Intégrale sur les courbes et surfaces

Gilles Leborgne

14 juin 2024

Table des matières

1 Intégrales sur des courbes de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de sa base canonique $(\vec{e}_1{=}(1,0), \vec{e}_2{=}(0,1))$, du produit scalaire canonique (forme bilinéaire symétrique définie positive) et de sa norme associée

$$(\vec{v},\vec{w})_{\mathbb{R}^2} = (\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix})_{\mathbb{R}^2} = v_1w_1+v_2w_2 \overset{\text{noté}}{=} \vec{v}\bullet\vec{w}, \quad \text{et} \quad ||\vec{v}|| = \sqrt{(\vec{v},\vec{v})_{\mathbb{R}^2}} = \sqrt{v_1^2+v_2^2} \text{ (Pythagore)},$$

quand $\vec{v} = v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2 =^{\text{noté}} \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2 =^{\text{noté}} \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ éventuellement non borné, i.e. de la forme $[a,b]$ ou $]a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$ ou $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,b[$ ou $]a,\infty[$ ou $[a,\infty[$ ou $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$, où $a,b\in\mathbb{R}$ vérifient $a<b$.

1.1 Définitions : courbes paramétrées et courbes géométriques

Dans un plan affine $\mathcal{R}^2$, après choix d'un point O appelé origine, un point P sera repéré dans l'espace vectoriel associé $\mathbb{R}^2$ à l'aide du "vecteur position" ou "rayon vecteur" $\vec{x} := \overrightarrow{OP} \overset{\text{noté}}{=} \vec{r}\in\mathbb{R}^2$. Ses composantes sont notées $(x,y)=(r_1,r_2)$, i.e. $\vec{r} = r_1\vec{e}_1+r_2\vec{e}_2 = x\vec{e}_1+y\vec{e}_2 \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} r_1\\ r_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$.

Définition 1.1 Une fonction

$$\vec{r} : \begin{cases} I & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to \vec{r}(t) = r_1(t)\vec{e}_1 + r_2(t)\vec{e}_2 \overset{\text{noté}}{=} x(t)\vec{e}_1+y(t)\vec{e}_2 \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} r_1(t)\\ r_2(t)\end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\end{cases} \tag{1.1}$$

est appelée "une courbe paramétrée" par le paramètre t (ou "trajectoire paramétrée" quand t est le "temps"). L'ensemble image :

$$\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r}) = \bigcup_{t\in I}\{\vec{r}(t)\} = \{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : \ \exists t\in I,\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \vec{r}(t)\} \quad \subset \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

est appelé une "courbe géométrique" ou un "arc géométrique" (ou une "trajectoire géométrique").

Exemple 1.2 Un segment $[A,B]$ entre deux points A et B dans $\mathcal{R}^2$ est l'ensemble des points $P\in\mathcal{R}^2$ repérés par

$$\vec{r}(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t\in[0,1]. \tag{1.3}$$

On a abusé des notations : on a $[A,B] := \{P\in\mathcal{R}^2 : \exists t\in[0,1],\ \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}\}$, donc, O étant une origine dans $\mathcal{R}^2$, $P\in[A,B]$ ssi $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ pour un $t\in[0,1]$, noté abusivement $\vec{r}(t) = A+t\overrightarrow{AB}$. Dessin. ▪

Exemple 1.3 Cercle $C(\vec{x}_0,R)$ de rayon R centré en $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}$: paramétrisation usuelle :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos(t)\\ R\sin(t)\end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Comme dans l'exemple précédent on a abusé des notations : le centre est un point P_0, le cercle est $C(P_0,R) = \{P\in\mathcal{R}^2 : \exists t\in[0,1],\ \overrightarrow{P_0P} = R\cos(t)\vec{e}_1+R\sin(t)\vec{e}_2\}$ et noté $C(\vec{x}_0,R)$ où $\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, et (1.4) signifie $\vec{r}(t) := \overrightarrow{OP(t)} = \overrightarrow{OP_0}+R\cos(t)\vec{e}_1+R\sin(t)\vec{e}_2$. Le paramètre t est ici l'angle en radian (voir exercice 1.37).

Autre paramétrisation : $\tilde{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} x_0+R\cos(\omega t)\\ y_0+R\sin(\omega t)\end{pmatrix}$ pour $\omega\neq 0$ et $t\in[0,\frac{2\pi}{\omega}[$.

Autre : $\tilde{\tilde{\vec{r}}}(t) - \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(2\pi{-}t)\\ R\sin(2\pi{-}t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(-t)\\ R\sin(-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t)\\ -R\sin(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,2\pi[$ (courbe parcourue en sens inverse).

Général : $\vec{q} : u\in[a,b[\to\vec{q}(u) := \vec{r}(\varphi(u))$ où $\varphi : u\in[a,b]\to t=\varphi(u)\in[0,2\pi]$ est un difféomorphisme. ▪

Exercice 1.4 Que représente la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin(t)\\ -R\cos(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,4\pi]$?

Réponse. On a $\frac{\vec{r}(0)}{R} = \begin{pmatrix} 0\\ -1\end{pmatrix}$ et $\frac{\vec{r}(t)}{R} = \begin{pmatrix} \sin(t+\pi)\\ R\cos(t+\pi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-t-\pi)\\ \sin(\frac{\pi}{2}-t-\pi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-t-\frac{\pi}{2})\\ \sin(-t-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+\frac{\pi}{2})\\ -\sin(t+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$, donc c'est le cercle de rayon R de centre $\vec{0}$ qui commence en "bas" et est parcouru deux fois en sens inverse (dessin). ▪

Définition 1.5 Une courbe $\vec{r}$ est donnée "sous forme explicite" lorsqu'il existe une fonction $f : t \in [a,b] \to f(t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x = r_1(t) = t \\ y = r_2(t) = f(t) \end{pmatrix}, \ t \in [a,b], \quad \text{noté} \quad \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) = f(x) \end{pmatrix}, \ x \in [a,b]. \tag{1.5}$$

La courbe est donc paramétrée avec x l'abscisse cartésienne. Ici l'image de $\vec{r}$ (la courbe géométrique) est le graphe de f (défini par $\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\} = \{(x,y) : \exists x \in [a,b],\ y = f(x)\}$).

Remarque 1.6 Une courbe géométrique est un ensemble beaucoup plus général que le graphe d'une fonction. Par exemple, le cercle de rayon R et de centre $(0,0)$ est défini en coordonnées cartésiennes par l'équation "$x^2 + y^2 = R^2$" et ce n'est pas le graphe d'une fonction : à un point d'abscisse $x \in]-R,R[$ correspondent deux images : $f_1(x) = y_1 = +\sqrt{R^2 - x^2}$ et $f_2(x) = y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Écrit ainsi, le cercle est défini à l'aide des 2 fonctions f_1 et f_2. Il est souvent plus pratique de décrire un cercle à l'aide d'une unique fonction $\vec{r}$, par exemple voir (1.4) (usage quasi-systématique en programmation). Par exemple dans MatLab, la commande pour dessiner $\Gamma = G(f)$ est `plot(x,y)`, qui signifie donc `plot(r`$_1$`(t),r`$_2$`(t))` où, dans le cas explicite, on a simplement $r_1(t) = t$ et $r_2(t) = f(t)$. Et un cercle est dessiné comme $\begin{pmatrix} r_1(t) = R\cos t \\ r_2(t) = R\sin t \end{pmatrix}$, qui ne nécessite qu'une fonction $\vec{r}$ et non les deux fonctions f_1 et f_2. ▪

Définition 1.7 Une courbe $\vec{r} : \theta \in [a,b] \to \vec{r}(\theta) \in \mathbb{R}^2$ est "paramétrée en polaire" quand θ (en radian) est l'angle entre le vecteur position $\vec{r}(\theta)$ et l'axe des x, i.e., quand il existe une fonction $\rho : \theta \in [a,b] \to \rho(\theta) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Exemple 1.8 Cardioïde donnée par $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. ▪

Remarque 1.9 Différence entre courbe paramétrée et courbe géométrique. Exemple avec la courbe paramétrée $t \in [0, 4\pi[\to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \alpha + R\cos t \\ \beta + R\sin t \end{pmatrix}$: elle a la même courbe géométrique (= le cercle) que la courbe (1.4), mais ici le cercle est "parcouru 2 fois". Penser à une compétition d'athlétisme : les coureurs de 400m, 800m, 1500m, 3000m, 5000m et 10000m parcourent la même courbe géométrique... pas la même courbe paramétrée. ▪

1.2 Changement de paramétrage

Exemple. Soit une route Γ reliant une ville A à une ville B. On prend une voiture ; on note $\vec{r} : t \in [0,T] \to \vec{r}(t)$ la courbe paramétrée qui donne à t la position $\vec{r}(t)$ de la voiture ; Donc $\mathrm{Im}\vec{r} = \Gamma$ (avec $\vec{r}(0) = A$ et $\vec{r}(T) = B$).

Maintenant on suit cette même route (la même courbe géométrique Γ) en vélo ; supposons que ce vélo aille trois fois moins vite que la voiture : il faut trois fois plus de temps pour atteindre B, et la position du vélo à l'instant u est celle qu'avait la voiture à l'instant $t = \frac{u}{3}$. La trajectoire du vélo est alors représentée par la courbe $\vec{q} : u \in [0, U{=}3T] \to \vec{q}(u) = \vec{r}(\frac{u}{3})$ (avec $\vec{q}(0) = A$ et $\vec{q}(3T) = B$).

On vérifie par exemple que $\vec{q}\,'(u) = \frac{1}{3}\vec{r}\,'(\frac{u}{3})$: le vélo va trois fois moins vite que la voiture.

Définition 1.10 Soit $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. Soit $c < d$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{rl} [c,d] & \to [a,b] \\ u & \to \varphi(u) = t \end{array} \right\}$ une fonction C^1 bijective d'inverse C^1 (un difféomorphisme = un changement de variable). La courbe paramétrée

$$\vec{q} := \vec{r} \circ \varphi : \left\{ \begin{array}{rl} [c,d] & \to \mathbb{R}^2 \\ u & \to \vec{q}(u) = \vec{r}(\varphi(u)), \quad \text{i.e.} \quad \vec{q}(u) = \vec{r}(t) \text{ quand } t = \varphi(u), \end{array} \right. \tag{1.7}$$

correspond au changement de paramétrage $t \to u$ (et on a $\mathrm{Im}(\vec{r}) = \mathrm{Im}(\vec{q})$: même courbe géométrique).

Exemple 1.11 Le cercle donné en (1.4) a par exemple pour autre paramétrisation $\vec{q}(u) = \begin{pmatrix} \alpha + R\cos(\omega u) \\ \beta + R\sin(\omega u) \end{pmatrix} = \vec{r}(\varphi(u))$ pour $\omega \neq 0$ et $u \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$; ici $t = \varphi(u) = \omega u$. Autre exemple : $\vec{q}(u) = \begin{pmatrix} \alpha + R\cos(2\pi - u) \\ \beta + R\sin(2\pi - u) \end{pmatrix} = \vec{r}(\varphi(u))$ pour $q \in [0, 2\pi[$ (courbe parcourue en sens inverse) ; ici $t = \varphi(u) = 2\pi - u$. ▪

Exercice 1.12 Les paramétrages suivants définissent-ils le même arc géométrique (le même ensemble image) ?

1- $I_1 = [0,1]$, $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$, et $I_2 = [0,\pi]$, $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, et $I_3 = [0, \frac{\pi}{2}]$, $\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$.

2- $I_1 = [1,4]$, $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, et $I_2 = [1,2]$, $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$, et $I_3 = [-2,-1]$, $\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$.

Réponse. On cherche une éventuelle bijection entre I_1 et I_2 et I_3.

1- I_1 et I_3 oui : $\varphi(t) = \sin(t)$, non avec I_2.

2- Oui : $\varphi(t) = t^2$ entre I_1 et I_2 et $\varphi(t) = -t$ entre I_2 et I_3 ▪

1.3 Vecteur tangent, vecteur vitesse, vitesse

Rappel : la fonction vectorielle $\vec{r} : t \in I \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite continue si ses composantes x et y sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Elle est dite dérivable si x et y sont des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, et C^1 si x' et y' sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On note $\vec{r}\,' : I \to \mathbb{R}^2$ la dérivée de $\vec{r}$: on a :

$$\vec{r}\,'(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Définition 1.13 Le vecteur $\vec{r}\,'(t)$ est appelé le vecteur tangent à la courbe géométrique $\mathrm{Im}(\vec{r})$ au point $\vec{r}(t)$ (dessin et voir annexe 9), et noté $\vec{v}(\vec{r}(t)) = \vec{r}\,'(t)$.

$\vec{T}(t) := \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe au point $\vec{r}(t)$.

Quand t est le "temps", $\vec{v}(\vec{r}(t)) := \vec{r}\,'(t)$ est appelé le vecteur vitesse à t au point $\vec{r}(t)$, et sa norme $||\vec{v}(\vec{r}(t))|| = ||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} =^{\text{noté}} v(\vec{r}(t))$ est la vitesse scalaire à t en $\vec{r}(t)$.

Exemple 1.14 Cas $\vec{r}$ sous forme explicite, cf. (1.5) : $\vec{r}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, donc $||\vec{r}\,'(x)|| = \sqrt{1+f'(x)^2}$. ∴

Exemple 1.15 Cas $\vec{r}$ sous forme polaire, cf. 1.6 : $\vec{r}\,'(\theta) = \begin{pmatrix} \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta \\ \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, donc $||\vec{r}\,'(\theta)|| = \sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}$. Exemple : pour la cardioïde donnée par $\rho(\theta) = 1+\cos\theta$: on a $\rho'(\theta) = -\sin\theta$, donc $||\vec{r}\,'(\theta)|| = \sqrt{\sin(\theta)^2+(1+\cos(\theta))^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2\rho(\theta)} = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$, car $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$. ∴

Exercice 1.16 t étant le temps, l'accélération vectorielle au point $\vec{r}(t)$ est $\vec{\gamma}(\vec{r}(t)) := \vec{r}\,''(t)$, et l'accélération tangentielle est $g(t) = \vec{r}\,''(t) \bullet \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$. Avec $f(t) = ||\vec{r}\,'(t)||$ (la vitesse scalaire), montrer : $\frac{df}{dt}(t) = g(t)$.

Réponse. $f(t) = (x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}$ donne $f'(t) = \frac{x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)}{f(t)} = \frac{\vec{r}\,'(t)\bullet\vec{r}\,''(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$. ∴

1.4 Courbes simples et régulières

Définition 1.17 La courbe $\vec{r}$ est dite simple si $\vec{r}$ est injective : si $t_1 \neq t_2$, alors $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ (on ne passe jamais deux fois au même endroit).

Et elle est dite fermée si $I = [a,b]$ et si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Et elle est dite simple et fermée si elle est fermée et si sa restriction $\vec{r}_{|[a,b[}$ à l'intervalle $[a,b[$ est simple.

Définition 1.18 $\vec{r}$ est dite régulière (ou lisse) si $\vec{r}$ est $C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$ et si $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ (i.e. si $x'(t) \neq 0$ et $y'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$). Et alors $\vec{r}$ est appelée une paramétrisation régulière de $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$.

Remarque 1.19 Un point $\vec{r}(t)$ t.q. $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ est un "point d'arrêt". Exemple : si $\mathrm{Im}(\vec{r})$ est l'ensemble des positions d'une voiture, et si la voiture s'arrête au temps t_0, alors $\vec{r}\,'(t_0) = 0$, et pendant l'intervalle de temps que dure l'arrêt, on a $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ et on n'a "rien à dire de plus"... : ici la courbe n'est pas régulière à t_0. ∴

Dans la suite $\vec{r}$ sera une paramétrisation régulière (quitte à la partager en plusieurs morceaux réguliers).

1.5 Vecteur normal

Proposition 1.20 *Soit $t \in I$ (quelconque mais fixé). Les vecteurs normaux à la courbe régulière $\vec{r}$ au point $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sont les vecteurs proportionnels à*

$$\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Et la base $(\vec{r}\,'(t), \tilde{\vec{n}}(t))$ est indirecte : on passe de $\vec{r}\,'$ à $\tilde{\vec{n}}$ par une rotation de $-\pi/2$. (NB : $||\tilde{\vec{n}}(t)|| \neq 1$ en général).

Preuve. On a $y'(t)x'(t) + (-x'(t))y'(t) = 0$, i.e. $\tilde{\vec{n}}(t)\bullet\vec{r}\,'(t) = 0$, i.e. $\tilde{\vec{n}}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$. Et $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ (courbe régulière), donc $\tilde{\vec{n}}(t) \neq \vec{0}$, donc la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{n}}(t)\}$ engendrée par le vecteur $\tilde{\vec{n}}(t)$ est de dimension 1 et $\mathrm{Vect}\{\vec{r}\,'(t)\} \oplus^\perp \mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{n}}(t)\} = \mathbb{R}^2$.

Puis soit $R = ||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ ($\neq 0$ car $\vec{r}$ est régulière) et soit $\theta_t \in \mathbb{R}$ t.q. $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) = R\cos(\theta_t) \\ y'(t) = R\sin(\theta_t) \end{pmatrix}$. Il vient $\begin{pmatrix} R\cos(\theta_t - \frac{\pi}{2}) \\ R\sin(\theta_t - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin(\theta_t) = y'(t) \\ -R\cos(\theta_t) = -x'(t) \end{pmatrix} = \tilde{\vec{n}}(t)$ (dessin), d'où : base indirecte.

(Ou démonstration directe : $\det(\vec{r}\,'(t), \tilde{\vec{n}}(t)) = \det\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ y'(t) & -x'(t) \end{pmatrix} = -x'(t)^2 - y'(t)^2 < 0$.) ∴

Exercice 1.21 1- Donner un vecteur tangent $\vec{r}'(t)$ au cercle C de centre $\vec{0}$ et de rayon R. Donner le vecteur normal $\tilde{\vec{n}}(t)$ défini ci-dessus. Le vecteur normal pointe-t-il vers l'intérieur ou vers l'extérieur du cercle ?

2- Poser $\vec{q}(u) = \vec{r}(2\pi - u)$, la normale associée $\tilde{\vec{n}}_{\vec{q}}(u)$ pointe-t-elle dans la même direction ?

Réponse. 1- Paramétrisation usuelle du cercle : $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Donc $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) = -R\sin(t) \\ y'(t) = R\cos(t) \end{pmatrix}$ (vecteur tangent en $\vec{r}(t)$). Donc $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) = R\cos(t) \\ -x'(t) = R\sin(t) \end{pmatrix} = \vec{r}(t)$, donc $\tilde{\vec{n}}(t)$ pointe vers l'extérieur, et la base $(\vec{r}'(t), \tilde{\vec{n}}(t))$ est indirecte (dessin prop. précédente).

2- Sens inverse : paramétrage $\vec{q}(u) = \vec{r}(t)$ quand $u = 2\pi - t$, donc $\vec{q}(u) = \vec{r}(2\pi - u) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ -R\sin(u) \end{pmatrix}$, donc $\vec{q}'(u) = \begin{pmatrix} -R\sin(u) \\ -R\cos(u) \end{pmatrix}$, donc $\tilde{\vec{n}}_{\vec{q}}(u) = \begin{pmatrix} -R\cos(u) \\ R\sin(u) \end{pmatrix} = -\vec{q}(u) = -\vec{r}(t)$ au point $\vec{q}(u) = \vec{r}(t)$: il pointe vers l'intérieur du cercle (pointe vers le centre du cercle). (Et $(\vec{q}'(u), \tilde{\vec{n}}_{\vec{q}}(u))$ est toujours indirecte.) ▪

Exercice 1.22 Soit $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière et $u(t) = \alpha t + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1- Donner α, β t.q. $\vec{q}(u) = \vec{r}(t)$ quand $u = u(t)$ pour avoir $u \in [0, 1]$.

2- Calculer le vecteur tangent $\vec{q}'(u)$ en fonction du vecteur tangent $\vec{r}'(t)$, et vérifier qu'ils sont colinéaires.

Réponse. 1- On pose $u = \frac{t-a}{b-a} = u(t)$ (pour avoir $u(a) = 0$ et $u(b) = 1$), donc $\alpha = \frac{1}{b-a}$ et $\beta = \frac{-a}{b-a}$. Fonction inverse : $t = (b-a)u + a = t(u)$, donc $\vec{q}(u) = \vec{r}(t(u)) = \vec{r}((b-a)u + a)$.

2- Donc $\vec{q}'(u) = (b-a)\,\vec{r}'((b-a)u + a) = (b-a)\,\vec{r}'(t)$ quand $t = t(u)$, pour tout $u \in [0, 1]$: les vecteurs tangents $\vec{q}'(u)$ et $\vec{r}'(t)$ sont colinéaires au point $\vec{q}(u) = \vec{r}(t)$. ▪

Exercice 1.23 Soit la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ (astroïde). Donner les coordonnées des points pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et donner le vecteur vitesse et un vecteur normal en ces points. Tracer Γ. ▪

Exercice 1.24 Soit la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Donner $\tilde{\vec{n}}$ et tracer Γ et donner sa longueur. ▪

Exercice 1.25 Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Donner les coordonnées des points pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et donner le vecteur vitesse et un vecteur normal en ces points. Tracer Γ. Indication : "$x + y$". ▪

Exercice 1.26 Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, où $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $\vec{r}'(t)$ et $\tilde{\vec{n}}(t)$. ▪

Exercice 1.27 Soit (parabole) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$, où $a, b, c, t \in \mathbb{R}$. Calculer $\vec{r}'(t)$ et $\tilde{\vec{n}}(t)$. ▪

Exercice 1.28 Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 4\pi]$. Tracer le graphe de $\vec{r}$ (c'est une hélice qu'on dessinera dans les axes (t, x, y) de $\mathbb{R}^3$). En déduire que $\Gamma = \vec{r}([0, 4\pi])$ est la projection dans le plan (x, y) du graphe de $\vec{r}$. ▪

1.6 * Orientation du bord d'un domaine et vecteur normal unitaire sortant

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe du plan $\mathbb{R}^2$, et soit $\vec{r} : t \in [a, b] \to \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de son bord Γ (courbe fermée simple).

Définition 1.29 En un point $\vec{r}(t)$, un vecteur $\vec{v}$ est orienté vers l'intérieur, ou "pointe" vers l'intérieur, quand le point $P(t, \varepsilon) = \vec{r}(t) + \varepsilon\vec{v}$ est dans Ω pour $\varepsilon > 0$ assez petit, i.e. si $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $P(t, \varepsilon) \in \Omega$. Sinon soit il est tangent soit il pointe vers l'extérieur.

Définition 1.30 Avec (1.9), si $\tilde{\vec{n}}$ pointe vers l'extérieur de Ω alors Γ est orienté dans le sens trigonométrique. Et dans ce cas le vecteur normal unitaire sortant de Ω au point $\vec{r}(t) \in \Gamma$ est

$$\vec{n}(\vec{r}(t)) := \frac{\tilde{\vec{n}}(t)}{||\tilde{\vec{n}}(t)||}. \tag{1.10}$$

Exercice 1.31 Soit $\vec{r} : t \in [a, b] \to \mathbb{R}^2$ courbe régulière qui va du point $P_1 = \vec{r}(a)$ au point $P_2 = \vec{r}(b)$. Donner un paramétrage $\vec{q} : u \in [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de la courbe parcourue en sens inverse. Montrer que si $\vec{r}$ est orienté dans le sens trigonométrique, alors $\vec{q}$ ne l'est pas.

Réponse. Changement de variable $u = -t + a + b = u(t)$: on pose $\vec{q}(u) = \vec{r}(t) = \vec{r}(-u + a + b)$, donc $\vec{q}(a) = \vec{r}(b)$ et $\vec{q}(b) = \vec{r}(a)$ et $\vec{q}'(u) = -\vec{r}'(t)$ (les vecteurs tangents sont opposés), et les courbes sont parcourues en sens opposées : $\tilde{\vec{n}}_q(u) = \begin{pmatrix} q_2'(u) \\ -q_1'(u) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix} = -\tilde{\vec{n}}_r(t)$. ▪

1.7 * Vecteur tangent unitaire

En général $\vec{r}''(t)$ ("l'accélération") n'est pas orthogonal à $\vec{r}'(t)$ ("vitesse"), exemple de l'ellipse $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, $a \neq b$: on a $\vec{r}'(t) \bullet \vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \bullet (\begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix}) = (a^2 - b^2)\cos t \sin t \neq 0$ pour $t \neq 0(\frac{\pi}{2})$.

On note $\vec{T}(t)$ le vecteur tangent unitaire en $\vec{r}(t)$ donné par

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Proposition 1.32 *Pour tout $t \in I$, le vecteur dérivé $\vec{T}'(t)$ est orthogonal à $\vec{T}(t) = \vec{r}'(t)$ (vecteur tangent), i.e. parallèle à $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$ (vecteur normal) : pour tout $t \in [a, b]$,*

$$\vec{T}' = \frac{(x''y' - x'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\, \tilde{\vec{n}}, \quad \textit{soit} \quad \vec{T}' = \frac{(x''y' - x'y'')}{(x'^2 + y'^2)} \frac{\tilde{\vec{n}}}{||\tilde{\vec{n}}||}. \tag{1.12}$$

Preuve. On a $||\vec{T}(t)|| = 1$, d'où $||\vec{T}(t)||^2 = 1 = (\vec{T}(t), \vec{T}(t))_{\mathbb{R}^2}$. D'où par dérivation $0 = 2(\vec{T}'(t), \vec{T}(t))_{\mathbb{R}^2}$, d'où $\vec{T}'(t) \perp \vec{T}(t)$. Donc $\vec{T}'(t) \parallel \tilde{\vec{n}}(t)$. On a $T_1(t) = \frac{x'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}$, d'où :

$$T_1'(t) = \frac{x''(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}} - x'(t)\frac{1}{2}(2x'(t)x''(t) + 2y'(t)y''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = y'(t)\frac{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et $T_2'(t) = x'(t)\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = -x'(t)\frac{x''(t)y'(t)-x'(t)y''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$. D'où $(1.12)_1$. Et $||\tilde{\vec{n}}(t)|| = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}$, d'où $(1.12)_2$. ∎

1.8 * Exemple : courbes sous forme "explicite"

Proposition 1.33 *(Théorème des fonctions implicites.) Soit $\vec{r} : t \in I \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) = x(t) \\ r_2(t) = y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. Si $t_0 \in I$ est tel que $x'(t_0) = r_1'(t_0) \neq 0$ (dérivée de la première composante de $\vec{r}(t)$ en t_0) alors la courbe géométrique $\mathrm{Im}(\vec{r}) \subset \mathbb{R}^2$ s'écrit localement $y = f(x)$, et donc $\mathrm{Im}(\vec{r})$ est localement le graphe d'une fonction f (dessin).*

I.e. il existe $\varepsilon>0$ tel que la fonction $r_1 : t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to x = r_1(t)$ (première composante de $\vec{r}$ restreinte à l'intervalle $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$) définit un changement de variable (et donc $t = r_1^{-1}(x)$), tel que $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (r_2 \circ r_1^{-1})(x) \end{pmatrix} =^{\text{noté}} \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) = x \\ q_2(x) = f(x) \end{pmatrix}$.

Et la pente $f'(x)$ de la courbe en x est $f'(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{r_2'(t)}{r_1'(t)}$ $(= \frac{q_2'(x)}{q_1'(x)} = q_2'(x))$.

Démarche similaire si $y'(t_0) \neq 0$ avec le changement de variable $r_2 : t \to y = r_2(t)$.

Preuve. Supposons $x'(t_0) \neq 0$ (le cas $y'(t_0) \neq 0$ se traite de la même manière). Le théorème d'inversion locale indique alors que la fonction $C^1(I; \mathbb{R})$: $r_1 : t \to x = r_1(t) = x(t)$ est localement inversible dans un voisinage $U =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ de t_0, d'inverse $r_1^{-1} : x \to t = r_1^{-1}(x) = t(x)$. Et, par dérivation de fonctions composées, $(r_1^{-1} \circ r_1)(t) = t$ donne

$$(r_1^{-1})'(r_1(t)).r_1'(t) = 1, \quad \forall t \in U,$$

i.e.,

$$(t'(x) =) \quad (r_1^{-1})'(x) = \frac{1}{r_1'(t)} \quad (= \frac{1}{x'(t)}). \tag{1.13}$$

Et, changement de paramétrage, posons $\vec{q} = \vec{r} \circ r_1^{-1} =^{\text{noté}} \vec{r} \circ t$, i.e., $\forall x \in V := r_1(U)$,

$$\vec{q}(x) = \vec{r}(t(x)) = \vec{r}(r^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} r_1(r_1^{-1}(x)) = x \\ r_2(r_1^{-1}(x)) = y(t(x)) =^{\text{noté}} f(x) \end{pmatrix}.$$

Et, la courbe $\mathrm{Im}(\vec{q}) = \{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in V\}$ est le graphe de f (restreint à V). Et la pente en $x = r_1(t) \in V$ vaut

$$f'(x) = y'(t(x))t'(x) = y'(t)\frac{1}{x'(t)}. \tag{1.14}$$

∎

Exemple 1.34 Application : donner une représentation cartésienne $y = f(x)$ du cercle (1.4).

Réponse. L'équation (1.4) donne $x = R\cos t$. Et la fonction cos est strictement décroissante et inversible de $]0,\pi[$ dans $]-R,R[$. D'où $t = \arccos\frac{x}{R} \in]0,\pi[$ pour $x \in]-R,R[$.

Et alors : $y = R\sin(\arccos\frac{x}{R}) = \sqrt{R^2-x^2}$.

Puis la fonction cos est strictement croissante de $]\pi,2\pi[$ dans $]-R,R[$ et $t = \pi + \arccos\frac{x}{R} \in]\pi,2\pi[$ pour $x \in]-R,R[$.

Et alors : $y = R\sin(\pi + \arccos\frac{x}{R}) = -R\sin(\arccos\frac{x}{R}) = -\sqrt{R^2-x^2}$.

On retrouve les deux fonctions qui déterminent le cercle.

(Directement : (1.4) donne $x^2+y^2 = R^2$, d'où $y = \pm\sqrt{R^2-x^2} = y(x)$.) ▪

1.9 Longueur d'une courbe

Soit $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ une courbe régulière qu'on approxime par une courbe polynomiale :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h = \frac{b-a}{n}$ et soit $t_i = a + ih$ pour $i = 0...,n$, donc $[a,b] = \bigcup_{i=1}^n [t_{i-1},t_i]$. Pour $i = 0,...,n$ on note $\vec{p}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ les points $\vec{p}_i = \vec{r}(t_i)$, et on définit le segment de droite $[\vec{p}_{i-1},\vec{p}_i] = \mathrm{Im}(\vec{r}_i)$ par, $\forall t \in [t_{i-1},t_i]$,

$$\vec{r}_i(t) = \vec{p}_{i-1} + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}) = \begin{pmatrix} x_{i-1} + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \\ y_{i-1} + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Dessin : sur le i-ème segment le vecteur tangent $\vec{r}_i\,'(t)$ est constant et vaut

$$\vec{r}_i\,'(t) = \begin{pmatrix} x_i'(t) \\ y_i'(t) \end{pmatrix} = \frac{\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \begin{pmatrix} \frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \\ \frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \\ \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \frac{\Delta\vec{p}_i}{\Delta t_i} \overset{\text{noté}}{=} \vec{r}_i\,', \tag{1.16}$$

où donc $\Delta t_i = h$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta\vec{p}_i = \vec{p}_i - \vec{p}_{i-1} = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix}$. La longueur du i-ème segment $[\vec{p}_{i-1},\vec{p}_i]$ vaut

$$\Delta s_i = ||\Delta\vec{p}_i|| = ||\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}|| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Big(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\Big)^2}\ \Delta t_i = ||\vec{r}_i\,'(t)||\ \Delta t_i.$$

Donc la longueur de la courbe polygonale constitué de tous les segments vaut :

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n ||\vec{r}_i\,'||\ \Delta t_i. \tag{1.17}$$

D'où on pose (intégrale de Riemann quand $n \to \infty$ où donc $h \to 0$) :

Définition 1.35 La longueur de la courbe régulière $\vec{r}$ est :

$$L(\vec{r}) = \int_{t=a}^b ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_{t=a}^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma \sqrt{dx^2+dy^2} \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma ds \overset{\text{noté}}{=} |\Gamma|. \tag{1.18}$$

Et $ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ est appelé élément de longueur.

Exercice 1.36 Paramétrer le segment de droite d'extrémités des points A et B dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la longueur de ce segment. Application numérique : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Réponse. Paramétrage : $\vec{r}(t) = A + t\vec{AB}$ pour $t \in [0,1]$. Donc $\vec{r}\,'(t) = \vec{AB}$, et $||\vec{r}\,'(t)|| = ||\vec{AB}||$. Donc $L = \int_{t=0}^1 ||\vec{AB}||\,dt = ||\vec{AB}|| = ||\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}|| = \sqrt{5}$ (Pythagore). ▪

Exercice 1.37 1- Retrouver le périmètre d'un cercle de rayon R.

2- Quel est l'angle t_0 tel que la longueur du morceau de cercle défini par $t \in [0,t_0]$ soit R ?

3- Préciser ce que sont les coordonnées en termes de radian et en termes de degré.

4- Quel paramétrage $s = s(t)$ faut-il choisir pour que la courbe $\vec{r}(t) = \vec{q}(s)$ donne $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ pour tout s, i.e. pour que la courbe soit parcourue à la vitesse unité ?

Réponse. 1- $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0,2\pi]$. D'où $L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$ (périmètre du cercle).

2- Et l'angle t_0 tel que $L([0,t_0]) = t_0R = R$ est donné par $t_0 = 1$: on parcourt la distance R le long du cercle lorsqu'on a tourné d'un angle de 1 radian (= définition du radian).

3- Le paramétrage du cercle en degrés est donné par un angle de $u = 360$ lorsque $t = 2\pi$, donc on fait le changement de variables $u = \frac{360}{2\pi}t \in [0, 360]$, i.e. on paramètre le cercle par $\vec{q}(u) = \vec{r}(t(u)) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{2\pi}{360}u \\ R\sin\frac{2\pi}{360}u \end{pmatrix}$.

4- On veut une courbe $\vec{q} : s \to \vec{q}(s) = \vec{r}(t)$ t.q. $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$. On a $||\vec{r}\,'(t)|| = R$ (constant). Posons $s = \alpha t$ et $\vec{q}(s) = \vec{r}(t) = \vec{r}(\frac{s}{\alpha})$. Il vient $\vec{q}\,'(s) = \frac{1}{\alpha}\vec{r}\,'(t)$, donc on prend $\alpha = ||\vec{r}\,'(t)|| = R$. D'où $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{s}{R} \\ R\sin\frac{s}{R} \end{pmatrix}$ pour $s \in [0, 2\pi R]$. On a bien $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$. Et on retrouve que le périmètre du cercle : $L = \int_{s=0}^{2\pi R} ||\vec{q}\,'(s)||\,ds = \int_{s=0}^{2\pi R} ds = 2\pi R$. ▪

Exercice 1.38 Calculer la longueur de la courbe définie par $t \in [0, 4\pi]$ et $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$. (Cercle parcouru deux fois). ▪

Exercice 1.39 Donner l'intégrale donnant la longueur de la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ (ellipse). (Ne pas essayer de calculer l'intégrale lorsque $a \neq b$: on trouve une intégrale elliptique qui constitue en elle-même une fonction, et dont la valeur est donnée par approximation numérique.) ▪

Exercice 1.40 Soit la cycloïde $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. (On a $x'(t) = y(t)$). Calculer l'élément de longueur $ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ et la longueur de la cycloïde.

Réponse. $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R\sin t \end{pmatrix}$, $ds = R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 2R|\sin\frac{t}{2}| = 2R\sin\frac{t}{2}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, $L = 2R\int_{t=0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2R[-2\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8R$.

On rappelle que la cycloïde est obtenue en faisant rouler une roue de rayon R sur le sol, et que la longueur demandée est la distance parcourue par un point de la roue après un tour de celle-ci. En effet, la cycloïde s'écrit : $\vec{q}(t) = \vec{r}(t) - \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix}$ qui est un cercle de rayon R vu dans le repère mobile d'origine le point $P(t) = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix}$ (position du centre de la roue se déplaçant donc à la vitesse $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$). De plus, la roue se déplace sans glisser, car après un tour de roue (t incrémenté de 2π), le centre de la roue s'est déplacé de $P(2\pi) - P(0) = \begin{pmatrix} R2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ et a donc parcouru la distance $2\pi R$ qui est le périmètre du cercle. ▪

Exercice 1.41 Paramétrer la parabole « $y = \frac{a}{2}x^2$ » pour $a > 0$, et calculer sa longueur pour $x \in [\alpha, \beta]$.

Réponse. $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x = x \\ y = \frac{a}{2}x^2 \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$. D'où $\vec{r}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ ax \end{pmatrix}$. D'où $||\vec{r}\,'(x)|| = \sqrt{1 + a^2x^2}$. D'où $L = \int_{t=\alpha}^{\beta}\sqrt{1+a^2t^2}\,dt$: changement de variables $\mathrm{sh}u = at$, donc $\mathrm{ch}u\,du = a\,dt$, donc $L = \frac{1}{a}\int_{u=\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)}\mathrm{ch}^2u\,du = \frac{1}{2a}\int_{u=\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)}\mathrm{ch}(2u) + 1\,du = \frac{1}{a}[\mathrm{sh}(2u)]_{\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)} + \frac{1}{2a}[u]_{\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)}$, avec $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x) = 2\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = 2x\sqrt{1+x^2}$. D'où $L = 2(\beta\sqrt{1+a^2\beta^2} - \alpha\sqrt{1+a^2\alpha^2}) + \frac{1}{2a}(\mathrm{argsh}(a\beta) - \mathrm{argsh}(a\alpha))$. (Remarque : calcul plus simple : prendre $\alpha = 0$ et conclure.) ▪

Exercice 1.42 Longueur de la cardioïde $\theta \in [0, 2\pi] \to \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$ où $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ (exemple 1.8) ?

Réponse. $||\vec{r}\,'(\theta)|| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$, et la cardioïde est symétrique, donc $L = 2\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8$. ▪

1.10 La longueur est indépendante du paramétrage

Rappel changement de variable dans les intégrales pour les fonctions $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont continues : si $a < b$ et $c < d$, si $\varphi : \left\{\begin{array}{rl} [a,b] & \to [c,d] \\ t & \to u = \varphi(t) \end{array}\right\}$ est un C^1-difféomorphisme (fonction C^1 bijective d'inverse $\varphi^{-1} : \left\{\begin{array}{rl} [c,d] & \to [a,b] \\ u & \to t = \varphi^{-1}(u) \end{array}\right\}$ qui est C^1), alors

$$\int_{u\in[c,d]} \alpha(u)\,du = \int_{t\in[a,b]} \alpha(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt. \tag{1.19}$$

(Autre présentation du résultat : $\int_{u=c}^{d} \alpha(u)\,du = \int_{t=\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} \alpha(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ avec, pour le calcul, $du = \varphi'(t)\,dt$: si φ est croissante, alors $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$ et $\varphi'(t) > 0$ sur $[a, b]$ et on retrouve bien (1.19), et si φ est décroissante, alors $\varphi(a) = d$ et $\varphi(b) = c$ avec $u'(t) = \varphi'(t) < 0$ sur $[a, b]$ et on retrouve bien (1.19)).

Application. Soit $\vec r : \begin{cases} [a,b] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to \vec r(t) \end{cases}$ une courbe régulière, soit $\varphi : \begin{cases} [a,b] & \to [c,d] \\ t & \to u=\varphi(t) \end{cases}$ un C^1-difféomorphisme, soit le nouveau paramétrage

$$\vec q := \vec r \circ \varphi^{-1} : \begin{cases} [c,d] & \to \mathbb{R}^2 \\ u & \to \vec q(u) := \vec r(t) \quad \text{quand} \quad t=\varphi^{-1}(u), \quad \text{i.e.} \quad \vec q(\varphi(t)) = \vec r(t). \end{cases} \tag{1.20}$$

Théorème 1.43 *Pour toute fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_{t=a}^{b} f(\vec r(t))||\vec r\,'(t)||\,dt = \int_{u=c}^{d} f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||\,du \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma f\,d\Gamma \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma f\,ds, \tag{1.21}$$

réel indépendant de la paramétrisation choisie. En particulier, cas $f=1$: la longueur de la courbe géométrique $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec r)$ est indépendante du choisi :

$$\int_a^b ||\vec r\,'(t)||\,dt = \int_c^d ||\vec q\,'(u)||\,du \quad (= L(\vec r) = L(\vec q)). \tag{1.22}$$

Preuve. Posons $\alpha(u) = f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||$, donc $\alpha(\varphi(t)) = f(\vec q(\varphi(t)))||\vec q\,'(\varphi(t))||$. On a $\vec q(\varphi(t)) = \vec r(t)$, donc $\vec q\,'(\varphi(t))\varphi'(t) = \vec r\,'(t)$, donc $\alpha(\varphi(t)) = f(\vec q(\varphi(t)))||\frac{\vec r\,'(t)}{\varphi'(t)}||$, donc (1.19) donne

$$\int_{u\in[c,d]} f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||\,du = \int_{t\in[a,b]} f(\vec q(\varphi(t)))\Big|\Big|\frac{\vec r\,'(t)}{\varphi'(t)}\Big|\Big|\,|\varphi'(t)|\,dt,$$

d'où (1.21). ∎

Exercice 1.44 Soit une courbe régulière $\vec r : [0,T] \to \vec r(t) \in \mathbb{R}^2$. Définir une courbe $\vec q$ telle que $\mathrm{Im}(\vec r) = \mathrm{Im}(\vec q)$ parcourue à une vitesse deux fois plus grande. On impose $\vec q(u) = \vec r(t(u))$ où la fonction $u \to t(u)$ est linéaire. Vérifier que la longueur est indépendante de la vitesse de parcours.

Réponse. On pose $t(u) = \alpha u$, avec $\alpha > 0$, d'où la courbe $\vec q(u) = \vec r(\alpha u)$ pour $u \in [0, \frac{T}{\alpha}]$. On en déduit $\vec q\,'(u) = \alpha \vec r\,'(\alpha u)$, et l'exercice impose donc $\alpha = 2$. Donc $t = \alpha u$, donc $L = \int_{u=0}^{\frac{T}{\alpha}} ||\vec q\,'(u)||\,du = \int_{t=0}^{T} ||\alpha \vec r\,'(t)||\,\frac{dt}{\alpha} = \int_{t=0}^{T} ||\vec r\,'(t)||\,dt = |\Gamma|$. ∎

Exercice 1.45 Soit $a<b$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et "la courbe Γ_+" paramétrisée par $\vec r_+ : t \in [0,1] \to \vec r_+(t) = \begin{pmatrix} a+(b-a)t \\ \varphi(a+(b-a)t) \end{pmatrix}$. 1- Montrer que cette courbe a également pour paramétrage $x \in [a,b] \to \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ pour $x = a+(b-a)t$. 2- Montrer

$$\int_{t=0}^{1} f(\vec r_+(t))||\vec r_+{}'(t)||\,dt = \int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx \quad \text{noté} \quad \int_{\Gamma_+} f\,d\Gamma.$$

(Pour $f=1$ on retrouve la longueur $\int_{x=a}^{b} \sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$ de Γ, cf. exemple 1.14.).

Réponse. On pose $x = a+(b-a)t$ et $\vec q : x \in [a,b] \to \vec q(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$, donc $\vec q(x) = \vec r(t)$ quand $x = a+(b-a)t$. Le théorème (1.43) donne $\int_{t=0}^{1} f(\vec r_+(t))\,||\vec r\,'(t)||\,dt = \int_{x=a}^{b} f(\vec q(x))\,||\vec q\,'(x)||\,dx$. ∎

Exercice 1.46 (Suite.) Soit la courbe Γ_- donnée par $\vec r_- : t \in [0,1] \to \vec r_-(t) = \begin{pmatrix} b+(a-b)t \\ \varphi(b+(a-b)t) \end{pmatrix}$. Montrer que c'est la courbe Γ_+ précédente parcourue en sens inverse et que :

$$\int_{\Gamma_-} f\,d\Gamma = \int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx = \int_{\Gamma_+} f\,d\Gamma \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma f\,d\Gamma.$$

Réponse. $b+(a-b)(1-t) = a+(b-a)t$, donc $\vec r_-(1-t) = \vec r_+(t)$, et $\vec r_-(0) = \vec r_+(1)$ et $\vec r_-(1) = \vec r_+(0)$: les courbes sont parcourues en sens inverse. Et $\psi : t \in [0,1] \to \psi(t) = 1-t$ est un difféomorphisme (décroissant), et $(\vec r_- \circ \psi)(t)\vec r(t)$ avec $\psi(t) = 1-t$, donc (1.21) donne le résultat. ∎

Exercice 1.47 Changement d'unités de mesure : exercice donné principalement pour montrer que ce problème n'est pas un problème de changement de paramétrage mais un problème de changement de base.

On rappelle que 1mile anglais= αkm où $\alpha = 1,609$. Un observateur anglais utilise une origine O et une base orthogonale $(\vec a_1, \vec a_2)$ en miles, donc $||\vec a_1||_{|\vec a} = $ 1mile$= ||\vec a_2||_{|\vec a}$. Un observateur français utilise la même origine O et la base orthogonale $(\vec b_1, \vec b_2)$ en km donnée par $\vec b_1 = \frac{1}{\alpha}\vec a_1$ et $\vec b_2 = \frac{1}{\alpha}\vec a_2$ (donc $||\vec b_1||_{|\vec b} = $ 1km$= ||\vec b_2||_{|\vec b}$).

Soit une courbe géométrique $\vec{r}:[0,T]\to\mathbb{R}^2$ parcourue à la fois par l'anglais et le français. Un point $\vec{r}(t)$ est donc repéré : par l'anglais comme $\vec{r}(t)=x_a(t)\vec{a}_1+y_a(t)\vec{a}_2$, noté $[\vec{r}(t)]_{|\vec{a}}=\begin{pmatrix}x_a(t)\\y_a(t)\end{pmatrix}$, et par le français comme $\vec{r}(t)=x_b(t)\vec{b}_1+y_b(t)\vec{b}_2$, noté $[\vec{r}(t)]_{|\vec{b}}=\begin{pmatrix}x_b(t)\\y_b(t)\end{pmatrix}$. Soit L_a la longueur de la courbe de l'anglais : que vaut la longueur L_b de la courbe du français ? (Donnée la réponse à l'aide de la formule de changement de base.)

Réponse. Il est évident qu'on doit trouver $L_b=\alpha L_a$ (si $L_a=1$ alors $L_b=\alpha$). Avec les formules de changement de base : la matrice de changement de base de la base $(\vec{a}_i)$ à la base $(\vec{b}_i)$ est $P=\begin{pmatrix}[\vec{b}_1]_{|\vec{a}} & [\vec{b}_2]_{|\vec{a}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}&0\\0&\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha}I$. Et, formule de changement de base des vecteurs, $[\vec{r}(t)]_{\vec{b}}=P^{-1}.[\vec{r}(t)]_{\vec{a}}$, donc $[\vec{r}(t)]_{\vec{b}}=\alpha[\vec{r}(t)]_{\vec{a}}$ (i.e. $x_b(t)=\alpha x_a(t)$ et $y_b(t)=\alpha y_a(t)$, c'est "évident"). Donc $\int_{t=0}^T||\vec{r}\,'(t)||_b\,dt=\int_{t=0}^T\alpha||\vec{r}\,'(t)||_a\,dt$, donc longueurs : $L_b=\int_{t=0}^T\sqrt{x_b\,'(t)^2+y_b\,'(t)^2}\,dt=\int_{t=0}^T\alpha\sqrt{x_a\,'(t)^2+y_a\,'(t)^2}\,dt=\alpha L_a$. ▪

1.11 Coordonnée curviligne intrinsèque

On se donne une courbe régulière : $\vec{r}:\begin{cases}[a,b]&\to\mathbb{R}^2\\ t&\to\vec{r}(t)\end{cases}$. On veut parcourir la courbe géométrique $\mathrm{Im}\vec{r}$ à la vitesse unité, dans le but de mesurer la courbure : l'absence d'accélération tangentielle (i.e. parallèle à $\vec{r}\,'(t)$) permet de n'avoir que des accélérations normales (centrifuges ou centripètes), et donc de "ressentir la courbure".

Re-paramétrons la courbe géométrique $\mathrm{Im}\vec{r}$ en posant

$$\vec{q}:\begin{cases}[0,L]&\to\mathbb{R}^2\\ s&\to\vec{q}(s):=\vec{r}(t)\quad\text{quand}\quad s=\varphi(t)\end{cases}\tag{1.23}$$

où $L=\int_a^b||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ est la longueur de la courbe, et où

$$\varphi:\begin{cases}[a,b]&\to[0,L]\\ t&\to s=\varphi(t)\overset{\text{noté}}{=}s(t)\end{cases}\tag{1.24}$$

est un difféomorphisme défini pour que $||\vec{q}\,'(s)||=1$ pour tout $s\in[0,L]$ (la nouvelle courbe paramétrée $\vec{q}$ est parcourue à vitesse unité). On aura donc $\vec{q}(\varphi(t))=\vec{r}(t)$, donc $\vec{q}\,'(s).\varphi'(t)=\vec{r}\,'(t)$ quand $s=\varphi(t)$, et on veut $||\vec{q}\,'(s)||=1$, donc on veut $\varphi'(t)=||\vec{r}\,'(t)||$:

Proposition 1.48 *La fonction $\varphi:[a,b]\to[0,L]$ définie par*

$$\varphi'(t)=||\vec{r}\,'(t)||\quad(\overset{\text{noté}}{=}s'(t)),\quad\text{i.e.}\quad\varphi(t):=\int_{\tau=a}^t||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau\overset{\text{noté}}{=}s(t),\tag{1.25}$$

est un difféomorphisme qui vérifie $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=L$ (longueur de la courbe). Et la courbe $\vec{q}:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$\vec{q}(s):=\vec{r}(\varphi^{-1}(s)),\quad\text{i.e.}\quad\vec{q}(\varphi(t))=\vec{r}(t),\tag{1.26}$$

est parcourue à la vitesse unité : pour tout $s\in[0,L]$,

$$||\vec{q}\,'(s)||=1.\tag{1.27}$$

Et $s=s(t)=\varphi(t)=\int_{\tau=a}^t||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau=\int_{s=0}^t ds$ est la longueur de la courbe $\vec{r}$ restreinte à l'intervalle $[a,t]\subset[a,b]$.

Preuve. On pose $\varphi(t):=\int_{\tau=a}^t||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau$, donc $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=\int_{\tau=a}^b||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau=L$ (longueur de la courbe), et $\varphi'(t)=||\vec{r}\,'(t)||>0$ pour tout $t\in[a,b]$ et $\varphi\in C^1([a,b],[0,L])$ (car $\vec{r}$ est régulière). Donc φ est croissante stricte entre deux compacts : c'est un difféomorphisme. On pose $\vec{q}(s)=\vec{r}(\varphi^{-1}(s))$, i.e. $\vec{q}(\varphi(t))=\vec{r}(t)$, donc $\vec{q}\,'(\varphi(t))\varphi'(t)=\vec{r}\,'(t)$, donc $||\vec{q}\,'(\varphi(t))||\,|\varphi'(t)|=||\vec{r}\,'(t)||$, donc $||\vec{q}\,'(\varphi(t))||=1$, pour tout t. Et pour $t\in[a,b]$, $\int_{\tau=a}^t||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau$ est la longueur de la courbe $\vec{r}$ restreinte à $[a,t]$ (par définition de la longueur). ▪

Définition 1.49 Le réel s paramètre d'une courbe $\vec{q}:s\in[0,L]\to\vec{q}(s)\in\mathbb{R}^2$ t.q. $||\vec{q}\,'(s)||=1$ pour tout $s\in[0,L]$ est appelé coordonnée curviligne intrinsèque. Et la courbe paramétrée $\vec{q}$ donnée en (1.26) est appelée un paramétrage intrinsèque de la courbe.

Donc pour trouver la coordonnée curviligne intrinsèque s, il faut calculer $s'(t):=\varphi'(t)=||\vec{r}\,'(t)||$, cf. (1.25), puis on obtient un paramétrage intrinsèque de la courbe $\mathrm{Im}(\vec{r})$ en posant $\vec{q}(s)=\vec{q}(\varphi(t)):=\vec{r}(t)$.

Exemple 1.50 Donner la représentation intrinsèque du cercle (1.4).

Réponse. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Donc $||\vec{r}\,'(t)|| = R = s'(t)$. Donc $s = \int_0^t ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_0^t R\,dt$, donc $s = Rt + c = \varphi(t) =^{\text{noté}} s(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, avec $c = 0$ pour avoir $s(0) = 0$, donc $t = \frac{s}{R} = \varphi^{-1}(s) =^{\text{noté}} t(s)$. Donc :

$$\vec{q}(s) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(\frac{s}{R}) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 2\pi R[.$$

Vérification : $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{R}) \\ \cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ donne bien $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$, pour tout $s \in [0, 2R\pi[$. ▲

Exemple 1.51 Donner la représentation intrinsèque du segment de droite.

Réponse. $\vec{r}(t) = A + t\overrightarrow{AB}$, donc $||\vec{r}\,'(t)|| = ||\overrightarrow{AB}||$, donc $s'(t) = ||\overrightarrow{AB}||$, donc $s(t) = ||\overrightarrow{AB}||t = s$, donc $t = t(s) = \frac{s}{||\overrightarrow{AB}||}$. Et on pose $\vec{q}(s) = \vec{r}(t)$ quand $t = t(s)$, donc $\vec{q}(s) = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}\,s$. Vérification : $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ pour tout s. ▲

Exemple 1.52 Donner un paramétrage curviligne intrinsèque pour une courbe donnée sous forme explicite.

Réponse. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [a, b]$, donc $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)|| = (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}$, donc $s(t) = \int_{\tau=a}^t (1 + f'(\tau)^2)^{\frac{1}{2}}\,d\tau$ et on pose $\vec{q}(s(t)) = \vec{r}(t)$. Vérification : $\vec{q}\,'(s(t))s'(t) = \vec{r}\,'(t)$ donne $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ pour tout s. ▲

1.12 * Centre de gravité

$\vec{r} : \left\{ \begin{array}{ll} [a, b] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to \vec{r}(t) \end{array} \right\}$ régulière, et courbe $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ reparamétrée en $\vec{q} : \left\{ \begin{array}{ll} [0, L] & \to \mathbb{R}^2 \\ s & \to \vec{q}(s) \end{array} \right\}$ où $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)||$ (passage en coordonnée curviligne intrinsèque). Soit $\rho : \vec{x} \in \Gamma \to \rho(\vec{x}) \in \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^0 appelée “densité linéique de masse”, avec $\rho(\vec{x})$ la densité en $\vec{x}$, et soit

$$dm = \rho\,ds = \text{ la mesure massique le long de la courbe.} \tag{1.28}$$

Définition 1.53 La masse de Γ est :

$$m(\Gamma) := \int_\Gamma dm = \int_\Gamma \rho\,ds = \int_{s=0}^L \rho(\vec{q}(s))\,ds, \quad \text{donc} \quad = \int_{t=a}^b \rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt. \tag{1.29}$$

(Rappel du cas discret : pour k masses ponctuelles Δm_i aux points $\vec{x}_i$ on a $m = \sum_{i=1}^k \Delta m_i$.)

Définition 1.54 Soit O une “origine” dans $\mathbb{R}^2$ et $\vec{q}(s) = O\vec{P}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$. Le centre de gravité de la courbe Γ est le point G tel que, notant $O\vec{G} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$ et $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$:

$$m\overrightarrow{OG} := \int_\Gamma \vec{q}\,dm = \int_{s=0}^L \vec{q}(s)\,\rho(\vec{q}(s))\,ds, \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} mx_G = \displaystyle\int_\Gamma x\,dm = \int_{s=0}^L x(s)\,\rho(\vec{q}(s))\,ds, \\ my_G = \displaystyle\int_\Gamma y\,dm = \int_{s=0}^L y(s)\,\rho(\vec{q}(s))\,ds, \end{array} \right. \tag{1.30}$$

(Pour k masses ponctuelles Δm_i aux points $\vec{r}_i$ on a $mO\vec{G} = \sum_{i=1}^k \vec{r}_i \Delta m_i$.)

Autrement dit,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_\Gamma \vec{q}\,dm}{m} = \frac{\int_{s=0}^L \vec{q}(s)\,\rho(\vec{q}(s))\,ds}{\int_{s=0}^L \rho(\vec{q}(s))\,ds}, \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_{t=a}^b \vec{r}(t)\,\rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt}{\int_{t=a}^b \rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt}. \tag{1.31}$$

Exemple 1.55 Si $\rho = c > 0$ (densité constante), la masse est donnée par $m = \int_{s=0}^L c\,ds = cL$, i.e. la masse vaut c fois la longueur de la courbe. ▲

Remarque 1.56 Si on approxime $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ donnée par une courbe polygonale de k segments de droite, et que chaque segment de cette courbe a pour masse $m_i = \rho_i \Delta s_i$ où Δs_i est la longueur du segment i, alors la masse m vaut approximativement $\sum_{i=1}^k \rho_i \Delta s_i$. Quand $k \to \infty$ et $\Delta s_i \to 0$, on obtient $m = \int_\Gamma \rho\,ds := \int_{s=0}^L \rho(\vec{q}(s))\,ds$ donnée dans la définition (1.29). ▲

Remarque 1.57 Pour 2 masses ponctuelles m_i en $\vec{r}_i$, la masse totale est $m = m_1 + m_2$, et le centre de gravité est donné par $m\vec{OG} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$, soit $\vec{OG} = \lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2$ où les $\lambda_i = \frac{m_i}{m}$ sont les coordonnées barycentriques. Et pour k masses ponctuelles m_i en $\vec{r}_i$, la masse totale est $m = \sum_{i=1}^k m_i$, et le centre de gravité est donné par $m\vec{OG} = \sum_i m_i\vec{r}_i$, soit $\vec{OG} = \sum_i \lambda_i\vec{r}_i$ où les $\lambda_i = \frac{m_i}{m}$ sont les poids relatifs. ▪

Exemple 1.58 Calculer la position du centre de gravité du demi-cercle supérieur $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ de densité massique constante $\rho(\vec{r}) = c > 0$.

Réponse. On a $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,\pi]$. D'où $ds = R\,dt$, d'où $m = \int_\Gamma \rho\,ds = \int_{t=0}^{\pi} cR\,dt = c\pi R$. Puis notant $\vec{OG} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ on a $m\vec{OG} = \begin{pmatrix} mg_1 = \int_{t=0}^{\pi}(R\cos t)\,cR\,dt = 0 \\ mg_2 = \int_{t=0}^{\pi}(R\sin t)\,cR\,dt = cR^2[-\cos t]_0^{\pi} = 2cR^2 \end{pmatrix}$. D'où $\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2R}{\pi} \end{pmatrix}$. ▪

Exemple 1.59 Calculer le centre de gravité de la parabole $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{a}{2}t^2 \end{pmatrix}$ pour $t \in [\alpha,\beta]$ de densité massique constante. On prendra en particulier $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.

Réponse. La formule (1.31) montre que la position ne dépend pas de la densité massique constante ρ. L'exercice 1.41 avec $\beta = 1 = -\alpha$ donne $m = L = 4\sqrt{1+a^2} + \frac{1}{a}\mathrm{argsh}a$. Puis notant $\vec{OG} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ on a $mg_1 = \int_{t=\alpha}^{\beta} t\sqrt{1+a^2t^2}\,dt = [\frac{2}{3(2a^2)}(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}]_\alpha^\beta = \frac{1}{3a^2}((1+a^2\beta^2)^{\frac{3}{2}} - (1+a^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}})$. En particulier pour $\beta = -\alpha$ on a $g_1 = 0$. Et on a $mg_2 = \frac{a}{2}\int_{t=\alpha}^{\beta} t^2\sqrt{1+a^2t^2}\,dt$, ce qui par intégration par parties en posant $u = t$ et $v' = t\sqrt{1+a^2t^2}$ donne $mg_2 = \frac{a}{2}[t\frac{1}{3a^2}(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}]_\alpha^\beta - \frac{a}{2}\frac{1}{3a^2}\int_{t=\alpha}^{\beta}(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt$.

Pour l'intégrale qui reste on pose $\mathrm{sh}u = at$, d'où $\int_{t=\alpha}^{\beta}(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{a}\int_{t=\alpha}^{\beta}\mathrm{ch}^4u\,du$, avec $\mathrm{ch}^4u = (\mathrm{ch}^2u)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{ch}2u+1)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{ch}^2 2u + 2\mathrm{ch}2u + 1) = \frac{1}{8}(\mathrm{ch}4u + 1) + \frac{1}{2}\mathrm{ch}2u + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\mathrm{ch}4u + \frac{1}{2}\mathrm{ch}2u + \frac{3}{8}$. D'où $\int_{t=\alpha}^{\beta}(1+a^2t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{a}[\frac{1}{32}\mathrm{sh}4u + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2u + \frac{3}{8}u]_{\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)}$.

Puis on a $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x)) = 2\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ et $\mathrm{ch}(2\mathrm{argsh}x) = 1+2\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}x) = 1+2x^2$, d'où $\mathrm{sh}(4\mathrm{argsh}x)) = 2\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(2\mathrm{argsh}x) = 4x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2)$. Finalement :

$$\begin{aligned} mg_2 = {} & \frac{1}{6a}[\beta(1+a^2\beta^2)^{\frac{3}{2}} - \alpha(1+a^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}] \\ & - \frac{1}{6a^2}[\frac{1}{8}a\beta\sqrt{1+a^2\beta^2}(1+2a^2\beta^2) + \frac{1}{2}a\beta\sqrt{1+a^2\beta^2} + \frac{3}{8}\mathrm{argsh}(a\beta) \\ & \quad - \frac{1}{8}a\alpha\sqrt{1+a^2\alpha^2}(1+2a^2\alpha^2) - \frac{1}{2}a\alpha\sqrt{1+a^2\alpha^2} - \frac{3}{8}\mathrm{argsh}(a\alpha)]. \end{aligned}$$

En particulier pour $\beta = 1 = -\alpha$ on obtient :

$$mg_2 = \frac{1}{3a}(1+a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a^2}(\frac{1}{8}a\sqrt{1+a^2}(1+2a^2) + \frac{1}{2}a\sqrt{1+a^2} + \frac{3}{8}\mathrm{argsh}a).$$

D'où g_2 connaissant m. ▪

1.13 Courbure, rayon de courbure, repère de Frénet

1.13.1 Définition

On considère une courbe régulière $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$, et son paramétrage curviligne intrinsèque $\vec{q} : s \in [0,L] \to \vec{q}(s) := \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ quand $s = \varphi(t) =^{\text{noté}} s(t)$ cf. (1.24). Donc $\vec{q}(s(t)) = \vec{r}(t)$ et

$$||\vec{q}\,'(s)|| = 1 \quad \text{donne} \quad s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)||. \tag{1.32}$$

Proposition 1.60 *Pour un paramétrage curviligne intrinsèque, le vecteur $\vec{q}\,''(s)$ (l'accélération) est normal à la courbe $\vec{q}$ au point $\vec{q}(s)$: pour tout $s \in [0,L]$,*

$$\vec{q}\,''(s) \bullet \vec{q}\,'(s) = 0, \quad i.e. \quad \vec{q}\,''(s) \perp \vec{q}\,'(s). \tag{1.33}$$

(Pas d'accélération longitudinale, uniquement une accélération normale.)

Preuve. $||\vec{q}\,'(s)|| = 1 = ||\vec{q}\,'(s)||^2 = \vec{q}\,'(s) \bullet \vec{q}\,'(s)$ donne $0 = \vec{q}\,''(s) \bullet \vec{q}\,'(s) + \vec{q}\,'(s) \bullet \vec{q}\,''(s) = 2\vec{q}\,''(s) \bullet \vec{q}\,'(s)$ (un produit scalaire est symétrique), d'où (1.33). ▪

Définition 1.61 La courbure $\tilde{k}(s) = k(\vec{x})$ au point $\vec{x} = \vec{q}(s)$ est

$$\tilde{k}(s) = k(\vec{x}) := ||\vec{q}\,''(s)|| \ \ (\geq 0). \tag{1.34}$$

(C'est la norme de l'accélération en coordonnées curvilignes intrinsèques.) (Et c'est $||(\vec{q}\,')'(s)||$ = la norme du taux de variation du vecteur tangent unitaire $\vec{q}\,'(s)$ à condition d'utiliser les coordonnées curvilignes intrinsèques).

Remarque 1.62 NB : cette définition n'est valable qu'en 2-D (dans $\mathbb{R}^2$), en particulier la courbure est toujours ≥ 0 en 2-D. On trouve également une autre définition de la courbure : on définit $\vec{N}$ le vecteur unitaire t.q. $(\vec{q}\,', \vec{N})$ est une b.o.n. directe, puis on pose $\vec{q}\,'' = \gamma\vec{N}$, et on appelle γ la courbure, donc $|\gamma| = k$, cf. (1.34). ∎

Définition 1.63 Au point $\vec{x} = \vec{q}(s)$, si $k(\vec{x}) \neq 0$ (courbure non nulle) alors le rayon de courbure est

$$\tilde{R}(s) = R(\vec{x}) := \frac{1}{k(\vec{x})} = \frac{1}{\tilde{k}(s)} \quad (> 0). \tag{1.35}$$

Si $k(\vec{x}) = 0$ (i.e. $\vec{q}\,''(s) = \vec{0}$) alors on pose $R(\vec{x}) = \tilde{R}(s) = \infty$.

Définition 1.64 Quand $k(\vec{x}) \neq 0$, le vecteur normal unitaire associé est

$$\tilde{\vec{n}}(s) = \vec{n}(\vec{x}) := \frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||} \quad (= \frac{\vec{q}\,''(s)}{k(\vec{x})} = R(\vec{x})\vec{q}\,''(s)). \tag{1.36}$$

Donc $\vec{q}\,''(s) = \tilde{k}(s)\tilde{\vec{n}}(s)$ avec $||\tilde{\vec{n}}(s)|| = 1$. Si $k(\vec{x}) = 0$ alors on choisit $\vec{n}(\vec{x}) = \pm \begin{pmatrix} -q_2'(s) \\ q_1'(s) \end{pmatrix}$.

Définition 1.65 Le cercle osculateur à la courbe en un point $\vec{x} = \vec{q}(s)$ t.q. $k(\vec{x}) \neq 0$ est "le cercle tangent à la courbe qui a même rayon de courbure" :

$$\text{cercle osculateur en } \vec{x} = \text{cercle de rayon } R(\vec{x}) \text{ centré au point } \vec{x} + R(\vec{x})\vec{n}(\vec{x}). \tag{1.37}$$

Définition 1.66 Posant $\vec{t}(\vec{x}) = \vec{q}\,'(s)$ (vecteur tangent unitaire en $\vec{x} = \vec{q}(s)$), et en $\vec{x}$ t.q. $k(\vec{x}) \neq 0$, le repère de Frénet en $\vec{x}$ est $(\vec{x}, (\vec{t}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})))$ donné par la b.o.n. directe $(\vec{t}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$ en $\vec{x}$ (b.o.n. directe car $\det(\vec{q}\,'(s), \vec{n}(\vec{x})) = q_1'(\vec{x})^2 + q_2'(\vec{x})^2 > 0$).

Exercice 1.67 Montrer : la courbure d'un segment de droite est nulle : "pas de courbure pour une droite".

Réponse. Paramétrage usuel $\vec{r}(t) = A + t\overrightarrow{AB}$ pour $t \in [0,1]$. Donc $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)|| = ||\overrightarrow{AB}||$. Donc paramétrage intrinsèque $\vec{q}(s(t)) = \vec{r}(t)$ où $\vec{q}\,'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)}\vec{r}\,'(t) = \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$ constant, donc $\vec{q}\,''(s) = 0$ et $k(s) = 0$, pour tout s. ∎

Exemple 1.68 Calculer le rayon de courbure $\mathcal{R}(s)$ d'un cercle de rayon $R > 0$ centré au point $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donner un cercle osculateur et le repère de Frénet. Vérifier que $\vec{n}$ pointe toujours vers le centre du cercle.

Réponse. En coordonnées intrinsèques $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ pour $s \in [0, 2\pi R]$. D'où $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{R}) \\ \cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ et $\vec{q}\,''(s) = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{R}) \\ \sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$. D'où la courbure $k(\vec{x}) = ||\vec{q}\,''(s)|| = \frac{1}{R}$ au point $\vec{x} = \vec{q}(s)$, le rayon de courbure $\mathcal{R}(\vec{x}) = R$ (constant), le vecteur $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||}$ normal en $\vec{x}$ et rentrant.

Le repère de Frénet au point $\vec{x} = \vec{q}(s)$ est $(\vec{x}, \vec{t}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$ où $\vec{t}(\vec{x}) = \vec{q}\,'(s)$.

Centre du cercle osculateur : $C = \vec{q}(s) + R\vec{n}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; donc le cercle osculateur est le cercle (heureusement).

Paramétrage en sens inverse : $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ -R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ pour $s \in [0, 2\pi R]$. D'où $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{R}) \\ -\cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ et $\vec{q}\,''(s) = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{R}) \\ -\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$: donc pointe vers l'intérieur cercle, donc $\vec{n}(\vec{x})$ pointe vers l'intérieur cercle. ∎

Remarque 1.69 Il est fondamental pour le calcul de $\vec{n}$ de considérer les coordonnées curvilignes intrinsèques, car son calcul est basé sur $||\vec{q}\,'(s)||^2 = 1 =$ constant, qui, par dérivation, donne bien $\vec{q}\,'' \perp \vec{q}\,'$, donc $\vec{n} \perp \vec{q}\,'$.

On peut calculer le vecteur normal à l'aide du vecteur unitaire tangent (proportionnel à $\vec{r}\,'$) :

$$\vec{U}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||} \quad \text{pour } t \in [a, b].$$

En effet, $||\vec{U}(t)|| = 1 = ||\vec{U}(t)||^2$ donne $(\vec{U}'(t), \vec{U}(t)) = 0$, donc $\vec{U}'(t) \perp \vec{U}(t)$. Mais on ne peut pas définir la courbure et le rayon de courbure en $\vec{r}(t)$ par

$$k_t(\vec{x}) = ||\vec{U}'(t)||, \quad R_t(\vec{x}) = \frac{1}{k_t(t)} \quad \text{et} \quad \vec{n}(\vec{x}) = R_t(t)\vec{U}'(t) \ :$$

car on aurait en particulier $R_t(\vec{x}) = 1$ quelque soit le rayon du cercle ! En effet $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$ donne

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{U}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{U}'(t) = -\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow k_t(\vec{x}) = 1 = R_t(t),$$

et $R_t(t) = 1$ n'est pas le rayon d'un cercle de rayon R (sauf si $R = 1$...). ∎

Exercice 1.70 Montrer que le vecteur $\vec r''(t)$ n'est pas normal à la courbe (l'accérélation n'est pas que centrifuge) en général, alors que $\vec U'(t) = \frac{d}{dt}(\frac{\vec r'(t)}{||\vec r'(t)||})$ l'est. Prendre par exemple une parabole.

Réponse. $\vec r(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$, donc $\vec r'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec r''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est le vecteur 'vertical' constant de norme 1 orienté vers le 'haut', et $\vec r'(t) \bullet \vec r''(t) \neq 0$ pour $t \neq 0$: le vecteur $\vec r''(t)$ n'est pas normal à la parabole en $\vec r(t)$ pour $t \neq 0$. Dessin.

Exercice 1.71 Montrer que $(\vec n \circ \vec q)'(s)$ est parallèle à $\vec q'(s)$: la dérivée du vecteur normal le long de la courbe est un vecteur tangent à la courbe (intuitif : les vecteurs $\vec q'$ et $\vec n$ "tournent ensembles"). Calculer $(\vec n \circ \vec q)'(s)$.

Réponse. Notons $\vec\nu(s) = (\vec n \circ \vec q)(s) = \vec n(\vec q(s)) = \vec n(\vec x)$ pour $\vec x = \vec q(s)$. On a $||\vec\nu(s)||^2 = 1 = (\vec\nu(s), \vec\nu(s))$, donc $(\vec\nu\,'(s), \vec\nu(s)) = 0$, donc $\vec\nu\,'(s) \perp \vec\nu(s)$ donc $\vec\nu\,'(s) \perp \vec n(\vec x)$, donc $\vec\nu\,'(s) \parallel \vec q'(s)$. Calcul : cherchons α t.q. $\vec\nu\,'(s) = \alpha(s)\vec q'(s)$. On a $(\vec q', \vec\nu) = 0$, d'où $(\vec q'', \vec\nu) + (\vec q', \vec\nu\,') = 0$, d'où $k(\vec x)||\vec\nu(s)||^2 + \alpha(s)||\vec q'(s)||^2 = 0$, d'où $\alpha(s) = -k(\vec x)$, d'où $\vec\nu\,'(s) = -k(\vec x)\vec q'(s)$.

Exercice 1.72 Pour $\tilde k(s) \neq 0$ montrer : $\tilde{\vec n}'(s) = -\tilde k(s)\vec q'(s)$, donc $||\tilde{\vec n}'(s)|| = k(s)$ (vers la courbure d'une surface par variation du vecteur unitaire normal à la surface).

Réponse. $\tilde{\vec n}(s) \perp \vec q'(s)$, i.e. $\tilde{\vec n}(s) \bullet \vec q'(s) = 0$, donc $\tilde{\vec n}'(s) \bullet \vec q'(s) + \tilde{\vec n}(s) \bullet \vec q''(s) = 0$, donc $\tilde{\vec n}'(s) \bullet \vec q'(s) + \tilde k(s) = 0$. Et $\tilde{\vec n}(s) \bullet \tilde{\vec n}(s) = ||\tilde{\vec n}(s)||^2 = 1$, donc $2\tilde{\vec n}'(s) \bullet \tilde{\vec n}(s) = 0$, donc $\tilde{\vec n}'(s) \parallel \vec q'(s)$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\tilde{\vec n}(s) = \lambda \vec q'(s)$, avec $||\vec q'(s)|| = 1$, donc $\lambda = -\tilde k(s)$.

1.13.2 Calcul générique et exemples

On a $\vec q'(s(t))s'(t) = \vec r'(t)$, donc $\vec q''(s(t))s'(t)s'(t) + \vec q'(s(t))s''(t) = \vec r''(t)$, donc

$$\boxed{\vec q''(s) = \frac{1}{s'(t)^2}\Big(\vec r''(t) - \vec q'(s(t))s''(t)\Big)} \quad \text{quand} \quad s = s(t). \tag{1.38}$$

Exercice 1.73 Calculer le rayon et le rayon de courbure de l'ellipse $\vec r(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ en un point $\vec r(t)$, où $a, b > 0$, $a \neq b$ et $t \in [0, 2\pi]$. Valeurs en $\vec r(0)$ et en $\vec r(\frac{\pi}{2})$?

Réponse. $s'(t) = ||\vec r'(t)|| = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac12} > 0$, donc $s : t \in [0, 2\pi] \to s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\tau + b^2\cos^2\tau}\,d\tau \in [0, L{=}s(2\pi)]$ est un difféomorphisme. On pose $\vec q(s) = \vec r(t)$ quand $s = s(t)$, donc $\vec q(s(t)) = \vec r(t)$, donc $\vec q'(s(t))s'(t) = \vec r'(t)$. Donc $\vec q''(s(t))s'(t)s'(t) + \vec q'(t)s''(t) = \vec r''(t)$. Avec $s''(t) = \frac12(2a^2\sin t\cos t - 2b^2\sin t\cos t)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac12} = \frac{(\sin t\cos t)(a^2-b^2)}{s'(t)}$. Donc $\vec q''(s) = \frac{1}{s'(t)^2}(\vec r''(t) + \vec q'(t)\frac{(\sin t\cos t)(b^2-a^2)}{s'(t)}) = \frac{1}{s'(t)^2}(\begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}\frac{(\sin t\cos t)(b^2-a^2)}{s'(t)^2})$.
Pour $t = 0$, on a $s'(0) = b$, donc $\vec q''(s(0)) = \frac{1}{b^2}(\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $k(\vec r(0)) = \frac{a}{b^2}$ et $R(\vec r(0)) = \frac{b^2}{a}$. De même $R(\vec r(\frac{\pi}{2})) = \frac{a^2}{b}$.

Exercice 1.74 Courbure et rayon de courbure pour la cycloïde $\vec r(t) = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix}$, $t \in]0, 2\pi[$?

Réponse. $\vec r'(t) = R\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et $\vec r''(t) = R\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. Et $s'(t) = ||\vec r'(t)|| = 2R\sin\frac{t}{2}$ car $t \in]0, 2\pi[$. Egalement : $\vec r'(t) = 2R\begin{pmatrix} \sin^2\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, et donc $\vec q'(s(t))s'(t) = \vec r'(t)$ donne $\vec q'(s(t)) = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$ (unitaire). Donc $\vec q''(s(t))s'(t) = \frac12\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, donc $k(s)s'(t) = \frac12$, donc $k(s) = \frac{1}{4R\sin\frac{t}{2}}$, et $R(s) = 4R\sin\frac{t}{2}$.

Ou bien appliquer (1.38) (entrainement) : $4R^2\sin^2\frac{t}{2}\vec q''(s) = R\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}R\cos\frac{t}{2} = R\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - \frac{R}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - R\begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ \cos^2\frac{t}{2} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \frac12\sin t \\ \frac12\cos t - \frac12 \end{pmatrix}$; donc $\vec q''(s) = \frac{1}{8R\sin^2\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$.
Donc $k(s) = \frac{1}{8R\sin^2\frac{t}{2}}2\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{4R\sin\frac{t}{2}}$, et $R(s) = 4R\sin\frac{t}{2}$.

Exercice 1.75 (Pour l'exercice suivant.) Soit le cercle $\vec r(t) = \begin{pmatrix} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que l'équation cartésienne du demi-cercle inférieur est $y(x) = b - \sqrt{R^2 - (x{-}a)^2}$, et que le développement limité de y au 4ème ordre au voisinage de $x{=}a$ est $y(x) = b{-}R + \frac{1}{R}\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{1}{8R^3}(x{-}a)^4 + o((x{-}a)^4)$.

Réponse. Quitte à changer l'origine, on prend $a = 0$ (simplifie l'écriture) (ou remplacer x par $\tilde x = x{-}a$). On a $x^2 + (y{-}b)^2 = R^2$, donc $y(x) = b \pm (R^2{-}x^2)^{\frac12}$, donc, demi-cercle inférieur, $y(x) = b - (R^2{-}x^2)^{\frac12}$. Donc

$y'(x) = -\frac12(-2x)(R^2{-}x^2)^{-\frac12} = x(R^2{-}x^2)^{-\frac12}$, donc

$y''(x) = (R^2{-}x^2)^{-\frac12} + x(-\frac12)(-2x)(R^2{-}x^2)^{-\frac32} = (R^2{-}x^2)^{-\frac12} + x^2(R^2{-}x^2)^{-\frac32} = R^2(R^2{-}x^2)^{-\frac32}$, donc

$y'''(x) = R^2(-\frac32)(-2x)(R^2{-}x^2)^{-\frac52} = 3R^2x(R^2{-}x^2)^{-\frac52}$, donc

$y''''(x) = 3R^2(R^2{-}x^2)^{-\frac52} + 15R^2x^2(R^2{-}x^2)^{-\frac72} = (3R^4 + 12x^2R^2)(R^2{-}x^2)^{-\frac72}$.

Donc $y(0) = b - R$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{R}$, $y'''(0) = 0$, $y''''(0) = \frac{3}{R^3}$, et $y(x) = y(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^4}{4!}y''''(0) + o(x^4)$, donc $y(x) = b{-}R + \frac{1}{2R}x^2 + \frac{1}{8R^3}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 1.76 Soit la parabole d'équation $y = \frac{\kappa}{2}x^2$, $\kappa > 0$. Donner l'équation du cercle osculateur au point $\vec{0} = (0,0)$, et montrer qu'il est au-dessus de la parabole au voisinage de $\vec{0}$. Montrer : κ est la courbure en $(0,0)$, et la courbure de la parabole décroit en s'éloignant de $\vec{0}$ (donc que son rayon de courbure croit).

Réponse. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) = \frac{\kappa}{2}t^2 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$, d'où $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa t \end{pmatrix}$, $\vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$, $||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{1+\kappa^2 t^2} = s'(t)$. (Donc $s' \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $s' \geq 1 > 0$ donc $s : t \to s(t) = \int_{u=0}^t s'(t)\,dt$ est un difféomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.) On pose $\vec{q}(s(t)) = \vec{r}(t)$, d'où $\vec{q}\,'(s(t))s'(t) = \vec{r}\,'(t)$, d'où $\vec{q}\,'(s(t)) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\sqrt{1+\kappa^2t^2}}$. D'où $\vec{q}\,''(s(t))s'(t) = \frac{\vec{r}\,''(t)\sqrt{1+\kappa^2t^2} - \vec{r}\,'(t).\kappa^2 t.(1+\kappa^2t^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+\kappa^2t^2}$. D'où $\vec{q}\,''(0) = \vec{r}\,''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$, $||\vec{q}\,''(0)|| = \kappa = k(0)$, $R(0) = \frac{1}{\kappa}$, $\vec{n}(0) = \frac{\vec{q}\,''(0)}{||\vec{q}\,''(0)||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$; et donc le cercle osculateur a pour rayon $R(0) = \frac{1}{\kappa}$, pour centre $\vec{0} + \frac{1}{\kappa}\vec{n}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa} \end{pmatrix}$: son équation est $x^2 + (y - \frac{1}{\kappa})^2 = \frac{1}{\kappa^2}$, sa partie inférieure (tangente à la parabole) est $y_C(x) = \frac{1}{\kappa} - \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - x^2}$. Et, au voisinage de $x = 0$, $y(t) = \frac{\kappa}{2}t^2$ et, cf. exercice précédent, $y_C(x) = 0 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\kappa^3}{8}\frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ avec $\kappa > 0$, donc le cercle est au dessus de la parabole au voisinage du point $(0,0)$. Puis $\vec{q}\,''(s(t)) = \frac{1}{(1+\kappa^2t^2)^2}(\vec{r}\,''(t)(1+\kappa^2t^2) - \vec{r}\,'(t).\kappa^2 t) = \frac{1}{(1+\kappa^2t^2)^2}\begin{pmatrix} \kappa^2 t \\ \kappa(1+\kappa^2t^2) - \kappa^2 t(\kappa t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+\kappa^2t^2)^2}\begin{pmatrix} \kappa^2 t \\ \kappa \end{pmatrix}$, donc

$$k(\vec{0}) = \kappa \quad \text{et} \quad k(\vec{q}(s)) = \frac{1}{(1+\kappa^2t^2)^2}\sqrt{\kappa^4t^2 + \kappa^2}) = \frac{\kappa}{(1+\kappa^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.39}$$

décroît avec $|t|$. Donc le cercle osculateur à la parabole en $\vec{0}$ est en tout point au dessus de la parabole (intuitif) : calcul : pour $R = \frac{1}{\kappa}$ (rayon du cercle osculateur en $\vec{0}$), si $x \in]-R, R[$, on a $y(x) = \frac{1}{2R}x^2$ et $y_C(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$, on pose $\Delta(s) = y_C(x) - y(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{2R}$, on a $\Delta(0) = 0$ et $\Delta'(x) = \frac{x}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{R} \geq 0$ pour $x \geq 0$ et ≤ 0 pour $x \leq 0$, donc le cercle osculateur est au dessus ; et si $|x| \geq R$ alors on $y_C(x)$ n'existe pas et on n'a pas de comparaison à faire ; donc, là où ça a un sens le cercle est au dessus de la parabole. ∴

Exercice 1.77 Montrer que si $\vec{x} = \vec{q}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ alors $\vec{n}(\vec{x}) = \pm \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$. Que dire du signe ?

Réponse. On a $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$, et $\vec{n}(\vec{x}) \perp \vec{q}\,'(s)$ d'où $\vec{n}(\vec{x}) = \pm \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$ (sachant $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$). Quant au signe, le calcul donne $\vec{q}\,''(s) = \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{R(\vec{x})}\vec{n}(\vec{x})$ avec $R(\vec{x}) > 0$, et le signe $\pm$ dépend du paramétrage initial de la courbe (par exemple signe + si $x''(s)$ à même signe que $y'(s)$). ∴

Exercice 1.78 Dessiner la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (\cos t)^3 \\ (\sin t)^3 \end{pmatrix}$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (un quart d'astroïde). Calculer la courbure. Montrer : quand $s \to 0$ la courbure tend vers ∞, i.e. que la variation de la pente explose au voisinage de $\vec{r}(0+)$.

Réponse. $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin t\cos^2 t = x'(t) \\ 3\cos t \sin^2 t = y'(t) \end{pmatrix} = 3\sin t\cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sin 2t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, donc $||\vec{r}\,'(t)|| = 3|\sin t\cos t| = \frac{3}{2}\sin 2t = s'(t) > 0$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (là où $\vec{r}$ est une courbe régulière). On pose $\vec{x} = \vec{r}(t) = \vec{q}(s)$ quand $s = s(t)$, d'où :

$$\vec{q}\,'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)}\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \vec{q}\,''(s(t)) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sin 2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad k(\vec{x}) = \frac{2}{3\sin 2t}. \tag{1.40}$$

Donc $k(\vec{q}(0+)) = \infty$: la variation du vecteur tangent unitaire (donc en direction) est rapide au voisinage de $s = 0$. Ici $s(t) = \int_0^t 3\cos\tau\sin\tau\,d\tau = \frac{3}{2}\sin^2 t$, donc $\sin t = \sqrt{\frac{2s}{3}}$ et $\cos t = (1 - \frac{2}{3}s)^{\frac{1}{2}}$. Donc, avec (1.40), la pente au point $\vec{q}(s(t)) = \vec{r}(t)$ vaut $p(s(t)) = \frac{\sin t}{-\cos t} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{s^{\frac{1}{2}}}{(1-\frac{2}{3}s)^{\frac{1}{2}}} = p(s)$. Donc $p'(s) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{2}{3}s)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})(1-\frac{2}{3}s)^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{2}{3}s} = -\sqrt{\frac{2}{3}}s^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{2}{3}s)^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-\frac{2}{3}s)+\frac{s}{3}}{1-\frac{2}{3}s} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1-\frac{s}{3}}{s^{\frac{1}{2}}(1-\frac{2}{3}s)^{\frac{3}{2}}}$. Donc $p'(s) \sim \frac{1}{\sqrt{s}}$ au vois. de $s = 0$ (variation brutale de la pente). ∴

Exercice 1.79 Pour une courbe régulière $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} = \vec{x}$, montrer $k(\vec{x}) = \frac{|f''(t)|}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Réponse. (1.41) donne $\vec{q}\,''(s(t)) = \frac{1}{s'(t)^2}(\vec{r}\,''(t) - \vec{r}\,'(t)\frac{s''(t)}{s'(t)})$. Ici $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$, $\vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(t) \end{pmatrix}$, $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{1+f'(t)^2}$, $s''(t) = \frac{f''(t)f'(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}$. Donc $\vec{q}\,'' = \frac{1}{(1+(f')^2)}(\begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix}\frac{f''f'}{(1+(f')^2)}) = \frac{1}{(1+(f')^2)^2}\begin{pmatrix} f''f' \\ (1+(f')^2)f'' - f''(f')^2 \end{pmatrix} = \frac{f''}{(1+(f')^2)^2}\begin{pmatrix} f' \\ 1 \end{pmatrix}$ (notations allégées abusives). ∴

1.14 * Formules pour la courbure en 2-D

Courbe régulière $\vec{r}: \left\{ \begin{array}{ll} [a,b] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) = x(t) \\ r_2(t) = y(t) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$. Donc $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $\vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

Passage en coordonnées curvilignes intrinsèques : $\vec{r}(t) = \vec{q}(s(t))$ donne $\vec{r}'(t) = \vec{q}'(s(t))s'(t)$, donc $\vec{r}''(t) = (\vec{q}''(s(t))s'(t))s'(t) + \vec{q}'(s(t))s''(t) = s'(t)^2\vec{q}''(s(t)) + s''(t)\vec{q}'(s(t)) = s'(t)^2\vec{q}''(s(t)) + s''(t)\frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)}$. D'où

$$\vec{q}''(s(t)) = \frac{s'(t)\vec{r}''(t) - s''(t)\vec{r}'(t)}{s'(t)^3}, \quad \text{i.e.} \quad \vec{q}''(s) = \frac{s'(t(s))\vec{r}''(t(s)) - s''(t(s))\vec{r}'(t(s))}{s'(t(s))^3}, \tag{1.41}$$

quand $\varphi : t \in [a,b] \to s = \varphi(t) =^{\text{noté}} s(t) \in [0,L]$ et $\varphi^{-1} : s \in [0,L] \to t = \varphi^{-1}(s) =^{\text{noté}} t(s) \in [a,b]$.

Avec des notations allégées : $s' = \sqrt{x'^2+y'^2}$, d'où $s'' = \frac{x''x'+y'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$, donc (1.41) donne $\vec{q}'' = \frac{1}{s'^3}(\vec{r}''s' - \vec{r}'s'') = \frac{1}{(x'^2+y'^2)^2}(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}(x'^2+y'^2) - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}(x''x'+y'y'')) = \frac{1}{(x'^2+y'^2)^2}\begin{pmatrix} x''y'^2 - x'y'y'' \\ y''x'^2 - y'x'x'' \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{q}''(s(t)) = (\frac{x''y' - x'y''}{(x'^2+y'^2)^2}\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix})(t). \tag{1.42}$$

D'où

$$k(\vec{r}(t)) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad R(\vec{r}(t)) = \frac{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|} \tag{1.43}$$

quand $k(\vec{r}(t)) \neq 0$. Notations simplifiées usuelles :

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}|}{||\vec{v}||^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|} = \frac{||\vec{v}||^{\frac{3}{2}}}{|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}|}. \tag{1.44}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse et $\vec{\gamma}$ est l'accélération (définies par $\vec{v}(\vec{r}(t)) := \vec{r}'(t)$ et $\vec{\gamma}(\vec{r}(t)) := \vec{r}''(t)$), et, ici en 2-D, $\vec{v} \wedge \vec{\gamma}$ désigne la 3ème composante du produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{\gamma}$ quand $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont plongés dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.80 Montrer que (1.43) redonne (1.34) quand $\vec{r}$ est un paramétrage intrinsèque.

Réponse. $k(\vec{q}(s)) = \frac{|\vec{v}(\vec{q}(s)) \wedge \vec{\gamma}(\vec{q}(s))|}{||\vec{v}(\vec{q}(s))||^{\frac{3}{2}}}$ avec $\vec{q}$ paramétrisation intrinsèque, donc $||\vec{v}(\vec{q}(s))|| = 1$ et $\vec{v}(\vec{q}(s)) \perp \vec{\gamma}(\vec{q}(s))$ donc $|\vec{v}(\vec{q}(s)) \wedge \vec{\gamma}(\vec{q}(s))| = ||\vec{\gamma}(\vec{q}(s))||$ qui par définition vaut $= ||\vec{q}''(s)||$. ▟

Exercice 1.81 Paramétrage intrinsèque $\vec{q} : s \to \vec{q}(s)$, "vitesse" $\vec{v}(\vec{q}(s)) = \vec{q}'(s)$. Montrer que (vers la courbure riemannienne d'une surface) $k(\vec{q}(s)) = ||(d\vec{v}.\vec{v})(\vec{q}(s))|| = ||\frac{d(\vec{v}\circ\vec{q})}{ds}(s)||$, donc $k = ||d\vec{v}.\vec{v}|| =^{\text{noté}} ||\frac{d\vec{v}}{ds}||$.

Réponse. $\vec{q}'(s) = (\vec{v} \circ \vec{q})(s)$, donc $\vec{q}''(s) = \frac{d(\vec{v}\circ\vec{q})}{ds}(s) = d\vec{v}(\vec{q}(s)).\vec{q}'(s) = d\vec{v}(\vec{q}(s)).\vec{v}(\vec{q}(s))$, avec $k(\vec{q}(s)) = ||\vec{q}''(s)|$. ▟

1.15 * Courbure du graphe d'une fonction

Ici $\vec{r} : x \in [a,b] \to \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} r_1(x) = x \\ r_2(x) = f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Donc $\vec{r}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$ et $\vec{r}''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(x) \end{pmatrix}$, et (1.43) donne

$$k(\vec{r}(x)) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{et} \quad R(\vec{r}(x)) = \frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \tag{1.45}$$

quand $f''(x) \neq 0$. (Exemple : voir (1.39). Si $f'(x) = 0$ alors $k(x) = |f''(x)|$. Si $f'(x) \gg 1$ alors $k(x) \simeq \frac{|f''(x)|}{|f'(x)|^3}$.)
(Avec les notations du paragraphe précédent, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = r_1(t) = t \\ y(t) = r_2(t) = f(t) = f(x) \end{pmatrix}$.)

2 * Intégrales sur des courbes de $\mathbb{R}^3$

Même démarche que dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ une courbe C^2 régulière ($\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in [a,b]$). Passage en coordonnées curviligne intrinsèque : la courbe $\vec{r}$ étant régulière, la fonction

$$\varphi \overset{\text{noté}}{=} s : \left\{ \begin{array}{ll} [a,b] & \to [0,L] \\ t & \to \varphi(t) = \int_{\tau=a}^{t} ||\vec{r}'(\tau)||\, d\tau = s(t) \end{array} \right. \tag{2.1}$$

est un difféomorphisme croissant d'inverse $\varphi^{-1} =^{\text{noté}} t : \left\{ \begin{array}{ll} [0,L] & \to [a,b] \\ s & \to \varphi^{-1}(s) = t(s) \end{array} \right\}$. Et la longueur de la courbe vaut

$$L(\vec{r}) = \int_{t=a}^{b} ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_{s=0}^{L} ds, \tag{2.2}$$

car $s(a) := \varphi(a) = 0$, $s(b) := \varphi(b) = L$, $\frac{ds}{dt}(t) := \frac{d\varphi}{dt}(t) = ||\vec{r}\,'(t)||$, et

$$ds := d\varphi = \varphi'(t)\,dt = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt \quad (= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \overset{\text{noté}}{=} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}). \tag{2.3}$$

D'où le paramétrage en coordonnées curviligne intrinsèque de $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ à partir de la courbe $\vec{r}$:

$$\vec{q} := \vec{r} \circ t : \left\{ \begin{array}{ll} [0,L] & \to \mathbb{R}^3 \\ s & \to \vec{x} = \vec{q}(s) := \vec{r}(t(s)) \end{array} \right\}, \quad \text{donc} \quad \vec{q}(s(t)) = \vec{r}(t) \quad \text{avec} \quad ||\vec{q}\,'(s)|| = 1 \tag{2.4}$$

pour tout s car $\vec{q}\,'(s(t))s'(t) = \vec{r}\,'(t)$ et $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)||$. Et $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ donne $\vec{q}\,''(s) \perp \vec{q}\,'(s)$, pour tout s, et le vecteur $\vec{T}(\vec{x}) := \vec{q}\,'(s)$ est unitaire et tangent à la courbe $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{q}) = \mathrm{Im}(\vec{r})$ en $\vec{x} = \vec{q}(s)$. Et

$$k(\vec{x}) := ||\vec{q}\,''(s)||, \quad \text{et} \quad R(\vec{x}) := \frac{1}{k(\vec{x})} = \frac{1}{||\vec{q}\,''(s)||} \quad \text{et} \quad \vec{n}(\vec{x}) := \frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||} = R(\vec{x})\vec{q}\,''(s) \tag{2.5}$$

quand $k(\vec{x}) \neq 0$, sont la courbure, le rayon de courbure et le vecteur normal unitaire à Γ en $\vec{x}$ pour $\vec{q}$.

Définition 2.1 Si $k(\vec{x}) \neq 0$, le plan osculateur à la courbe Γ en $\vec{x}$ est le plan affine $(\vec{x}, (\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$ (passant par $\vec{x}$ de vecteurs directeurs $\vec{T}(\vec{x})$ et $\vec{n}(\vec{x})$), plan contenant le cercle osculateur de rayon $R(\vec{x})$ de centre $\vec{x} + R(\vec{x})\vec{n}(x)$.

Définition 2.2 Si $k(\vec{x}) \neq 0$, le vecteur binormal à la courbe en $\vec{x} = \vec{q}(s)$ est

$$\vec{b}(\vec{x}) = \vec{T}(\vec{x}) \wedge \vec{n}(\vec{x}) \overset{\text{noté}}{=} \tilde{\vec{b}}(s) \quad (= \vec{q}\,'(s) \wedge \frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||}). \tag{2.6}$$

Donc

$$\vec{b}(\vec{x}) = \tilde{\vec{b}}(s) \in \mathrm{Vect}\{\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})\}^\perp, \quad \text{et} \quad ||\vec{b}(\vec{x})|| = 1 = ||\tilde{\vec{b}}(s)|| \tag{2.7}$$

(produit vectoriel de deux vecteurs unitaires orthogonaux), et $(\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}), \vec{b}(\vec{x}))$ est une b.o.n. directe.

Définition 2.3 Le repère de Serret–Frénet en un point $\vec{x} = \vec{q}(s)$ t.q. $k(\vec{x}) \neq 0$ est $(\vec{x}, (\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}), \vec{b}(\vec{x})))$ (origine $\vec{x}$ et base $(\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}), \vec{b}(\vec{x}))$).

Relativement au point $\vec{x} = \vec{q}(s)$, on note également

$$\tilde{\vec{T}}(s) := \vec{q}\,'(s) \;\; (= \vec{T}(\vec{x})), \quad \tilde{\vec{n}}(s) := \frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||} \;\; (= \vec{n}(\vec{x})), \quad \text{donc} \quad \tilde{\vec{b}}(s) = \tilde{\vec{T}}(s) \wedge \tilde{\vec{n}}(s). \tag{2.8}$$

Proposition 2.4 *En $\vec{x} = \vec{q}(s)$ t.q. $k(s) \neq 0$ (courbure non nulle), on a*

$$\tilde{\vec{b}}\,'(s) \perp \tilde{\vec{b}}(s), \quad \tilde{\vec{b}}\,'(s) \in \mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{T}}(s), \tilde{\vec{n}}(s)\}, \quad \tilde{\vec{b}}\,'(s) = \tilde{\vec{T}}(s) \wedge \tilde{\vec{n}}\,'(s) \perp \tilde{\vec{T}}(s), \quad \textit{donc} \quad \tilde{\vec{b}}\,'(s) \parallel \tilde{\vec{n}}(s). \tag{2.9}$$

Preuve. $(\tilde{\vec{b}}(s), \tilde{\vec{b}}(s)) = ||\tilde{\vec{b}}(s)||^2 = 1$, d'où $2(\tilde{\vec{b}}\,'(s), \tilde{\vec{b}}(s)) = 0$, i.e. $\tilde{\vec{b}}\,'(s) \perp \tilde{\vec{b}}(s)$, donc $\tilde{\vec{b}}\,'(s) \in \mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{T}}(s), \tilde{\vec{n}}(s)\}$. Et

$$\tilde{\vec{b}}\,'(s) = \tilde{\vec{T}}\,'(s) \wedge \tilde{\vec{n}}(s) + \tilde{\vec{T}}(s) \wedge \tilde{\vec{n}}\,'(s) = 0 + \tilde{\vec{T}}(s) \wedge \tilde{\vec{n}}\,'(s), \tag{2.10}$$

donc $\tilde{\vec{b}}\,'(s) \perp \tilde{\vec{T}}(s)$, avec $\tilde{\vec{b}}\,'(s) \in \mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{T}}(s), \tilde{\vec{n}}(s)\}$ et $\tilde{\vec{T}}(s) \perp \tilde{\vec{n}}(s)$, donc $\tilde{\vec{b}}\,'(s)$ parallèle à $\tilde{\vec{n}}(s)$. ∴

Définition 2.5 La torsion de la courbe en $\vec{x} = \vec{q}(s)$ est le réel $\tau(\vec{x}) = \tilde{\tau}(s)$ défini par :

$$\boxed{\tilde{\vec{b}}\,'(s) = \tilde{\tau}(s)\tilde{\vec{n}}(s)} = \tau(\vec{x})\vec{n}(\vec{x}). \tag{2.11}$$

Proposition 2.6

$$\tilde{\vec{n}}\,'(s) = -\tau(\vec{x})\tilde{\vec{b}}(s) - k(\vec{x})\tilde{\vec{T}}(s) \quad (= -\tau(\vec{x})\vec{b}(\vec{x}) - k(\vec{x})\vec{T}(\vec{x})) \tag{2.12}$$

(noté abusivement $\vec{n}\,' = -\tau\vec{b} - k\vec{T}$).

Et si $k \neq 0$ et $\tilde{\vec{b}}$ est constant (donc $\vec{n}(s)$ existe et $\tilde{\vec{b}}(s_2) = \tilde{\vec{b}}(s)$ pour tout $s, s_2 \in [0,L]$), alors $\tau = 0$ (la torsion est nulle) et la courbe est plane (contenue dans le plan osculateur $(\vec{x}, (\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$).

Preuve. $\tilde{\vec{n}} = \tilde{\vec{b}} \wedge \tilde{\vec{T}}$ donne $\tilde{\vec{n}}' = \tilde{\vec{b}}' \wedge \tilde{\vec{T}} + \tilde{\vec{b}} \wedge \tilde{\vec{T}}' = (\tau\tilde{\vec{n}}) \wedge \tilde{\vec{T}} + \tilde{\vec{b}} \wedge (k\tilde{\vec{n}}) = -\tau\tilde{\vec{b}} - k\tilde{\vec{T}}$, d'où (2.12). Si $\tilde{\vec{b}}$ est constant alors $\tilde{\vec{b}}'(s) = 0$ donc $\tau(\vec{x}) = 0$, pour tout $\vec{x} \in \Gamma$, cf. (2.11). Et (développement limité au second ordre avec reste intégral)

$$\vec{q}(s) = \vec{q}(s_0) + (s - s_0)\vec{q}\,'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\vec{q}\,''(s_0) + \frac{1}{2}\int_{u=s_0}^{s} \vec{q}\,'''(u)(s - u)^2\, du. \tag{2.13}$$

Avec $\tilde{\vec{n}}(s) = \frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||}$ où $k(\vec{x}) = ||\vec{q}\,''(s)|| \neq 0$, on a $\tilde{\vec{n}}'(s) = \frac{\vec{q}\,'''(s)||\vec{q}\,''(s)|| - \vec{q}\,''(s)\frac{d||\vec{q}\,''||}{ds}(s)}{||\vec{q}\,''(s)||^2}$ avec $\tilde{\vec{n}}'(s) =^{(2.12)} -\tau(\vec{x})\tilde{\vec{b}}(s) - k(\vec{x})\tilde{\vec{T}}(s)$ et $\tau(\vec{x}) = 0$ ici, donc $\vec{q}\,'''(s)\frac{1}{||\vec{q}\,''(s)||} = -k(\vec{x})\tilde{\vec{T}}(s) + \frac{\frac{d||\vec{q}\,''||}{ds}(s)}{||\vec{q}\,''(s)||^2}\vec{q}\,''(s) \in \mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{T}}(s), \vec{q}\,''(s)\} = \mathrm{Vect}\{\tilde{\vec{T}}(s), \tilde{\vec{n}}(s)\}$. Donc (2.13) donne $\vec{q}(s) \in (\vec{x}, (\vec{T}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$. ∎

Exercice 2.7 Montrer : en $\vec{x} = \vec{r}(t) = \vec{q}(s(t))$, le vecteur $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)$ est binormal (i.e. $\parallel \vec{b}(\vec{x})$) :

$$(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')(t) = (s'(t))^3 k(\vec{x})\,\vec{b}(\vec{x}). \tag{2.14}$$

Réponse. $\vec{r}(t) = \vec{q}(s(t))$ donne $\vec{r}\,'(t) = \vec{q}\,'(s(t))s'(t)$. D'où $\vec{r}\,''(t) = \vec{q}\,''(s)(s'(t))^2 + \vec{q}\,'(s)s''(t)$ quand $s = s(t)$. D'où $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) = (s'(t))^3\vec{q}\,'(s) \wedge \vec{q}\,''(s) + \vec{0} = (s'(t))^3 k(\vec{x})\vec{T}(\vec{x}) \wedge \vec{n}(\vec{x})$. ∎

Exemple 2.8 Soit $R > 0$, $a \neq 0$ et $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ at \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ (hélice de pas $p = 2\pi a$). Calculer sa longueur, sa courbure son rayon de courbure, sa torsion. Pour quels a la torsion est maximum ou minimum ?

Réponse. $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ a \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, d'où $||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{R^2 + a^2}$. D'où $L = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}$.
Abscisse curviligne intrinsèque $s : t \in [0, 2\pi] \to s(t) \in [0, L]$ donnée par $s'(t) = \sqrt{R^2 + a^2}$. Donc $s(t) = t\sqrt{R^2 + a^2}$. Donc $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ R\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ a\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} \end{pmatrix}$, pour $s \in [0, L]$. Donc $\vec{T}(s) = \vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{T}'(s) = \vec{q}\,''(s) = -\frac{R}{R^2 + a^2}\begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad k(s) = \frac{R}{R^2 + a^2} \quad \text{et} \quad \vec{n}(s) = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ -\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{R}(s) = \frac{R^2+a^2}{R}$. D'où le vecteur binormal $\vec{b} = \vec{T} \wedge \vec{n}$, sa dérivée et la torsion :

$$\vec{b}(s) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ -\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}\,'(s) = \frac{a}{R^2 + a^2}\begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{R^2 + a^2}\vec{n}(s), \quad \tau(s) = -\frac{a}{R^2 + a^2}$$

(torsion constante). En particulier, si $a = 0$, la torsion est nulle, l'hélice est dégénérée (en un cercle plan) et on retrouve les résultats précédents de courbure pour un cercle dans un plan.

On pose $f(a) = -\frac{a}{R^2+a^2}$, donc $f'(a) = -\frac{R^2+a^2-a(2a)}{(R^2+a^2)^2} = \frac{a^2-R^2}{(R^2+a^2)^2}$, max ou min pour $a = \pm R$. Et $f(R) = -\frac{R}{R^2+a^2}$ min, et $f(-R) = \frac{R}{R^2+a^2}$ max. ∎

Exercice 2.9 Courbure et torsion de la courbe $\vec{r} : t \in \mathbb{R} \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{ch}t \\ a\,\mathrm{sh}t \\ a\,t \end{pmatrix}$ où $a>0$? ∎

Exercice 2.10 Soit la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\sin^3 t \\ a\cos^3 t \\ -a\cos 2t \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1- Étudier les projections orthogonales sur les plans (xOy) et (yOz).

2- Donner le trièdre de Serret–Frénet et la torsion.

3- La tangente à $\Gamma = \mathrm{Im}\vec{r}$ en $\vec{r}(t)$ coupe $(x0z)$ en $P_1(t)$ et (yOz) en $P_2(t)$. Montrer que le segment $[P_1(t), P_2(t)]$ a une longueur constante.

Réponse. 2- $\vec{r}\,'(t) = a\begin{pmatrix} 3\cos t\sin^2 t \\ -3\sin t\cos^2 t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix}$, d'où $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)|| = 5a\cos t\sin t = \frac{5}{2}a\sin(2t)$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (et sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ le changement de variable $t \to s$ est bien un difféomorphisme). D'où $s = \int_0^t \frac{5}{2}a\sin(2u)\, du = \frac{5}{4}(\cos 2t - 1)$, et on pose $\vec{q}(s)=\vec{r}(t)$. D'où $\vec{q}\,'(s)=\frac{1}{5a\cos t\sin t}\vec{r}\,'(t)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\sin t\\-3\cos t\\4\end{pmatrix}=\vec{T}(s)$. D'où $\vec{q}\,''(s)=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}\frac{1}{5a\cos t\sin t}$. D'où $\vec{n}(s)=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}$. D'où $\vec{b}(s)=\vec{T}(s)\wedge\vec{n}(s)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\sin t\\4\cos t\\3\end{pmatrix}$, d'où $\vec{b}\,'(s)=\dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\cos t\\-4\sin t\\0\end{pmatrix}$ et la torsion vaut $\tau(s)=-\dfrac{2}{5a\sin(2t)}\dfrac{4}{5}=-\dfrac{8}{25a\sin(2t)}$.

3- La tangente en $\vec{r}(t)$ a pour équation $\tilde{\vec{r}}(t+h)=\vec{r}(t)+h\,\vec{r}\,'(t)$. Le point P_1 est donné par h tel que $\tilde{r}_2(t+h)=0$ (deuxième composante nulle), i.e. pour h tel que $a\cos^3(t)-3ah\sin t\cos^2 t=0$, i.e. pour $h=\frac{1}{3}\frac{\cos t}{\sin t}$ (on suppose $t\neq 0$). Donc $P_1=\begin{pmatrix}a\sin^3 t\\a\cos^3 t\\-a\cos 2t\end{pmatrix}+\frac{a}{3}\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix}3\cos t\sin^2 t\\-3\sin t\cos^2 t\\2\sin 2t\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\sin t\\0\\-\frac{2}{3}\cos^2 t+1\end{pmatrix}$. Le point P_2 est donné par h tel que $\tilde{r}_1(t_0+h)=0$ (première composante nulle), i.e. pour h tel que $a\sin^3 t+3ah\cos t\sin^2 t=0$, i.e. pour $h=\frac{-1}{3}\frac{\sin t}{\cos t}$. Donc $P_2=\begin{pmatrix}a\sin^3 t\\a\cos^3 t\\-a\cos 2t\end{pmatrix}+\frac{-a}{3}\frac{\sin t}{\cos t}\begin{pmatrix}3\cos t\sin^2 t\\-3\sin t\cos^2 t\\2\sin 2t\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\frac{2}{3}\sin^2 t-1\end{pmatrix}$. D'où $\vec{P_1P_2}=a\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\\frac{2}{3}-2\end{pmatrix}$ de longueur $\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}$ constante. ∎

Exercice 2.11 Soit la courbe de paramétrage $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)=t^2+3t+1\\y(t)=2t^2+2t+2\\z(t)=t^2+7t+1\end{pmatrix}$, pour $t\in\mathbb{R}$. Montrer que Im$\vec{r}$ est incluse dans un plan, et que cela reste vrai tant que x, y et z sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Calculer $\vec{r}\,'(0)$ et $\vec{r}\,'(1)$, en déduire un vecteur normal au plan et une équation du plan de la forme "$ax+by+cz=d$".

Réponse. Soit $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}a_1+b_1t+c_1t^2\\a_2+b_2t+c_2t^2\\a_3+b_3t+c_3t^2\end{pmatrix}$. Alors $\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix}b_1{+}2c_1t\\b_2{+}2c_2t\\b_3{+}2c_3t\end{pmatrix}$, $\vec{r}\,''(t)=\begin{pmatrix}2c_1\\2c_2\\2c_3\end{pmatrix}$ et $\vec{r}^{(n)}(t)=\vec{0}$ pour tout $n\geq 3$. D'où le développement limité exact $\vec{r}(t)=\vec{r}(0)+t\,\vec{r}\,'(0)+\frac{t^2}{2}\,\vec{r}\,''(0)$ qui indique que, pour tout t, $\vec{r}(t)$ appartient au plan affine passant par $\vec{r}(0)$ de vecteurs générateurs $\vec{r}\,'(0)$ et $\vec{r}\,''(0)$ quand ces vecteurs sont indépendants, sinon $\vec{r}(t)$ appartient à la droite affine passant par $\vec{r}(0)$ de vecteur directeur $\vec{r}\,'(0)$ si $\vec{r}\,'(0)\neq\vec{0}$, sinon $\vec{r}(t)=\vec{r}(0)$.

Autre méthode : montrons que $\vec{r}\,'(t)$ appartient à un plan vectoriel $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, i.e. qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{r}\,'(t)\perp\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. C'est vrai si pour tout t on a $\alpha(b_1{+}2c_1t){+}\beta(b_2{+}2c_2t){+}\gamma(b_3{+}2c_3t)=0$, i.e. ssi $\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\2c_2&2c_2&2c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0$. Un tel vecteur (α,β,γ) doit donc être orthogonal à la fois à (b_1,b_2,b_3) et à (c_1,c_2,c_3) : il suffit de choisir par exemple $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$. Et on vérifie que $\vec{r}(t)-\vec{r}(0)\perp\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, i.e. que la courbe est dans le plan $\alpha(x-a_1)+\beta(y-a_2)+\gamma(z-a_3)=0$.

Ici on a $\vec{r}\,'(0)=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$ non parallèle à $\vec{r}\,'(1)=\begin{pmatrix}5\\6\\9\end{pmatrix}$, et donc un vecteur normal est donné par $\vec{r}\,'(0)\wedge\vec{r}\,'(1)=\begin{pmatrix}-24\\8\\8\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, et l'équation du plan est par exemple $-3(x-1)+(y-2)+(z-1)=0$.

Autre méthode : calculer $\vec{b}(s)$ et montrer que $\vec{b}(s)$ est un vecteur constant : méthode demandant plus de calculs. Par exemple, il faut commencer à calculer $\frac{ds}{dt}=||\vec{r}\,'(t)||=((b_1{+}2c_1t)^2+(b_2{+}2c_2t)^2+(b_3{+}2c_3t)^2)^{\frac{1}{2}}$, puis poser $\vec{q}(s)=\vec{r}(t)$. Plus simplement, on se sert de l'exercice 2.7 : ici $\vec{r}\,'(t)\wedge\vec{r}\,''(t)=2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ est un vecteur constant (indépendant de t), donc la courbe est plane. ∎

Exercice 2.12 Soit une courbe plane (dans le plan $x=R>0$) : $\vec{r}_0(t)=\begin{pmatrix}R\\f(t)\\t\end{pmatrix}$ où donc $y=y(z)$. La courbe est dessinée sur une feuille de papier incompressible, puis on enroule la feuille de manière à ce quelle soit sur un cylindre de révolution d'axe "Oz" et de base le cercle de rayon R. Montrer que cette courbe devient la courbe $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)=R\cos(\frac{f(t)}{R}),\\y(t)=R\sin(\frac{f(t)}{R}),\\z(t)=t\end{pmatrix}$. Donner le vecteur binormal et retrouver le résultat de l'hélice.

Réponse. Dans $\mathbb{R}^2$ soit un segment de droite $\vec{a}(u)=\begin{pmatrix}x(u)=R\\y(u)=g(u)\end{pmatrix}$ pour $u\in[-a,a]$ où $a>0$. On applique ce segment de droite sur les cercle de rayon R à l'aide des coordonnées polaires modifiée $\vec{p}(r,\theta)=\begin{pmatrix}r\cos\frac{\theta}{r}\\r\sin\frac{\theta}{r}\end{pmatrix}$ (ici $\frac{\theta}{r}$

est à $r>0$ fixé une coordonnée curviligne intrinsèque qui permet de “conserver la longueur”). On obtient la courbe : $\vec{b}(u)=(\vec{p}\circ\vec{a})(u)=\vec{p}(R,g(u))=\begin{pmatrix} R\cos\frac{g(u)}{R} \\ R\sin\frac{g(u)}{R}\end{pmatrix}$ pour $u\in[-a,a]$. On vérifie en particulier que $\int_0^u ||\vec{a}\,'(v)||\,dv=\int_0^u |g'(v)|\,dv$ (longueur pour $\vec{a}$) et bien égale à $\int_0^u ||\vec{b}\,'(v)||\,dv=\int_0^u |g'(v)|\,dv$ (longueur pour $\vec{b}$).

Donc le point $\begin{pmatrix} R \\ f(u)\end{pmatrix}$ devient le point $\begin{pmatrix} R\cos\frac{g(u)}{R} \\ R\sin\frac{g(u)}{R}\end{pmatrix}$. Plongé dans $\mathbb{R}^3$ où on impose $u=t$, $g=f$ et $z=t$, on obtient la courbe demandée. On vérifie que $\int_0^t ||\vec{r}_0\,'(v)||\,dv=\int_0^t\sqrt{f'(t)^2+1}\,dv=\int_0^t ||\vec{r}\,'(v)||\,dv$, i.e. que les courbes ont même longueur.

On a $\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix} -f'(t)\sin(\frac{f(t)}{R}) \\ f'(t)\cos(\frac{f(t)}{R}) \\ 1\end{pmatrix}$, d'où $||\vec{r}\,'(t)||=\sqrt{f'(t)^2+1}=s(t)$ donne une coordonnée curviligne intrinsèque, et $\vec{q}\,'(s(t))=\frac{1}{\sqrt{f'(t)^2+1}}\vec{r}\,'(t)$ donne un vecteur tangent unitaire. D'où $\vec{q}\,''(s(t))s'(t)=\frac{-f'(t)f''(t)}{(f'(t)^2+1)^{\frac{3}{2}}}\vec{r}\,'(t)+\frac{1}{\sqrt{f'(t)^2+1}}\vec{r}\,''(t)$ où $\vec{r}\,''(t)=\begin{pmatrix} -f''(t)\sin(\frac{f(t)}{R})-\frac{f'(t)^2}{R}\cos(f(t)) \\ f''(t)\cos(\frac{f(t)}{R})-\frac{f'(t)^2}{R}\sin(f(t)) \\ 0\end{pmatrix}$. Comme $\vec{q}\,'(s(t))//\vec{r}\,'(t)$, on déduit, quand $s=s(t)$:

$$(f'(t)^2+1)\,\vec{q}\,'(s)\wedge\vec{q}\,''(s)=\vec{r}\,'(t)\wedge\vec{r}\,''(t)=\begin{pmatrix} -f''(t)\cos(\frac{f(t)}{R})+\frac{f'(t)^2}{R}\sin(f(t)) \\ -f''(t)\sin(\frac{f(t)}{R})-\frac{f'(t)^2}{R}\cos(f(t)) \\ \frac{f'(t)^2}{R}\end{pmatrix}.$$

La norme au carré du membre de droite est $=2\frac{f'(t)^4}{R^2}+f''(t)^2$, d'où, quand $s=s(t)$:

$$\vec{b}(s)=\frac{1}{(f'(t)^2+1)\sqrt{2\frac{f'(t)^4}{R^2}+f''(t)^2}}\,\vec{r}\,'(t)\wedge\vec{r}\,''(t).$$

Pour l'hélice $f''=0$ et $f'=c$ constante. ▪

3 * Travail, gradient

Courbe régulière $\vec{r}:t\in[a,b]\to\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, donc $d\vec{r}=\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3\end{pmatrix}=\vec{r}\,'(t)\,dt=\begin{pmatrix} x_1'(t)dt \\ x_2'(t)dt \\ x_3'(t)dt\end{pmatrix}$. Soit $\Gamma=\mathrm{Im}(\vec{r})$ et soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^3$ t.q. $\Gamma\subset\Omega$. Soit $\vec{f}:\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}\in\Omega\to\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x})\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ une fonction continue (i.e. les $f_i\in C^0(\Omega;\mathbb{R})$). Cas simplifié : courbe dans $\mathbb{R}^2$ et $\vec{f}\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^2)$.

3.1 Travail (ou circulation)

Définition 3.1 Le travail (ou la circulation) de $\vec{f}$ le long de Γ est le réel

$$T(\vec{f},\Gamma):=\int_\Gamma \vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_\Gamma (f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+f_3\,dx_3),\tag{3.1}$$

i.e.

$$T(\vec{f},\Gamma):=\int_{t=a}^b \vec{f}(\vec{r}(t))\bullet\vec{r}\,'(t)\,dt=\int_{t=a}^b (f_1(\vec{r}(t))\,x_1'(t)+f_2(\vec{r}(t))\,x_2'(t)+f_3(\vec{r}(t))\,x_3'(t))\,dt.\tag{3.2}$$

Exemple 3.2 Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} -y \\ x\end{pmatrix}$ (champ de rotation, ou champ de spin). Calculer $T(\vec{f},\Gamma)$ où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique, puis dans le sens inverse.

Réponse. $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,2\pi[$ donne $\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t\end{pmatrix}$, donc $\vec{f}(t)\bullet\vec{r}\,'(t)=(-R\sin t)(-R\sin t)+(R\cos t)(R\cos t)=R^2$, d'où $T(\vec{f},\Gamma)=\int_{t=0}^{2\pi}R^2\,dt=2\pi R^2$. Puis (sens inverse) $\vec{q}(u)=\begin{pmatrix} R\cos u \\ -R\sin u\end{pmatrix}$ pour $u\in[0,2\pi[$ donne $\vec{q}\,'(u)=\begin{pmatrix} -R\sin u \\ -R\cos u\end{pmatrix}$, donc $\vec{f}(u)\bullet\vec{q}\,'(u)=-R^2$, d'où $T(\vec{f},\Gamma)=\int_{u=0}^{2\pi}-R^2\,dt=-2\pi R^2$. ▪

Exercice 3.3 Calculer le travail de la force $\vec{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2x-y+z \\ x+y-z^2 \\ 3x-2y+4z\end{pmatrix}$ le long du cercle horizontal de centre $(0,0,0)$ et de rayon R.

Réponse. On paramètre le cercle à l'aide de $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\vec{f} \bullet d\vec{r} = R^2[(2\cos t - \sin t + 0)(-\sin t) + (\cos t + \sin t - 0)(\cos t) + (\ldots)(0)]\,dt = [1 - \cos t \sin t]\; R^2\,dt.$$

D'où $T(\vec{f},\Gamma) = R^2 \int_{t=0}^{2\pi} (1 - \frac{1}{2}\sin(2t))\,dt = 2\pi R^2$.

Exercice 3.4 Calculer le travail du champ de vecteur $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ le long du cercle $C(0,1)$.

Exercice 3.5 Calculer le travail du champ de vecteur $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ le long de la courbe $\begin{pmatrix} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin^2 t \end{pmatrix}$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3.6 Calculer $\int_\Gamma x^3\,dy - y^3\,dx$ où Γ est le cercle $C(\vec{0}, R)$ paramétré dans le sens trigonométrique. C'est le travail de quelle force ?

Exercice 3.7 Calculer le travail de $\vec{f} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ sur :

1- la courbe $x^2 + y^2 - ax = 0$,

2- la courbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

3- la courbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$.

Réponse. 1- : courbe $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, i.e. cercle de centre $(\frac{a}{2}, 0)$ et rayon $\frac{a}{2}$; 2- : ellipse d'axes a et b ; 3- courbe $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 2$, i.e. ellipse centrée en (a,b) d'axe $\sqrt{2}a$ et $\sqrt{2}b$.

Exercice 3.8 On considère le carré Γ de sommets $[a,a], [a,-a], [-a,a], [-a,-a]$ parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer $\int_\Gamma \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}$.

Réponse. Ici $f_1(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, C^∞ pour $(x,y) \neq \vec{0}$. Segment du bas de $[-a,-a]$ à $[a,-a]$: $x(t) = -a + t$ et $y(t) = -a$ pour $t \in [-a,a]$. d'où $x'(t) = 1$ et $y'(t) = 0$;...

Exercice 3.9 Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$, et soit une courbe Γ fermée donnée. Montrer que les travaux de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$ sont égaux.

Réponse. $T(\vec{v},\Gamma) = \int_{t=a}^b 2x(t)y(t)x'(t)\,dt = \int_{t=a}^b (x^2)'(t)y(t)\,dt = -\int_{t=a}^b x^2(t)y'(t)\,dt + [x^2(t)y(t)]_a^b$. La courbe étant fermée, on a $x(a) = x(b)$ et $y(a) = y(b)$, d'où $[x^2(t)y(t)]_a^b = 0$.

Exercice 3.10 Soit Γ la lemniscate $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Calculer $T = \int_\Gamma (e^x \cos y + xy^2)\,dx - (e^x \sin y + x^2 y)\,dy$.

Réponse. L'expression en polaire d'un vecteur position générique est : $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta \end{pmatrix}$. La lemniscate est donc la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \sqrt{\cos(2t)}\cos t \\ y(t) = \sqrt{\cos(2t)}\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

1- $xy^2\,dx - x^2y\,dy = xy(y\,dx - x\,dy) = xy^3 d(\frac{x}{y}) = \cos^2(2t)\cos t \sin^3 t\, d(\frac{\cos t}{\sin t})$ avec $d(\frac{\cos t}{\sin t}) = \frac{-1}{\sin^2 t}\,dt$, d'où $xy^2\,dx - x^2y\,dy = -\cos^2(2t)\frac{1}{2}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{12}(\cos^3(2t))'\,dt$.

2- $e^{x(t)}x'(t)\cos(y(t)) - e^{x(t)}\sin(y(t))y'(t) = (e^{x(t)})'\cos(y(t)) + e^{x(t)}(\cos(y(t))' = (e^{x(t)}\cos(y(t)))'$.

D'où $T = [\frac{1}{12}(\cos^3(2t))]_0^{\frac{\pi}{4}} + [e^{x(t)}\cos(y(t))]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{12} + 1 - e$ puisque $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{4}) = 0$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Proposition 3.11 *Si $\vec{f}(\vec{r}(t)) \perp \vec{r}\,'(t)$ pour tout t (la force $\vec{f}$ est perpendiculaire au déplacement), alors le travail est nul :*

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \perp \vec{r}\,'(t) \quad \Longrightarrow \quad T(\vec{f},\Gamma) = 0.$$

Preuve. On a $\vec{f}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t) = 0$ pour tout t, donc $T(\vec{f},\Gamma) = \int_a^b 0\,dt = 0$.

Exemple 3.12 Le champ de position est défini dans $\mathbb{R}^2$ par $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer le travail de $\vec{f}$ sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R.

Réponse. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t = x(t) \\ R\sin t = y(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi[$, donc $\vec{f}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t) = (R\cos t)(-R\sin t) + (R\sin t)(R\cos t) = 0$ (le champ $\vec{f}$ est orthogonal au cercle), d'où $T(\vec{f},\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} 0\,dt = 0$.

Exercice 3.13 Calculer la circulation de $\vec{v} = \begin{pmatrix} z\cos x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$ le long de la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 2t \\ \sin t + t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$.

3.2 Dépendance du paramétrage : suivant le sens de parcours

Soit $\varphi : \left\{\begin{array}{ll} t \in [a,b] & \to [c,d] \\ [a,b] & \to u = \varphi(t) \overset{\text{noté}}{=} u(t) \end{array}\right\}$ difféomorphisme d'inverse $\varphi^{-1} : \left\{\begin{array}{ll} [c,d] & \to [a,b] \\ u & \to t = \varphi^{-1}(u) \overset{\text{noté}}{=} t(u) \end{array}\right\}$,

et soit $\vec{q} := \vec{r} \circ \varphi^{-1} : u \in [c,d] \to \begin{pmatrix} q_1(u) \\ q_2(u) \\ q_3(u) \end{pmatrix} = \vec{q}(u) := \vec{r}(t(u))$, où donc $\vec{r}(t) = \vec{q}(u(t))$.

Proposition 3.14 *Soit $f \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$. Le travail de $\vec{f}$ le long de $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ dépend du sens de parcours :*

$$(\int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{r} =) \quad \int_{t=a}^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t)\,dt = \pm \int_{u=c}^d \vec{f}(\vec{q}(u)) \bullet \vec{q}\,'(u)\,du \quad (= \pm \int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{q}), \tag{3.3}$$

avec + si φ est strictement croissant et − si φ est strictement décroissant.

Preuve. On applique la formule de changement de variable dans les intégrales avec $t = \varphi(u)$:
$\int_{t=a}^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_{u=\varphi(a)}^{\varphi(b)} \vec{f}(\vec{q}(u)) \bullet \vec{r}\,'(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$, donc
- $= \int_{u=c}^d \vec{f}(\vec{q}(u)) \bullet \vec{q}\,'(u)\,du$ si φ est croissante,
- $= \int_{u=d}^c \vec{f}(\vec{q}(u)) \bullet \vec{q}\,'(u)\,du = -\int_{u=c}^d \vec{f}(\vec{q}(u)) \bullet \vec{q}\,'((u)\,du$ si φ est décroissante, ∎

Exemple 3.15 Soit $\vec{f}(\vec{x}) = -g\vec{e}_3$ (champ de pesanteur). Pour aller du point $P_1 = (0,0,0)$ au point $P_2 = (0,0,1)$, le travail est négatif et vaut $-g$, et pour aller de P_2 à P_1, le travail est positif et vaut $+g$. ∎

Notation générique. On se donne une courbe $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. On note :

$$\Gamma_+ = \text{ la courbe parcourue dans le sens donnée par } \vec{r}\,',$$

dite parcourue dans le sens positif pour $\vec{r}$. On note Γ_- la courbe parcourue en sens inverse et donc

$$\int_{\Gamma_-} \vec{f} \bullet d\vec{r} = -\int_{\Gamma_+} \vec{f} \bullet d\vec{r}$$

Exercice 3.16 Soit $\varphi \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $a < b$, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = (b-a)t + a \\ \varphi(x(t)) = \varphi((b-a)t + a) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,1]$, et $\mathrm{Im}(\vec{r}) = \Gamma = \Gamma_+$. Montrer que cette courbe à également pour paramétrage $x \in [a,b] \to \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ (donnant le graphe de φ), et

$$\int_{\Gamma_+} f(x,y)\,dx = \int_{x=a}^b f(x,\varphi(x))\,dx. \tag{3.4}$$

Réponse. Soit $x = (b-a)t + a$ pour $t \in [0,1]$, donc $x \in [a,b]$ et $t = \frac{x-a}{b-a}$. Soit $\vec{q}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$. (3.3) donne $\int_{t=0}^1 f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt = \int_{x=a}^b f(\vec{q}(x))\,dx$, i.e. (3.4). Commentaire : on pose $g(x) = f(x,\varphi(x))$, et on a montré :
$\int_\Gamma f(x,\varphi(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx =$ "aire sous le graphe de g", le paramétrage en x allant de gauche à droite. ∎

Exercice 3.17 Suite. Soit Γ_- donnée par $\vec{q} : u \in [0,1] \to \begin{pmatrix} x(u) = (a-b)u + b \\ \varphi(x(u)) = \varphi((a-b)u + b) \end{pmatrix}$. Vérifier :

$$\int_{\Gamma_-} f(x,y)\,dx = \int_{x=b}^a f(x,\varphi(x))\,dx \quad \text{et donc } = -\int_{x=a}^b f(x,\varphi(x))\,dx = -\int_{\Gamma_+} f(x,y)\,dx.$$

Réponse.

$$\int_{t=0}^1 f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt = \int_{t=0}^1 f((a-b)t + b, \varphi((a-b)t + b)\,(a-b)\,dt = \int_{x=b}^a f(x,\varphi(x))\,(a-b)\,\frac{dx}{a-b},$$

ce qui est le résultat cherché, sachant que "$\int_b^a g(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx$". Commentaire : avec $g(x) = f(x,\varphi(x))$ on a :
$\int_{\Gamma_-} f(x,\varphi(x))\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx = -$ "aire sous le graphe de g", le paramétrage en x allant de droite à gauche. ∎

3.3 Gradient, travail et potentiel

On note $(\vec{e}_i)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} \Omega & \to \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto \varphi(\vec{x}) \end{array} \right\} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Définition 3.18 On appelle gradient de φ la fonction $\vec{\mathrm{grad}}\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (à valeurs vectorielles) définie par :

$$\vec{\mathrm{grad}}\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\vec{x})\,\vec{e}_i \overset{\text{noté}}{=} \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}).$$

Exercice 3.19 On note $\vec{x} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $r = ||\vec{r}||$ $(= \sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Pour $\varphi(x,y,z) := r$ montrer $\vec{\mathrm{grad}}\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}$ quand $r \neq 0$. Pour $\psi(\vec{r}) := \frac{1}{r}$ montrer $\vec{\mathrm{grad}}\psi(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ quand $r \neq 0$. ▪

Définition 3.20 $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dérive d'un potentiel ssi il existe $\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ t.q. $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$.
(I.e. si $\vec{f}$ a une "primitive" φ au sens : gradient de $\varphi = \vec{f}$.)

Exemple 3.21 $\vec{f} = \vec{r}$ dérive du potentiel $\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. ▪

Exercice 3.22 Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel φ qu'on calculera.

Réponse. À une constante près, on trouve $\varphi(x,y,z) = x^2y + xz^3$ (on pourra commencer par intégrer $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2$). ▪

Exercice 3.23 Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel φ qu'on calculera. ▪

Exercice 3.24 Montrer que le champ de spin $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, voir exemple 3.2, ne dérive pas d'un potentiel. Montrer que $\vec{g}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel (potentiel $\varphi(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$).

Réponse. Pour $\vec{f}$ on devrait avoir $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -y$ et donc $\varphi(x,y) = -xy + \psi(y)$, et donc $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -x + \psi'(y)$. Et on devrait avoir aussi $\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = x$, donc $x = -x + \psi'(y)$, donc $2x = \psi'(y)$, ce pour tout x et tout y, c'est absurde (prendre $x = 0$ puis $x = 1$ avec $y = y_0$ fixé). Donc $\vec{f}$ ne dérive d'aucun potentiel.

Pour $\vec{g}$: on rappelle que la dérivée de $h(z) = \arctan z$ est $h'(z) = \frac{1}{1+z^2}$. En effet $h^{-1}(t) = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ a pour dérivée $(h^{-1})'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{h'(z)}$ quand $z = \tan t$. On cherche $\varphi(x,y)$ telle que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$. La fonction $\varphi(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ convient. ▪

Proposition 3.25 *Soit $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière, $\Gamma = \mathrm{Im}\vec{r}$, $P_1 = \vec{r}(a)$ et $P_2 = \vec{r}(b)$ (les extrémités de Γ), et soit Ω un ouvert contenant Γ. Si $\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ et $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$ alors :*

$$\int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{\mathrm{grad}}\varphi \bullet d\vec{r} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \quad \big(= (\varphi\circ\vec{r})(b) - (\varphi\circ\vec{r})(a)\big), \tag{3.5}$$

donc le travail ne dépend que des extrémités P_1 et P_2 de $\vec{r}$ (ne dépend pas du chemin qui joint deux points lorsque f dérive d'un potentiel). En particulier, si Γ est fermée alors $\int_\Gamma \vec{\mathrm{grad}}\varphi \bullet d\vec{r} = 0$.

Preuve. C'est $\int_{t=a}^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a)$ avec $g := \varphi\circ\vec{r}$. En effet $g(t) = \varphi(\vec{r}(t))$ donne

$$g'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\vec{r}(t))\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\vec{r}(t))\frac{\partial y}{\partial t}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\vec{r}(t))\frac{\partial z}{\partial t}(t) = (\vec{\mathrm{grad}}\varphi)(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t),$$

donc $\int_\Gamma \vec{\mathrm{grad}}\varphi \bullet d\vec{r} = \int_{t=a}^b \vec{\mathrm{grad}}\varphi(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_{t=a}^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a) = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$. ▪

Remarque 3.26 C'est faux si $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel. E.g. avec $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y)=y \\ f_2(x,y)=0 \end{pmatrix}$: 1- prendre et le segment horizontal $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ où $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t)=t \\ y(t)=0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [-1,1]$ qui donne

$$\int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_{t=0}^1 f_1(x(t),y(t)).x'(t) + f_2(x(t),y(t)).y'(t)\,dt = \int_{t=0}^1 0.1 + 0.0\,dt = 0.$$

2- Prendre la courbe $C = \mathrm{Im}(\vec{r})$ (demi cercle) où $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,\pi]$ qui donne

$$\int_C \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_{t=0}^\pi f_1(x(t),y(t)).x'(t) + f_2(x(t),y(t)).y'(t)\,dt = \int_{t=0}^\pi (\sin t)(-\sin t) + 0\,dt = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ici $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel (on a $\mathrm{rot}(\vec{f}) = 1 \neq 0$). ∴

Exercice 3.27 Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\cos x \\ 2y\sin x + e^{2z} \\ 2ye^z \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel qu'on calculera. Puis calculer le travail de ce champ entre $(0,1,0)$ et $(\frac{\pi}{2},3,0)$. ∴

Théorème 3.28 *Cas $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un ouvert connexe (deux points quelconques dans Ω peuvent être reliés par une courbe contenue dans Ω, autrement dit, Ω est en un seul morceau). $\vec{f} \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^3)$ dérive d'un potentiel ssi le travail $\int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{r}$ ne dépend que des extrémités de Γ (pas du chemin reliant les extrémités).*

Preuve. $\Rightarrow$: OK : on a (3.5).

$\Leftarrow$: supposons que $\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}$ ne dépende que des extrémités de Γ. On se place dans $\mathbb{R}^2$ pour simplifier les écritures. Même démarche dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{x}_0 = (x_0,y_0) \in \Omega$ fixé et pour $\vec{x} = (x,y) \in \Omega$ on note $\Gamma_{\vec{x}}$ un chemin entre $\vec{x}_0$ et $\vec{x}$, et on pose :

$$\varphi(x,y) = \int_{\Gamma_{\vec{x}}} \vec{f} \bullet d\vec{r}.$$

L'indépendance supposée sur le travail de $\vec{f}$ assure que φ est une fonction ($\varphi(x,y)$ est défini de manière unique). Vérifions que $\vec{\mathrm{grad}}\varphi = \vec{f}$: Ω est ouvert donc $\exists h > 0$ (suffisamment petit) t.q. la boule ouverte $B(\vec{x},h) \subset \Omega$; soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x+th \\ y \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$, et $C = \mathrm{Im}(\vec{r})$. Donc $d\vec{r} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} dt$, donc, avec $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$,

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \int_C \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_{t=0}^1 f_1(x+th,y)\,h\,dt = h\,f_1(x+t_hh,y),$$

où $t_h \in [0,1]$ existe grâce au théorème des valeurs intermédiaires. D'où $\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} = f_1(x+t_hh,y)$, d'où avec $h \to 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. De même pour $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$. ∴

4 * Rotationnel, divergence, laplacien

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et $\vec{f} : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

4.1 Rotationnel

Définition 4.1 On appelle rotationnel de $\vec{f}$ la fonction

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Notations formelles :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}} \wedge \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} .\vec{f}, \tag{4.1}$$

où le déterminant est calculé formellement en développant par rapport à la première colonne, et où $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice représentant formellement $\vec{\mathrm{rot}}$.

Définition 4.2 Cas $\Omega \in \mathbb{R}^2$, i.e. $f_3 = 0$ et f_1 et f_2 ne dépendent que de x_1 et de x_2 (pas de x_3). Alors les deux premières composantes de $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}$ sont nulles, et la troisième est notée

$$\mathrm{rot}\vec{f}(x_1,x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Ici rot : $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \to \mathrm{rot}\vec{f} \in C^0(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs scalaires.

Exercice 4.3 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (dans le cas $(a,b,c) \neq \vec{0}$).

Réponse. Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A.\vec{x} = \begin{pmatrix} -cy+bz \\ cx-az \\ -bx+ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donc $= \vec{\omega} \wedge \vec{x}$ où $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. En particulier, $A.\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{\omega}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 0, et tout vecteur $\vec{x} = \vec{x}_\perp + \lambda\omega$ où $\vec{x}_\perp \perp \vec{\omega}$ est transformé en le vecteur $A.\vec{x} = \vec{\omega} \wedge \vec{x}_\perp$ où $\vec{x}_\perp$ est tourné de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan orthogonal à $\vec{\omega}$ (et allongé de $||\vec{\omega}[[$). ▪

Interprétation du rotationnel. Le rotationnel permet de mesurer "la vitesse de rotation" d'un objet qui tourne autour d'un axe : soit un "petit objet" dans l'espace, assimilé à un petit disque solide $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon R dans le plan (O,x,y) (orthogonal à l'axe vertical "$\vec{e}_3$", quitte à changer de base orthonormée). Un point du bord du disque est sur la trajectoire $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}$ et sa vitesse est $\vec{v}(x,y,z) = \vec{r}\,'(t) = \omega \begin{pmatrix} -R\sin\omega t \\ R\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = 2\omega\vec{e}_3,$$

et $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = 2$ fois la vitesse angulaire $\omega\vec{e}_3$ (taux de rotation).

En particulier $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = 0$ indique que le point n'est pas "entrainé" dans un mouvement circulaire. Et si $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = 0$ pour tout $\vec{x} \in \Omega$, on dit que l'écoulement est irrotationnel dans Ω : les "particules" (= "petits objets solides") ne tournent pas sur elles-mêmes : elles "glissent" les unes sur les autres.

Exemple 4.4 Montrer que dans un mouvement régulier de cisaillement, le rotationnel de la vitesse est nul. (Dans un mouvement de cisaillement, les particules glissent les unes sur les autres.)

Réponse. Cas simple $x(t) = at+b$, $a \neq 0$, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}(\vec{r}(t)) = \vec{v}(\vec{x})$ (constant) pour $\vec{x} = \vec{r}(t)$, donc $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} = \vec{0}$. Cas général, quitte à changer de base, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $x : t \in [a,b] \to x(t) \in [c,d]$ est un difféomorphisme ; donc $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}(\vec{r}(t)) = \vec{v}(\vec{x})$ pour $\vec{x} = \vec{r}(t)$, donc $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{r}\,'(t(\vec{x})) = \begin{pmatrix} f(t(x)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $t : x \in [c,d] \to t(\vec{x}) \in [a,b]$ le difféomorphisme inverse et $f = x'$. Donc $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial 0}{\partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial (f \circ t)}{\partial z}(x,0,0) - \frac{\partial 0}{\partial x}(\vec{x}) \\ \frac{\partial 0}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial (f \circ t)}{\partial y}(x,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$. ▪

Proposition 4.5 *Si $\varphi \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ (donc pour $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$) alors :*

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\varphi) = \vec{0}.$$

Donc si $\vec{f} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ est t.q. $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \neq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ pour un couple $(i,j) \in ([1,3]_{\mathbb{N}})^2$, alors $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel.

Réciproquement, si de plus Ω ouvert simplement connexe ("sans trou"), si $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = \vec{0}$ alors il existe $\varphi \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$ telle que $\vec{f} = \mathrm{grad}\varphi$.

Preuve. $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \vec{0}$ grâce au théorème de Schwarz "$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$" pour les $\varphi \in C^2$.

La réciproque est un corollaire du théorème (formule) de Stokes, voir le paragraphe 6.2. ▪

Remarque 4.6 La condition Ω simplement connexe est essentielle : prendre $\vec{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ par

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ f_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

On a $\mathrm{rot}\vec{f}(\vec{x}) = 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$ car $\frac{\partial f_2}{\partial x} f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y} f(x,y)$, mais il n'existe pas de fonction φ t.q. $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$. Sinon pour Γ le cercle $C(0,R)$ de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$ on aurait $\int_\Gamma \vec{f}\, d\Gamma = \int_\Gamma \vec{\mathrm{grad}}\varphi\, dr = 0$, car Γ est une courbe fermée, et $\int_\Gamma \vec{f}\, d\Gamma = \int_\Gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{R^2}\, dt = \frac{2\pi}{R^2}$. Et $0 = \frac{2\pi}{R^2}$ est absurde. ▪

4.2 Divergence

Définition 4.7 Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. La divergence de $\vec{f} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ est la fonction $\mathrm{div}\vec{f} \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{div}\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \tag{4.3}$$

i.e. $\mathrm{div}\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \Omega$.

Notations formelles :

$$\mathrm{div}\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}} \bullet \vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.8 *Dans le cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ et pour $\vec{f} \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ on a :*

$$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}) = 0.$$

Preuve. $\vec{F} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}$ donne

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3})}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

Et donc (avec les permutations circulaires sur les indices) :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

Interprétation de la divergence. Avec la formule de Gauss, voir § 7.2, notant Σ le bord de Ω et $\vec{n}(\vec{x})$ le vecteur unitaire normal sortant à Σ en $\vec{x} \in \Sigma$, on a :

$$\int_{\vec{x}\in\Omega} \mathrm{div}\vec{f}(\vec{x})\, d\Omega = \int_{\vec{x}\in\Sigma} \vec{f}(\vec{x}) \bullet \vec{n}(\vec{x})\, d\Sigma.$$

L'intégrale de surface mesure la quantité "qui sort de Ω" à travers Σ : c'est le flux de $\vec{f}$ à travers Σ. Donc, en prenant Ω un "petit" volume, la divergence $\mathrm{div}\vec{f}$ mesure la "dilatation" (cas $\mathrm{div}\vec{f} > 0$) ou la "contraction" (cas $\mathrm{div}\vec{f} < 0$) à laquelle est soumis ce volume. En effet, si $\vec{f}(\vec{x}) \bullet \vec{n}(\vec{x}) > 0$ sur Σ, alors $\int_{\vec{x}\in\Sigma} \vec{f}(\vec{x}) \bullet \vec{n}(\vec{x})\, d\Sigma > 0$, donc $\int_\Omega \mathrm{div}\vec{f}(\vec{x})\, d\Omega > 0$: dilatation ; et si $\vec{f} \bullet \vec{n} < 0$ sur Σ, alors $\int_{\vec{x}\in\Sigma} \vec{f}(\vec{x}) \bullet \vec{n}(\vec{x})\, d\Sigma < 0$, donc $\int_\Omega \mathrm{div}\vec{f}(\vec{x})\, d\Omega < 0$: contraction. Si $\mathrm{div}\vec{f} = 0$ dans tout un domaine Ω, on dit que le mouvement est incompressible.

4.3 Laplacien

Pour $f \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ (à valeurs scalaires), on pose :

$$\Delta f \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}).$$

Exercice 4.9 Calculer $\Delta\varphi$ pour $\varphi(x,y,z) = r$ $(= ||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

Réponse. On a en tout $\vec{r} = (x,y,z) \neq \vec{0}$: $\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}}{\partial x} = \frac12 * 2x * (x^2+y^2+z^2)^{-\frac12} = \frac{x}{r}$ d'où $\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}}{\partial x^2} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac12} + x*(-\frac12)*2x*(x^2+y^2+z^2)^{-\frac32} = \frac{1}{r^3}(r^2-x^2)$, d'où $\Delta r = \frac{1}{r^3}(3r^2-r^2) = \frac{2}{r}$. ∎

Exercice 4.10 Calculer $\Delta\varphi$ pour $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$ (où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

Réponse. On a en tout $\vec{r} = (x,y,z) \neq \vec{0}$: $\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac12}}{\partial x} = -\frac12 * 2x * (x^2+y^2+z^2)^{-\frac32} = -\frac{x}{r^3}$ d'où $\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac12}}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac32} - x*(-\frac32)*2x*(x^2+y^2+z^2)^{-\frac52} = \frac{1}{r^5}(-r^2+3x^2)$, d'où $\Delta r = 0$. ∎

Si $\vec{f} \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est une fonction à valeurs vectorielles, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, on pose : $\Delta\vec{f} = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}$.

Remarque 4.11 Interprétation du laplacien : c'est "une courbure moyenne" pour le graphe de f (représenté par une surface dans le cas $n = 2$). En effet, avec $H_f(\vec{x}) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\vec{x})]$ la matrice des dérivées secondes en $\vec{x}$ (matrice hessienne), et on a $\Delta f(\vec{x}) = \mathrm{Tr}(H_f(\vec{x}))$ = la somme des dérivées secondes (les courbures) le long des axes (dans le cas d'un $\vec{x}$ t.q. $\mathrm{grad} f_i(\vec{x}) = \vec{0}$ voir exercice 1.79). ∎

4.4 Formulaire

Montrer que, pour trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$:
$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \bullet \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{c}$.

Montrer que, les fonctions f, g, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ considérées étant suffisamment régulières :
$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \bullet \vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \bullet \vec{e}_2 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \bullet \vec{e}_3$.
$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} = \vec{e}_1 \wedge \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{e}_2 \wedge \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{e}_3 \wedge \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$.
$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}} f) = 0$.
$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}) = 0$.
$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \Delta f$.
$\mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad} g + g\,\mathrm{grad} f$.
$\mathrm{grad}(\vec{v} \bullet \vec{w}) = \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{rot}}\vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{\mathrm{rot}}\vec{v} + \mathrm{grad}\vec{v} \bullet \vec{w} + \mathrm{grad}\vec{w} \bullet \vec{v}$, où $\mathrm{grad}\vec{v} = [\frac{\partial v^i}{\partial x^j}]$ = matrice jacobienne.
$\mathrm{div}(f\vec{v}) = f\,\mathrm{div}\vec{v} + \vec{\mathrm{grad}} f \bullet \vec{v}$.
$\vec{\mathrm{rot}}(f\vec{v}) = f\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} + \vec{\mathrm{grad}} f \wedge \vec{v}$.
$\mathrm{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{\mathrm{rot}}\vec{v} \bullet \vec{w} - \vec{v} \bullet \vec{\mathrm{rot}}\vec{w}$.
$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \mathrm{div}(\vec{w})\,\vec{v} - \mathrm{div}(\vec{v})\,\vec{w} + \mathrm{grad}\vec{v} \bullet \vec{w} - \mathrm{grad}\vec{w} \bullet \vec{v}$.
$\Delta\vec{v} = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{v}) - \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}))$.

Montrer que le laplacien commute avec les autres opérateurs :
$\Delta(\mathrm{div}\vec{v}) = \mathrm{div}(\Delta\vec{v})$.
$\Delta(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}) = \vec{\mathrm{rot}}(\Delta\vec{v})$.
$\Delta(\vec{\mathrm{grad}} f) = \vec{\mathrm{grad}}(\Delta f)$.

5 Intégrales sur les surfaces

5.1 Introduction

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 5.1 Une surface (paramétrée) est une fonction

$$\vec{r} : \begin{cases} [a,b] \times [c,d] & \to \mathbb{R}^3, \\ (u,v) & \to \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{e}_1 + y(u,v)\vec{e}_2 + z(u,v)\vec{e}_3 \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{5.1}$$

Et $\mathrm{Im}(\vec{r}) = \vec{r}([a,b] \times [c,d])$ est la surface géométrique.

Ainsi une surface (paramétrée) peut être définie comme une union de courbes de $\mathbb{R}^3$: pour $v \in [c,d]$ fixé, la fonction $\vec{r}_v : \left\{ \begin{array}{ll} [a,b] & \to \mathbb{R}^3, \\ u & \mapsto \vec{r}_v(u) \overset{\text{déf}}{=} \vec{r}(u,v), \end{array} \right\}$ est une courbe de $\mathbb{R}^3$. Et lorsque v varie, les courbes $\vec{r}_v$ engendrent la surface. De même pour les fonctions, à u fixé, $\vec{r}_u : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ définies par $\vec{r}_u(v) \overset{\text{déf}}{=} \vec{r}(u,v)$.

Définition 5.2 $\vec{r}$ est une surface régulière ssi $\vec{r}$ est C^1 et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \Omega$.

Interprétation : la condition $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq 0$ impose : les vecteurs tangents $\vec{r}_v\,'(u) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v)$ et $\vec{r}_u\,'(v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)$ (resp. tangents aux courbes $\vec{r}_v$ et $\vec{r}_u$) ne sont pas colinéaires, donc les courbes géométriques $\Gamma_u = \mathrm{Im}(\vec{r}_u)$ et $\Gamma_v = \mathrm{Im}(\vec{r}_v)$ sont “bien sécantes” au point $\vec{r}(u,v)$. Dessin.

Exemple 5.3 $\vec{r}(u,v) = \vec{e}_3 + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ est le plan affine (horizontal de vecteurs directeurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$) passant par le point $\vec{r}(0,0) = \vec{e}_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ (d'altitude 1). Pour $v = v_0$ fixé, la courbe $\vec{r}_{v_0}(u) = (\vec{e}_3 + v_0\vec{e}_2) + u\vec{e}_1$ est (son image $\mathrm{Im}(\vec{r}_{v_0})$ est) “la droite parallèle au premier axe qui passe par le point $\vec{r}_{v_0}(0) = (0, v_0, 1) \in \mathbb{R}^3$”, l'union de ces droites (pour tous les v_0) donne le plan $\mathrm{Im}(\vec{r})$. ∎

Exemple 5.4 Surface paramétrée $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pour $\rho \in [0,R]$ et $\theta \in [0,2\pi]$: $\mathrm{Im}(\vec{r})$ est le disque de rayon R dans le plan horizontal d'altitude 0. Donc $\vec{r}_{\rho_0} = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ donne un cercle, et $\vec{r}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta_0 \\ \rho\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne un segment de droite. ∎

Exemple 5.5 La sphère S de rayon $R > 0$ centrée en $\vec{0}$ est (paramétrage GPS = Global Positioning System)

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta,\varphi) \in [-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \tag{5.2}$$

$\vec{r}_{\theta_0} : \left\{ \begin{array}{ll} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to \mathbb{R}^3 \\ \varphi & \to \vec{r}_{\theta_0}(\varphi) := \vec{r}(\theta_0,\varphi) \end{array} \right\}$ est le méridien à la longitude θ_0, $\vec{r}_{\varphi_0} : \left\{ \begin{array}{ll} [-\pi,\pi] & \to \mathbb{R}^3 \\ \theta & \to \vec{r}(\theta,\varphi_0) \end{array} \right\}$ est le parallèle à la latitude φ_0 (c'est l'équateur pour $\varphi_0 = 0$). ∎

Définition 5.6 On généralise les définitions précédentes en remplaçant $[a,b] \times [c,d]$ par un ouvert Ω dans $\mathbb{R}^2$ (l'espace des paramètres), et la surface est dite régulière “par morceaux” lorsque $\vec{r}$ est C^1 par morceaux et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq 0$ là où cà a un sens.

5.2 Vecteur normal à une surface en un point

Proposition 5.7 *Pour $\vec{r}$ surface régulière, le vecteur $(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})(u,v)$ est normal à la surface au point $\vec{r}(u,v)$.*

Preuve. Les vecteurs $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) = \vec{r}_v\,'(u)$ et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = \vec{r}_u\,'(v)$ sont tangents à des courbes dans la surface, donc sont dans le plan tangent à la surface, et ils ne sont pas colinéaires (la surface est régulière), donc leur produit vectoriel (non nul) est normal à la surface, cf. § 8.3. ∎

Définition 5.8 $\vec{r}$ étant une surface régulière, un vecteur normal unitaire au point $\vec{x} = \vec{r}(u,v)$ est

$$\vec{n}(\vec{x}) := \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)||}, \quad \text{et} \quad \vec{n} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} n_1 := \vec{n}.\vec{e}_1 \\ n_2 := \vec{n}.\vec{e}_2 \\ n_3 := \vec{n}.\vec{e}_3 \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

les composantes $n_i = \cos\alpha_i$ de $\vec{n}$ étant appelées les cosinus directeurs.

Et un paramétrage (u,v) étant choisi, une orientation de Σ en $\vec{x}$ est donnée par le sens de $\vec{n}(\vec{x})$, i.e. est donné par le sens de $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)$ au point $\vec{r}(u,v)$ (une face “extérieure” au point $\vec{r}(u,v)$) .

NB : l'orientation dépend du paramétrage choisi, exemple : $\vec{q}(u,v) = \vec{r}(-u,v)$ donne $\frac{\partial \vec{q}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{q}}{\partial v}(u,v) = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)$: $\vec{r}$ et $\vec{q}$ n'ont pas la même orientation.

Exemple 5.9 Pour le paramétrage GPS de la sphère, cf. (5.2),

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)=R^2\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}=R^2\cos\varphi\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

d'où :

$$\vec{n}(\vec{x})=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\frac{\vec{r}(\theta,\varphi)}{R}. \tag{5.5}$$

Le vecteur normal est parallèle au rayon vecteur, et ici est sortant de la sphère. ∎

Proposition 5.10 *Soit* $\vec{r}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z=z(x,y)\end{pmatrix}$ *une surface paramétrée sous forme explicite usuelle, où donc* $\Sigma=\mathrm{Im}\vec{r}$ *est le graphe de la fonction* $z:(x,y)\to z(x,y)$*. On a*

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}-\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\\ -\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\\ 1\end{pmatrix}\overset{\text{noté}}{=}\begin{pmatrix}-\vec{\mathrm{grad}}z(x,y)\\ 1\end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

D'où, en $\vec{x}=\vec{r}(x,y)$*,*

$$\vec{n}(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{||\vec{\mathrm{grad}}z(x,y)||^2+1}}\begin{pmatrix}-\vec{\mathrm{grad}}z(x,y)\\ 1\end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

et donc pointe toujours "vers le haut" (orientation d'une surface donnée sous forme explicite usuelle).

Preuve. On a $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\\ -\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\\ 1\end{pmatrix}$, et $1>0$. ∎

Exercice 5.11 Soit $\vec{r}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{pmatrix}$ pour $x^2+y^2\le R^2$. Calculer $\vec{n}$.

Réponse. $\vec{r}$ décrit la demi-sphère inférieur de rayon R (on a $x^2+y^2+z^2=R^2$ avec $z\le 0$). Pour $z\neq 0$ (on n'est pas sur l'équateur), $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -\frac{x}{z}\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\frac{y}{z}\end{pmatrix}$, d'où $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ de norme $\frac{R}{-z}$ (ici $z<0$). D'où $\vec{n}(\vec{x})=-\frac{1}{R}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ est la normale unitaire "entrante" (vers le haut car $z<0$). Pour $z=0$ on prolonge la valeur de $\vec{n}$ trouvée, donc $\vec{n}(x,y,0)=-\frac{1}{R}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}$ où ici $x^2+y^2=R^2$. ∎

Exercice 5.12 Soit $\vec{r}(x,y)=\begin{pmatrix}r_1(x,y)=-x\\ r_2(x,y)=-y\\ r_3(x,y)=z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{n}$.

Réponse. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -\frac{x}{z}\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -\frac{y}{z}\end{pmatrix}$ donnent $(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y})(x,y)=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}-x\\ -y\\ z\end{pmatrix}$ de norme $\frac{R}{z}$ pour $z>0$. D'où $\vec{n}(\vec{x})=\frac{1}{R}\begin{pmatrix}-x\\ -y\\ z\end{pmatrix}=\frac{\vec{r}(x,y)}{R}=$ la normale extérieure unitaire en $\vec{x}=\vec{r}(x,y)$. ∎

Exercice 5.13 Soit $\vec{r}(u,v)=(1-u-v)\vec{e}_1+u\vec{e}_2+v\vec{e}_3$. Montrer que $\mathrm{Im}(\vec{r})$ est un plan de normale $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)$.

Réponse. 1- On pose $x(u,v)=(1-u-v)$, $y(u,v)=u$, $z(u,v)=v$, donc $\vec{r}(u,v)=\begin{pmatrix}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{pmatrix}$ où donc $x+y+z=1$ ce qui est bien l'équation d'un plan ; et 2- pour tout point du plan $x+y+z=1$, il existe bien (u,v) tel que $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\vec{r}(u,v)$, à savoir $u=y$ et $v=z$; et 3- $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ est de norme $\sqrt{3}$, d'où le vecteur constant $\vec{n}$ indiqué. ∎

Exercice 5.14 Donner un paramétrage en (r, θ) (polaire) du paraboloïde $z = a(x^2 + y^2)$ pour $a \neq 0$, et déterminer le vecteur normal unitaire correspondant.

Réponse. $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = a\rho^2 \end{pmatrix}$ pour $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ par exemple. D'où, avec $\vec{x} = \vec{r}(\rho,\theta)$,

$$(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta})(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2a\rho \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -2a\rho\cos\theta \\ -2a\rho\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\rho^2+1}} \begin{pmatrix} -2a\rho\cos\theta \\ -2a\rho\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Vérification : appliquer (5.6) car $z = \rho(x^2 + y^2)$.) ▪

Exercice 5.15 Soit la surface régulière paramétrée $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ (coordonnées cartésiennes). Donner un paramétrage de cette surface pour que la normale "pointe vers le bas".

Réponse. $\vec{q}(x,y) = \begin{pmatrix} q_1(x,y) = y \\ q_2(x,y) = x \\ q_3(x,y) = z(x,y) \end{pmatrix}$: $\frac{\partial\vec{q}}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\vec{q}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$. ▪

5.3 Aire d'une surface

On procède comme pour la longueur d'une courbe qui était approchée par des segments de droite, cf. § 1.9 : ici on approche une surface par des quadrilatères plans (des "facettes").

Rappel : l'aire d'un parallélogramme de côtés $\vec{a}, \vec{b}$ vaut $||\vec{a} \wedge \vec{b}||$ (dessin). Avec $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $C \in \mathbb{R}^3$ ("sommet"), et $h, k > 0$, le parallélogramme de côté $h\vec{a}$ et $k\vec{b}$, i.e. décrit par

$$\vec{r} : \left\{ \begin{array}{rl} [0,h] \times [0,k] & \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto \vec{r}(u,v) = C + u\vec{a} + v\vec{b} \end{array} \right\}, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) = \vec{a}, \ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v) = \vec{b}, \tag{5.8}$$

Son aire vaut

$$\mathcal{A} = hk\,||\vec{a} \wedge \vec{b}|| = ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,hk. \tag{5.9}$$

D'où : Soit une surface régulière $\vec{r} : \left\{ \begin{array}{rl} \Omega & \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto \vec{r}(u,v) \end{array} \right\}$. Elle est approximée (par exemple pour le calcul par ordinateur) par une union de petits parallélogrammes où on prend $h = \delta u$ et $k = \delta v$ "petits". D'où

Définition 5.16 L'élément d'aire, ou élément de surface, pour la surface régulière $\vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ au point $\vec{r}(u,v)$ est

$$d\sigma(u,v) := ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv, \tag{5.10}$$

et l'aire de la surface est

$$\mathcal{A} := \int_{(u,v)\in\Omega} d\sigma(u,v) \overset{\text{noté}}{=} \int_\Omega d\sigma, \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{A} = \int_{(u,v)\in\Omega} ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv. \tag{5.11}$$

Exercice 5.17 Montrer : si $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, pour $(x,y) \in \Omega = [a,b] \times [c,d]$ (surface plane horizontale) alors

$$d\sigma = dxdy \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \int_{(x,y)\in\Omega} dxdy. \tag{5.12}$$

Réponse. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y) = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, d'où $||\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)|| = 1$, d'où $d\sigma(x,y) = dxdy$. ▪

Exercice 5.18 Montrer : si $\vec{r}(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (ax+by+c)\vec{e}_3 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, $(x,y) \in [0,2]^2$ (équation paramétrique du plan $z = ax + by + c$), alors son aire vaut $A = 4\sqrt{a^2+b^2+1}$.

Réponse. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \int_0^2 \int_0^2 \sqrt{a^2+b^2+1}\,dx\,dy = 4\sqrt{a^2+b^2+1}$. ▪

Exercice 5.19 Surface paramétrée en coordonnées cartésiennes : $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$: montrer

$$d\sigma = \sqrt{||\mathrm{grad}z||^2+1}\ \ dxdy = \frac{1}{n_3}\,dxdy. \tag{5.13}$$

Réponse. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y) =^{(5.6)} \begin{pmatrix} -\vec{\mathrm{grad}}z(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $\vec{n}(\vec{r}(x,y)) =^{(5.7)} \frac{1}{\sqrt{||\vec{\mathrm{grad}}z(x,y)||^2+1}} \begin{pmatrix} -\vec{\mathrm{grad}}z(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$, ▪

Exercice 5.20 (Polaire.) Soit le disque paramétré $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $0\le\rho\le R$ et $0\le\theta\le 2\pi$, et soit $D = \mathrm{Im}(\vec{r})$ (disque géométrique). Montrer que l'élément d'aire est

$$d\sigma(\rho,\theta) = \rho\,d\rho\,d\theta. \tag{5.14}$$

En déduire que l'aire du disque est πR^2.

Réponse. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $||\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\rho,\theta)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\rho,\theta)|| = \rho$. Et $\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\rho\,d\rho d\theta = \pi R^2$.

Remarque : $||\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\rho,\theta)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\rho,\theta)|| = \rho$ est le jacobien de la transformation polaire $\to$ cartésien : $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \rho$. ▪

Exercice 5.21 Soit l'intérieur de l'ellipse $E = \mathrm{Im}(\vec{r})$ où $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $0\le\rho\le 1$ et $0\le\theta\le 2\pi$. Calculer son aire.

Réponse. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} -a\rho\sin\theta \\ b\rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\rho,\theta)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\rho,\theta) = ab\rho\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où l'aire $= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} ab\rho\,d\rho d\theta = \pi ab$. ▪

Exercice 5.22 Aire d'un paraboloïde de révolution de hauteur h ?

Réponse. $z = \frac{a}{2}(x^2+y^2)$ où $a>0$ et $z\le h$: on pose $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=\frac{a}{2}\rho^2 \end{pmatrix}$ pour $\rho\in[0,\sqrt{\frac{2h}{a}}]$ et $\theta\in[0,2\pi[$. D'où $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\theta,\rho) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ a\rho \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta,\rho) = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\theta,\rho)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta,\rho) = \begin{pmatrix} -a\rho^2\cos\theta \\ -a\rho^2\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$, de norme $\rho\sqrt{a^2\rho^2+1}$. D'où aire $= \int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{\rho=0}^{\sqrt{\frac{2h}{a}}}\rho(a^2\rho^2+1)^{\frac12}\,d\rho = 2\pi[\frac{1}{3a^2}(a^2\rho^2+1)^{\frac32}]_0^{\sqrt{\frac{2h}{a}}} = \frac{2\pi}{3a^2}((2ha+1)^{\frac32}-1)$. ▪

Exercice 5.23 Montrer que l'élément d'aire d'une sphère de rayon R est (paramétrage GPS)

$$d\sigma(\theta,\varphi) = R^2\cos\varphi\,d\theta d\varphi. \tag{5.15}$$

En déduire que l'aire de la sphère est $4\pi R^2$.

Réponse. $\vec{r}(\theta,\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $\theta\in[0,2\pi[$ et $\varphi\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. (5.4) donne $||\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)|| = R^2\cos\varphi$, d'où (5.15) . D'où $\mathcal{A} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\varphi\,d\theta d\varphi = 4\pi R^2$. Remarque : $\rho^2\cos\varphi$ est le jacobien de la transformation sphérique $(\rho,\theta,\varphi)\to$ cartésien $\begin{pmatrix} x=\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ z=\rho\sin\pi \end{pmatrix}$:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \rho^2\det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \rho^2\cos\varphi.$$

D'où l'élément de volume $dV(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = (d\sigma(\theta,\varphi))(d\rho)$ au point (ρ,θ,φ). Dessin. ▪

Exercice 5.24 Retrouver l'aire de la sphère avec le paramétrage explicite $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ pour $\sqrt{x^2+y^2} \le R$.

Réponse. Ici demi-sphère supérieure. On a $\frac{\partial \vec r}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec r}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix}$, d'où $||\frac{\partial \vec r}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \vec r}{\partial y}(x,y)|| = \frac{R}{z}$. Calcul de $\int_{(x,y)\in D} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$ avec D le disque de rayon R de $\mathbb{R}^2$: on passe en polaires : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ pour $\theta \in [0,2\pi]$ et $r \in [0,R]$, et $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, cf. (5.14). D'où

$$A = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi R[-\sqrt{R^2-r^2}]_0^R = 2\pi R^2,$$

aire de la demi-sphère supérieure. Et donc l'aire de la sphère est $4\pi R^2$. ∎

Exercice 5.25 Calculer l'aire de la surface $z = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$ qui se projette sur (xOy) à l'intérieur de la courbe $\rho^2 = \cos(4\theta)$ (en coordonnées polaires) pour $\theta \in [-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}] \cup [\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8}] \cup [\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8}] \cup [\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8}]$.

Réponse. On a 4 branches d'aire égale. D'où l'aire A cherchée vaut :

$$A = 4\int_D \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy,$$

où $D = \{(x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta) : \theta \in [-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}],\ \rho \le \sqrt{\cos(4\theta)}\}$ (avec $\cos 4\theta > 0$ et donc ce domaine est réel). On passe en coordonnées polaires pour obtenir :

$$A = 4\int_{\theta=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\int_{r=0}^{\sqrt{\cos(4\theta)}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho d\theta = 4\int_{\theta=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\int_{u=0}^{\cos(4\theta)} \sqrt{1+u}\,\frac{1}{2}\,dud\theta = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}.$$

(Se servir de la formule $\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t$.) ∎

Exercice 5.26 Calculer l'aire sous une "arche" de cycloïde $\vec r(t) = \begin{pmatrix} x(t) = R(t-\sin t) \\ y(t) = R(1-\cos t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$ et $R > 0$ (limitée par l'axe des x). (Voir exercice 6.14 pour une autre solution.)

Réponse. Paramétrage sous l'arche : $\vec r(r,t) = \begin{pmatrix} x(t) = r(t-\sin t) \\ y(t) = r(1-\cos t) \end{pmatrix}$ pour $r \in [0,R]$ et $t \in [0,2\pi]$. Donc $d\sigma = |\det\begin{pmatrix} t-\sin t & r(1-\cos t) \\ 1-\cos t & r\sin t \end{pmatrix}| = |r(t\sin t + 2\cos t - 2)| = r(2 - t\sin t - 2\cos t) \ge 0$ sur $[0,2\pi]$. D'où l'aire de la cycloïde : $A = \int_{r=0}^R r\,dr \int_{t=0}^{2\pi}(2 - t\sin t - 2\cos t)\,dt = 3\pi R^2$.

Vérifions que la fonction $f(t) = 2 - t\sin t - 2\cos t$ est positive sur $[0,2\pi]$: $f'(t) = \sin t - t\cos t$, d'où $f''(t) = t\sin t$ qui est strictement positive sur $]0,\pi[$ et strictement négative $]\pi,2\pi[$; d'où f' strictement croissante sur $]0,\pi[$ et strictement décroissante sur $]\pi,2\pi[$, avec $f'(0) = 0$, $f'(\pi) > 0$, $f'(2\pi) = -2\pi < 0$, d'où f' s'annule en un unique point $t_0 \in]0,2\pi[$, et f croissante sur $[0,t_0]$ et décroissante sur $[t_0,2\pi]$, avec $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 0$, d'où $f \ge 0$. ∎

5.4 Indépendance du paramétrage

Soit :

$$\vec r_1 : \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1 & \to \mathbb{R}^3, \\ (u,v) & \mapsto \vec r_1(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ y_1(u,v) \\ z_1(u,v) \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \vec r_2 : \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_2 & \to \mathbb{R}^3, \\ (s,t) & \mapsto \vec r_2(s,t) = \begin{pmatrix} x_2(s,t) \\ y_2(s,t) \\ z_2(s,t) \end{pmatrix} \end{array} \right\} \tag{5.16}$$

deux descriptions paramétriques injectives d'une même surface géométrique $\Sigma = \mathrm{Im}(\vec r_1) = \mathrm{Im}(\vec r_2)$. Soit le changement de variables (difféomorphisme = bijectif C^1 d'inverse C^1)

$$\vec\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1 & \to \Omega_2, \\ (u,v) & \mapsto (s,t) = \vec\varphi(u,v) \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} s = \varphi_1(u,v) =^{\text{noté}} s(u,v) \\ t = \varphi_2(u,v) =^{\text{noté}} t(u,v) \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

où donc

$$\vec r_1(u,v) = \vec r_2(s,t) \quad \text{quand} \quad (s,t) = \vec\varphi(u,v), \quad \text{i.e.} \quad \vec r_1(u,v) = \vec r_2(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)),\ \forall (u,v) \in \Omega_1, \tag{5.17}$$

le jacobien de $\vec\varphi$ ne s'annulant pas : pour tout $(u,v) \in \Omega_1$,

$$J(u,v) = \det(d\vec\varphi(u,v)) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u})(u,v) \neq 0. \tag{5.18}$$

Proposition 5.27 *Si f est une fonction continue sur Σ alors*

$$\int_{\Omega_1} f(\vec r_1(u,v))\, \underbrace{||\frac{\partial \vec r_1}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec r_1}{\partial v}(u,v)||\, du\, dv}_{d\sigma_1(u,v)} = \int_{\Omega_2} f(\vec r_2(s,t))\, \underbrace{||\frac{\partial \vec r_2}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \vec r_2}{\partial t}(s,t)||\, ds\, dt}_{d\sigma_2(s,t)} \overset{\text{noté}}{=} \int_\Sigma f\, d\sigma, \tag{5.19}$$

i.e., l'intégrale calculée est indépendante du paramétrage. (L'aire de la surface $\Sigma = \mathrm{Im}\vec r$ est donnée par $f = 1$.)

Preuve. (5.17) donne $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \vec r_1}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial \vec r_2}{\partial s}(s,t)\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial \vec r_2}{\partial t}(s,t)\frac{\partial t}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \vec r_1}{\partial v} &= \frac{\partial \vec r_2}{\partial s}(s,t)\frac{\partial s}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial \vec r_2}{\partial t}(s,t)\frac{\partial t}{\partial v}(u,v) \end{aligned} \right\}$, d'où

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \vec r_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec r_1}{\partial v})(u,v) &= (\frac{\partial \vec r_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec r_2}{\partial t})(s,t)(\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v})(u,v) + (\frac{\partial \vec r_2}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec r_2}{\partial s})(s,t)(\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v})(u,v) \\ &= (\frac{\partial \vec r_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec r_2}{\partial t})(s,t) J(u,v). \end{aligned} \tag{5.20}$$

On pose $g(s,t) = f(\vec r_2(s,t))\, ||\frac{\partial \vec r_2}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \vec r_2}{\partial t}(s,t)||$, et en $\vec x = \vec r_1(u,v) = \vec r_2(s,t)$ on a $f(\vec r_2(s,t)) = f(\vec r_1(u,v))$, donc $g(s,t) = g(\vec\varphi(u,v)) =^{(5.20)} f(\vec r_1(u,v))\, ||\frac{\partial \vec r_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec r_1}{\partial v})(u,v)||\frac{1}{|J(u,v)|}$. Donc (changement de variables)

$$\int_{(s,t)\in\Omega_2} g(s,t)\, ds\, dt = \int_{(u,v)\in\Omega_1} g(\vec\varphi(u,v))\, |J(u,v)|\, du\, dv = \int_{(u,v)\in\Omega_1} f(\vec r_1(u,v))\, ||\frac{\partial \vec r_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec r_1}{\partial v})(u,v)||\, du\, dv,$$

d'où (5.19). ∎

5.5 * Gradient, surface "$z = f(x,y)$", et courbe de niveau

Rappel : une fonction, avec Ω ouvert dans $\mathbb{R}^2$,

$$f : \left\{ \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto z = f(x,y), \end{aligned} \right. \tag{5.21}$$

a pour image $\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}$. Son graphe est la surface

$$\Sigma = \Omega \times \mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\} = \bigcup_{(x,y)\in\Omega} \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{R}^3.$$

Pour $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, son gradient est la fonction vectorielle :

$$\vec{\mathrm{grad}} f : \left\{ \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \vec{\mathrm{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Le vecteur $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y)$ est dans $\mathbb{R}^2$ et on veut le représenter avec le graphe Σ de f (dans $\mathbb{R}^3$). On considère alors la fonction :

$$g : \left\{ \begin{aligned} \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) &\mapsto g(x,y,z) = z - f(x,y). \end{aligned} \right.$$

Et donc le graphe de f est $\Sigma = \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : g(x,y,z) = 0\}$. Et le gradient de g est défini par :

$$\vec{\mathrm{grad}} g : \left\{ \begin{aligned} \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} -\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Donc la projection sur le plan (x,y) de $\vec{\mathrm{grad}} g(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est $-\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dessin. De plus :

Proposition 5.28 *Le vecteur $\vec{\mathrm{grad}} g(x,y,z)$ est un vecteur orthogonal à Σ.*

Preuve. $\Sigma = \vec{r}(\Omega)$ où $\vec{r}$ est le paramétrage de la surface :

$$\vec{r} : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}^3, \\ (x,y) & \mapsto \vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \in \Omega \times \mathrm{Im}(f) \quad (\subset \mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Et $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}(x,y)$ est orthogonal à Σ, avec $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$, donc $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{grad}} g(x,y,z)$. Et donc $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \vec{\mathrm{grad}} g(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \Sigma$. ∎

Définition 5.29 Pour $c \in \mathbb{R}$, on appelle courbe de niveau de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de valeur c l'ensemble :

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = c\} \quad \subset \quad \text{plan horizontal “}z = c\text{”}.$$

Corollaire 5.30 *Si $\vec{x} = (x,y)$ est un point d'une courbe de niveau $f(x,y) = c$ tel que $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \neq 0$, alors le vecteur $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y)$ du plan vectoriel “(x,y)” est perpendiculaire à cette courbe de niveau au point (x,y,c).*

Preuve. $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \neq 0$, donc $\tilde{\vec{n}}$ n'est pas vertical, donc la courbe de niveau est bien une courbe : $\Gamma_c = \mathrm{plan}(x,y) \bigcap \Gamma$. Et elle a donc un paramétrage $\vec{q}(t) = (x(t), y(t))$ dans le plan $z = c$, où donc $c = f(x(t), y(t)) = f(\vec{q}(t))$. Donc $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{q}(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{q}(t))\, y'(t) = \vec{\mathrm{grad}} f(\vec{q}(t)) \bullet \vec{q}\,'(t)$, donc $\vec{\mathrm{grad}} f(\vec{q}(t)) \perp \vec{q}\,'(t)$. ∎

5.6 * Surface orientable

Définition 5.31 Une surface régulière $\vec{r} : (u,v) \in [a,b] \times [c,d] \to \vec{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ est orientable ssi quelle que soit la courbe régulière fermée simple $\vec{q} : t \in [0,1] \to \vec{q}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ (tracée sur Σ), où donc $\vec{q}(1) = \vec{q}(0) =^{\text{noté}} P$, on a une normale unique, i.e. $\vec{n}(\vec{q}(0)) = \vec{n}(\vec{q}(1))$ $(= \vec{n}(P))$.

(Contre exemple : le ruban de Möbius.)

Exemple 5.32 $\vec{r} : (\theta, \varphi) \to \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (sphère de rayon R), la normale en un point $\vec{x} = \vec{r}(\theta,\varphi)$ est $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{r}(\theta,\varphi)}{R}$ (normale sortante). Et toute courbe régulière quelconque fermée simple $\vec{q}$ sur cette sphère donne le vecteur normal sortant : $\vec{n}(\vec{q}(0)) = \vec{n}(\vec{q}(1))$.

Il est en de même pour toute surface homéomorphe à une sphère (i.e. toute surface qui peut être obtenue par “déformation bicontinue” d'une sphère). ∎

Dans la suite, lorsqu'on utilisera $\vec{n}$ on supposera implicitement la surface orientable. Ainsi en chaque point, une paramétrisation $\vec{r}$ étant choisie, il n'y aura pas ambiguïté sur l'orientation du vecteur normal unitaire.

Exemple 5.33 Contre-exemple : le ruban de Möbius n'est pas orientable. Il a pour paramétrisation (par exemple), pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-1, 1]$:

$$\vec{r}(\theta, t) = 2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + t(\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ 2\sin\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ t\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

(Pour l'obtenir : prendre le ruban de papier cylindrique $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ t \end{pmatrix}$, le couper et le recoller après avoir fait faire un demi-tour à l'un des côtés. Quitte à la prolonger pour $\theta \in \mathbb{R}$, à t fixé, la courbe obtenue est périodique de période 4π ; on pourra dessiner $\vec{r}(-\pi, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}(\pi, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, points “côté gauche” du ruban situé sur la même courbe $\vec r_{t=1}$ après un tour.) Et on prend la courbe fermée sur $\vec r([0,2\pi]\times[-1,1])$ définie par $\vec q(\theta)=\vec r(\theta,0)=2\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$. Il est immédiat que $\vec q(0)=\vec q(2\pi)=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=^{\text{noté}} P$. Et on a :

$$\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}(\theta,t)=\begin{pmatrix}-2\sin\theta-\frac t2\sin\frac\theta2\cos\theta-t\cos\frac\theta2\sin\theta\\ 2\cos\theta-\frac t2\sin\frac\theta2\sin\theta+t\cos\frac\theta2\cos\theta\\ t\cos\frac\theta2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\vec r}{\partial t}(\theta,t)=\begin{pmatrix}\cos\frac\theta2\cos\theta\\ \cos\frac\theta2\sin\theta\\ \sin\frac\theta2\end{pmatrix}.$$

D'où $(\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial t})(0,0)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $(\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial t})(2\pi,0)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. Et donc la normale a changé de sens. La surface n'est pas orientable (elle n'a qu'une seule face). ▪

5.7 * Orientation du bord d'une surface

Soit I un intervalle de $\mathbb R$ et Ω un ouvert de $\mathbb R^2$. On se donne une courbe régulière simple dans $\mathbb R^3$:

$$\vec q : t\in I\to\vec q(t)\in\mathbb R^3 \tag{5.22}$$

d'image $\Gamma=\mathrm{Im}(\vec q)$ qui est le bord d'une surface orientable $\Sigma=\vec r(\overline\Omega)$: pour $t\in I$,

$$\vec q(t)=\vec r(u(t),v(t)). \tag{5.23}$$

Et soit $\vec n(u,v)$ le vecteur normal unitaire donné par (5.3) en un point $\vec r(u,v)$.

Définition 5.34 Règle du tire-bouchon dans $\mathbb R^3$ = règle des trois doigts de la main droite.

On dit que l'orientation du bord de la surface Ω est positive si la courbe $\vec q$ et la surface $\vec r$ satisfont à la règle du tire-bouchon, i.e. si, en tout point $\vec q(t)=\vec r(u(t),v(t))$ du bord de la surface, le vecteur $\vec T(t)=\vec n(u(t),v(t))\wedge\vec q\,'(t)$ pointe vers l'intérieur de la surface.

I.e., si $\vec q\,'(t)\wedge\vec T(t)$ est parallèle à $\vec n(u(t),v(t))$ et de même sens, pour tout t : quand on tourne dans le sens trigonométrique tangentiellement à la surface, i.e. de $\vec q\,'$ vers $\vec T$, alors on visse, i.e. on avance dans le sens de $\vec n$, et on dévisse sinon.

Calcul. Soit une surface régulière $\vec r:(u,v)\in[a,b]\times[c,d]\to\vec r(u,v)\in\mathbb R^3$. Soit un paramétrage $\vec q(t)=\vec r(u(t),v(t))$ régulier de Γ. On a donc

$$\vec q\,'(t)=\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u(t),v(t))u'(t)+\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u(t),v(t))v'(t). \tag{5.24}$$

Si $v'(t)\neq0$ alors $\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u(t),v(t))$ n'est pas parallèle à $\vec q\,'(t)$ et on prend pour vecteur tangent $\vec T=\pm\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u(t),v(t))$, le signe $\pm$ étant déterminé par le sens de $\vec T$ qui doit être orienté vers l'intérieur de cette surface. Si $v'(t)=0$ alors on travaille avec $\pm\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u(t),v(t))$.

Exemple 5.35 Demi-sphère supérieure de $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq0$, paramétrage $\vec r(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}R\cos\theta\cos\varphi\\ R\sin\theta\cos\varphi\\ R\sin\varphi\end{pmatrix}$ avec $\theta\in[0,2\pi]$ et $\varphi\in[0,\frac\pi2]$. Le bord est donné par $\varphi=0$ (équateur), et donc $\vec q(t)=\vec r(\theta{=}t,0)=\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ 0\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,2\pi]$. Le vecteur $\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}(t,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ n'est pas parallèle à $\vec q\,'(t)=\begin{pmatrix}-R\sin t\\ R\cos t\\ 0\end{pmatrix}$. De plus $\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}(t,0)$ à sa dernière composante ≥0, donc ce vecteur est orienté vers la demi-sphère supérieure.

N.B. : calcul complet : le développement limité au premier ordre (donnant l'équation du plan tangent au point $\vec q(t)=\vec r(t,0)$) est $\vec r(t{+}h,k)=\vec r(t,0)+h\,\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}(t,0)+k\,\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}(t,0)+o(||(h,k)||)=\vec q(t)+h\,\vec q\,'(t)+k\,\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}(t,0)+o(||(h,k)||)$ et n'est considéré que pour $k>0$ puisque n'est considéré que pour un point de la demi-sphère supérieur ; et donc un vecteur pointant vers la surface est $\vec T=+\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}(t,0)$ au point $\vec q(t)$. ▪

5.8 Élément d'aire vectoriel et flux à travers une surface

5.8.1 Définition

Surface (paramétrée) régulière orientée $\vec r:\Omega=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb R^3$, on note $\Sigma=\mathrm{Im}(\vec r)$ la surface géométrique. Donc avec $\vec x=\vec r(u,v)$, cf. (5.3),

$$\vec n(\vec x)=\frac{\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)||} \tag{5.25}$$

est un vecteur normal unitaire en $\vec{x}$ qui détermine l'orientation choisie de Σ.

Définition 5.36 L'élément d'aire vectoriel ou élément de surface vectoriel au point $\vec{x}=\vec{r}(u,v)$ est

$$\vec{d\sigma}(u,v) := \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)\,dudv, \quad \text{i.e.} \quad \vec{d\sigma}(u,v) := \vec{n}(\vec{x})\,d\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} n_1(\vec{x})d\sigma(u,v) \\ n_2(\vec{x})d\sigma(u,v) \\ n_3(\vec{x})d\sigma(u,v) \end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

où $d\sigma(u,v)=||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv$, l'élément d'aire (scalaire) cf. (5.10). Et on note abusivement $\vec{d\sigma}=\vec{n}\,d\sigma$.

Définition 5.37 Pour $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ (un "champ de vecteurs"), le flux de $\vec{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ à travers Σ est

$$F(\vec{f},\Sigma)=\int_\Sigma \vec{f}\bullet\vec{d\sigma}=\int_\Sigma \vec{f}\bullet\vec{n}\,d\sigma=\sum_{i=1}^3\int_\Sigma f_in_i\,d\sigma=\int_{(u,v)\in\Omega}\vec{f}(\vec{r}(u,v))\bullet\vec{n}(\vec{r}(u,v))\,d\sigma(u,v). \tag{5.27}$$

Exemple 5.38 Soit Σ la sphère $S(\vec{0},R)$ et $\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix}$. Calculer $\int_\Sigma \vec{f}\bullet\vec{d\sigma}$, pour $k=0,1,2$.

Réponse. Calcul générique pour $k\in\mathbb{N}$ ($k=1$ en cours). Paramétrage $\vec{r}(\theta,\varphi)=R\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ de la sphère, $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, cf. (5.2). En $\vec{x}=\vec{r}(\theta,\varphi)$ on a $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{r}(\theta,\varphi))=\begin{pmatrix} R^k\cos^k\theta\cos^k\varphi \\ R^k\sin^k\theta\cos^k\varphi \\ R^k\sin^k\varphi \end{pmatrix}$ et, cf. (5.4) :

$$\vec{d\sigma}(\theta,\varphi)=R^2\cos\varphi\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}d\theta d\varphi, \quad d\sigma(\theta,\varphi)=R^2\cos\varphi\,d\theta d\varphi, \quad \vec{n}(\vec{x})=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma} &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R^k\cos^{k+1}\theta\cos^{k+1}\varphi+R^k\sin^{k+1}\theta\cos^{k+1}\varphi+R^k\sin^{k+1}\varphi)R^2\cos\varphi\,d\theta d\varphi \\ &= R^{k+2}((\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\,d\theta+\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^{k+1}\theta\,d\theta)\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+2}\varphi\,d\varphi+2\pi\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+1}\varphi\cos\varphi\,d\varphi).\end{aligned}$$

Dernier terme :

$$\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+1}\varphi\cos\varphi\,d\varphi=[\frac{1}{k+2}\sin^{k+2}\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix} 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ \frac{2}{k+2} \text{ si } k \text{ impair} \end{pmatrix}.$$

Premier terme : si k est pair, alors $\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\,d\theta=0=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^{k+1}\theta\,d\theta$, et donc $\int_\Sigma\vec{f}.\vec{d\sigma}=0$.

Et si k est impair, alors $\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\,d\theta=2\pi\,\frac{k(k-1)...1}{(k+1)(k-1)...2}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^{k+1}\theta\,d\theta$, et $\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+2}\varphi\,d\varphi=2\,\frac{(k+1)(k-1)...2}{(k+2)(k)...3}$, voir annexe 10, d'où :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma\vec{f}\bullet\vec{d\sigma} &= R^{2+k}(8\pi\,\frac{k(k-1)...1}{(k+1)(k-1)...2}\,\frac{(k+1)(k-1)...2}{(k+2)(k)...3}+2\pi\,\frac{2}{k+2}) \\ &= R^{2+k}(8\pi\frac{1}{k+2}+2\pi\,\frac{2}{k+2})\end{aligned}$$

Donc :

$$k \text{ pair} : \int_\Sigma\vec{f}\bullet\vec{d\sigma}=0, \qquad k \text{ impair} : \int_\Sigma\vec{f}\bullet\vec{d\sigma}=\frac{12}{k+2}\pi R^{2+k}.$$

Pour $k=0$, on a $S_0=\int_\Sigma\vec{f}.\vec{n}\,d\sigma=0$, ce qu'on vérifie car $S_0=\iint(n_1+n_2+n_3)\,R^2\cos\varphi\,d\theta d\varphi=R^2(\int_{\theta=0}^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi+2\pi\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin2\varphi\,d\varphi)=R^2(0+0)=0$.

Pour $k=1$, on a $S_1=\int_\Sigma\vec{f}.\vec{n}\,d\sigma=4\pi R^3$. Vérification : $S_1=\iint(xn_1(\vec{x})+yn_2(\vec{x})+zn_3(\vec{x}))\,R^2\cos\varphi\,d\theta d\varphi=R^3(\int_{\theta=0}^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi+2\pi\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi)=R^3(2\pi\frac{4}{3}+2\pi[\frac{1}{3}\sin^3\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{3}\pi R^3=4\pi R^3$. ▪

Exemple 5.39 Soit Σ l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et $\vec{f}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{r}$. Calculer $\int_\Sigma\vec{f}.\vec{d\sigma}$.

Réponse. $\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\cos\varphi \\ z = c\sin\varphi \end{pmatrix}$.

$$(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi})(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -a\cos\theta\sin\varphi \\ -b\sin\theta\sin\varphi \\ c\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc\cos\theta\cos^2\varphi \\ ac\sin\theta\cos^2\varphi \\ ab\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

D'où calcul similaire au précédent.

Exemple 5.40 Soit Σ la partie de paraboloïde $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ limité par $z \le 1$ et $\vec{f} = \frac{1}{x}\vec{e}_1$. Calculer $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma}$

5.8.2 Cas d'une surface sous forme explicite

Rappel : si localement la surface est paramétrée par (x,y), i.e si elle est donnée par $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ où z est une fonction C^1, alors $\vec{d\sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} -(\vec{\text{grad}} z)(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} dxdy$, donc $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{||\vec{\text{grad}} z||^2+1}} \begin{pmatrix} -(\vec{\text{grad}} z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, et

$$d\sigma(x,y) = \sqrt{||\vec{\text{grad}} z(x,y)||^2+1}\; dxdy = \frac{1}{n_3(x,y)}\, dxdy. \tag{5.29}$$

(Dessin : $n_3 = \vec{n}.\vec{e}_3 = \cos\gamma$ est le "cosinus directeur", et $dxdy = \vec{d\sigma}.\vec{e}_3$ = la projection de $\vec{d\sigma}$ sur le plan (x,y)).

Plus généralement si on a localement (au voisinage d'un point (x,y,z)) des paramétrages explicites en les paramètres (x,y), ou (y,z) ou (x,z), on obtient respectivement :

$$\begin{cases} dxdy = n_3\, d\sigma, \\ dydz = n_1\, d\sigma, \\ dzdx = n_2\, d\sigma. \end{cases} \tag{5.30}$$

Exemple 5.41 Soit Σ la sphère $S(\vec{0},R)$, et soit $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix}$. Calculer $\int_\Sigma \vec{f} \bullet \vec{d\sigma}$ (flux de $\vec{f}$ à travers Σ), pour $k \in \mathbb{N}$, à l'aide de (5.30) (beaucoup plus rapide que la démarche de l'exercice 5.38).

Réponse. Σ_+ = demi-sphères supérieure, Σ_- = demi-sphères inférieure.

On a $\int_\Sigma f_3 n_3\, d\sigma = \int_{\Sigma_+} f_3\, dxdy + \int_{\Sigma_-} f_3(x,y,z)\,(-)dxdy$ (signe pour orientation de la normale qui pointe vers l'extérieure pour le flux). Pour Σ_+ donné par $z(x,y) = (R^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ où $x^2+y^2 \le R^2$, on a :

$$\int_{\Sigma_+} f_3 n_3\, d\sigma = \int_{\Sigma_+} z^k\, dxdy = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} (R^2-r^2)^{\frac{k}{2}}\, r dr d\theta = \frac{-2\pi}{k+2}[(R^2-r^2)^{\frac{k+2}{2}}]_0^R = \frac{2\pi}{k+2}R^{k+2}.$$

Pour Σ_-, $z = -(R^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$, et donc :

$$k \text{ pair : } z^k = (R^2-x^2-y^2)^{\frac{k}{2}}, \qquad \int_{\Sigma_-} z^k\, dxdy = \frac{2\pi}{k+2}R^{k+2},$$
$$k \text{ impair : } z^k = -(R^2-x^2-y^2)^{\frac{k}{2}}, \qquad \int_{\Sigma_-} z^k\, dxdy = -\frac{2\pi}{k+2}R^{k+2},$$

Idem pour les autres intégrales. D'où :

$$k \text{ pair : } \int_\Sigma z^k\, dxdy = 0,$$
$$k \text{ impair : } \int_\Sigma z^k\, dxdy = \frac{4\pi}{k+2}R^{k+2}.$$

Finalement

$$\int_\Sigma \vec{f} \bullet \vec{n}\, d\sigma = \begin{cases} 0 \quad \text{si } k \text{ pair}, \\ \dfrac{12}{k+2}\pi R^{k+2} \quad \text{si } k \text{ impair}. \end{cases}$$

On retrouve le résultat précédent.

6 * Formules de Green–Riemann et de Stokes ("courbe – surface")

6.1 Cas $\mathbb{R}^2$: formule de Green–Riemann

Pour $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ on a $\int_a^b \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(b) - f(a)$: la valeur de l'intégrale d'une dérivée ne dépend que des valeurs au bord. On généralise ce résultat pour $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$: une intégrale sur une surface régulière d'une dérivée partielle peut être ramenée à une intégrale sur le bord régulier de la surface.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère une surface régulière simplement connexe Ω décrite par un paramétrage $\vec{r} : \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\Omega} := [a,b] \times [c,d] & \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \to \vec{x} = \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x = r_1(u,v) \\ y = r_2(u,v) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$, où donc $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ est la représentation cartésienne, et u et v sont les paramètres. On note $d\sigma = dxdy = |J(u,v)|dudv$ l'élément d'aire, où donc $|J(u,v)| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$, soit $|J(u,v)| = ||(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})(u,v)||$ si on se plonge dans $\mathbb{R}^3$ pour calculer le produit vectoriel.

Et le bord Γ de Ω est décrit par une courbe régulière simple et fermée

$$\vec{q} : \left\{ \begin{array}{ll} [t_0, T] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to \vec{x}(t) = \vec{q}(t) := \vec{r}(u(t), v(t)) \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} x(t) = r_1(u(t), v(t)) \\ y(t) = r_2(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \tag{6.1}$$

où donc $\vec{q}(t_0) = \vec{q}(T)$, et $u, v : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières, et $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées cartésiennes le long de Γ. En particulier $\vec{q}\,'(t) =^{\text{noté}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. On suppose de plus que $\vec{q}$ décrit Γ dans le sens trigonométrique : quand on se déplace dans le sens de $\vec{q}\,'(t)$ la surface "est à gauche".

Exemple 6.1 Disque $D(\vec{0}, R)$ paramétré par $\vec{r}(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ pour $(r,t) \in [0,R] \times [0, 2\pi]$, donc $d\sigma = dxdy = rdrdt$. Bord paramétré par $\vec{q}(t) = \vec{r}(R,t) = \begin{pmatrix} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{pmatrix}$ donc $\vec{q}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \end{pmatrix}$, paramétrage qui donne bien le sens trigonométrique. ∴

Théorème 6.2 *Soit* $g : \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\Omega} & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to g(x,y) \end{array} \right\} \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R})$. Γ *étant paramétrée dans le sens trigonométrique, on a, en intégrant en* x,

$$\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}\, d\sigma = \int_\Gamma g\, dy \quad \textit{(Formule de Green–Riemann)}, \tag{6.2}$$

au sens $\iint_{(x,y)\in\Omega} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy = \int_{t=t_0}^T g(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$. *Et en intégrant en* y *on a*

$$\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}\, d\sigma = -\int_\Gamma g\, dx \quad \textit{(Formule de Green–Riemann)}, \tag{6.3}$$

au sens $\iint_{(x,y)\in\Omega} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = -\int_{t=t_0}^T g(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$.

Preuve. Remarque : avec l'exemple 6.1 vérifions (6.2) avec $g(x,y) = x$ (permet de comprendre les notations) ; d'une part $\int_\Gamma g\, dy = \int_\Gamma x\, dy = \int_{t=0}^{2\pi} x(t)y'(t)\, dt = \int_{t=0}^{2\pi} R\cos t R\cos t\, dt = R^2\pi$, et d'autre part $\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \iint_\Omega dxdy = \int_{r=0}^R \int_{t=0}^{2\pi} rdrdt = R^2\pi$: OK. Et avec $g(x,y) = y$, d'une part $\int_\Gamma g\, dx = \int_\Gamma y\, dx = \int_{t=0}^{2\pi} y(t)x'(t)\, dt = \int_{t=0}^{2\pi} R\sin t(-R\sin t)\, dt = -R^2\pi$, et d'autre part $\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial y} dxdy = \iint_\Omega dxdy = \int_{r=0}^R \int_{t=0}^{2\pi} rdrdt = R^2\pi$: OK.

Montrons (6.3). On suppose d'abord que Γ peut être décrit par la réunion de deux fonctions "explicites", i.e.

$$\exists \varphi, \psi \in C^1([a,b]),\ \varphi \le \psi,\ \varphi(a) = \psi(a),\ \varphi(b) = \psi(b),\ \text{t.q. } \Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi(x), \psi(x)]\},$$

où donc Ω est compris entre les graphes de φ et de ψ et Γ n'a pas de bord "vertical". Dessin. On a

$$\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=a}^b \Big(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_{x=a}^b \Big(g(x, \psi(x)) - g(x, \varphi(x)) \Big)\, dx. \tag{6.4}$$

Et graph(φ) est paramétré par $\vec{q}_\varphi : t \in [a,b] \to \begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = \varphi(t) \end{pmatrix}$ avec $\vec{q}_\varphi{}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ et $1 > 0$, donc courbe parcourue vers la droite, donc Ω est à gauche, donc $\vec{q}_\varphi$ est dans le sens trigonométrique ; et graph(ψ) est paramétré par $\vec{q}_\psi : t \in [a,b] \to \begin{pmatrix} x(t)=t \\ y(t)=\psi(t) \end{pmatrix}$ avec $\vec{q}_\psi\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$ et $1>0$, donc courbe parcourue vers la droite, donc $\vec{q}_\psi$ est parcourue dans le sens inverse. Donc

$$\int_\Gamma g\,dx = \int_{x=a}^b g(x,\varphi(x))\,dx - \int_{x=a}^b g(x,\psi(x))\,dx \quad \text{donc} \quad \overset{(6.4)}{=} -\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy, \tag{6.5}$$

i.e. (6.3).

Les cas où il y a un bord vertical est facile : le long d'un tel bord, "$dx = x'(t)dt = 0\,dt = 0$", car la fonction $x(t)=x$ est constante en t, et l'intégrale sur Γ est inchangée.

Si Ω est une union finie de domaine comme ci-dessus, dessin, l'intégrale est la somme, d'où le résultat.

Cas général : hors programme.

Même démarche pour le résultat (6.2). ∎

Corollaire 6.3 *Toujours avec Γ paramétré dans le sens trigonométrique, si $g,h : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions $C^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\,dx\,dy = \int_\Gamma g\,dx + h\,dy \quad \text{(formule de Green–Riemann)}, \tag{6.6}$$

au sens $\iint_{(x,y)\in\Omega} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{t=a}^b (g(x(t),y(t))\,x'(t) + h(x(t),y(t))\,y'(t))\,dt$. Et avec $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 = g \\ f_2 = h \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, ayant $\mathrm{rot}\vec{f} =^{(4.2)} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$, (6.6) s'écrit

$$\int_\Omega \mathrm{rot}(\vec{f})\,dxdy = \int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{\ell} \quad \text{(formule de Stokes ou formule du rotationnel)}, \tag{6.7}$$

où $d\vec{\ell} = \vec{r}\,'(t)\,dt = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t)\,dt \\ y'(t)\,dt \end{pmatrix} = d\vec{s}$ l'élément vectoriel de longueur : le travail effectué par une "force" $\vec{f}$ le long du bord Γ parcouru dans le sens trigonométrique est égal à l'intégrale de son rotationnel dans Ω.

Et avec $\vec{n}(\vec{x})$ le vecteur normal unitaire sortant en $\vec{x} \in \Gamma$, (6.7) s'écrit aussi (circulation le long de Γ) :

$$\int_\Omega \mathrm{rot}(\vec{f})\,dxdy = \int_\Gamma \vec{n} \wedge \vec{f}\,d\ell, \tag{6.8}$$

où $d\ell = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = ds$ est l'élément de longueur, et où $\vec{n} \wedge \vec{f} = n_1 f_2 - n_2 f_1$ (= la troisième composante de $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ où on s'est plongé dans $\mathbb{R}^3$).

Preuve. (6.6) n'est que la somme des 2 résultats précédents, et (6.7) est une réécriture de (6.6).

Puis notant abusivement $\vec{f}(\vec{r}(t)) =^{\text{noté}} \vec{f}$, $\vec{n}(\vec{r}(t)) =^{\text{noté}} \vec{n}$ et $\vec{r}\,'(t) =^{\text{noté}} \vec{r}\,'$, on a $\vec{f} \bullet \vec{r}\,' = f_1 x' + f_2 y' = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \sqrt{x'^2+y'^2}\frac{1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \sqrt{x'^2+y'^2}\,\vec{n} \wedge \vec{f} = ||\vec{r}\,'||\,\vec{n} \wedge \vec{f}$ car $\vec{n} = \frac{1}{||\vec{r}\,'||}\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$ est orthonormal sortant au point $\vec{r}(t)$, cf. (1.9)-(1.10), donc $\vec{f} \bullet \vec{r}\,'\,dt = \vec{n} \wedge \vec{f}\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \vec{f} \bullet d\vec{\ell}$. ∎

Corollaire 6.4 *Si $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ et $F(\vec{f},\Gamma) = \int_\Gamma \vec{f} \bullet \vec{n}\,ds$ son flux à travers Γ ; alors*

$$(F(\vec{f},\Gamma) =) \quad \int_\Gamma \vec{f} \bullet \vec{n}\,d\ell = \int_\Omega \mathrm{div}(\vec{f})\,dxdy \quad \text{(formule de Green = formule de la divergence)}. \tag{6.9}$$

Preuve. Pour simplifier on prend un paramétrage intrinsèque $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ de Γ (pour $s \in [a,b]$) dans le sens trigonométrique, où donc $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ est un vecteur tangent unitaire et $\vec{n}(\vec{q}(s)) = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$ est le vecteur unitaire normal sortant à Γ au point $\vec{x}(s)$. Et $\vec{f} \bullet \vec{n} = f_1 n_1 + f_2 n_2 = f_1 y' - f_2 x'$, donc $\int_\Gamma \vec{f} \bullet \vec{n}\,ds = \int_\Gamma (f_1\,dy - f_2\,dx)$, donc $=^{(6.6)} \int_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dxdy$ (Green-Riemann), i.e. (6.9). ∎

Corollaire 6.5 *Aire d'un domaine Ω :*

$$Aire(\Omega) := \int_\Omega dx\,dy = \int_\Gamma x\,dy = -\int_\Gamma y\,dx = \frac{1}{2}(\int_\Gamma x\,dy - y\,dx).$$

Preuve. On pose $g(x,y)=x$ et $h(x,y)=y$ dans(6.2)-(6.3), puis on fait la demi-somme. ∎

Exemple 6.6 Disque Ω : $\vec{r}(r,t)=\begin{pmatrix} x(r,t)=r\cos t \\ y(r,t)=r\sin t\end{pmatrix}$ où $r\in[0,R]$ et $t\in[0,2\pi]$:

$$Aire(\Omega)=\int_\Gamma x\,dy=\int_{t=0}^{2\pi} R\cos(t)\,(R\cos(t))\,dt=\frac{R^2}{2}\int_{t=0}^{2\pi}[1+\cos(2t)]\,dt=\pi R^2,$$

$=\frac12\int_\Gamma x\,dy-y\,dx=\frac12 R^2\int_{t=0}^{2\pi}\cos^2(t)+\sin^2(t)\,dt=\pi R^2.$ ∎

Exemple 6.7 Ellipse Ω : $\vec{r}(r,t)=\begin{pmatrix} x(r,t)=ra\cos t \\ y(r,t)=rb\sin t\end{pmatrix}$ où $r\in[0,1]$ et $t\in[0,2\pi]$. Bord Γ : $t\in[0,2\pi]\to\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t\end{pmatrix}$. D'où

$$Aire(\Omega)=\int_\Gamma x\,dy=\int_{t=0}^{2\pi} a\cos(t)\,(b\cos(t))\,dt=\frac{ab}{2}\int_{t=0}^{2\pi}[1+\cos(2t)]\,dt=\pi ab,$$

$=\frac12\int_\Gamma x\,dy-y\,dx=\frac12 ab\int_{t=0}^{2\pi}\cos^2(t)+\sin^2(t)\,dt=\pi ab.$ ∎

Exercice 6.8 R rectangle de sommet $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,3)$, $(0,3)$ (faire un dessin). Calculer le travail de $\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} y-x^2e^x \\ \cos(y^2)-x\end{pmatrix}$ le long du bord de R.

Réponse. On peut toujours essayer de calculer directement $\int_{\partial R}\vec{f}.d\vec{r}$... Plus simplement, on a $\mathrm{rot}\vec{f}=-2$ et donc $\int_{\partial R}\vec{f}.d\vec{r}=\int_R \mathrm{rot}\vec{f}.dxdy=-2\int_R dxdy=-4.$ ∎

Exercice 6.9 Calculer $I=\int_\Gamma xy(x\,dx+y\,dy)$ où Γ est "$x^2+y^2-2ay=0$", à l'aide de Green–Riemann.

Réponse. Γ est le cercle $x^2+(y-a)^2=a^2$. Équation paramétrique $\vec{q}(\theta)=\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a+a\sin\theta\end{pmatrix}$ pour $\theta\in[0,2\pi]$.

Le long de Γ, par dérivation on a $2x\,dx+2y\,dy-2a\,dy=0$ (le vérifier sur un paramétrage du cercle Γ). Donc $x\,dx+y\,dy=a\,dy$, et on doit calculer $I=\int_\Gamma xy(a\,dy)$.

1- calcul direct : $I=\int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(a+a\sin\theta)(a^2\cos\theta\,d\theta)=a^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta+a^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=a^4\int_0^{2\pi}\frac12(\cos(2\theta)+1)\,d\theta+a^4[-\frac13\cos^3\theta]_0^{2\pi}=\pi a^4$.

2- Par Green–Riemann : on a $\frac{\partial xy}{\partial x}=y$, d'où $I=a\int_\Gamma xy\,dy=a\int_\Omega y\,dxdy$. Paramétrage de Ω : $\vec{r}(r,\theta)=\begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ a+ar\sin\theta\end{pmatrix}$ pour $r\in[0,a]$ et $\theta\in[0,2\pi]$. D'où $I=a\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}(a+ar\sin\theta)\,rdrd\theta=a^2[\frac{r^2}{2}]_0^a 2\pi+0=\pi a^4$ comme précédemment. ∎

Exercice 6.10 Calculer directement $I=\int_\Gamma(x^3-3xy^2)\,dx+(3x^2y-y^3)\,dy$ pour Γ le quart de cercle $\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta\end{pmatrix}$, $\theta\in[\theta_0,\theta_0+\frac{\pi}{2}]$. Puis poser $P(x,y)=x^3-3xy^2$ et $Q(x,y)=3x^2y-y^3$ et appliquer Green-Riemann.

Réponse. 1- $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-6xy$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=6xy$

D'où $I=\int_\Omega 12xy\,dxdy=12\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}}r^2\cos\theta\sin\theta\,rdrd\theta=12\frac{R^4}{4}[-\frac{\cos(2\theta)}{4}]_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}}=\frac32 R^4\cos(2\theta_0)$.

2- Paramétrage du quart de cercle : 21- partie arrondie Γ_1 : $\vec{r}_1(t)=\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t\end{pmatrix}$ pour $t\in[\theta_0,\theta_0+\frac{\pi}{2}]$. 22- segment de droite Γ_2 qui part de $\vec{0}$ pour aller à $\vec{r}_1(\theta_0)=\begin{pmatrix} R\cos\theta_0 \\ R\sin\theta_0\end{pmatrix}$: $\vec{r}_2(t)=\begin{pmatrix} Rt\cos\theta_0 \\ Rt\sin\theta_0\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,1]$. 23- segment de droite Γ_3 qui part de $\vec{r}_1(\theta_0+\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix} -R\sin\theta_0 \\ R\cos\theta_0\end{pmatrix}$ pour aller à $\vec{0}$: $\vec{r}_3(t)=\begin{pmatrix} -Rt\sin\theta_0 \\ Rt\cos\theta_0\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,1]$, parcouru en sens inverse. Puis

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1}(x^3-3xy^2)\,dx+(3x^2y-y^3)\,dy\\ &=R^3\int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)(-R\sin\theta\,d\theta)+(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)(R\cos\theta\,d\theta)\\ &=-R^4\int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\sin\theta\,d\theta==-R^4[-\frac{\cos2\theta}{2}]_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}}=R^4\cos2\theta_0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_2}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\\ &=R^3\int_{t=0}^{1}(t^3\cos^3\theta_0-3t^3\cos\theta_0\sin^2\theta_0)(R\cos\theta_0\,dt)+(3t^3\cos^2\theta_0\sin\theta_0-t^3\sin^3\theta_0)(R\sin\theta_0\,dt)\\ &=R^4(\cos^4\theta_0-\sin^4\theta_0)\int_{t=0}^{1}t^3\,dt=\frac14 R^4\cos2\theta_0.\end{aligned}$$

(car $\cos^4\theta_0 - \sin^4\theta_0 = \cos^2\theta_0(1-\sin^2\theta_0) - \sin^2\theta_0(1-\cos^2\theta_0) = \cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 = \cos 2\theta_0$.) Puis (attention au sens de parcours) :

$$-\int_{\Gamma_3} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{1}{4}R^4\cos 2\theta_0$$

D'où $I = (\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_3})... = (1+\frac14+\frac14)R^4\cos 2\theta_0 = \frac32 R^4\cos 2\theta_0$ comme précédemment.

Exercice 6.11 Calculer $I = \int_\Omega y^2\,dxdy$ où Ω est dans $y \geq 0$, limité supérieurement par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin^2 t) \\ a\sin^2 t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,\pi]$. On appliquera Green–Riemann.

Exemple 6.12 Si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel (paragraphe 3.3), $\vec{f} = \vec{\text{grad}}\varphi$ pour φ une fonction C^2, alors sur une courbe fermée son travail est nul car $\text{rot}\vec{\text{grad}} = 0$.

On a déjà vu ce résultat au paragraphe 3.3 : $\int_\Gamma \text{grad}\varphi \bullet d\vec{r} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$ ne dépend que de la valeur aux extrémités qui sont égales dans le cas d'une courbe fermée.

Exercice 6.13 Soit Ω un domaine de frontière simple Γ. Exprimer $\int_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy$ à l'aide d'une intégrale curviligne $\int_\Gamma P(y)\,dx + Q(x)\,dy$ où $P(x,y) = P(y)$ ne dépend que de y et $Q(x,y) = Q(x)$ ne dépend que de x.

Réponse. Notons $\vec{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. On doit avoir $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x^2+y^2$, i.e. $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - x^2$. On suppose $P(x,y) = P(y)$ indépendant de x et $Q(x,y) = Q(x)$ indépendant de y. Dans ce cas, on a $P'(y) + y^2 = Q'(x) - x^2 = k$ constante (une fonction de y étant égale à une fonction de x). D'où les solutions générales à une constante près $P(y) = ky - \frac{y^3}{3}$ et $Q(x) = kx + \frac{x^3}{3}$.

Cependant, sur un contour fermé, on a $\int_\Gamma ky\,dx + kx\,dy = \int_\Gamma kd(xy)$ est l'intégrale d'un potentiel et est donc nul. Il reste $\int_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy = \int_\Gamma \frac{x^3}{3}\,dy - \frac{y^3}{3}\,dx$.

Exercice 6.14 Calculer l'aire sous une "arche" de cycloïde $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = R(t-\sin t) \\ y(t) = R(1-\cos t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$ et $R > 0$ (limitée par l'axe des x).

Réponse. On paramètre Γ : bord inférieur, $y = 0$ et $x \in [0,2\pi R]$, bord supérieur $\vec{r}(t)$ pour t variant de $+2\pi$ à 0 (parcours dans le sens trigonométrique). Sur l'arche on a $x'(t) = y(t) = R(1-\cos t)$, et on se sert de $A = -\int_\Gamma y\,dx = -\int_{t=0}^{2\pi R} 0\,dx - \int_{t=2\pi}^{0} R^2(1-\cos t)^2\,dt = R^2\int_{t=0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = 3\pi R^2$.

Remarque 6.15 Dans l'exercice précédent (6.14), l'arche est obtenue en faisant rouler une roue sur le sol "$y = 0$" : la trace d'une tache sur le pneu donne la cycloïde, donnée dans le repère mobile lié à la roue par $\begin{pmatrix} x(t) - Rt = -R\sin t \\ y(t) - R = -R\cos t \end{pmatrix}$ (noter qu'au voisinage de $t = 0$ y est une fonction croissante de t).

A quoi correspond l'équation $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = R(t-\cos t) \\ y(t) = R(1-\sin t) \end{pmatrix}$? (Noter qu'au voisinage de $t = 0$, y est une fonction décroissante de t et que $\begin{pmatrix} x(t) - Rt = -R\cos t \\ y(t) - R = -R\sin t \end{pmatrix}$.) Réponse : à une roue qu'on fait rouler sur le plafond "$y = 2R$". En effet, la courbe symétrique par rapport à l'axe $y = 0$ (l'axe des x) est donnée par $\begin{pmatrix} x(t) = R(t-\cos t) \\ y(t) = -R(1-\sin t) \end{pmatrix}$. Effectuons une translation de $\frac{\pi}{2}$ en temps pour obtenir : $\begin{pmatrix} x(t-\frac{\pi}{2}) = R(t-\frac{\pi}{2} - \cos(t-\frac{\pi}{2})) \\ y(t-\frac{\pi}{2}) = -R(1-\sin(t-\frac{\pi}{2})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t-\frac{\pi}{2}) - R\sin t \\ -R - R\cos t \end{pmatrix}$. On prendra dans ce cas $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ pour le paramétrage de $\vec{q}(t)$ si on veut partir du point le plus haut (tache du pneu sur le plafond).

Exercice 6.16 "Contre-exemple". Soit $\vec{v} = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r^2} \\ \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et C_R le cercle $C(\vec{0},R)$, D_R le disque de bord C_R.

1- Calculer directement $\int_{C_R} \vec{v} \bullet d\vec{r}$.

2- Appliquer la formule de Green–Riemann. Où est le problème ?

3- Soit $\Omega = D_R - D_\varepsilon$. Comment appliquer la formule de Green-Riemann à cet ouvert ne contenant pas 0, et conclure que $\int_{C_R} \vec{v} \bullet d\vec{r} = +\int_{C_\varepsilon} \vec{v} \bullet d\vec{r}$ pour l'orientation usuelle de ces cercles dans le sens trigonométrique ?

Réponse. 1- On trouve $\int_{C_R} \vec{v}.d\vec{r} = 2\pi$.

2- On a $\text{rot}\vec{v} = 0$ uniquement défini pour $\vec{r} \neq 0$: $\vec{v}$ n'est pas C^1 et donc la formule de Riemann n'a pas de sens : $\int_{D_R} \text{rot}\vec{v}(\vec{x})\,dxdy$ n'a pas de sens puisque $\vec{0} \in D_R$ et que $\text{rot}\vec{v}$ n'est pas défini en $\vec{0}$.

3- La frontière de Ω n'est pas simple : elle est constituée de 2 courbes distinctes, les cercles C_R et C_ε. On ne peut pas appliquer directement le théorème de Green-Riemann. On commence par considérer la courbe simple reliant ces deux cercles auxquels on a enlevé les morceaux correspondant à $x > 0$ et $y \in]-\eta,\eta[$ pour $\eta << \varepsilon$, et où on a rajouté les segments de droite horizontaux $y = \pm\eta$. Faire le dessin. Et conclure. Attention au sens de parcours.

Exercice 6.17 Montrer (6.2) sachant (6.3) à l'aide de la fonction $g(x,y)=h(y,x)$. Commencer par montrer que si Γ_+ est la courbe $\vec r(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[a,b]$, si Γ_+ est parcourue dans le sens trigonométrique, alors la courbe C_- définie par $\vec q(t)=\begin{pmatrix}y(t)\\x(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[a,b]$ est parcourue en sens inverse. Faire un dessin : dessiner par exemple Γ_+ le cercle "$x^2+(y-2)^2=1$".

Réponse. La courbe C_- est symétrique de la courbe Γ_+ par rapport à la droite $y=x$, et C_- est parcourue dans le sens inverse. En effet, soit $\vec r(t)=\begin{pmatrix}r_1(t)\\r_2(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[a,b]$ est un paramétrage de Γ_+. Donc $\vec q(t)=\begin{pmatrix}q_1(t)=r_2(t)\\q_2(t)=r_1(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[a,b]$ est un paramétrage de C_-. Posant $\vec n_{\vec r}(t)=\begin{pmatrix}r_2'(t)\\-r_1'(t)\end{pmatrix}$, on a $(\vec n_{\vec r},\vec r\,')$ repère direct, et la paramétrisation dans le sens trigo implique que $\vec n$ est normale extérieure. Donc, pour $\varepsilon>0$ assez petit, $\vec r(t)+\varepsilon\vec n_{\vec r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)+\varepsilon y'(t)\\y(t)-\varepsilon x'(t)\end{pmatrix}\notin\Omega$ (est extérieur), alors que $\vec r(t)-\varepsilon\vec n_{\vec r}(t)$ est intérieur.

De même, posant $\vec n_{\vec q}(t)=\begin{pmatrix}q_2'(t)=r_1'(t)\\-q_1'(t)=-r_2'(t)\end{pmatrix}$, $(\vec n_{\vec q},\vec q\,')$ est repère direct, mais le point $\vec q(t)+\varepsilon\vec n_{\vec q}(t)=\begin{pmatrix}y(t)+\varepsilon x'(t)\\x(t)-\varepsilon y'(t)\end{pmatrix}$ est symétrique (par rapport à la droite $y=x$) du point $\begin{pmatrix}x(t)-\varepsilon y'(t)\\y(t)+\varepsilon x'(t)\end{pmatrix}=\vec r(t)-\varepsilon\vec n_{\vec r}(t)$ qui est intérieur, et est donc intérieur : la paramétrisation par $\vec q$ est inverse trigonométrique.

Puis avec $h(x,y)=g(y,x)$, si g est définie sur Ω alors h est définie sur D le symétrique de Ω par rapport à la droite $y=x$. Et on a, notant C_+ une paramétrisation de $\vec q([a,b])$ dans le sens trigonométrique :

$$\begin{aligned}\int_{C_+}h(q_1,q_2)\,dq_2&=-\int_{C_-}h(q_1,q_2)\,dq_2=-\int_{t=a}^b h(q_1(t),q_2(t))\,q_2'(t)\,dt\\&=-\int_{t=a}^b g(q_2(t),q_1(t))\,q_2'(t)\,dt=-\int_{t=a}^b g(r_1(t),r_2(t))\,r_1'(t)\,dt\\&=-\int_{\Gamma_+}g(r_1,r_2)\,dr_1.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Si on note $\vec\varphi:(x,y)\in D\to(u,v)=\vec\varphi(x,y)=^{\text{déf}}(y,x)\in\Omega$ le changement de variables donnant la symétrie par rapport à l'axe $y=x$, le jacobien de ce changement de variables est $\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$, donc de valeur absolue $+1$, de même que le jacobien de la transformation inverse $\vec\varphi^{-1}$. Et on a $h(x,y)=(g\circ\vec\varphi)(x,y)=g(u,v)$ et donc $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ quand $(u,v)=\vec\varphi(x,y)=(y,x)$, ce qui s'écrit encore $(\frac{\partial h}{\partial x}\circ\vec\varphi^{-1})(u,v)=\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$, d'où :

$$\int_{(x,y)\in D}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,dxdy=\int_{(u,v)\in\Omega}\frac{\partial h}{\partial x}(\vec\varphi^{-1}(u,v))(1)\,dudv=\int_{(u,v)\in\Omega}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,dudv$$

Avec (6.3) on obtient $\int_{(x,y)\in D}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,dxdy=-\int_{\Gamma_+}g(u,v)\,du$, donc $=+\int_{C_+}h(x,y)\,dy$ grâce à (6.10). ▪

On obtient immédiatement (corollaire) :

Théorème 6.18 *Soit $\vec f$ une fonction $C^1(U;\mathbb{R}^2)$ où U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (ouvert "sans trou"). $\vec f$ dérive d'un potentiel dans U ssi $\mathrm{rot}\vec f=0$.*

Preuve. On sait déjà que si $\vec f$ dérive d'un potentiel, i.e. s'il existe $\varphi\in C^2(U;\mathbb{R})$ telle que $\vec f=\vec{\mathrm{grad}}\varphi$, alors $\mathrm{rot}(\vec f)=0$ (car $\mathrm{rot}\circ\vec{\mathrm{grad}}=0$). Réciproque. Supposons $\mathrm{rot}(\vec f)=0$. Alors pour toute courbe Γ régulière simple et fermée dans U on a $\int_\Gamma\vec f\bullet d\vec r=\int_U\mathrm{rot}\vec f\,dxdy=0$ (formule de Stokes l'ouvert étant simplement connexe). Donc, U étant connexe, $\vec f$ dérive d'un potentiel, cf. théorème 3.28. ▪

6.2 Cas $\mathbb{R}^3$: formule de Stokes (ou du rotationnel)

Base cartésienne canonique $(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)$, produit scalaire canonique. Surface paramétrée régulière orientable $\vec x=\vec r(u,v)=\begin{pmatrix}r_1(u,v)\\r_2(u,v)\\r_3(u,v)\end{pmatrix}$, $(u,v)\in\bar\Omega=[a,b]\times[c,d]$, et $\Sigma=\mathrm{Im}(\vec r)$ (surface géométrique), $\vec{d\sigma}(u,v)=^{(5.26)}\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)\,dudv=\vec n(\vec x)\,d\sigma(u,v)$, où $\vec n(\vec x)=^{(5.25)}\frac{\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)||}=\begin{pmatrix}n_1(\vec x)\\n_2(\vec x)\\n_3(\vec x)\end{pmatrix}$, et $d\sigma(u,v)=^{(5.10)}||\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv$, l'élément de surface vectoriel, l'élément de surface et le vecteur normal unitaire (détermine l'orientation de Σ), en $\vec x=\vec r(u,v)$.

On paramètre le bord régulier Γ de Σ avec une orientation positive $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = r_1(u(t),v(t)) \\ y(t) = r_2(u(t),v(t)) \\ z(t) = r_3(u(t),v(t)) \end{pmatrix}$, $t \in [\alpha,\beta]$ (règle du tire-bouchon cf. déf. 5.34). On note $d\vec{q} = \vec{q}\,'(t)\,dt =^{\text{noté}} d\vec{\ell}$ l'élément de longueur vectoriel sur Γ.

Et U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient Σ.

Théorème 6.19 *(Stokes.) Le travail d'un "champ de vecteurs" $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ le long de Γ vaut, l'orientation du bord Γ étant positive,*

$$\Big(\int_{t=\alpha}^{\beta} \vec{f}(\vec{q}(t)) \bullet \vec{q}\,'(t)\,dt =\Big) \quad \boxed{\int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{\ell} = \int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{f} \bullet \vec{n}\,d\sigma} \quad \textit{(formule de Stokes ou formule du rotationnel)}, \tag{6.11}$$

i.e. $\int_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz = \int_\Sigma (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})n_1 + (\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x})n_2 + (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})n_3\,d\sigma$.

Preuve. Il suffit de montrer, pour $f \in C^1(U;\mathbb{R})$, l'orientation du bord Γ étant positive,

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_\Sigma \Big(\frac{\partial f}{\partial y} n_1 - \frac{\partial f}{\partial x} n_2\Big)\,d\sigma, \tag{6.12}$$

i.e. $\int_{t=\alpha}^{\beta} f(\vec{q}(t))z'(t)\,dt = \int_{u=a}^{b}\int_{v=c}^{d} (\frac{\partial f}{\partial y} n_1 - \frac{\partial f}{\partial y} n_2)(\vec{r}(u,v))\,d\sigma(u,v)$. Et de même on aura (permutation circulaire sur les indices) $\int_\Gamma f\,dx = \int_\Sigma (\frac{\partial f}{\partial z} n_2 - \frac{\partial f}{\partial y} n_3)\,d\sigma$ et $\int_\Gamma f\,dy = \int_\Sigma (\frac{\partial f}{\partial x} n_3 - \frac{\partial f}{\partial z} n_1)\,d\sigma$. D'où (6.11).

Montrons (6.12). 1- Cas cartésien : $(u,v) = (x,y) \in \bar{\Omega} = [a,b] \times [c,d]$, $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} r_1(x,y) = x \\ r_2(x,y) = y \\ r_3(x,y) \end{pmatrix}$, où $r_3 \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R})$. Donc $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) = r_3(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$, donc $z'(t) = \frac{\partial r_3}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial r_3}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)$, d'où

$$\int_{t=\alpha}^{\beta} f(\vec{q}(t)z'(t)\,dt = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(\vec{q}(t))\,\Big(\frac{\partial r_3}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial r_3}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt,$$

noté

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_\Gamma f\,\frac{\partial r_3}{\partial x}\,dx + \int_\Gamma f\,\frac{\partial r_3}{\partial y}\,dy.$$

Avec $\vec{d\sigma} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dxdy = \begin{pmatrix} -\frac{\partial r_3}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial r_3}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} d\sigma$, donc $n_1 d\sigma = -\frac{\partial r_3}{\partial x} dxdy$ et $n_2 d\sigma = -\frac{\partial r_3}{\partial y} dxdy$.

Donc

$$\int_\Sigma \Big(\frac{\partial f}{\partial y} n_1 - \frac{\partial f}{\partial x} n_2\Big)\,d\sigma = \int_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \Big(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial r_3}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial r_3}{\partial y}\Big)\,dxdy.$$

Avec $\partial\Omega$ parcouru dans le sens trigonométrique, on peut appliquer le théorème de Green–Riemann à g donné par $g(x,y) = f(x,y,r_3(x,y))\,\frac{\partial r_3}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \bar{\Omega}$:

$$\int_{t=\alpha}^{\beta} g(x,y)\,dx = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dxdy \quad \text{noté} \quad \int_{\partial\Omega} g\,dx = \int_\Omega -\frac{\partial g}{\partial y}\,dxdy.$$

Et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial r_3}{\partial y})\frac{\partial r_3}{\partial x} + f\,\frac{\partial^2 r_3}{\partial x \partial y}$, donc

$$\int_{\partial\Omega} f\,\frac{\partial r_3}{\partial x}\,dx = \int_\Omega -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial r_3}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial r_3}{\partial y}\frac{\partial r_3}{\partial x} - f\,\frac{\partial^2 r_3}{\partial x \partial y}\,dxdy.$$

Idem,

$$\int_{\partial\Omega} f\,\frac{\partial r_3}{\partial y}\,dy = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial r_3}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial r_3}{\partial x}\frac{\partial r_3}{\partial y} + f\,\frac{\partial^2 r_3}{\partial x \partial y}\,dxdy.$$

Et $f\,\frac{\partial r_3}{\partial x}\,dx + f\,\frac{\partial r_3}{\partial y}\,dy = f\,dz$. D'où (somme)

$$\int_{\partial\Omega} f\,dz = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial r_3}{\partial y}\,dxdy - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial r_3}{\partial x}\,dxdy = \int_\Omega -\frac{\partial f}{\partial x}\,n_2 d\sigma + \frac{\partial f}{\partial y}\,n_1 d\sigma,$$

i.e. (6.12).

Par permutation circulaire, on obtient les autres relations.

Puis dans (6.12) on prend $f = f_3$, idem par permutation circulaire, d'où (6.11).

2- Cas d'une surface générale. On partage Σ en plusieurs morceaux, donc le bord Γ en plusieurs morceaux (voir prop. 3.14), et on revient au cas Γ admet un paramétrage en $u(t), v(t)) = (x(t), y(t))$, ou bien $(u(t), v(t)) = (y(t), z(t))$, ou bien $(u(t), v(t)) = (z(t), x(t))$, et on somme. ∎

D'où (rappel : $\vec{f} \in C^0(U; \mathbb{R}^3)$ dérive d'un potentiel ssi $\exists \varphi \in C^1(U; \mathbb{R})$ t.q. $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$) :

Théorème 6.20 *U étant un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{f} \in C^0(U; \mathbb{R}^3) \text{ dérive d'un potentiel ssi } \vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = 0. \tag{6.13}$$

Preuve. Similaire à la démonstration du théorème 6.18. ∎

Remarque 6.21 On retrouve la formule de Green-Riemann pour une surface horizontale où $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ 0 \end{pmatrix}$ ne dépend que de (x, y), car alors $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{rot}\vec{f} \end{pmatrix} = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\vec{e}_3$, l'élément de surface est $\vec{d\sigma} = dxdy\,\vec{e}_3$ (avec le paramétrage trigonométrique, la normale est verticale vers le haut), et $\vec{f} \bullet \vec{dr} = f\,dx + g\,dy$. ∎

Définition 6.22 $\vec{J} \in C^0(U; \mathbb{R}^3)$ dérive d'un rotationnel ssi $\exists \vec{H} \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ t.q. $\vec{J} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{H}$.

Corollaire 6.23 *Si $\vec{J} \in C^0(U; \mathbb{R}^3)$ dérive d'un rotationnel $\vec{H}$, alors le flux de $\vec{J}$ à travers Σ est égal à la circulation de $\vec{H}$ le long de Γ :*

$$\vec{J} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{H} \quad \Longrightarrow \quad \textit{flux}(\vec{J}) = \int_\Sigma \vec{J}.\vec{d\sigma} = \int_\Gamma \vec{H}.\vec{dr} = \textit{circulation}(\vec{H}).$$

(En électromagnétisme, $\vec{H}$ est le champ magnétique et $\vec{J}$ est la densité de courant électrique.)

Exercice 6.24 Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{v}(x, y, z) = (2x-y)\vec{e}_1 - yz^2\vec{e}_2 - y^2z\vec{e}_3$ et Σ la demi-sphère supérieure "$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$".

Réponse. On a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -yz^2 \\ -y^2z \end{pmatrix}$ et donc $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Surface : $\vec{r}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Et on a $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$, d'où $\vec{d\sigma} = R^2\cos\varphi \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi$.

D'où $\int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}.\vec{d\sigma} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi R^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi \, d\varphi = \pi R^2 [\frac{-\cos 2\varphi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$.

On paramètre Γ par $\vec{q}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi[$, et donc $\vec{dq} = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$. Avec $\vec{v}(\vec{q}(t)) = R \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où le travail $T(\vec{v}, \vec{q}) = \int_0^{2\pi} R^2(2\cos t - \sin t)(-\sin t)\,dt = R^2(\int_0^{2\pi} -\sin 2t\,dt + \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt) = \pi R^2$. ∎

Exercice 6.25 Soit Σ la demi-sphère supérieure "$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$", D sa projection sur le plan $(x0y)$, et Γ le bord de D orienté positivement. Et soit $\vec{v}(x, y, z) = \vec{e}_1 + x^2\vec{e}_3$. Calculer $I = \int_\Sigma \vec{v} \bullet \vec{d\sigma}$ de trois manières différentes.

Réponse. 1- Calcul direct : surface $\vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. D'où $\vec{d\sigma} = \begin{pmatrix} R^2\cos\theta\cos^2\varphi \\ R^2\sin\theta\cos^2\varphi \\ R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi$.

On a $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$. D'où $I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\theta \cos^2\varphi \, d\theta d\varphi + \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi) R^2 \sin\varphi\cos\varphi \, d\theta d\varphi = 0 + R^4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi = R^4\pi[\frac{-\cos^4\varphi}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}}$, i.e. $I = \frac{R^4}{4}\pi$.

2- D est le disque $\begin{pmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\rho \in [0, R]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$ dérive d'un rotationnel : $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}$ où $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = \frac{x^3}{3} \\ f_3(x, y, z) = y \end{pmatrix}$. Donc, avec Stokes, $I = \int_\Sigma \vec{v} \bullet \vec{d\sigma} = \int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{f} \bullet \vec{d\sigma} = \int_\Gamma \vec{f} \bullet \vec{dr} = \int_D \vec{\mathrm{rot}}\vec{f} \bullet \vec{d\sigma} = \int_D \vec{v} \bullet \vec{d\sigma}$.

21- $I = \int_D \vec{v} \bullet \vec{d\sigma}$: avec $dxdy = \rho\, d\rho d\theta$ et $\vec{d\sigma} = \vec{e}_3 dxdy$ on a $I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{R} (\rho\cos\theta)^2 \rho\, d\rho d\theta = \frac{R^4}{4}\pi$.

22- $I = \int_\Gamma \vec{f} \bullet d\vec{r}$: avec $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et donc $\vec{r}\,'(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $I = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{R^4}{3} \cos^4 t\, dt = \frac{R^4}{3} \int_{t=0}^{2\pi} (\frac{\cos 2t+1}{2})^2\, d\theta = \frac{R^4}{3} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{4}(\cos^2(2t) + 2\cos 2t + 1) = \frac{R^4}{4}\pi$. ▪

Exercice 6.26 Soit Σ le (demi-)cône "$z = \frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 3$" de frontière Γ, et soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -xyz \end{pmatrix}$. Calculer $\int_\Gamma \vec{v} \bullet d\vec{r}$ et calculer $\int_\Sigma \vec{\operatorname{rot}}\vec{v} \bullet \vec{d\sigma}$. Vérifier la formule de Stokes. Pourquoi n'y-a-t-il pas de problème bien que la surface ne soit pas régulière (la normale n'est pas définie en $\vec{0}$) ?

Réponse. On a $\sqrt{x^2+y^2} = Rz$, i.e. à z constant, la courbe de niveau est un cercle de rayon Rz (le rayon du cercle à l'altitude z est proportionnel à cette altitude). Un paramétrage du cône est donc donné par : $\vec{r}(\theta, z) = \begin{pmatrix} zR\cos\theta \\ zR\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$ pour $z \ge 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Le bord Γ du cône limité par l'altitude z_0=3 est paramétré par exemple par $\vec{q}(\theta) = \vec{r}(\theta, z_0) = \begin{pmatrix} z_0R\cos\theta \\ z_0R\sin\theta \\ z_0 \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Attention, problème éventuel d'orientation trigonométrique du bord du cône d'altitude z_0=3 : le vecteur normal $\vec{n}$ au cône est parallèle et de même sens que :

$$\vec{d\sigma} = \begin{pmatrix} -zR\sin\theta \\ zR\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} d\theta dz = zR \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -R \end{pmatrix} d\theta dz.$$

Et $\vec{q}\,'(\theta) = \begin{pmatrix} -z_0R\sin\theta \\ z_0R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{n}(\theta, z_0) \wedge \vec{q}\,'(\theta)$ de même sens que $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -R \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est orienté le long du cône mais vers l'extérieur de celui-ci (vers le haut). Donc $\vec{q}$ est un paramétrage de Γ dans le sens inverse trigonométrique (voir règle du tire-bouchon). Pour vérifier la formule de Stokes, on calcule donc : $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -z_0R\sin\theta \\ z_0R\cos\theta \\ -z_0R\cos\theta z_0 R\sin\theta z_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -z_0R\sin\theta \\ z_0R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = -\int_0^{2\pi} z_0^2R^2\, d\theta = -2\pi z_0^2 R^2$. On a $\vec{\operatorname{rot}}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xz \\ yz \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^2R\cos\theta \\ z^2R\sin\theta \\ 2 \end{pmatrix}$ quand $(x,y,z) = \vec{r}(\theta, z)$, d'où $\vec{\operatorname{rot}}\vec{v}(x,y,z).\vec{d\sigma} = z^3R^2(-\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2zR^2\, d\theta dz = -z^3R^2\cos(2\theta) - 2zR^2\, d\theta dz$, d'où $\int_\Sigma \vec{\operatorname{rot}}\vec{v}(x,y,z) \bullet \vec{d\sigma} = 0 + \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{z_0} -2zR^2\, d\theta dz = -2\pi z_0^2 R^2$. ▪

7 * Formules de Gauss ou d'Ostrogradski ("surface – volume")

7.1 Introduction

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}^3$ on se donne un domaine Ω simple régulier : fermeture d'un ouvert dans $\mathbb{R}^3$ simplement connexe de bord une surface Σ régulière. Exemple de la boule $\Omega = B(0, R)$ de centre $\vec{0}$ et de rayon R, de bord la sphère $\Sigma = S(0, R)$.

Et soit $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire sortant de Σ (i.e. si $\vec{r}(\vec{x})$ est sur Σ alors il existe h_0 tel que $\vec{r} + h\vec{n} \notin \Omega$ pour tout $h \le h_0$).

Soit $d\sigma$ et $\vec{d\sigma} = \vec{n} d\sigma$ les éléments de surface scalaire et vectoriel, et $d\Omega = dxdydz$ l'élément de volume.

7.2 Formule de Gauss (ou d'Ostrogradski ou de la divergence)

Théorème 7.1 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ (fonction à valeurs scalaires). Alors, pour $i = 1, 2, 3$:*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_\Sigma f\, n_i\, d\sigma \quad (= \int_\Sigma f\, \vec{e}_1 \bullet \vec{d\sigma}) \tag{7.1}$$

Preuve. La démonstration est semblable à celle de Green–Riemann, et se sert de (5.30).

Quitte à partager Ω en plusieurs morceaux, on considère Ω domaine à bord vertical de type $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ où $D = \operatorname{tr}(\Omega)$ est la projection de Ω sur le plan (x, y), et établissons le cas $i = 3$ (les autres sont traitées de manière similaire). Sur la surface inférieure Σ_{inf} on a, en un point $\vec{r}(x, y)$:

$$\vec{d\sigma} \bullet \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} (\ldots) \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = -dxdy,$$

(la normale est orientée vers le bas pour être extérieure au volume, voir exemple 5.15) et donc :

$$\int_{\Sigma_{inf}} f\,\vec{e}_3 \bullet \vec{d\sigma} = -\int_{\Sigma_{inf}} f(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy.$$

Sur les surfaces latérales, $\vec{e}_3 \bullet \vec{d\sigma} = 0$ et aucun terme n'intervient. Et sur la surface supérieur Σ_{sup} on a :

$$\int_{\Sigma_{sup}} f\,\vec{e}_3 \bullet \vec{d\sigma} = +\int_{\Sigma_{sup}} f(x,y,\psi(x,y))\,dxdy.$$

Par ailleurs :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}\,d\Omega = \int_D \int_{z=\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dxdy = \int_D f(x,y,\psi(x,y)) - f(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy.$$

De même lorsque $i = 1,2$, d'où le résultat (7.1). ▪

Corollaire 7.2 *Formule de la divergence : si $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$:*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{f}\,d\Omega = \int_\Sigma \vec{f} \bullet \vec{n}\,d\sigma \quad (= \int_\sigma f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3\,d\sigma \quad \in \mathbb{R}). \tag{7.2}$$

Formule du rotationnel :

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}\,d\Omega = -\int_\Sigma \vec{f} \wedge \vec{n}\,d\sigma \quad \in \mathbb{R}^3. \tag{7.3}$$

Formule d'intégration par parties, avec $g \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ (fonction à valeurs scalaires), pour $i = 1,2,3$:

$$\int_\Omega f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}\,d\Omega = -\int_\Omega g\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,d\Omega + \int_\Sigma f\,g\,n_i\,d\sigma \quad \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Si de plus $f,g \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$: deuxième formule d'intégration par parties (on rappelle que $\Delta = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}})$) :

$$\int_\Omega (\Delta f)\,g\,d\Omega = -\int_\Omega \vec{\mathrm{grad}}f \bullet \vec{\mathrm{grad}}g\,d\Omega + \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n}\,g\,d\sigma \quad \in \mathbb{R}, \tag{7.5}$$

où on a noté $\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{\mathrm{grad}}f.\vec{n}$.

Et formule de Green :

$$\int_\Omega (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,d\Omega = \int_\Sigma (f\,\frac{\partial g}{\partial n} - g\,\frac{\partial f}{\partial n})\,d\sigma \quad \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Remarque 7.3 Les formules (7.1) et (7.4) s'écrivent également (trois équations) :

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{grad}}f\,d\Omega = \int_\Sigma f\,\vec{n}\,d\sigma, \quad \text{et} \quad \int_\Omega f\,\vec{\mathrm{grad}}g\,d\Omega = -\int_\Omega g\,\vec{\mathrm{grad}}f\,d\Omega + \int_\Sigma f\,g\,\vec{n}\,d\sigma. \tag{7.7}$$

▪

Exemple 7.4 Calculer sur la sphère $S = S(\vec{0},R)$ l'intégrale $J = \int_S x^3\,dydz + y^3\,dxdz + z^3\,dxdy$.

Réponse. On a $J = \int_S \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$ (7.4) $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ $d\sigma$, voir (5.30). D'où avec le théorème de Gauss : $J = \int_B 3(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (3r^2)\,(r^2 \sin\varphi\,drd\theta d\varphi) = \frac{12\pi}{5} R^5$. ▪

Exercice 7.5 Montrer que $\frac{1}{2}\int_\Sigma \cos(\vec{r},\vec{n})\,d\sigma = \int_\Omega \frac{d\Omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, quand $\Sigma = \partial\Omega$. Le calculer pour la sphère.

(Indication : le cosinus $\cos(\vec{a},\vec{b})$ est le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs et est donné par $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}.\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$. Et on calculera $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}$.)

Réponse. On pose $\vec{r} = (x,y,z)$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La fonction $\frac{1}{r}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$ (l'élément de volume est $dxdydz = r^2\cos\varphi\,drd\theta d\varphi$), et $\int_\Omega \frac{d\Omega}{r}$ a un sens. On a $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r}$ en tout $\vec{r} \neq \vec{0}$, et donc la fonction $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$. D'où $\int_\Omega \frac{2}{r}d\Omega = \int_\Sigma \frac{\vec{r}}{r} \bullet \vec{n}\,d\sigma$. ▪

Exercice 7.6 Montrer que $\int_\Sigma \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{||\vec{r}||}\,d\sigma = \int_\Omega \frac{d\Omega}{x^2+y^2+z^2}$, quand $\Sigma = \partial\Omega$. (On calculera $\mathrm{div}(\frac{\vec{r}}{r^2})$.)

Réponse. On pose $\vec{r} = (x,y,z)$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La fonction $\frac{1}{r^2}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$ (l'élément de volume est $dxdydz = r^2\cos\varphi\,drd\theta d\varphi$), et $\int_\Omega \frac{d\Omega}{r^2}$ a un sens. On a $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2}$ en tout $\vec{r} \neq \vec{0}$, et donc la fonction $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^2}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$. D'où $\int_\Omega \frac{1}{r^2}d\Omega = \int_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^2} \bullet \vec{n}\,d\sigma$.

Remarque : le calcul est ici formel, car $\vec{f}$ n'est pas C^1, mais peut être justifié. ▪

Exercice 7.7 Montrer que si $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{w}$ pour $\vec{w} \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, alors avec Σ surface fermée on a $\int_\Sigma \vec{v} \bullet \vec{d\sigma} = 0$.

Réponse. Si $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{w}$ alors $\mathrm{div}\vec{v} = 0$.

Exercice 7.8 Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs (application de $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$) tel $\vec{v} \perp \vec{n}$ en tout point d'une surface Σ fermée, bord de Ω. Montrer que $\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}\, d\Omega = 0$.

Exercice 7.9 Soit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = ||\vec{r}||$, soit $\vec{v}(x,y,z) = \vec{\mathrm{grad}}(\frac{1}{r})$, et soit Σ_R la sphère $S(\vec{0},R)$ de centre $\vec{0}$ et de rayon R. On notera B_R la boule contenue dans Σ..

Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ en tout point $\vec{r} = (x,y,z)$ non nul.

Calculer directement $\int_\Sigma \vec{v}.\vec{n}\, d\sigma$.

Montrer que $\mathrm{div}\vec{v}(x,y,z) = 0$ en tout point $\vec{r} = (x,y,z)$ non nul. Pourquoi la formule de la divergence est prise en défaut ?

Réponse. Les calculs de $\frac{\partial}{\partial x_i}((x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})$ donnent $\vec{v} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ pour $r \neq 0$.

Puis sur la sphère, on a $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, d'où $\vec{v}.\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \bullet \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2}$, et en passant en coordonnées sphériques, avec l'élément de surface $d\sigma = R^2 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi$ il vient $\int_{\Sigma_R} \vec{v} \bullet \vec{n}\, d\sigma = -\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi = -4\pi$.

Puis la dérivée de la première composante de $\vec{v}$ en x donne $\frac{\partial}{\partial x}(-x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}) = -r^{-3} + \frac{3}{2}x2x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} = -r^{-3} + 3x^2r^{-5}$ en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$. D'où $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$. En particulier, ou aurait envie d'écrire $\int_{B_R} \mathrm{div}\vec{v}\, d\Omega = 0$: mais alors la formule de la divergence est fausse.

Mais cette formule n'est pas applicable car $\vec{v}$ n'est pas C^1 dans la boule Ω de frontière Σ, et en particulier $\int_{B_R} \mathrm{div}\vec{v}\, d\Omega$ n'a pas de sens ($\mathrm{div}\vec{v}$ n'est intégrable dans aucun ouvert contenant $\vec{0}$).

Exercice 7.10 (Suite) On considère le volume $C = B_R - B_\varepsilon$ ou $0 < \varepsilon < R$, de bord $\Sigma_R \cup \Sigma_\varepsilon$. Et soit $\vec{v} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ pour $r \neq 0$. Vérifier que la formule de la divergence est applicable (attention au sens de $\vec{n}$).

Exercice 7.11 Soit le problème de Dirichlet pour Ω ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ : trouver $u \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ tel que, la fonction $f \in C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ étant donnée :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u_{|\Sigma} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Montrer que ce problème ne peut admettre qu'une solution.

Réponse. S'il y a deux solutions u_1 et u_2, alors $w = u_1 - u_2$ satisfait au problème $-\Delta w = 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $w_{|\Sigma} = 0$ sur Γ. D'où par intégration par parties, ayant au préalable multiplié par w :

$$0 = \int_\Omega (\Delta w)(w)\, d\Omega = -\int_\Omega \vec{\mathrm{grad}}w \bullet \vec{\mathrm{grad}}w\, d\Gamma + 0.$$

D'où $||\vec{\mathrm{grad}}w||_{L^2} = 0$, d'où $\vec{\mathrm{grad}}w = 0$, d'où $w =$ constante, et ayant w nul sur le bord, on déduit $w = 0$, i.e. $u_1 = u_2$.

Exercice 7.12 Soit $\vec{f}(x,y,z) = (3x^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$ Calculer le flux de $\vec{f}$ à travers S le bord du cube de sommets $(\pm1,\pm1,\pm1)$ en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Réponse. $\mathrm{div}\vec{f}(x,y,z) = 6xz^3 + 9x^2z^2$,

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \int_{z=-1}^1 6xz^3 + 9x^2z^2\, dxdydz = 2(6[\frac{x^2}{2}]_{-1}^1[\frac{z^4}{4}]_{-1}^1 + 9[\frac{x^3}{3}]_{-1}^1[\frac{z^3}{3}]_{-1}^1) = 8.$$

Exercice 7.13 Prouvez le théorème d'Archimède : "tout corps plongé dans un fluide de densité constante subit une force égale au poids du volume de fluide déplacé".

Réponse. Soit Ω le volume occupé par le corps. Il est soumis à une force surfacique de pression $p(\vec{r}) = -\rho z(\vec{r})$ où ρ est la densité du fluide et au point $\vec{r}$ et z est la hauteur de fluide au dessus du point $\vec{r}$, avec un signe $-$ car on prend implicitement l'axe des z orienté vers le haut et l'origine des z à la surface du fluide (ainsi la pression est positive comme il se doit).

La force locale est $p\,\vec{n} = -\rho z\,\vec{n}$ en $\vec{r}$, et la force résultante est verticale :

$$\vec{F} = \int_\Sigma p\,\vec{n}\, d\sigma = \int_\Sigma -\rho z\,\vec{n}\, d\sigma = \begin{pmatrix} \int_\Sigma -\rho z\, n_1\, d\sigma \\ \int_\Sigma -\rho z\, n_2\, d\sigma \\ \int_\Sigma -\rho z\, n_3\, d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = -\int_\Sigma \rho z\, n_3\, d\sigma \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux premières composantes sont nulles : par exemple pour la première, en intégrant d'abord à hauteur constante, il vient $F_1 = \int_z \rho z(\int_{\Gamma(x,y)} n_1\, ds)\, dz$, et l'intégrale sur la courbe $\Gamma(x,y)$ est nulle. En effet notant $\vec{r}(x,y) =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ r_3(x,y) \end{pmatrix}$, on a $\vec{n} = \pm c \begin{pmatrix} -\vec{\mathrm{grad}} r_3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $n_1 = -c\frac{\partial r_3}{\partial x}$ et $\int_{\Gamma(x,y)} n_1 \, ds = -\int_{\Gamma(x,y)} c\frac{\partial r_3}{\partial x} ds = 0$ car la courbe $\Gamma(x,y)$ est fermée.

La fonction $\vec{f}(\vec{r}) = (0,0,\rho z)$ est $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ avec $\mathrm{div}\vec{f}(\vec{r}) = \rho$, et on peut appliquer le théorème de la divergence :

$$F_3 = -\int_\Omega \rho \, d\Omega.$$

Et cette force est égale au poids du volume de fluide déplacé. ∎

8 Annexe : Rappels

8.1 Dérivée de l'inverse

Soit $\varphi : \begin{Bmatrix}]a,b[& \to]c,d[\\ x & \to y = \varphi(x) \end{Bmatrix}$ un difféomorphisme (une application bijective C^1 d'inverse C^1 = un changement de variable), avec $a < b$ et $c < d$. Son inverse $\varphi^{-1} : \begin{Bmatrix}]c,d[& \to]a,b[\\ y & \to x = \varphi^{-1}(y) \end{Bmatrix}$ est dérivable et on a $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. D'où par dérivation de fonctions composées, pour tout $x \in]a,b[$:

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = 1, \quad \text{soit} \quad (\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)} \quad \text{quand} \quad y = \varphi(x). \tag{8.1}$$

Aussi écrit, pour tout $y \in]c,d[$:

$$\frac{d\varphi^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}(x)} \quad \text{quand} \quad y = \varphi(x), \tag{8.2}$$

Notation. On note $y = y(x) = \varphi(x)$ et $x = x(y) = \varphi^{-1}(y)$, d'où la notation ambiguë

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}, \quad \text{soit} \quad \frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)}, \quad \text{noté} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \quad ...! \tag{8.3}$$

Cette notation abusive vient des "différences finies" :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}, \tag{8.4}$$

qui représente la relation entre les pentes approchées "$\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$" de $x = \varphi^{-1}$ et de $y = \varphi$.

Exercice 8.1 Montrer à l'aide de (8.3) (et φ un difféomorphisme C^2) :

$$x''(y) = -\frac{y''(x)}{(y'(x))^3}. \tag{8.5}$$

Vérifiez-le pour $x = y^2$.

Réponse. On a $(\varphi^{-1})'(y) \overset{(8.1)}{=} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$, donc $(\varphi^{-1})''(y) = \frac{-\varphi''(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y)}{(\varphi'(\varphi^{-1}(y)))^2} \overset{(8.1)}{=} \frac{-\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}$, quand $x = (\varphi^{-1})'(y)$.

Cas $x = y^2$: ici $\varphi : x \to y = \sqrt{x}$ (difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$), d'inverse $\varphi^{-1} : y \to x = y^2$. On a $y(x) = x^{\frac{1}{2}}$, d'où $y'(t) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, d'où $y''(t) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ (pour $x > 0$). D'où $-\frac{y''(x)}{(y'(x))^3} = \frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}} = 2$ est bien égal à $x''(y)$. ∎

8.2 Changement de variable dans une intégrale

Soit $\varphi : x \in]a,b[\to y = \varphi(x) \in]c,d[$ un difféomorphisme, avec $a < b$ et $c < d$.

Soit $f \in C^0(]c,d[;\mathbb{R})$. On rappelle la formule de changement de variables, avec $dy = \varphi'(x)\,dx$:

$$\int_{y=c}^{y=d} f(y)\,dy = \int_{x=\varphi^{-1}(c)}^{x=\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx. \tag{8.6}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\text{si } \varphi \text{ est strict croissante : } \int_{y=c}^{d} f(y)\,dy = \int_{x=a}^{b} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx,\\
&\text{si } \varphi \text{ est strict décroissante : } \int_{y=c}^{d} f(y)\,dy = -\int_{x=a}^{b} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

(8.6) s'écrit également (pour une généralisation aux intégrales dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$) :

$$\int_{y\in]c,d[} f(y)\,dy = \int_{x\in]a,b[} f(\varphi(x))\,|\varphi'(x)|\,dx. \tag{8.8}$$

Et pour $f \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, pour D ouverts dans $\mathbb{R}^n$, pour $\vec{\varphi} : D \to \vec{\varphi}(D)$ un difféomorphisme :

$$\int_{\vec{y}\in\vec{\varphi}(D)} f(\vec{y})\,dy = \int_{\vec{x}\in D} f(\vec{\varphi}(\vec{x}))\,|J(\vec{x})|\,dx,$$

où $J = \det(d\vec{\varphi}) : D \to \mathbb{R}$ est le jacobien de $\vec{\varphi}$ = le déterminant de la matrice jacobienne (ne pas oublier la valeur absolue du jacobien, ici une fonction $\vec{\varphi}$ croissante ou décroissante n'a pas de sens).

8.3 Produit vectoriel

Rappel sur le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et de son produit scalaire euclidien $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^3}$ usuel donné par $(\vec{a},\vec{b})_{\mathbb{R}^3} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 =^{\text{noté}} \vec{a}\bullet\vec{b}$ quand $\vec{a} = a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3 \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3 \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$. Le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1\\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2\\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2\\ a_3b_1 - a_1b_3\\ a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}, \tag{8.9}$$

le déterminant formel écrit devant être calculé en développant par rapport à la première colonne : $= \vec{e}_1 \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{pmatrix} - \vec{e}_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{pmatrix} + \vec{e}_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$.

On vérifie immédiatement que $(\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a})_{\mathbb{R}^3} = 0 = (\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{b})_{\mathbb{R}^3}$: le vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est $\perp\vec{a}$ et $\perp\vec{b}$.

Et $||\vec{a}\wedge\vec{b}||$ est l'aire du parallélogramme de côté $\vec{a}$ et $\vec{b}$: pour le vérifier, quitte à changer de base orthonormée, on suppose $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans le plan (Oxy) (donc $a_3 = b_3 = 0$), ce qui donne $||\vec{a}\wedge\vec{b}|| = a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\vec{a},\vec{b})$, déterminant par restriction à $\mathbb{R}^2$ (on rappelle que dans $\mathbb{R}^n$ le déterminant de n vecteurs donne le volume de l'hyper-parallélogramme limité par ces vecteurs). Ce même calcul montre que $||\vec{a}\wedge\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - (\vec{a},\vec{b})^2_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\vec{a}\wedge\vec{b} = ||\vec{a}\wedge\vec{b}||\,\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}\wedge\vec{b}||}$ où $\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}\wedge\vec{b}||}$ est unitaire et orthogonal à $\text{Vect}\{\vec{a},\vec{b}\}$.

9 Annexe : différentiabilité et vecteurs tangents

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 9.1 Deux fonctions $\vec{f},\vec{g} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sont tangentes en un point $\vec{x}_0 \in \Omega$ si :

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x})||_{\mathbb{R}^n}}{||\vec{x}-\vec{x}_0||_{\mathbb{R}^m}} = 0.$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 9.2 Une fonction $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en $\vec{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ ssi il existe une application linéaire $L_{\vec{x}_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ t.q. pour tout $\vec{x}$ dans un voisinage ouvert de $\vec{x}_0$:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + L_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0) + o(\vec{x}-\vec{x}_0), \tag{9.1}$$

i.e. ssi $\vec{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ définie par $\vec{g}(\vec{x}) =^{\text{déf}} \vec{f}(\vec{x}_0) + L_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0)$ est tangente à $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$, et $\vec{g}$ étant appelée l'application affine tangente à $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$.

Et on note alors $L_{\vec{x}_0} = d\vec{f}(\vec{x}_0)$, ce qui définit une fonctionnelle $d\vec{f} : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.

Et $\vec{f}$ est dite $C^1(\Omega)$ ssi $d\vec{f}$ est continue dans Ω.

NB : on peut remplacer (9.1) par : pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, pour tout h dans un voisinage ouvert de 0 :

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + h\vec{v}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + h\, L_{\vec{x}_0}(\vec{v}) + o(h). \tag{9.2}$$

Représentation matricielle : si $(\vec{a}_i)$ est une base de $\mathbb{R}^m$, si $(\vec{b}_i)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, si $\vec{x} \in \Omega$, si $\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x)\vec{b}_i$, alors la matrice jacobienne de $\vec{f}$ relativement aux bases $(\vec{a}_i)$ et $(\vec{b}_i)$ est la matrice $n * m$ des dérivées partielles $[d\vec{f}(\vec{x})]_{|\vec{a},\vec{b}} = [\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\vec{x})]$. Ce qui permet de profiter du calcul matriciel : pour tout $\vec{v} = \sum_{i=1}^m v_i\vec{a}_i$, notant $d\vec{f}(\vec{x}).\vec{v} = \sum_{i=1}^n (d\vec{f}(\vec{x}).\vec{v})_i\vec{b}_i$, on a :

$$[d\vec{f}(\vec{x}).\vec{v}]_{|\vec{b}} = [d\vec{f}(\vec{x})]_{|\vec{a},\vec{b}}.[\vec{v}]_{|\vec{a}}, \quad \text{soit} \quad (d\vec{f}(\vec{x}).\vec{v})_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\vec{x})v^j, \tag{9.3}$$

où $[\vec{v}]_{|\vec{a}}$ est la matrice colonne des v_i, et $[d\vec{f}(\vec{x}).\vec{v}]_{|\vec{b}}$ est la matrice colonne des $(d\vec{f}(\vec{x}).\vec{v})_i$.

Exemple 9.3 Cas particulier $m = 1$, i.e. d'une courbe régulière $\vec{r} : t \in [a, b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + d\vec{r}(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)$, et on note $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)$, et donc l'application affine tangente en un $t_0 \in]a, b[$ est $\vec{g} = d\vec{r}(t_0)$ donnée par :

$$\vec{g} : t \in \mathbb{R} \to \vec{g}(t) = \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\, \vec{r}\,'(t_0), \tag{9.4}$$

qui passe par le point $\vec{r}(t_0)$ et de vecteur directeur $\vec{r}\,'(t_0)$. ∴

Définition 9.4 Un vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ est dit tangent en $\vec{x}_0$ "à la surface" $\vec{f}$ ssi il est dans $\mathrm{Im}(df(\vec{x}_0))$, i.e. ssi il est l'hyper-plan tangent $= \mathrm{Vect}\{\vec{w} \in \mathbb{R}^n : \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^m,\ \vec{w} = df(\vec{x}_0).\vec{v}\}$.

Cas particulier des courbes $\vec{r} :]a, b[\to \mathbb{R}^m$:

Définition 9.5 Un vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à la courbe $\vec{r}$ au point $\vec{r}(t_0)$ ssi il est parallèle à $\vec{r}\,'(t_0)$, i.e. ssi il est proportionnel à $\vec{r}\,'(t_0)$.

10 Annexe : primitive de $\cos^m$ et de $\sin^m$

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.1 Calculer une primitive $\int (\cos^m t)(\sin^2 t)\, dt$. Puis calculer une primitive $\int \cos^{m+2} t\, dt$. Donner une relation pour les intégrales $\int_0^{2\pi} \cos^{m+2} t\, dt$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} t\, dt$

Réponse. On pose $u'(t) = \cos^m t \sin t$ de primitive $u(t) = -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} t$, et on pose $v(t) = \sin t$ de dérivée $v'(t) = \cos t$, pour l'intégration par parties (à une constante près) :

$$\int \cos^m t \sin^2 t\, dt = \int \frac{1}{m+1} \cos^{m+2} t - \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} t \sin t.$$

Puis $\cos^{m+2} t = \cos^m t(1 - \sin^2 t)$, d'où :

$$\int \cos^{m+2} t\, dt = \int \cos^m t\, dt - \int \frac{1}{m+1} \cos^{m+2} t + \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} t \sin t,$$

d'où la primitive cherchée :

$$\int \cos^{m+2} t\, dt = \frac{m+1}{m+2} \int \cos^m t\, dt + \frac{1}{m+2} \cos^{m+1} t \sin t. \tag{10.1}$$

Si les bornes d'intégrations sont a et b du type 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ et de manière générale $k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$I_m = \int_a^b \cos^m t\, dt,$$

on a la relation de récurrence :

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m,$$

et donc :

$$\begin{cases} m \text{ pair} : \ I_{m+2} = \dfrac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2} I_0, \\ m \text{ impair} : \ I_{m+2} = \dfrac{(m+1)(m-1)...2}{(m+2)(m)...3} I_1. \end{cases} \tag{10.2}$$

Cas $a=0$ et $b=2\pi$: on a $I_0=\int_0^{2\pi}\cos^0 t\,dt=2\pi$ et $I_1=\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } & \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{m+2} t\,dt = 2\pi\,\frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } & \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{m+2} t\,dt = 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

(On retrouve $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t+1}{2}\,dt=\pi$).
Cas $a=-\frac{\pi}{2}$ et $b=\frac{\pi}{2}$: on a $I_0=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 t\,dt=\pi$ et $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=[\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } & \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2} t\,dt = \pi\,\frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } & \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2} t\,dt = 2\,\frac{(m+1)(m-1)...2}{(m+2)(m)...3}. \end{cases} \tag{10.4}$$

▟

Exercice 10.2 Calculer une primitive $\int(\sin^n t)(\cos^2 t)\,dt$. Puis calculer une primitive $\int\sin^{m+2} t\,dt$. Donner une relation pour les intégrales $\int_0^{2\pi}\sin^{m+2} t\,dt$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2} t\,dt$

Réponse. On pose $u'(t)=\sin^m t\cos t$ de primitive $u(t)=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1} t$, et on pose $v(t)=\cos t$, de dérivée $v'(t)=-\sin t$, pour l'intégration par parties (à une constante près) :

$$\int\sin^m t\cos^2 t\,dt=\int\frac{1}{m+1}\sin^{m+2} t+\frac{1}{m+1}\sin^{m+1} t\cos t.$$

Puis $\sin^{m+2} t=\sin^m t(1-\cos^2 t)$, d'où :

$$\int\sin^{m+2} t\,dt=\int\sin^m t\,dt-\int\frac{1}{m+1}\sin^{m+2} t-\frac{1}{m+1}\sin^{m+1} t\cos t,$$

d'où la primitive cherchée :

$$\int\sin^{m+2} t\,dt=\frac{m+1}{m+2}\int\sin^m t\,dt-\frac{1}{m+2}\sin^{m+1} t\cos t. \tag{10.5}$$

Si les bornes d'intégrations sont a et b du type 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ et de manière générale $k\frac{\pi}{2}$ pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose, pour $m\in\mathbb{N}$:

$$I_m=\int_a^b\sin^m t\,dt,$$

on a la relation de récurrence :

$$I_{m+2}=\frac{m+1}{m+2}I_m,$$

et donc :

$$\begin{cases} m \text{ pair : } & I_{m+2}=\dfrac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}I_0, \\ m \text{ impair : } & I_{m+2}=\dfrac{(m+1)(m-1)...2}{(m+2)(m)...3}I_1. \end{cases} \tag{10.6}$$

Cas $a=0$ et $b=2\pi$: on a $I_0=\int_0^{2\pi}\sin^0 t\,dt=2\pi$ et $I_1=\int_0^{2\pi}\sin t\,dt=0$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } & \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{m+2} t\,dt = 2\pi\,\frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } & \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{m+2} t\,dt = 0. \end{cases} \tag{10.7}$$

(On retrouve $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{-\cos 2t+1}{2}\,dt=\pi$).
Cas $a=-\frac{\pi}{2}$ et $b=\frac{\pi}{2}$: on a $I_0=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 t\,dt=\pi$ et $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=[\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } & \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2} t\,dt = \pi\,\frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } & \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2} t\,dt = 0. \end{cases} \tag{10.8}$$

▟

Références

[1] Avez A. : *Calcul différentiel*. Masson, 1983.

[2] Hurley J. : *Calculus*. Wadsworth Publishing Company,S 1987.

[3] Lang S. : *Calculus of Several Variables*. Springer–Verlag, 1987.

[4] O'Neil P. : *Advanced Engineering Mathematics*. PWS, 1995.

[5] Strang G. : *Calculus*. Wellesley Cambridge Press, 1992.