec{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ -a_2\varphi_1(t) - a_1\varphi_1'(t) \end{pmatrix}$. Et comme φ_1 vérifie l'équation différentielle, on a donc bien $\vec{\varphi}_1\,' = A\vec{\varphi}_1$. Même calcul avec $\vec{\varphi}_2$.

Et on vérifie que ces solutions sont indépendantes : en $t = 0$ on a $w(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $w(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$ si $\lambda_1 = \lambda_2$. On a bien $w(0) \neq 0$ dans les deux cas. ∎

Preuve. Deuxième démonstration : on calcule à la manière des systèmes différentiels les solutions. Le système différentiel homogène considéré est (4.27) où $\vec{b} = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caratéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$, de discriminant $\Delta = a_1^2 - 4a_2$.

1- Si $\Delta \neq 0$, les racines λ_1 et λ_2 sont distinctes, alors les vecteurs propres associés vérifient, pour $k = 1, 2$:

$$-\lambda_k x + y = 0.$$

On peut donc prendre pour vecteurs propres indépendants $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \end{pmatrix}$, d'où les solutions $\vec{\varphi}_k = e^{\lambda_k t}\vec{v}_k = \begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \varphi_k'(t) \end{pmatrix}$ annoncées.

2- Traitons le cas $\Delta = 0$ et $a_1 \neq 0$ donc $\lambda \neq 0$ et $a_2 \neq 0$. On est dans le cas où $a_1^2 = 4a_2$, et donc $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}$ et $\lambda_1^2 = a_2$. Donc et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1^2 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$ et $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\lambda_1^2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre $\vec{v}_1$ associé vérifie encore $-\lambda_1 x + y = 0$, et on peut encore choisir $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, d'où la solution $\vec{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$.

Et ici $E_2 = \mathrm{Ker}((A - \lambda_1 I)^2) = \mathbb{R}^2$, et on peut donc choisir par exemple un vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, associé à la solution $\tilde{\vec{\varphi}}_2 = e^{\lambda_1 t}(I + (A - \lambda_1 I)t)\vec{v}_2 = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t \\ 1 + \lambda_1 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$.

D'où le résultat. ▪

On en déduit le calcul pratique d'une solution particulière :

On note λ_1 et λ_2 les racines du polynôme caratéristique, et si $\lambda_2 \neq \lambda_1$ on note $\varphi_{h1}(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $\varphi_{h2}(t) = e^{\lambda_2 t}$, et si $\lambda_2 = \lambda_1$ on note $\varphi_{s1}(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $\varphi_{s2}(t) = te^{\lambda_2 t}$. On cherche une solution y_p sous la forme $y_p = \varphi_{h1}(t)c_1(t) + \varphi_{h2}(t)c_1(t)$ où c_1 et c_2 sont des fonctions inconnues.

Alors :

Corollaire 4.85 *Les fonctions c_1 et c_2 peuvent être choisies vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \varphi_1(t)c_1'(t) + \varphi_2(t)c_2'(t) = 0, \\ \varphi_1'(t)c_1'(t) + \varphi_2'(t)c_2'(t) = b(t), \end{cases} \tag{4.35}$$

une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre 2 étant alors donnée par $\varphi_p(t) = \varphi_1(t)c_1(t) + \varphi_2(t)c_2(t)$.

Preuve. On applique le lemme précédent : on cherche une solution particulière du système $\vec{x}' = A.\vec{x} + \vec{b}$. On fait varier la constante vectorielle $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, i.e. on cherche une solution particulière sous la forme $\vec{\varphi}_p(t) = R(t)\vec{c}(t)$. Et on prend comme résolvante, celle donnée à l'aide des solutions trouvées dans le lemme précédent $R(t) = (\,\vec{\varphi}_1(t) \quad \vec{\varphi}_2(t)\,)$ où donc la première composante de $\vec{\varphi}_1(t)$ est $\varphi_1(t)$ et la première composante de $\vec{\varphi}_2(t)$ est $\varphi_2(t)$.

Et la solution particulière du système différentiel associé vérifie pour $\vec{c}$:

$$R(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}.$$

Et ces deux équations donnent immédiatement (4.35). ▪

Corollaire 4.86 *On en déduit (cas des équations différentielles d'ordre 2) :*

$$c_1(t) = \int_0^t \frac{b(\tau)\varphi_2(\tau)}{\varphi_1(\tau)\varphi_2'(\tau) - \varphi_2(\tau)\varphi_1'(\tau)}\,d\tau \quad \text{et} \quad c_2(t) = \int_0^t \frac{b(\tau)\varphi_1(\tau)}{\varphi_1(\tau)\varphi_2'(\tau) - \varphi_2(\tau)\varphi_1'(\tau)}\,d\tau$$

d'où une solution particulière $\varphi_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$.

5 Équations différentielles non linéaires autonomes

5.1 Introduction

On rappelle qu'une équation différentielle (linéaire ou non) est de la forme dans E espace de Banach :

$$x' = f(t,x).$$

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes différentiels, i.e. au cas où $E = K^n$, l'équation ci-dessus étant écrite avec les notations usuelles $\vec{x}' = \vec{f}(t,\vec{x})$:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

où les f_j pour $1 \leq j \leq n$ sont des fonctions à valeurs scalaires qui ne sont pas supposées linéaires en les x_i. On les supposera localement lipschitziennes sur $I \times B \subset \mathbb{R} \times K^n$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et B un ouvert borné dans K^n, ce qui donnera l'existence et l'unicité locale de la solution une fois une condition initiale $(t_0, \vec{x}_0) \in I \times B$ donnée (la solution devant satisfaire à $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$).

5.2 Équation différentielle autonome, système différentiel autonome

Définition 5.1 On appelle équation différentielle autonome une équation différentielle pour laquelle f ne dépend pas du temps : $f(t,x) = f(x)$. C'est donc un équation différentielle de type :

$$x' = f(x)$$

On appelle système différentiel autonome un système différentiel pour lequel f ne dépend pas du temps :

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}) \tag{5.1}$$

Exemple 5.2 $x' = x^2$ est autonome mais pas $x' = t$ ou $x' = \frac{t}{x}$. ▲

Exemple 5.3 Le système prédateur-proie :

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_1x_2 \\ x_2' = cx_1x_2 - kx_2 \end{cases}$$

est autonome. C'est un système prédateur-proie lorsque a, b, c est k sont > 0, et il sera étudié en détails. ▲

Exemple 5.4 Le pendule $y'' = -k\sin(y)$ s'écrit comme système différentiel autonome :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = k\sin(x_1) \end{cases}$$

Pour les petits mouvements, il est approché par un système linéaire car dans ce cas $\sin(x_1) \simeq x_1$. ▲

Définition 5.5 (Espace des phases.) Les variables étant $(t,\vec{x}) \in I \times B$ avec $B \subset K^n$, l'espace des phases est l'espace K^n (l'espace des $\vec{x}$).

Définition 5.6 (Trajectoire ou orbite.) Si $\vec{\varphi}$ est solution du système différentiel (5.1) pour la condition initiale $(t_0, \vec{x}_0)$, son image $\{\vec{x} \in K^n : \exists t \in I,\ \vec{x} = \vec{\varphi}(t)\}$ est appelé trajectoire (ou orbite) du système différentiel (cette trajectoire contient le point $\vec{x}_0$). C'est un sous-ensemble de l'espace des phases.

Exemple 5.7 Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

C'est un système différentiel autonome (linéaire), de solution sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \\ x_2(t) = -2c_1e^{-t} + c_2e^{2t}. \end{cases}$$

L'espace des phases est $\mathbb{R}^2$ et les différentes trajectoires sont données pour les différentes valeurs de c_1 et c_2. Par exemple, pour c_1=0 et $c_2 \neq 0$ la trajectoire est une demi-droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ▲

Proposition 5.8 *Pour un système différentiel autonome, si φ est solution sur I, toutes ses translatées $\psi(t) = \varphi(t+c)$ pour $c \in \mathbb{R}$ sont solutions sur $I - c$.*

Preuve. Soit φ une solution sur $I \subset \mathbb{R}$: $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ pour tout $t \in I$. Et donc, pour $c \in \mathbb{R}$ et t tel que $t + c \in I$, il vient $\varphi'(t+c) = f(\varphi(t+c))$ pour tout $t \in I - c$, i.e. $\psi'(t) = f(\psi(t))$ pour tout $t \in I - c$. ▲

Remarque 5.9 Cette proposition est bien sûre fausse pour les systèmes non autonomes : on a alors $\varphi'(t+c) = f(t+c, \varphi(t+c))$, d'où $\psi'(t) = f(t+c, \psi(t)) \neq f(t, \psi(t))$ en général. ▲

Définition 5.10 Lorsque $I = \mathbb{R}$, lorsque deux solutions x et y sont translatées, i.e. $x(t) = y(t+c)$ pour un $c \in \mathbb{R}$, on dit que leurs trajectoires sont translatées l'une de l'autre. Et si x arrive au temps t en un point P de la trajectoire, y arrive en P avec un retard de c (arrive au temps $t+c$).

Proposition 5.11 *Pour un système différentiel autonome, 2 trajectoires qui passent par un même point sont translatées l'une de l'autre.*

Preuve. Soient φ et ψ deux solutions qui passe par le point P : on a donc $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$, $\psi'(t) = f(\psi(t))$, et il existe t_1 et t_2 tels que $\varphi(t_1) = P$ et $\psi(t_2) = P$, avec $t_1 \neq t_2$, sinon $\varphi = \psi$.

Posons $\zeta(t) = \varphi(t - (t_2 - t_1))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\zeta' = f(\zeta)$ (proposition 5.8) et $\zeta(t_2) = \varphi(t_1) = P$). Par unicité, $\zeta(t) = \psi(t)$, et donc $\psi(t) = \varphi(t - (t_2 - t_1))$: les solutions φ et ψ sont translatées. ∎

Corollaire 5.12 *Pour un système différentiel autonome, soit une trajectoire n'a pas de point double, soit une trajectoire est fermée (tous les points sont doubles).*

Preuve. Il s'agit de montrer que si une trajectoire a un point double, alors elle est fermée (i.e. elle est périodique), i.e. si elle passe en un point P à t_1 et à $t_2 \neq t_1$ alors en t_2 elle reprend la même trajectoire, i.e. elle est translatée. C'est la proposition 5.11 car on a une fonction $\vec{\varphi}$ qui vérifie $\vec{\varphi}(t_1) = P = \vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_2 - (t_2 - t_1)) = \vec{\psi}(t_2)$ où $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t - (t_2 - t_1))$. ∎

Exemple 5.13 : contre-exemple : ce résultat est faux pour un système différentiel non autonome. Par exemple :

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{t} x_1 \\ x_2' = x_1 - \dfrac{1}{t} x_2 \end{cases}$$

La solution est immédiate : $x_1(t) = at$ sur $\mathbb{R}$ puis $x_2(t) = \frac{a}{3}t^2 + \frac{b}{t}$ pour $t \neq 0$. En particulier pour a et b liés par $a = \frac{1}{t_0}$ et $b = \frac{t_0^2}{3}$ on obtient la famille de solutions
$(x_1(t) = \frac{t}{t_0}, x_2(t) = \frac{1}{3t_0}t^2 - \frac{t_0^2}{3t})$
qui passent toutes par le point $(1, 0)$ pour $t = t_0$ sans pour autant que ces courbes soient translatées les unes des autres. ∎

Définition 5.14 (Point critique.) Dans un système différentiel autonome, un point critique est un point pour lequel $f(x) = 0$ (la vitesse en ce point est nulle, $x' = 0$).

Proposition 5.15 *Pour un système autonome, en un point critique la solution y reste : si a t_0 on a $f(x(t_0)) = 0$ (et donc $x'(t_0) = 0$) alors pour tout t on a $x(t) = x(t_0)$.*

Preuve. Soit x_0 un point critique. La fonction constante $x : t \to x_0$ est trivialement solution de $x' = f(x)$ pour la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Et si une solution passe par ce point à un instant t_1 c'est une translatée (système autonome). ∎

5.3 Stabilités et classification des points critiques

Le problème est de savoir si 2 solutions 'proches' à un temps t_0 vont rester 'proches' (stabilité) et si même elles se 'rapprochent' quand $t \to \pm\infty$ (stabilité asymptotique).

Définition 5.16 Une trajectoire $\{\vec{\varphi}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ approche un point $P = (a_1, \ldots, a_n)^t$ ssi :

$$\lim_{t \to \pm\infty} \vec{\varphi}(t) = P$$

On se limite dans la suite au cas 2-D.

Définition 5.17 Une trajectoire entre au point $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, resp. sort du point P, ssi elle s'en approche suivant une direction fixée quand $t \to +\infty$, resp. quand $t \to -\infty$:

$$\text{ou bien} \quad \lim_{t \to \pm\infty} \frac{x_2(t) - b}{x_1(t) - a} \in \mathbb{R}, \quad \text{ou bien} \quad \lim_{t \to \pm\infty} \frac{x_1(t) - a}{x_2(t) - b} \in \mathbb{R}.$$

(Au moins une de ces limites existe et est finie.)

Définition 5.18 (Classification des points critiques.)

1- Un point critique P est un noeud ssi : ou bien il y a une infinité de trajectoires entrantes, ou bien une infinité de trajectoires sortantes.

2- Un point critique P est un point selle ssi il y a 2 trajectoires entrantes et 2 trajectoires sortantes, les autres trajectoires étant asymptotiques à ces 4 là.

3- Un point critique P est un point spiral ssi chaque trajectoire s'approchant de P s'y enroule en spiral quand $t \to \pm\infty$.

4- Un point critique P est un centre ssi P est au centre d'une famille de trajectoires fermées, aucune trajectoire n'approchant P asymptotiquement.

Définition 5.19 (Stabilité.)

1- Un point critique P est stable ssi pour tout $R > 0$ il existe $r > 0$ tel que si une trajectoire est dans la boule $B(P, r)$ à un instant t_0, elle reste dans la boule $B(P, R)$ à tout instant $t > t_0$.

2- Il est dit instable ssi il n'est pas stable.

3- Il est dit asymptotiquement stable ssi il est stable et de plus il existe $\rho > 0$ tel que toute trajectoire qui est dans $B(P, \rho)$ à t_0 s'approche de P quand $t \to< +\infty$.

Théorème 5.20 *Cas d'un système différentiel linéaire. Soit le système différentiel linéaire homogène autonome :*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0$$

où a, b, c et d sont réels. Alors $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le seul point critique. Et si λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$, alors :

1- P est un noeud ssi λ_1 et λ_2 sont réels de même signe ($\lambda_1\lambda_2 > 0$). Ce noeud est asymptotiquement stable ssi $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, instable sinon. (En particulier vrai si $\lambda_1 = \lambda_2$.)

2- P est un point selle (instable) ssi λ_1 et λ_2 sont réels de signe opposé ($\lambda_1\lambda_2 < 0$).

3- P est un point spiral ssi $\lambda_1 = \bar\lambda_2$ est non réel, stable si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ et instable si $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$.

4- P est un centre ssi $\lambda_1 = \bar\lambda_2$ est un imaginaire pur.

Preuve. Noter que l'hypothèse $ad - bc \neq 0$ implique $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ car $ad - bc = \lambda_1\lambda_2$. On va traiter l'un après l'autre les cas A diagonalisable et A non diagonalisable.

Supposons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diagonalisable : on note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres associées aux vecteurs propres indépendants $\vec v_1$ et $\vec v_2$. La solution générale est alors donnée par $\vec\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec v_2$ où c_1 et c_2 sont deux réels quelconques si λ_1 et λ_2 sont réels, et sont deux complexes quelconques si λ_1 est complexe (auquel cas $\lambda_2 = \bar\lambda_1$).

1- Cas λ_1 et λ_2 réels, et quitte à les renuméroter, $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

11- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: au voisinage de $t \to -\infty$, la solution satisfait à $\lim_{t\to-\infty} ||\vec\varphi(t)|| = 0$ et donc toutes les trajectoires approchent P quand $t \to -\infty$. De plus, elles s'en approchent asymptotiquement suivant les directions $\vec v_1$ ou $\vec v_2$, i.e. elles sortent de P : P est un noeud.

12- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: au voisinage de $t \to \infty$, la solution satisfait à $\lim_{t\to\infty} ||\vec\varphi(t)|| = 0$ et s'approchent de P suivant les directions $\vec v_1$ ou $\vec v_2$, et donc toutes les trajectoires entre dans P : P est un noeud.

13- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: toute solution telle que $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$ est asymptote à $\vec\varphi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec v_1$ au voisinage de $t = -\infty$ est asymptote à $\vec\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\vec v_2$ au voisinage de $t = +\infty$: P est un point selle.

2- Cas $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \bar\lambda_1$ avec α et β réels. Alors si $\vec\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec v_1$ et $\vec\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec v_2$ sont les solutions complexes associées, les solutions réelles sont données par $\vec\varphi = c_1(\vec\varphi_1 + \vec\varphi_2) + c_2\frac{1}{i}(\vec\varphi_1 - \vec\varphi_2)$ pour c_1 et c_2 réels.

Les mêmes étapes qu'au point 1- ci-dessus permettent de montrer les points 3- et 4- du théorème.

Supposons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non diagonalisable : $\lambda_1 = \lambda_2$ (racine double donc réelle). De plus supposons A de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $b \neq 0$. La solution générale est donnée par $\vec\varphi(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 bt \\ c_2 \end{pmatrix}$ pour c_1 et c_2 réels. Donc si $\lambda > 0$, toute solution tend vers 0 quand $t \to -\infty$, et si $\lambda < 0$ toute solution tend vers 0 quand $t \to +\infty$, asymptotiquement à la direction

$(1,0)$ dans les deux cas : 0 est un noeud, de plus immédiatement stable pour $\lambda < 0$ et instable pour $\lambda > 0$.

Et si A n'est pas sous forme triangulaire supérieure, il existe une matrice de passage (inversible) telle $T = P^{-1}AP$ soit de cette forme. On résout alors le système $Z' = TZ$ où $Z = PX$ pour laquelle on a prouvé le résultat souhaité, et P étant inversible, $X = P^{-1}Z$ n'est qu'un changement de base : les propriétés pour le point critique sont conservées.

(On peut écrire aussi qu'une solution est a priori de la forme $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix}$ et donc c'est bien le signe de λ qui décide de la convergence vers 0 en $t = \pm\infty$ et suivant la direction $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$.) ∴

Remarque 5.21 Dans le cas d'un noeud, la démonstration précédente montre que la solution s'approche de 0 suivant au plus 2 directions déterminées. ∴

Exemple 5.22 Donner la qualité du point critique du système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Et donner les éventuelles directions asymptotiques.
(Réponse : noeud instable. $x_1 = c_1e^{4t} - c_2e^{2t}$, $x_2 = c_1e^{4t} + c_2e^{2t}$, et les directions asymptotiques sont données par les vecteurs $(1,1)$ et $(-1,1)$.) ∴

Exemple 5.23 Donner la qualité du point critique du système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Et donner les éventuelles directions asymptotiques.
(Réponse : point selle (instable). $x_1 = c_1e^{t} - c_2e^{-4t}$, $x_2 = \frac{2}{3}c_1e^{t} - c_2e^{-4t}$, et les directions asymptotiques sont données par les vecteurs $(1, \frac{2}{3})$ au voisinage de $+\infty$ et $(1,1)$ au voisinage de $-\infty$.) ∴

Exemple 5.24 Donner la qualité du point critique du système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -13x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Et donner les éventuelles directions asymptotiques.
(Réponse : centre (stable). $x_1 = c_1\cos(2t) - c_2\sin(2t)$, $x_2 = (2c_2 - 3c_1)\cos(2t) - (2c_1 + 3c_2)\sin(2t)$, et il n'y a pas de direction asymptotique.) ∴

5.4 Systèmes différentiels presques linéaires

On regarde les systèmes autonomes de type (5.1) :

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,x_2) \\ x_2' = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

Définition 5.25 Ce système est dit presque linéaire si 0 est un point critique isolé, et s'il peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + g_1(x_1,x_2) \\ x_2' = cx_1 + dx_2 + g_2(x_1,x_2) \end{cases} \tag{5.2}$$

avec :

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{g_1(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{g_2(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0.$$

(I.e. $g_1(\vec{x}) = o(|\vec{x}|) = g_2(\vec{x})$ au voisinage de 0.) Et on appelle système différentiel linéaire associé le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

Exemple 5.26 Le système différentiel autonome :

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + x_1x_2 \\ x_2' = -13x_1 - 3x_2 - x_1^2 \end{cases}$$

est presque linéaire. De même que le système prédateur proie :

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_1x_2 \\ x_2' = cx_1x_2 - kx_2 \end{cases}$$

Théorème 5.27 *On considère le système différentiel presque linéaire (5.2) avec $ad - bc \neq 0$ (le point critque 0 étant isolé). On suppose que g_1 et g_2 sont C^1. Et on considère les racines λ_1 et λ_2 du polynome caractéristique du système différentiel linéaire associé. Alors les solutions ont le comportement suivant au voisinage de $P = 0$ (voisin du comportement correspondant au système linéaire associé) :*

1- P est un noeud lorsque λ_1 et λ_2 sont réels de même signe ($\lambda_1\lambda_2 > 0$) avec de plus $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, P est soit un noeud, soit un point spiral.

2- P est un point selle ssi λ_1 et λ_2 sont réels de signe opposé ($\lambda_1\lambda_2 < 0$).

3- P est un point spiral lorsque $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ est non réel avec partie réelle non nulle.

4- Lorsque $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in i\mathbb{R}$ est un imaginaire pur, P est soit un centre, soit un point spiral.

Théorème 5.28 *(Stabilité : Théorème de Liapunov.) Sous les hypothèses du théorème précédent, pour le système différentiel presque linéaire (5.2) :*

1- Si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ et si $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, alors P est asymptotiquement stable (applicable en particulier lorsque λ_1 et λ_2 sont réels).

2- Sinon, i.e. $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ ou si $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$, alors P est instable.

A Annexe : Lemme de Gronwall

A.1 Lemme de Gronwall

Rappel : La solution de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constant, $a > 0$ et $k > 0$, pour $t \in [0, T]$:

$$x' = kx + at, \quad x(0) = 0 \tag{A.1}$$

est donnée par :

$$x(t) = \frac{a}{k^2}(e^{kt} - 1 - kt). \tag{A.2}$$

En effet :

1- une solution homogène (de "$x' = kx$") est $x_h(t) = C_0e^{kt}$.

2- Et par variation de la constante, une solution particulière (de "$x' = kx + at$") est donnée en calculant $C(t)$ telle que $x_p(t) = C(t)e^{kt}$, et une telle $C(t)$ vérifie :

$$C'(t)e^{kt} = at.$$

D'où :

$$C(t) = \int_0^t a\tau e^{-k\tau}\, d\tau = \frac{a}{k^2}(1 - e^{-kt} - kte^{-kt}),$$

par intégration par parties et en imposant $C(0) = 0$.

La solution générale est donc $x(t) = (x_h + x_p)(t) = C_0e^{kt} + \frac{a}{k^2}(e^{kt} - 1 - kt)$. Et ayant $x(0) = 0$, il vient $C_0 = 0$.

Notez que la solution homogène n'intervient pas, par choix de la condition initiale $x(0) = 0$: la solution cherchée est la solution particulière x_p trouvée, et est bien donnée par (A.2).

Le lemme suivant indique que pour l'inéquation variationnelle :

$$x' \leq kx + at, \quad x(0) = 0, \tag{A.3}$$

la solution est majorée par la solution de l'équation différentielle (A.1), et la démonstration est similaire (variation de la constante) :

Lemme A.1 *(Gronwall) Soient $a > 0$ et $k > 0$ deux réels et soit $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 qui vérifie :*

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T], \quad v'(t) \le at + kv(t). \tag{A.4}$$

Alors v est telle que :

$$\forall t \in [0, T], \quad v(t) \le \frac{a}{k^2}(e^{kt} - 1 - kt). \tag{A.5}$$

(N.B. : on vérifie, à l'aide de développement limité de e^{kt}, que le membre de droite trouvé est ≥ 0.)

Preuve. On pose $v(t) = C(t)e^{kt}$ sur $[0, T]$. Donc la fonction C satisfait sur $[0, T]$ à :

$$C'(t) \le ate^{-kt}.$$

D'où en intégrant sur $[0, t]$, sachant que $C(0) = 0 (= v(0))$:

$$C(t) \le \int_0^t a\tau e^{-k\tau} \, d\tau = \frac{a}{k^2}(1 - e^{-kt} - kte^{-kt}),$$

et ceci est vrai pour tout $t \in [0, T]$. ∎

Corollaire A.2 *(Gronwall) Soient $a > 0$ et $k > 0$ deux réels et soit $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie :*

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) \le at + k \int_0^t u(\tau) \, d\tau \tag{A.6}$$

Alors u est telle que :

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) \le \frac{a}{k}(e^{kt} - 1) \tag{A.7}$$

Preuve. On pose $v(t) = \int_0^t u(\tau) \, d\tau$, et v vérifie (A.4). On applique le lemme de Gronwall, d'où (A.5), d'où puisque par définition de v on a $u(t) \le at + kv(t)$ sur $[0, T]$, il vient $u(t) \le at + k(\frac{a}{k^2}e^{kt} - \frac{a}{k^2}(1 + kt))$ sur $[0, T]$, ce qui est le résultat annoncé. ∎

A.2 Généralisation du lemme de Gronwall

(Voir Reinhard [8].)

Exercice A.3 Soit φ une fonction continue sur $[0, T]$ à valeurs réelles, et soient f et k deux fonctions continues $[0, T] \to \mathbb{R}$ avec $k(t) > 0$ sur $[0, T]$. On suppose que φ est solution sur $[0, T]$ de l'équations intégrale :

$$\varphi(t) \le f(t) + \int_0^t k(u)\varphi(u) \, du.$$

Montrer qu'alors φ est majorée sur $[0, T]$ par :

$$\varphi(t) \le f(t) + \int_0^t k(u)f(u)e^{\int_u^t k(v) \, dv} \, du$$

Indications : 1- poser $\theta(t) = \int_0^t k(u)\varphi(u) \, du$ et donner l'inéquation différentielle satisfaite par θ. 2- Introduire le facteur intégrant $e^{-\int_0^t k(u) \, du}$ et donner l'inéquation différentielle satisfaite par $\eta(t) = \theta(t)e^{-\int_0^t k(u) \, du}$. 3- Intégrer et conclure. ∎

Preuve. Posant $\theta(t) = \int_0^t k(u)\varphi(u) \, du$, on obtient l'inéquation différentielle :

$$\theta'(t) = k(t)\varphi(t) \le k(t)(f(t) + \theta(t)), \quad \forall t \in]0, T[.$$

Posant $\eta(t) = \theta(t)e^{-\int_0^t k(u) \, du}$ on obtient l'inéquation différentielle :

$$\eta'(t) \le k(t)f(t)e^{-\int_0^t k(u) \, du}, \quad \forall t \in]0, T[.$$

D'où par intégration (théorème des accroissements finis), sachant $\eta(0) = 0$:

$$\eta(t) \leq \int_0^t k(u)f(u)e^{-\int_0^u k(v)\,dv}\,du, \quad \forall t \in]0, T[.$$

D'où pour $t \in]0, T[$:

$$\begin{aligned}\theta(t) &\leq e^{\int_0^t k(u)\,du} \int_0^t k(u)f(u)e^{-\int_0^u k(v)\,dv}\,du \\ &\leq \int_0^t k(u)f(u)e^{\int_u^t k(v)\,dv}\,du\end{aligned}$$

D'où le résultat sachant $\varphi(t) \leq f(t) + \theta(t)$ et toutes les fonctions continues. ∎

Exemple. Cas particulier simple : cas où f est croissante : montrer qu'alors :

$$\varphi(t) \leq f(t)(1 + \int_0^t k(u)e^{\int_u^t k(v)\,dv}\,du).$$

∎

Preuve. Dans ce cas $f(u) \leq f(t)$ pour $u \in [0, t]$. ∎

A.3 Lemme de Gronwall discret

Lemme A.4 *Soient $h > 0$ et $L > 0$ donnés et soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que :*

$$a_{k+1} \leq (1 + hL)a_k + b_k.$$

Alors on a l'estimation sur a_k suivante, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k \leq a_0 e^{khL} + \sum_{i=0}^{k-1} b_i e^{(k-i-1)hL}.$$

Preuve. Sachant que '$1 + x \leq e^x$' pour $x \geq 0$, l'hypothèse donne :

$$a_{k+1} \leq e^{hL} a_k + b_k.$$

On fait le changement de suite $\alpha_k = e^{-khL} a_k$, suite qui vérifie :

$$\alpha_{k+1} \leq \alpha_k + b_k e^{-(k+1)hL}.$$

D'où par récurrence :

$$\alpha_k \leq \alpha_0 + \sum_{i=0}^{k-1} b_i e^{-(i+1)hL},$$

d'où le résultat. ∎

B Annexe : Dimension infinie et non continuité des applications linéaires

En dimension finie, les applications linéaires $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sont continues : en effet, si dans une base donnée elles sont représentées par une matrice M de taille $n * m$, on a :

$$L(\vec{x}) = M.\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m,$$

et la continuité des applications linéaires est équivalente à la continuité sur la sphère unité $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : ||\vec{x}|| = 1\}$, et s'écrit :

$$\exists c > 0,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m,\ ||\ell(\vec{x})||_{\mathbb{R}^n} \leq c||\vec{x}||_{\mathbb{R}^m}.$$

Soit encore :

$$\exists c > 0,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m,\ ||M.\vec{x}||_{\mathbb{R}^n} \leq c||\vec{x}||_{\mathbb{R}^m}.$$

Mais $M.\vec{x} = \sum_{j=1}^m x_j M(:,j)$ où $M(:,j)$ est le vecteur j-ième colonne de M, d'où :

$$||M.\vec{x}|| \le \sum_{j=1}^m |x_j|\,||M(:,j)|| \le ||\vec{x}|| \sqrt{\sum_{j=1}^m ||M(:,j)||^2} = ||\vec{x}|| \sqrt{\sum_{\substack{j=1,m \\ i=1,n}} ||M(i,j)||^2}$$

Donc le c de la définition de la continuité existe, à savoir par exemple $c = \sqrt{\sum ||M(i,j)||^2}$.

Par contre, en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toutes continues.

Par exemple, plaçons-nous dans ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\sum_1^\infty x_k^2 < \infty$ (ensemble des suites de carré sommable). On munit ℓ^2 de sa norme $||x||_{\ell^2} = (\sum_1^\infty x_k^2)^{\frac{1}{2}}$, qui est l'extension de $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne lorsque n tend vers l'infini.

Et on prend l'application linéaire L définie sur les vecteurs de base $e_1 = (1,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,...)$,... par $L(e_k) = ke_k$. Cette application est bien définie sur le sous-ensemble $F \subset \ell^2$ défini par

$$F = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2 : (\sum_1^\infty k^2 x_k^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

et est trivialement linéaire (sa matrice généralisée est la matrice diagonale avec pour k-ième élément diagonale la valeur k).

Mais L n'est pas continue : l'image de la boule unité par L n'est pas bornée car $\sup_k(||L.e_k||_{\ell^2}) = \sup_k(||ke_k||_{\ell^2}){=}\infty$ (avec trivialement $e_k \in F$ et $||e_k||_{\ell^2} = 1$).

Un autre exemple classique est celui de l'opérateur de dérivation $D : C^\infty \to C^\infty$ (où $C^\infty = C^\infty([a,b],\mathbb{R})$), qui à une fonction f associe sa dérivée $Df = f'$. On munit C^∞ de la norme de la convergence uniforme : i.e. on choisit la norme définie par $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Alors l'opérateur D est linéaire (trivial), mais n'est pas continu, et même n'est continu en aucun point. Montrons le pour $[a,b] = [0,2\pi]$.

À $g \in C^\infty$, montrons que :

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\eta > 0,\ \exists f \in C^\infty,\ ||f-g||_\infty < \eta \quad \text{et} \quad ||Df - Dg||_\infty \ge \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Alors à $\eta > 0$ donné, définissons f sur $[a,b]$ par $f(t) = g(t) + \frac{\eta}{2}\sin(\frac{1}{\eta}t)$. On a $f \in C^\infty$ et $||f-g||_\infty < \eta$, mais on a $f' - g' = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{\eta}t)$ d'où $||f'-g'||_\infty \ge \varepsilon$.

C Annexe : Une dérivation

Exemple C.1 Montrer que l'intégrale dépendant du paramètre t :

$$I(t) = \int_0^t f(t,u)\,du$$

(où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$) est dérivable et que sa dérivée vaut :

$$I'(t) = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,u)\,du.$$

Attention : t est à la fois borne de l'intégrale et paramètre dans f. ▪

Preuve. Première démonstration. On pose :

$$J(s,x) = \int_0^s f(x,u)\,du$$

et on a $I(t) = J(t,t) = J(s(t),x(t))$ où $s(t) = t = x(t)$. Toutes les intégrales sont bien définies car f est C^1 et on peut dériver sous le signe $\int$ (théorème de Lebesgue). Et on a :

$$I'(t) = \frac{\partial J}{\partial s}(s(t),x(t))\frac{\partial s}{\partial t}(t) + \frac{\partial J}{\partial x}(s(t),x(t))\frac{\partial x}{\partial t}(t)$$

et donc avec $s(t) = t = x(t)$:

$$I'(t) = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,u)\,du$$

ce qui est le résultat annoncé. ▪

Preuve. Deuxième démonstration. On fait un changement de variable pour se ramener à une intégration sur un intervalle indépendant de t : soit $u = \frac{s}{t} \in [0,1]$ et donc $ds = t\,du$:

$$I(t) = t\int_0^1 f(t,tu)\,du.$$

On en déduit que (produit de fonctions et dérivation sous $\int$) :

$$I'(t) = \int_0^1 f(t,tu)\,du + t\int_0^1 \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(t,tu) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,tu)\,u\Big)\,du.$$

Puis par changement de variables inverse $s = tu$ et donc $du = \frac{ds}{t}$:

$$I'(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(t,s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,ds + \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(t,s)\,s\,ds.$$

Et par intégration par parties, il vient :

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(t,s)\,s\,ds = -\int_0^t f(t,s)\,ds + [s\,f(t,s)]_{s=0}^{s=t}.$$

D'où le résultat. ▪

D * Démonstration constructive du théorème de Cauchy–Lipschitz

D.1 Solutions approchées

On notera ici $C^1 = C^1(I;E)$.

Définition D.1 Soit $\varepsilon > 0$. Une fonction $\varphi_h : I \to E$ qui est C^1 est une solution approchée à ε près pour l'équation différentielle (1.1), ou solution ε-approchée, ssi :

1. pour tout $t \in I$ on a $(t,\varphi_h(t)) \in I \times E$ (domaine de définition), et
2. pour tout $t \in I$ on a $||\varphi_h{}'(t) - f(t,\varphi_h(t))||_E \le \varepsilon$ (inéquation).

(Ne pas oublier la première condition.)

Pour des raisons de simplicité, on va chercher des solutions approchées 'simples', à savoir C^1 par morceaux :

Définition D.2 Si I, est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$ où les I_k sont des intervalles compacts contigus (en nombre fini), une fonction $\varphi_h : I \to E$ est dite C^1 par morceaux si elle est C^1 sur chacun des intervalles I_k pour $k = 1,...,n$.

Donc, quitte à renuméroter les I_k : si $I = [a,b]$, $a{<}b$, si $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ avec $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, on dit que φ_h est C^1 par morceaux si elle est C^1 sur chacun des intervalles I_k pour $k = 1,...,n$.

On généralise alors la définition d'une solution ε-approchée :

Définition D.3 Soit $\varepsilon > 0$, et soit I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$ où les I_k sont des intervalles compacts contigus. Une fonction $\varphi_h : I \to E$ qui est C^1 par morceaux est une solution approchée à ε près pour l'équation différentielle (1.1), ou solution ε-approchée, ssi :

1. pour tout $t \in I$ on a $(t,\varphi_h(t)) \in I \times E$ (domaine de définition), et
2. pour tout $k = 1,...,n$ et pour tout $t \in I_k$ on a $||\varphi_h{}'(t) - f(t,\varphi_h(t))||_E \le \varepsilon$ (inéquation).

(Ne pas oublier la première condition, et la deuxième condition sous-entend le fait que si t est à l'extrémité d'un intervalle, i.e. $t =$ l'un des t_k pour $k = 0,...,n$, alors ce sont les dérivées à droite et à gauche qu'il faut considérer :
$||\varphi_h{}'_d(t_k) - f(t,\varphi_h(t_k))||_E \le \varepsilon$ et $||\varphi_h{}'_g(t_k) - f(t,\varphi_h(t_k))||_E \le \varepsilon$.)

On a alors le théorème d'existence de solutions approchées :

Théorème D.4 *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, soit $t_0 \in I$ et soit $B(x_0, r) \subset E$ une boule fermée de rayon r et de centre x_0. On suppose que $f : I \times B(x_0, r) \to E$ est une fonction continue telle que :*

$$\exists M > 0, \quad \forall t \in I, \quad \forall x \in B(x_0, r), \quad ||f(t, x)||_E \leq M \tag{D.1}$$

(i.e. f est bornée par M sur la boule $B(x_0, r)$.)

Posant $J = [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \bigcap I$, on a alors : pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation différentielle (1.3) a une solution ε approchée $\varphi_h : J \to E$, de classe C^0 qui est C^1 par morceaux. On peut en particulier choisir φ_h affine par morceaux à l'aide de la méthode d'Euler explicite.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ donné. On va construire φ_h continue et affine par morceaux sur $[t_0, t_0 + \frac{r}{M}]$ par la méthode d'Euler (mêmes étapes sur $[t_0 - \frac{r}{M}, t_0]$). On note $J = [t_0, T]$ avec $T = t_0 + \frac{r}{M}$.

Étape 1 : f, t_0 et x_0 étant donnés, $f(t_0, x_0)$ est connu. On prend alors φ_0 l'application affine de pente $\varphi_0'(t) = f(t_0, x_0)$ telle que $\varphi_0(t_0) = x_0$. C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_0(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) = x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0).$$

Et f étant continue, il existe $t_1 \in J$ avec $t_1 > t_0$ tel que :

$$\forall t \in [t_0, t_1], \quad ||f(t, \varphi_0(t)) - f(t_0, x_0)||_E \leq \varepsilon.$$

(Sachant que φ_0 étant continue, $(t, \varphi_0(t)) \to (t_0, \varphi(t_0))$ quand $t \to t_0$.)

Puisque $\varphi_0'(t) = f(t_0, x_0)$, on a donc $||f(t, \varphi_0(t)) - \varphi_0'(t)||_E \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, et on en déduit que φ_0 est une solution ε-approchée sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. Et si on peut choisir $t_1 = T$, la démonstration est terminée. Sinon on prend pour t_1 le max des t_1 satisfaisant l'équation ci-dessus puis :

Étape 2 : on pose $x_1 = \varphi_0(t_1)$ pour lequel on a :

$$x_1 = x_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, x_0),$$

et donc $||x_1 - x_0||_E \leq r$ puisque $t_1 - t_0 < T - t_0 \leq \frac{r}{M}$ et que $f(t_0, x_0) \leq M$ avec l'hypothèse (D.1). On pose alors $r_1 = r - ||x_1 - x_0||_E$ et f satisfait à (D.1) sur $B(x_1, r_1)$.

Et on considère l'application affine φ_1 de pente $\varphi_1' = f(t_1, x_1)$, et telle que $\varphi_1(t_1) = x_1$. C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(t) = x_1 + (t - t_1)f(t_1, x_1).$$

Et f étant continue, on prend $t_2 \in J$ avec $t_2 > t_1$ tel que :

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad ||f(t, \varphi_1(t)) - f(t_1, x_1)||_E \leq \varepsilon,$$

et donc φ_1 est une solution ε-approchée sur $[t_1, t_2]$. Si on peut choisir $t_2 = T$, la démonstration est terminée. Sinon on prend pour t_2 le max des t satisfaisant l'équation ci-dessus, puis $x_2 = \varphi_1(t_2)$, puis $r_2 = r_1 - ||x_2 - x_1||_E > 0$, et on poursuit le processus :

Étape 3 : on construit ainsi une suite strictement croissante (t_n), une suite de points (x_n), une suite (r_n) et une suite de fonctions affines (φ_n). S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_n = T$, la démonstration est terminée : la fonction affine par morceaux définie sur chacun des morceaux $[t_n, t_{n+1}]$ comme étant égale à la fonction φ_n est une solution ε-approchée sur $[t_0, T]$.

Étape 4 : Sinon, la suite strictement croissante (t_n) est telle que pour tout n on a $t_n < T$. On va montrer que ce cas est impossible grace à l'hypothèse (D.1) : cette hypothèse implique que la pente de toutes les φ_n est bornée par M (voir (1.3)) ce qui va permettre de conclure :

on pose $t' = \sup_{\mathbb{N}}(t_n)$ et on suppose que $t' \leq T$ avec $t' > t_n$ pour tout n (la suite est strictement croissante), et on va montrer qu'il existe n tel que $t' \leq t_{n+1}$ ce qui est absurde. Pour ce on va montrer que pour n assez grand, on aura φ_n qui sera une solution ε-approchée sur l'intervalle $[t_n, t']$ (et donc qu'on peut prendre $t_{n+1} \geq t'$).

Commençons par montrer que la suite (x_n) construite est convergente, en montrant que c'est une suite de Cauchy. Par construction on a pour tout n :

$$||x_{n+1} - x_n||_E = ||\varphi_n(t_{n+1}) - \varphi_n(t_n)||_E \leq (t_{n+1} - t_n)||f(t_n, x_n)||_E \leq (t_{n+1} - t_n)M,$$

et donc pour tout n et m entiers (avec l'inégalité triangulaire) :

$$||x_{n+m} - x_n||_E \leq (t_{n+m} - t_n)M \leq (t' - t_n)M \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc la suite (x_n) est de Cauchy dans E espace de Banach. La suite est donc convergente dans E, et on note $x' = \lim(x_n)$. De plus, la boule $B(x_0, r)$ étant fermé, on a $x' \in B(x_0, r)$.

Il s'agit maintenant de montrer que pour n assez grand, φ_n est une solution ε-approchée sur $[t_n, t']$: introduisons le point (t', x') : on a :

$$\begin{aligned} ||\varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t))||_E &= ||f(t_n, x_n) - f(t, \varphi_n(t))||_E \\ &\leq ||f(t_n, x_n) - f(t', x')||_E + ||f(t', x') - f(t, \varphi_n(t))||_E, \end{aligned}$$

pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Quitte à prendre n assez grand, $n \geq N_1$, on a $||f(t_n, x_n) - f(t', x')||_E \leq \frac{\varepsilon}{2}$ par continuité de f, car $(t_n, x_n) \to (t', x')$ quand $n \to \infty$. Puis pour $t \in [t_n, t']$:

$$||\varphi_n(t) - x'||_E \leq ||\varphi_n(t) - x_n||_E + ||x_n - x'||_E \leq (t' - t_n)M + ||x_n - x'||_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $\varphi_n(t) \to x'$ quand $n \to \infty$ pour tout $t \in [t_n, t']$. Et donc quitte à prendre n assez grand, $n \geq N_2$, on a par continuité de f :

$$\forall t \in [t_n, t'], \quad ||f(t', x') - f(t, \varphi_n(t))||_E \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

car $(t_n, x_n) \to (t', x')$ quand $n \to \infty$. On en déduit que, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\forall t \in [t_n, t'], \quad ||\varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t))||_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et donc que φ_n est une ε-approximation sur $[t_n, t']$ ce qui est absurde (avec l'hypothèse $t' > t_{n+1}$). ▪

D.2 Cas des fonctions lipschitziennes

Soit toujours I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $B = B(x_0, r) \subset E$ une boule fermée de E.

Dans le cas où f est k-lipschitzienne, on va obtenir le résultat souhaité d'existence et d'unicité d'une solution de l'équation différentielle (1.3) (pour une condition initiale donnée).

D.2.1 Définitions

Définition D.5 Une fonction continue $f : I \times B \to E$ est dite lipschitzienne en x si :

$$\exists k > 0, \quad \forall (t, x_1, x_2) \in I \times B^2, \quad ||f(t, x_1) - f(t, x_2)||_E \leq k||x_1 - x_2||_E.$$

Si une telle constante k existe, on dit que f est k-lipschitzienne en x, ou bien k-Lipschitz en x.

Exemple D.6 En particulier, si f est différentiable en x, pour tout $x \in B$, et si :

$$\exists k > 0, \quad \forall (t, x) \in I \times B, \quad ||\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)||_E \leq k$$

alors f est k-lipschitzienne en x dans $I \times B$.

En effet, on se place sur le segment de droite $\varphi : s \in [0, 1] \to \varphi(s) = x_1 + (x_2 - x_1)s$ qui rejoint les points x_1 et x_2, et on pose $g(s) = f(t, \varphi(s)) \in E$. Alors $g(0) = f(t, x_1)$, $g(1) = f(t, x_2)$ et

$g'(s) = 0 + \partial_2 f(t, \varphi(s))(\varphi'(s)) = \partial_2 f(t, \varphi(s))(x_2 - x_1)$ d'où $||g'(s)||_E \leq k||x_2 - x_1||_E$.

Et on applique le théorème des accroissements finis à g :

$||g(1) - g(0)||_E \leq \int_0^1 k||x_2 - x_1||_E \, ds = k||x_2 - x_1||_E$

ce qui est le résultat souhaité. ▪

D.2.2 Existence de solutions approchées

On considère l'équation différentielle (1.1) :

Proposition D.7 *Si f est k-lipschitzienne en x sur $I \times B$ avec I intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $B = B(x_0, r)$ boule fermée de E, alors pour $t_0 \in I$, l'équation différentielle (1.1) admet une solution φ ε-approchée sur l'intervalle $I \bigcap [t_0 - \frac{r}{k}, t_0 + \frac{r}{k}]$ qui satisfait à $\varphi(t_0) = x_0$.*

Preuve. C'est une application immédiate du théorème D.4. ▪

En particulier, avec I intervalle fermé, une équation différentielle linéaire admet une solution approchée sur I.

D.2.3 Calcul d'erreur

On a le lemme fondamental :

Lemme D.8 *Si $f : I \times B(x_0, r) \to E$ est k-lipschitzienne en x, si $t_0 \in T$ et si $\varphi_1 : I \to E$ et $\varphi_2 : I \to E$ sont deux solutions resp. ε_1 et ε_2-approchées telles que $\varphi_1(t_0) = x_{01}$ et $\varphi_2(t_0) = x_{02}$, alors :*

$$\forall t \in I, \quad ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_E \leq ||x_{01} - x_{02}||_E e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \tag{D.2}$$

Preuve. Application du théorème des accroissements finis et du lemme de Gronwall, voir annexe. Pour simplifier on suppose $t_0 = 0$ (on s'y ramène par translation) et $I = [0, T]$ avec $T > 0$ (le cas $T < 0$ se traite de la même manière). Par hypothèse on a pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$:

$$||\varphi_1'(t) - f(t, \varphi_1(t))||_E \leq \varepsilon_1, \quad ||\varphi_2'(t) - f(t, \varphi_2(t))||_E \leq \varepsilon_2,$$

et donc, pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$, notant $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$:

$$||\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)||_E \leq \varepsilon + ||f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))||_E \leq \varepsilon + k||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_E.$$

Posant $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, on a donc, pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$:

$$||\varphi'(t)||_E \leq \varepsilon + k||\varphi(t)||_E$$

On applique le théorème des accroissement finis, ce qui donne, pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$:

$$||\varphi(t) - \varphi(0)||_E \leq \int_0^t \varepsilon + k||\varphi(\tau)||_E \, d\tau \leq (\varepsilon + k||\varphi(0)||_E)t + k\int_0^t ||\varphi(\tau) - \varphi(0)||_E \, d\tau.$$

On pose $u(t) = ||\varphi(t) - \varphi(0)||_E$ et $a = (\varepsilon + k||\varphi(0)||_E)$ et on a donc pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$:

$$u(t) \leq at + k\int_0^t u(\tau) \, d\tau.$$

On applique le lemme de Gronwall (voir annexe), pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$:

$$u(t) \leq \frac{a}{k}(e^{kt} - 1)$$

D'où, pour tout $t \in I \times \mathbb{R}_+$:

$$||\varphi(t)||_E \leq ||\varphi(t) - \varphi(0)||_E + ||\varphi(0)||_E \leq ||\varphi(0)||_E e^{k|t-t_0|} + \varepsilon\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

Sachant que $\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = x_{01} - x_{02}$, on a le résultat souhaité. ∴

Remarque D.9 On en déduit immédiatement que si φ_1 et φ_2 ont même condition initiale $x_{01} = x_{02}$ alors :

$$||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_E \leq \frac{2\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1) = \frac{2\varepsilon}{k}O(t - t_0)$$

au voisinage de t_0. ∴

Remarque D.10 Si $\varphi_2 = \varphi$ est une solution exacte, le lemme précédent est un lemme de calcul d'erreur entre une solution approchée φ_1 et une solution exacte φ.

On remarque que deux solutions approchées peuvent a priori 's'éloigner' l'une de l'autre à une vitesse exponentielle. Il importe en particulier de bien connaître la condition initiale $\varphi(t_0) = x_{01}$ et de bien l'approximer, le terme '$||x_{01} - x_{02}||_E e^{k|t-t_0|}$' étant dominant dans le membre de droite de (D.2) lorsque $||x_{01} - x_{02}||_E > \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}$. ∴

D.2.4 Théorème de Cauchy–Lipschitz

Le lemme fondamental D.8 donne immédiatement :

Corollaire D.11 *(Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy–Lipschitz) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, si $B = B(x_0, r)$ est une boule fermée de E, si $t_0 \in I$ et si f est k-lipschitzienne sur $I \times B$, alors il existe une solution exacte φ de (1.1) dans I telle que $\varphi(t_0) = x_0$, et cette solution est unique.*

Preuve. Unicité. S'il y a deux solutions exactes alors $x_1 = x_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et on applique le lemme D.8.

Existence. On se donne une suite (ε_n) qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La proposition D.7 nous donne l'existence d'une suite de solutions φ_n ε_n-approchées vérifiant $\varphi_n(t_0) = x_0$. On rappelle que l'espace $C^0(I; E)$ muni de la norme de la convergence uniforme $||g||_\infty = \sup_I ||g(t)||_E$ est un espace de Banach car E est un espace de Banach.

Et la suite (φ_n) est de Cauchy dans l'espace $C^0(I; E)$. En effet la proposition D.7 donne :

$$\forall t \in I, \quad ||\varphi_m(t) - \varphi_n(t)||_E \le K(\varepsilon_m + \varepsilon_n)$$

où $K = \sup_{t\in I} \frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k} < \infty$ (on rappelle que I a été supposé compact), et donc :

$$||\varphi_m - \varphi_n||_\infty \le K(\varepsilon_m + \varepsilon_n) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

la suite (φ_n) est donc convergente dans l'espace de Banach $C^0(I; E)$. Soit φ la limite. Il reste à montrer que φ est différentiable et satisfait à l'équation différentielle (1.1). Sachant φ continue, si φ vérifie :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau,$$

alors φ est dérivable et satisfait à (1.1) (car f est continue puisque lipschitzienne).

Mais, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} ||\varphi_n'(t) - f(t, \varphi(t))||_E &\le ||\varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t))||_E + ||f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))||_E \\ &\le \varepsilon_n + \tilde{\varepsilon}_n, \end{aligned}$$

par définition de φ_n et avec $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ quand $n{\to}\infty$ par continuité de f. Posons $\bar{\varepsilon}_n{=}\varepsilon_n{+}\tilde{\varepsilon}_n$. Le théorème de accroissements finis donne alors :

$$\forall t \in I, \quad ||\varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau||_E \le \bar{\varepsilon}_n |t - t_0|$$

D'où à la limite (la norme est une application continue) :

$$||\varphi(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau||_E = 0$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

D.3 Cas des fonctions localement lipschitziennes

On rappelle la définition déjà vue au paragraphe 1.2 :

Définition D.12 Soit I un intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}$ et $B = B(x_0, r) \subset \Omega$ (une boule de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r > 0$). Une fonction continue $f : I \times B \to E$ est dite localement lipschitzienne en x uniformément en t si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times B$, il existe un voisinage $J_0{\subset}I$ de t_0 et $V_0{\subset}B$ de x_0 et un réel $k_0 > 0$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad \forall x_1, x_2 \in V_0 \quad : \quad ||f(t, x_1) - f(t, x_2)||_E \le k_0 ||x_1 - x_2||_E.$$

On a alors :

Théorème D.13 *(de Cauchy–Lipschitz.) Si $f : I \times B \to E$ est continue et localement lipschitzienne en x et si (t_0, x_0) est un point intérieur à $I \times B$, alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que le problème de Cauchy (1.4) ait une solution exacte unique dans $[t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$ qui satisfasse à $\varphi(t_0) = x_0$.*

De plus, on a l'existence et l'unicité d'une solution maximale : il y a un plus grand intervalle $J \ni t_0$ tel que φ soit solution de l'équation différentielle (1.1) pour la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$, et cette solution est unique.

Preuve. Existence et l'unicité locale : c'est une application du cas lipschitzien, f étant lipschitzienne dans un voisinage fermé de (t_0, x_0).

Existence d'une solution maximale : on prend pour J l'union de tous les intervalles du théorème précédent.

Unicité : soit $J = \{t \in I : \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. Alors J est non vide car il contient t_0. Il s'agit de montrer que $J = I$, mais I étant un intervalle, I est connexe, et si on montre que J est à la fois ouvert et fermé dans I, alors on aura $J = I$.

Mais J est fermé comme image réciproque $(\varphi_1 - \varphi_2)^{-1}(0)$, l'application $\varphi_1 - \varphi_2$ étant continue.

Il reste à montrer que J est ouvert dans I. Soit donc $t \in J$ et soit $x = \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. f étant localement lipschitzienne le théorème précédent nous donne l'unicité de la solution dans un voisinage de t, donc $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ dans un voisinage ouvert de t. Donc si $t \in J$ alors un voisinage ouvert de t est dans J, donc J est ouvert.

Donc J est à la fois ouvert et fermé dans le connexe I et donc $J = I$. ∴

Remarque D.14 Même lorsque f est continue sur tout $\mathbb{R} \times E$, on ne peut pas toujours prolonger une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier : prendre par exemple le cas (non linéaire) $f(t, x) = x^2$ qui est trivialement localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (car dérivable en x sur $\mathbb{R}$).

L'équation différentielle (1.1) avec condition initiale $x(0) = x_0$ à donc une unique solution maximale. Résolvons cette équation différentielle par séparation des variables :

$$\frac{dx}{x^2} = dt, \quad x(0) = x_0 \quad \text{donne} \quad \frac{-1}{x} + \frac{1}{x_0} = t$$

qui donne $x = \varphi(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ (dont on vérifie que $\varphi(0) = x_0$). Si $x_0 = 0$, on a pour solution la solution identiquement nulle.

Supposons $x_0 \neq 0$. La solution a son graphe représenté par une branche d'hyperbole : Le dénominateur s'annule pour $t = \frac{1}{x_0}$ et la fonction φ n'est pas définie et ne peut pas être prolongée par continuité sur tout $\mathbb{R}$ (elle tend vers $\pm\infty$ quand $t \to \frac{1}{x_0}$). Comme la solution est continue, on n'a que deux possibilités, sachant que la solution maximale est l'extension de la solution locale au voisinage de $(t_0, x_0 = \varphi(t_0))$:

1- soit pour tout $t \in]-\infty, \dfrac{1}{x_0}[$, on a $\varphi(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$, mais ceci n'est possible que si la condition initiale t_0=0 est dans cet intervalle $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$, i.e. si $0 < \frac{1}{x_0}$, i.e. si $x_0 > 0$.

2- soit pour tout $t \in]\dfrac{1}{x_0}, \infty[$, on a $\varphi(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$, mais ceci n'est possible que si la condition initiale t_0=0 est dans cet intervalle $]\frac{1}{x_0}, \infty[$, i.e. si $0 > \frac{1}{x_0}$, i.e. si $x_0 < 0$.

Donc, si la condition initiale est (t_0=0, x_0>0), la solution maximale est $\varphi(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ définie sur l'intervalle des $t \in]-\infty, \dfrac{1}{x_0}[$. Et si la condition initiale est (t_0=0, x_0<0), la solution maximale est $\varphi(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ définie sur l'intervalle des $t \in]\dfrac{1}{x_0}, \infty[$. ∴

E Mécanique : plan des phases et équation de Lagrange

Pour simplifier les écritures, le temps initial sera toujours pris égal à $t_0 = 0$. (Pour le cas général, il suffira de considérer les fonctions "$\psi(t) = \varphi(t - t_0)$", i.e. de faire un changement d'origine de l'échelle des temps.)

E.1 Introduction

Soit $F : (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \to F(t, x, y) \in \mathbb{R}$ une fonction C^0 à valeurs scalaires.

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \tag{E.1}$$

i.e., I étant un intervalle (de temps) de $\mathbb{R}$, on cherche une fonction $\vec{\varphi} : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) = F(t, \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t)). \tag{E.2}$$

Exemple E.1 Soit la fonction F donnée par $F(t, x, y) = -kx - \nu y$. L'équation différentielle est $\ddot{x} = -\nu\dot{x} - kx$ (mouvement d'un ressort avec amortisseur), i.e. on doit trouver une fonction φ qui vérifie $\ddot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$, i.e. telle que $\ddot{\varphi}(t) + \nu\dot{\varphi}(t) + k\varphi(t) = 0$ pour tout t. ▪

Avec l'équation différentielle (E.2) du second ordre on impose les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(0) = x_0, \\ \dfrac{d\varphi}{dt}(0) = v_0, \end{cases} \tag{E.3}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ sont des données du problème (position et vitesse à l'instant initial).

On supposera dans la suite que $I = \mathbb{R}$ (pour simplifier) et que $F \in C^0$ lipschitzienne en x uniformément en t (pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz). Et, on notera

$$\varphi(t) = \varphi_{x_0,v_0}(t)$$

la solution de (E.2) pour les conditions initiales (E.3).

Exemple E.2 Pour le ressort "$m\gamma = -kx$" (équation différentielle linéaire et on suppose $m, k \neq 0$), et les C.I. x_0, v_0, posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient $\varphi(t) = x_0 \cos(\omega t) + \dfrac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \overset{\text{noté}}{=} x(t)$. ▪

E.2 Conservation de l'énergie

On considère une solution $x = \varphi$ de l'équation différentielle (E.2).

Définition E.3 L'énergie cinétique est définie par la fonction $y \to \frac{1}{2}my^2$, et ce nom d'énergie cinétique n'est utilisé que lorsque $y = v$ est la vitesse :

$$E_c(\dot{x}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{i.e.} \quad E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2, \tag{E.4}$$

la notation $\dot{x} = v$ (vitesse) étant la notation usuelle.

Définition E.4 Lorsque $F(t, x, y) = F(x)$ (ne dépend que de x), on définit l'énergie potentielle par :

$$E_p(x) \overset{\text{déf}}{=} -\int F(u)\,du, \tag{E.5}$$

i.e. une primitive de F (à une constante près : on verra qu'on considérera essentiellement sa dérivée $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}(x)$).

Définition E.5 On définit l'énergie totale au temps t par :

$$E(t) \overset{\text{déf}}{=} E_p(x(t)) + E_c(v(t)). \tag{E.6}$$

Proposition E.6 *Lorsque $F(t, x, y) = F(x)$, l'énergie totale se conserve, i.e. :*

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \quad \forall t. \tag{E.7}$$

Preuve. On est dans le cas $\ddot{x} = F(x)$. On a $\frac{dE}{dt}(t) = \frac{dE_p}{dx}(x(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{dE_c}{dv}(v(t))\frac{dv}{dt}(t)$, d'où $\frac{dE}{dt} = (-F(x))v + (\frac{1}{2}2mv)\ddot{x} = v(-F(x) + \ddot{x}) = v.0 = 0$. (Ici on est dans le cas où F ne dépend pas de $y = v$, i.e. il n'y a pas d'amortisseur, donc pas de dissipation d'énergie due à un amortisseur.) ▪

Proposition E.7 *Pour tout t, on a $E \geq E_p$, et $E = E_p$ aux points où $\dot{x} = 0$.*

Preuve. L'énergie cinétique est toujours ≥ 0, et n'est nulle que lorsque $\dot{x} = 0$. ∎

Remarque E.8 On a ainsi établi que lorsque les forces extérieures dérivent d'un potentiel $E_p(x)$, i.e. $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}(x)$, alors on a $E = E_c + E_p$ constant dans le temps.

Ou encore, dans le cas des forces extérieures dérivant d'un potentiel $E_p(x)$, c'est que pour avoir E constant dans le temps qu'on définit l'énergie cinétique par $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (formule (E.4)). ∎

Remarque E.9 Lorsque F dépend également de $\dot{x}$, comme pour le "ressort-amortisseur", il y a dissipation d'énergie (sous forme de chaleur par l'amortisseur $\nu\dot{x}$), et on n'a pas conservation de l'énergie. Dans ce cas, l'énergie potentielle n'est pas la seule énergie "apportée" par les termes sources $F(x)$: il y a d'autres termes sources, et F est de la forme $F(t, x, v)$. ∎

Exemple E.10 Pour le ressort "$m\ddot{x} = -kx$" (linéaire), on a $E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2$ et $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$, d'où $\frac{dE}{dt}(t) = \frac{1}{2}(k2x(t)v(t) + m2v(t)\gamma(t)) = v(t)(kx(t) + m\gamma(t)) = v(t)(0) = 0$.

Et E_p correspond à l'énergie emmagasiné par le ressort quand il est comprimé ou détendu (pour x=0 le ressort est au "repos", cas où l'énergie potentielle est minimum). ∎

Exemple E.11 Pour le pendule "$m\ddot{\theta} = -k\sin(\theta)$" (non linéaire), on a $E_c(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$ et $E_p(\theta) = -k\cos(\theta)$, et $\frac{dE}{dt}(t) = k\sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) + m\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t).0 = 0$.

Et E_p correspond à la hauteur auquel se trouve le pendule lorsqu'il fait un angle θ avec la verticale, l'axe vertical étant orienté vers le haut et ayant pour origine le point d'accroche du pendule. En particulier pour $\theta = 0$ le pendule est en position basse et le potentiel est minimum $(= -k)$, et pour $\theta = \pi$ le pendule est en position haute et le potentiel est maximum $(= +k)$. ∎

E.3 Position d'équilibre

Définition E.12 Soit $x = \varphi$ une solution de (E.1). On appelle position d'équilibre au temps t une position $x(t)$ pour laquelle $\dot{x}(t) = 0$ dans un voisinage ouvert du temps t (position où la vitesse est nulle autour du temps t).

Proposition E.13 *Cas $F(t, x, y) = F(x)$. À une position d'équilibre x_0, $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$, i.e. le potentiel a un minimun ou un maximum (local ou global). Et en ce point $F(x_0) = 0$.*

Preuve. L'équation du mouvement est $\ddot{x}(t) = F(x)$. Si $x_0 = x(t_0)$, comme v est nul dans un voisinage de t_0, on a $\dot{v}(t_0) = \dot{v}(t) = 0 = \ddot{x}(t)$, dans un voisinage de t_0, donc $0 = F(x(t)) = 0 = \frac{dE_p}{dx}(x(t))$.

(Il n'est pas suffisant de supposer $v(t_0) = 0$ pour avoir $\dot{v}(t_0) = 0$: prendre $v(t) = t$ et t_0=0 qui donne $v(0) = 0$ alors que $\dot{v}(0) = 1$. Il faut $v(t) = 0$ dans tout un voisinage de t_0.) ∎

Exemple E.14 Pour le ressort $m\ddot{x} = -kx$, il n'y a qu'une position possible d'équilibre $x = 0$. En effet $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ vérifie $\frac{dE_p}{dx}(x) = kx$ ne s'annule que pour $x = 0$. ∎

Exemple E.15 Pour le pendule $m\ddot{\theta} = -k\sin(\theta)$, il y a deux positions possibles d'équilibre, une pour $\theta = 0$ et une autre pour $\theta = \pi$ (modulo 2π). En effet, le potentiel est $E_p = -k\cos\theta$ de dérivée $\frac{dE_p}{d\theta} = k\sin\theta$. ∎

Proposition E.16 *Pour le mouvement $\ddot{x} = F(x)$, s'il y a un point d'équilibre x_0, alors, pour la C.I. (x_0, v_0=0), la solution est la fonction constante $\varphi(t) = x_0$ (la trajectoire est réduite à un point).*

Preuve. Il y a unicité de la solution et la solution proposée $\varphi(t) = x_0$ pour tout t vérifie $\dot{\varphi}(t) = 0$, d'où $\ddot{\varphi}(t) = 0$. Comme $F(\varphi(t)) = F(x_0)$ et comme $F(x_0) = 0$ (point d'équilibre), on a $\ddot{\varphi}(t) = F(\varphi(t))$, i.e. φ est bien la solution cherchée. ∎

Définition E.17 Soit le mouvement $\ddot{x} = F(x)$ pour lequel il existe un point d'équilibre x_0. L'équilibre est dit stable si $E_p(x) \geq E_p(x_0)$ dans un voisinage de x, i.e. si le potentiel a un minimum (local) en x_0. Sinon il est dit instable.

Exemple E.18 Pour le ressort $m\ddot{x} = -kx = -\frac{dE_p}{dx}(x)$, le potentiel $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ est minimum en x=0 et $x_0 = 0$ est point d'équilibre stable. ∴

Exemple E.19 Pour le pendule $m\ddot{\theta} = -k\sin\theta = -\frac{dE_p}{d\theta}(\theta)$, le potentiel $E_p = -k\cos\theta$ est minimum en $\theta = 0$ (point d'équilibre stable) et maximum en $\theta = \pi$ (point d'équilibre instable) (modulo 2π). ∴

E.4 Plan des phases

L'équation différentielle (E.1) du second ordre peut être écrite comme système différentiel du premier ordre : on pose $y = \dot{x}$, donc $\dot{y} = \ddot{x}$ et (E.1) est équivalente à trouver les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ telles que :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(t,x,y), \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \dot{\vec{X}} = \vec{G}(t,\vec{X}) \tag{E.8}$$

où $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{G}(t,\vec{X}) = \begin{pmatrix} y \\ F(t,x,y) \end{pmatrix}$ est C^0.

Proposition E.20 *L'application* $\Phi : (x_0,v_0) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi_{x_0,v_0} \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *est injective : à deux solutions initiales différentes* $\vec{X}_{01} = (x_{01},v_{01})$ *et* $\vec{X}_{02} = (x_{02},v_{02})$ *donnée au temps* t=0 *correspond deux solutions différentes.*

Preuve. On utilise (E.8). La condition initiale $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ étant fixée, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence et l'unicité de la solution $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$. Et $x = \varphi_1$ est la solution cherchée, car $\ddot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_2(t) = F(t,\varphi_1(t))$ (Notez que φ_2 est un intermédiaire de calcul qui donne la vitesse φ_2=$\dot{\varphi}_1$ à la position φ_1 cherchée.) ∴

Remarque E.21 On rappelle : dans le cas des équations différentielles linéaires, i.e. des F de la forme $F(t,x,y) = \alpha(t)x+\beta(t)y$ où α,β sont des fonctions C^0, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $\vec{\varphi}_{1,0}(t)$ et $\vec{\varphi}_{0,1}(t)$. I.e., la solution de (E.1) pour les C.I. (E.3) est donnée par $\varphi(t) = x_0\varphi_{1,0}(t) + v_0\varphi_{0,1}(t)$. Vérification immédiate. ∴

Définition E.22 On appelle plan des phases le plan $\mathbb{R}^2$ considéré comme plan des C.I.

Cette définition n'est usité que dans le cadre des équations différentielles du second ordre, un point $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ du plan des phases correspondant à la donnée de la C.I : $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0{=}y_0 \end{pmatrix}$.

Un point du plan des phases donne donc une position initiale et une vitesse initiale, qui sont deux réels indépendants, i.e. éléments de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Définition E.23 On appelle vecteur de phase (ou point représentatif) un point $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (correspond à une C.I.), et vecteur vitesse de phase le vecteur $\begin{pmatrix} y \\ F(0,x,y) \end{pmatrix} = \vec{G}(0,x,y) =$ second membre de (E.8) égale à $\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ pour l'instant initial t=0.

Définition E.24 Notant $\vec{X} : t \in \mathbb{R} \to \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ la solution de (E.8) pour des C.I. données, on appelle courbe des phases l'ensemble $\mathrm{Im}\vec{X}$ (image de l'application $\vec{X}$).

Autre notation usuelle : $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ pour décrire le plan des phases, correpondant à la solution $\Phi(p,q) = \varphi_{p,q}$ (i.e. φ solution de (E.1) pour les C.I. $\varphi(0) = p$ et $\dot{\varphi}(0) = q$).

Remarque E.25 Attention : on utilise aussi les notations $(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^2$ (ou encore $(x,v) \in \mathbb{R}^2$) pour décrire le plan des phases et donc pour décrire la solution $\Phi(x,\dot{x}) = \varphi_{x,\dot{x}}$ $(= \varphi_{x,v})$. Mais cette dernière notation peut prêter à confusion, puisque $\dot{x}$ est dans ce cadre totalement indépendant de x : c'est la deuxième composante du vecteur C.I. donné au temps t=0 : $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

On pourrait noter plus explicitement $(x_0,\dot x_0)\in\mathbb{R}^2$ (ou (x_0,v_0)) pour la solution $\Phi(x_0,\dot x_0)=\varphi_{x_0,\dot x_0}$ $(=\varphi_{x_0,v_0})$: ici on comprend bien que ce sont des constantes x_0 et $\dot x_0{=}v_0$ dont il est question (constantes quelconques indépendantes correspondant aux C.I.), ce qu'on a tendance à oublier si on note ces constantes $(x,\dot x)$ (la notation x étant souvent comprise comme étant une variable et non une constante).

L'intérêt essentiel de noter (x,y) au lieu de (x_0,y_0) pour les C.I. est de pouvoir étudier les variations de la fonction $\Phi(x,y)=\varphi_{x,y}$ en fonction des C.I. (x,y) : si les C.I. sont modifiées en $(x{+}\varepsilon_x,y{+}\varepsilon_y)$, la solution $\varphi_{x,y}$ est modifiée en une solution $\varphi_{x+\varepsilon_x,y+\varepsilon_y}$, modification qu'on peut quantifier à l'aide du développement limité de Φ au premier ordre : $\Phi(x{+}\varepsilon_x,y{+}\varepsilon_y)-\Phi(x,y)=\vec\nabla\Phi(x,y).\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{pmatrix}+o(||\varepsilon_x,\varepsilon_y||)$. Exemple : une petite perturbation des conditions initiales donne une perturbation quantifiable au temps t. ∴

E.5 Rappels : vers le calcul des variations

On cherche la fonction "la meilleure" au sens de : réalisant le minimum d'une fonctionnelle.

On considère les fonctions $f\in C^0([a,b];\mathbb{R})\overset{\text{noté}}{=}C^0$ où $a{<}b$.

Définition E.26 On appellera fonctionnelle, toute application $\Psi : C^0\to\mathbb{R}$ (qui à une fonction associe un réel).

Exemple E.27 La longueur du graphe d'une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est donnée par la fonctionnelle :

$$\Psi(f)=\int_{t=a}^b\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt.$$

∴

On rappelle que pour $f\in C^0$, on note :

$$||f||_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|,\tag{E.9}$$

et que $||.||_\infty$ est une norme sur C^0.

Définition E.28 (Rappel.) La fonctionnelle Ψ est continue en $f\in C^0$ ssi :

$$\lim_{\substack{h\in C^0\\ ||h||_\infty\to 0}}|\Psi(f+h)-\Psi(f)|=0,\tag{E.10}$$

i.e. ssi $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ tel que : $\forall h\in C^0$ vérifiant $||h||_\infty<\eta$, on a $||\Psi(f+h)-\Psi(f)||<\varepsilon$.

Définition E.29 (Rappel.) La fonctionnelle Ψ est différentiable en $f\in C^0$ ssi il existe une forme linéaire $A:C^0\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $h\in C^0$:

$$\Psi(f+h)-\Psi(f)=A(h)+o(||h||_\infty).$$

Dans ce cas, on note $A=d\Psi_f=d\Psi(f)$ et on l'appelle différentielle de Ψ en f.

E.6 Équation de Lagrange

On se donne une fonction $L:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to L(x,y,z)\in\mathbb{R}$ dans $C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$.

Soit $f\in C^1([a,b];\mathbb{R})\overset{\text{noté}}{=}C^1$. On notera $f(t)=x(t)$.

On considère la fonctionnelle :

$$\Psi(f)=\int_{t=a}^b L(f(t),f'(t),t)\,dt\overset{\text{noté}}{=}\int_{t=a}^b L(x(t),x'(t),t)\,dt.\tag{E.11}$$

Proposition E.30 *La fonctionnelle Ψ est différentiable en tout $f\in C^1$, et sa différentielle en $f\in C^1$ est donnée par, pour tout $h\in C^1$, si on note $\vec g(t)=(f(t),f'(t),t)\in\mathbb{R}^3$:*

$$d\Psi_f(h)=\int_{t=a}^b\Big[\frac{\partial L}{\partial x}(\vec g(t))-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}(\vec g(t))\Big)\Big]\,h(t)\,dt+\Big[\frac{\partial L}{\partial y}(\vec g(t))\,h(t)\Big]_{t=a}^b,$$

notée de manière condensée comme :

$$d\Psi_f(h)=\int_{t=a}^b\Big[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big)\Big]\,h\,dt+\Big[\frac{\partial L}{\partial y}\,h\Big]_{t=a}^b.\tag{E.12}$$

Preuve. L étant C^1 on a :

$$L(x+h_1, y+h_2, z) - L(x,y,z) = h_1 \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) + h_2 \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) + o((x,y)).$$

En particulier, en prenant $x = f(t)$, $y = f'(t)$, $h_1 = h(t)$, $h_2 = h'(t)$ et $z = t$ on obtient :

$$\begin{aligned} &L(f(t)+h(t), f'(t)+h'(t), t) - L(f(t), f'(t), t) \\ &\quad = \frac{\partial L}{\partial x}(f(t), f'(t), t)\, h(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(f(t), f'(t), t)\, h'(t). + o((h(t), h'(t))), \end{aligned}$$

D'où, en intégrant et en allégeant les notations :

$$\Psi(f+h) - \Psi(f) = \int_{t=a}^{b} (\frac{\partial L}{\partial x}\, h + \frac{\partial L}{\partial y}\, h')\, dt + o(||h||_\infty). \tag{E.13}$$

Puis par intégration par parties, ayant $L \in C^2$, $\displaystyle\int_{t=a}^{b} \frac{\partial L}{\partial y}\, h'\, dt = -\int_{t=a}^{b} \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial y}]\, h\, dt + [\frac{\partial L}{\partial y}\, h]_a^b$. ∎

Proposition E.31 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe f soit extemum de la fonctionnelle $\Psi(f) = \int_a^b L(f(t), f'(t), t)\, dt$ sur l'ensemble des fonctions f telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont fixés est :*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big) = 0, \tag{E.14}$$

appelée équation de Lagrange ou d'Euler–Lagrange.

Preuve. On se donne une fonction $f \in C^1$ fixée au bord, et par hypothèse on ne considère que des perturbations $h \in C^1$ telle que $h(a) = 0 = h(b)$. On a donc :

$$d\Psi_f(h) = \int_{t=a}^{b} \Big[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big)\Big]\, h\, dt.$$

On a un extremum quand $d\Psi_f = 0$, i.e. quand pour tout h on a $d\Psi_f(h) = 0$. L'expression de $d\Psi_f(h)$ précédente étant vraie pour tout $h \in C^1$, on en déduit (E.14). ∎

Exemple E.32 Montrons que la courbe la plus courte qui joint 2 points $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ du plan $\mathbb{R}^2$ est une droite.

L'élément de longueur est $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$ pour un paramétrage $u \in [\alpha, \beta] \to (x(u), y(u))$ d'une courbe qu'on suppose régulière. De plus, supposons que $b_1 \neq a_1$ (les deux points ne sont pas à la verticale l'un de l'autre), et considérons les courbes qui n'ont pas de pente verticale, i.e. pour lesquelles on peut prendre $x{=}u$ comme paramètre. Donc $dl = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$

On s'intéresse à la longueur $\Psi = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$: on pose $L(f(x), f'(x), x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, où $f = y$, i.e. la fonction L considérée est la fonction $L(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_2^2}$.

On a $\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}$, et donc $\frac{\partial L}{\partial y'}(y(x), y'(x), x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$ et donc :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y'}\Big)(y(x), y'(x), x) = \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)}(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}(x),$$

est nul pour $y'' = 0$: la dérivée seconde (courbure) de la fonction $y : x \to y(x)$ est nulle : la fonction y est une droite.

Si les points sont à la verticale l'un de l'autre, on prend un paramétrage $u{=}y$, i.e. $x : y \to x(y)$. Si la courbe est quelconque, on la partage en morceaux. ∎

E.7 Principe de moindre action de Hamilton

On considère le système mécanique (E.1) :

$$m\ddot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \tag{E.15}$$

et on pose $E_c(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (énergie cinétique) et $E_p(x) = -\int f(x)\,dx$ (énergie potentielle). On pose :

$$L(x, \dot{x}) = E_c(\dot{x}) - E_p(x), \tag{E.16}$$

différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (on rappelle que l'énergie totale est la somme $E_c + E_p$).

On pose :

$$\Psi(\varphi) = \int_{t=a}^{b} L(\varphi(t), \varphi'(t))\,dt. \tag{E.17}$$

Proposition E.33 *Les solutions de (E.15) sont les extrémales de la fonctionnelle* Ψ.

Preuve. On a $\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) = f(x)$ et $\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}) = m\dot{x}$, d'où $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}) = m\ddot{x}$, et on applique l'équation de Lagrange. ∎

Références

[1] Arnold V. : *Équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, librairie du globe, 1996.

[2] Arnold V. : *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, 1976.

[3] Avez A. : *Calcul différentiel*. Masson, 1983.

[4] Cartan H. : *Cours de calcul différentiel*. Hermann méthodes, 1977.

[5] Couzeix M., Mignot A. : *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1992.

[6] Geffroy J. : *Équations différentielles*. Puf, 1983.

[7] O'Neil P. : *Advanced Engineering Mathematics*. PWS, 1995.

[8] Reinhard : *Équations différentielles*. Dunod.

[9] Schatzman M. : *Analyse numérique, cours et exercices pour la licence*. InterEdition, 1991.

[10] Strang G. : *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace, 1988.