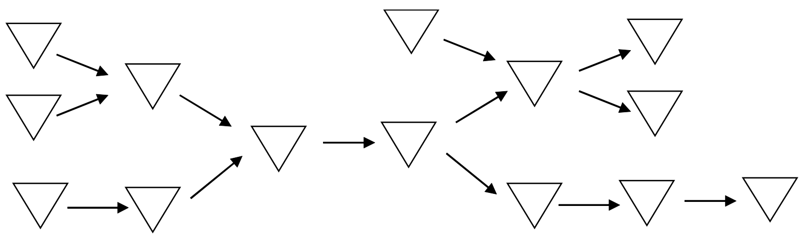
Gestion des stocks et planification de production

Notes de cours



Jean-Philippe Gayon (ISIMA - Clermont Auvergne INP)

14 avril 2025

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ces notes de cours [a] ont été réalisées, entre autres, à partir des ouvrages de Zipkin (2000), Giard (2003), Porteus (2002) et Vallin (2001).

Les stocks sont présents partout. Toute personne ou entreprise constitue des stocks de natures variées. Les particuliers stockent de la nourriture, des feuilles de papier, de l'argent, du produit lessive ou encore des stylos. Les entreprises stockent des feuilles de papier mais également des produits plus techniques tels que roulements à billes, moteurs, circuits imprimés.

La première question légitime à se poser est celle de leurs fonctions. La fonction la plus évidente d'un stock est de pouvoir disposer rapidement d'un produit. Prenons l'exemple des feuilles de papier qui semblent être un besoin universel, pour l'instant du moins. Nous les stockons afin d'y recourir dés que nécessaire ; ce serait une perte de temps considérable que d'acheter une feuille de papier chaque fois que nécessaire. Dans un environnement concurrentiel, les fournisseurs doivent répondre rapidement à la demande de leurs clients et la constitution de stocks leur permet de répondre à cette contrainte. Ainsi, lorsqu'un client se rend chez son boulanger, il apprécie de pouvoir repartir avec sa baguette. En cas de rupture de stock, il doit attendre la prochaine fournée de pain, ce qui l'encourage à aller voir à la concurrence ou le décourage d'acheter du pain ce soir-là. Du point de vue du boulanger, une rupture de stock signifie un manque à gagner, voire la perte d'un client. Acheter un produit en grande quantité permet en outre de réaliser des économies d'échelle en diminuant le coût unitaire d'achat. La spéculation peut aussi être une autre bonne raison de constituer des stocks. Le marché des matières premières telles que l'or, le pétrole en sont de frappants exemples. La constitution de stocks permet enfin d'anticiper des aléas sur les demandes, les livraisons ou encore la production.

a. Notes du cours de gestion des stocks à Grenoble INP - Génie Industriel, rédigées par Jean-Philippe Gayon.

Afin de se passer totalement de stocks, il faudrait être capable de livrer ou de produire instantanément un produit. Cette solution est malheureusement impossible ou trop coûteuse dans la majorité des situations. Prenons l'exemple d'un fabriquant de téléviseurs à écran plat qui ne constituerait pas de stocks et qui recevrait des commandes d'un distributeur. Sur un plan technique, il est capable d'assembler un téléviseur en une demi-journée, délai raisonnable pour son client. Mais est-il capable de répondre dans un délai raisonnable à une commande de 1000 téléviseurs ? C'est à priori possible de fabriquer 1000 téléviseurs en une demi-journée si l'on peut en fabriquer un en une demi-journée. Malheureusement, cela nécessiterait des moyens de production et une main d'oeuvre considérables. Une production rapide coûte cher et il en est de même pour une livraison rapide.

Les stocks semblent inévitables dans de nombreuses situations. La deuxième question qui vient alors à l'esprit est : pourquoi ne pas constituer des stocks très importants afin d'éviter toute rupture ? Les raisons de ne pas stocker de grandes quantités sont nombreuses. Nous n'achetons pas des rames de papier par camions par manque de place ou encore du lait frais en grandes quantités car il risque de se périmer. Une autre raison pour ne pas stocker de grandes quantités est d'ordre financier. Si on ne dispose que de peu d'argent, on ne peut constituer que des stocks limités. Si l'on dispose de beaucoup d'argent, il peut être plus intéressant de placer cet argent plutôt que de constituer de gros stocks.

Pour résumer, nous pouvons lister un certain nombre de raisons encourageant le stockage :

— Satisfaction rapide des demandes
— Anticipation des aléas (demande, livraison, production)
— Économies d'échelle
— Capacité de production adaptée et non surdimensionnée
— Spéculation (anticipation d'une hausse des prix)

D'autres raisons poussant au contraire à limiter ses stocks :

— Immobilisation d'argent
— Immobilisation d'espace
— Péremption et obsolescence des produits
— Fabrication de produits très spécifiques, voire uniques, difficiles à anticiper
— Spéculation (anticipation d'une baisse des prix)
— Fournisseur en situation de monopole

Sans forcément le formaliser, nous développons des stratégies afin d'optimiser les quantités que nous stockons. Les stratégies diffèrent d'un individu à l'autre et d'une entreprise à l'autre et dépendent de l'objectif recherché. Dans un couple, l'un voudra constituer des stocks énormes de nourriture afin de faire les courses le moins souvent possible tandis que l'autre voudra le moins de stocks possibles afin d'éviter de jeter des produits périmés ou encore pour ne pas encombrer les placards.

La question qui se pose alors est de savoir quand se réapprovisionner et en quelles quantités. A travers ce cours, nous tenterons de répondre à ces questions à l'aide de modèles plus ou moins élaborés.

Chapitre 2

Demande constante - Modèle de Wilson et variantes

2.1 Sans rupture de stock

2.1.1 Hypothèses

Les principales hypothèses du modèle le plus simple sont les suivantes :

— Un seul produit
— Demande continue de taux λ
— L = Délai d'approvisionnement
— h = Coût de possession d'une unité de stock pendant une unité de temps (h pour holding en anglais)
— k = Coût fixe d'approvisionnement
— c = Coût variable d'approvisionnement
— Objectif : Trouver une politique d'approvisionnement qui minimise les coûts moyens à horizon infini, sous la contrainte de satisfaire toutes les demandes sans délai

Ce modèle est souvent appelé *modèle de Wilson*. Il a été introduit au début du 20ème siècle et constitue l'une des pierres angulaires de la gestion des stocks ainsi que de la recherche opérationnelle. Revenons maintenant un peu plus en détail sur certaines hypothèses et introduisons quelques notations.

Produit

Nous considérons un produit unique, indéfiniment divisible. Nous dirons que ce produit est continu. Cette hypothèse semble réaliste pour des matières liquides (jus d'orange, pétrole, etc.) mais l'est moins pour des produits discrets, c'est à dire non sécables (stylo, voiture, etc.). Ainsi, pourra-t-on avoir 5.37 unités. Une telle hypothèse peut être une bonne approximation pour des produits discrets, si les quantités de réapprovisionnement sont suffisamment importantes.

Demande

La demande pour ce produit est continue et constante, de taux λ (unité : [produit].[s]$^{-1}$). Ainsi, pendant un intervalle de temps Δt, la demande est de $\lambda \Delta t$, quel que soit la longueur de l'intervalle Δt. La demande est déterministe car connue à l'avance. Nous supposerons par ailleurs qu'il ne peut y avoir de rupture de stock, c'est-à-dire que les demandes doivent toutes être satisfaites immédiatement.

Structure des coûts

Nous considérons trois types de coûts :

— h : coût de possession du stock par produit stocké et par unité de temps (unité : [euro].[produit]$^{-1}$.[s]$^{-1}$)

— k : coût fixe pour passer une commande (unité : [euro])

— c : coût variable pour chaque produit commandé (unité : [euro].[produit]$^{-1}$)

Ainsi, lorsque lorsqu'une commande de $q > 0$ unités est passée, il en coûte $k + qc$. Si aucune commande n'est passée ($q = 0$), le coût de commande est nul. En utilisant la fonction indicatrice, on peut résumer le coût d'une commande ainsi :

$$k\mathbb{1}_{q>0} + qc = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 0 \\ k + qc & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Stock physique et stock brut

Quelques notations à l'instant t :

— $SP(t)$ = Stock physique disponible

— $SC(t)$ = Quantité commandée mais non encore reçue

— $SB(t)$ = Stock brut = $SP(t) + SC(t)$

La notion de stock brut est essentielle en gestion des stocks. Les décisions doivent être en prises en fonction du stock brut et non du stock physique.

Lorsque le délai d'approvisionnement L est nul, le stock physique est toujours égal au stock brut. En effet, une quantité commandée arrive immédiatement et $SC(t) = 0$ pour tout t.

2.1.2 Politiques d'approvisionnement

Une *politique d'approvisionnement* est un ensemble de règles qui spécifient à chaque instant quelle quantité commander. On peut résumer une politique d'approvisionnement par deux suites de nombres :

— $\{t_i\}_{i\geq 1}$: les instants où des commandes sont passés

— $\{q_i\}_{i\geq 1}$: quantités commandées à ces instants

Un exemple illustratif est donné sur la figure 2.1.

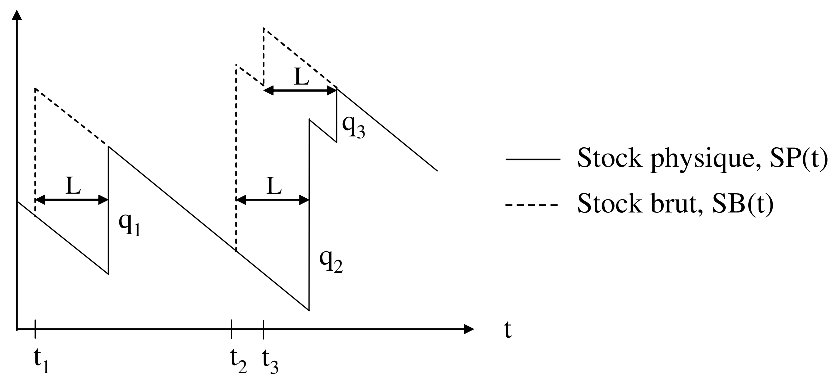


FIGURE 2.1 – Évolution des stocks pour une politique quelconque

Présentons maintenant quelques politiques classiques.

Gestion à point de commande

Une *gestion à point de commande* consiste à passer commande lorsque le stock brut $SB(t)$ atteint r. Le paramètre r sera appelé le *point de commande*(ou seuil d'alerte). On peut distinguer plusieurs classes de politiques à point de commande :

— Une politique (r, q) commande une quantité q si $SB(t) \leq r$.

— Une politique (r, S) (avec $r \leq S$) commande $S - SB(t)$ si $SB(t) \leq r$. Ainsi, une politique (r, S) recomplète le stock brut à S à chaque fois qu'il tombe en-dessous de r. Le paramètre S est appelé *stock nominal* ou *niveau de recomplètement*.

Gestion calendaire

Dans une politique à *gestion calendaire*, les commandes sont passées à intervalle de temps fixe, toutes les u unités de temps.

— Une politique (T, q) commande toutes les T périodes une quantité q.

— Une politique (T, S) commande toutes les T périodes une quantité $(S - SB(t))$, afin de recompléter le stock brut à S.

Dans le tableau 2.1, les politiques sont classées suivant deux critères :

— Les quantités commandées sont-elles fixes ou variables ?

— Les intervalles de temps entre deux commandes sont-ils fixes ou variables ?

		QUAND ?	
		Intervalle fixe	Intervalle variable
COMBIEN ?	quantité fixe	(T, q)	(r, q)
	quantité variable	(T, S)	(r, S)

Table 2.1 – Classification des politiques, d'après Vallin (2001)

Il existe de nombreuses variantes de ces politiques. Lorsque les paramètres sont non stationnaires (par exemple la demande augmente dans le temps), il peut être judicieux de considérer des politiques non stationnaires. Par exemple, une politique (r_t, S_t) consiste à recompléter le stock à S_t lorsque le stock brut atteint r_t à l'instant t.

On peut aussi combiner plusieurs politiques. Ainsi, une politique (T, r, S) consiste à recompléter le stock brut à S toutes les T unités de temps, uniquement si le stock brut tombe à r.

Equivalence des politiques

Pour le problème qui nous intéresse (décrit à la section 2.1.1), les quatre types de politique sont équivalentes. En posant $T = q/\lambda$ et $S = r + q$, les politiques (r, q), (r, S), (T, q) et (T, S) ont alors la même évolution de stock et donc le même coût moyen.

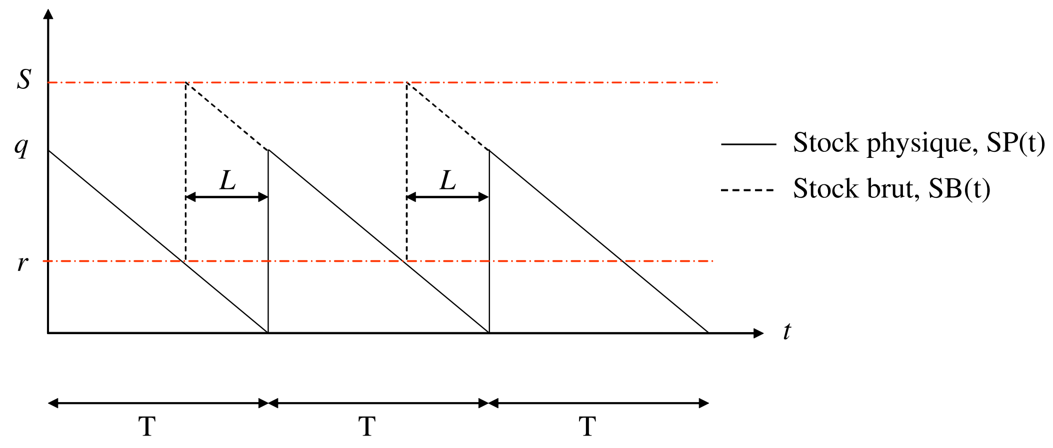


FIGURE 2.2 – Equivalence entre les politiques

Cette équivalence n'est en général pas vraie, notamment lorsque l'on considère des demandes aléatoires.

2.1.3 Politiques ZIO

Une politique d'approvisionnement est dite *Zero Inventory Ordering* (ZIO) si les commandes arrivent exactement quand le stock physique s'annule. La figure 2.3 donne un exemple de l'évolution du stock physique pour une politique ZIO.

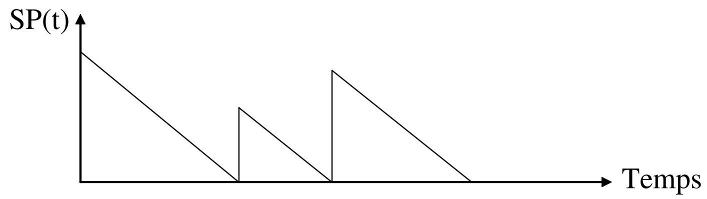


FIGURE 2.3 – Exemple de politique ZIO

Nous allons montrer que la politique optimale est nécessairement ZIO. Cette propriété n'est plus vraie lorsque l'on considère d'autres modèles de gestion des stocks (typiquement une demande aléatoire).

Théorème 2.1. *La propriété ZIO est dominante : pour toute politique non ZIO, il existe une politique ZIO de coût inférieur.*

Démonstration. Soit une politique π qui ne soit pas ZIO et caractérisée par des instants d'approvisionnement $\{t_i\}_{i\geq 1}$ et des quantités commandées $\{q_i\}_{i\geq 1}$. Soit t_j le premier instant où une commande est passée alors que le stock n'est pas nul. Nous allons construire une politique π', caractérisée par $\{t'_i\}_{i\geq 1}$ et $\{q'_i\}_{i\geq 1}$ (figure 2.4) tels que

— $t'_i = t_i$, $q'_i = q_i$ pour $i < j$ (l'évolution du stock est la même pour $t < t_j$)

— $t'_j = t_j + \dfrac{SP(t_j^-)}{\lambda}$, $q'_j = \sum_{i:t_j \leq t_i \leq t'_j} q_i$ (attendre que le stock atteigne 0 pour passer la j-ième commande)

— $t'_i = t_{i+k}$, $q'_i = q_{i+k}$ pour $i > j$ et avec k le nombre de commandes passées par la politique π sur l'intervalle $[t_j, t'_j]$ (l'évolution du stock est la même pour $t \geq t_j$)

La politique π' a un coût fixe inférieur (nombre de commandes inférieur) mais aussi un coût de possession strictement inférieur. En itérant la même procédure, on réussit ainsi à construire une politique ZIO de coût moyen strictement inférieur à la politique π. $\square$

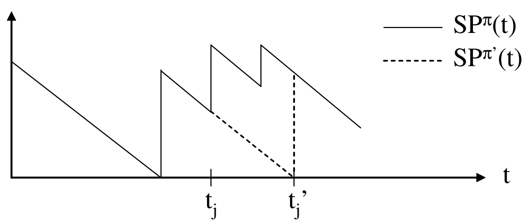


FIGURE 2.4 – Construction d'une politique ZIO (π') meilleure qu'une politique non ZIO (π)

2.1.4 Dynamique du système

Considérons une politique (r, q) et ZIO. La consommation pendant le délai d'approvisionnement doit être égale à r car la politique est ZIO. Nous avons donc la relation

$$r = \lambda L.$$

Le point de commande r est donc le même pour toute politique ZIO réalisable. On peut donc dire que le paramètre q suffit à caractériser une politique (r, q) et ZIO.

Nous allons exprimer le niveau de stock $SP(t)$ à l'instant t en supposant qu'une commande de taille q a été passée à $t = -L$ et est arrivée à $t = 0^+$. Notons u la date à laquelle tout le stock initial est consommé :

$$u = \frac{q}{\lambda}$$

Nous pouvons alors exprimer $SP(t)$ entre les instants 0 et u :

$$\begin{cases} SP(t+dt) = SP(t) - \lambda dt \text{ pour } 0 \leq t < u \\ SP(0^+) = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP'(t) = -\lambda \text{ pour } 0 \leq t < u \\ SP(0^+) = q \end{cases}$$

$\Rightarrow SP(t) = q - \lambda t$ pour $0 \leq t < u$

Le problème est u-périodique et on en déduit aisément le niveau de stock à tout instant :

$$SP(t) = q - \lambda(t - nu) \quad \text{pour} \quad nu \leq t < (n+1)u, n \in \mathbb{N}$$

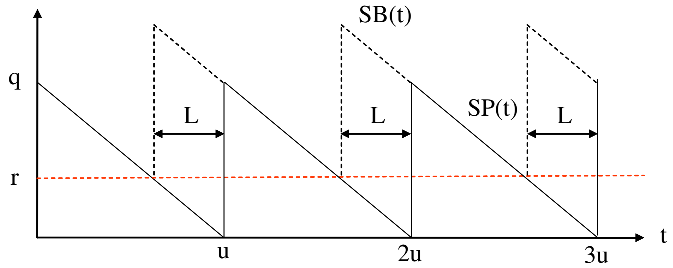


FIGURE 2.5 – Evolution du stock physique et du stock brut pour une politique (r, q) et ZIO

2.1.5 Paramètres de performance

Nous allons exprimer différents paramètres de performance en fonction des données du problème (λ, k, h, c, L) et de q. Le *niveau de stock moyen*, noté $\overline{SP}$, vaut :

$$\overline{SP} = \frac{1}{u}\int_0^u SP(t)dt = \frac{1}{u} \times \frac{qu}{2} = \frac{q}{2}$$

On obtient le *temps moyen passé en stock* par un produit (ou *temps d'écoulement d'un produit* ou *temps de rotation d'un stock*), noté $\overline{SW}$ (W pour waiting), en appliquant la loi de Little[a] :

$$\overline{SW} = \frac{\overline{SP}}{\lambda} = \frac{q}{2\lambda} \quad \text{(Loi de Little)}$$

a. La loi de Little dit que le nombre moyen de clients dans un système stable est égal à leur fréquence moyenne d'arrivée multipliée par leur temps moyen passé dans le système (voir n'importe cours de file d'attente, par exemple celui de Baynat (2000) disponible à la bibliothèque de GI). Ici les clients considérés sont les produits en stock. La fréquence de sortie (et d'arrivée) des produits est λ, le nombre moyen de produits dans le système est $\overline{SP}$ et le temps moyen passé par par un produit dans le système est $\overline{SW}$. La loi de Little nous dit alors que $\overline{SP} = \lambda\overline{SW}$.

On aurait pu aussi obtenir ce résultat par un calcul direct :

$$\overline{SW} = \frac{1}{u}\int_0^u t dt = \frac{u}{2} = \frac{q}{2\lambda}$$

Le *rotation des stocks* est définie comme le nombre de fois où les stocks sont renouvelés par unité de temps :

$$\text{Rotation des stocks} = \frac{1}{\overline{SW}} = \frac{2\lambda}{q}$$

Une faible rotation signifie que les pièces restent longtemps en stock. On peut aussi exprimer la rotation des stocks comme suit :

$$\text{Rotation des stocks} = \frac{\text{Consommation par unité de temps}}{\text{Stock moyen}} = \frac{\lambda}{q/2}$$

En entreprise, la période de référence sera souvent l'année et la rotation du stock sera alors :

$$\text{Rotation des stocks (par année)} = \frac{\text{Consommation annuelle}}{\text{Stock moyen}}$$

Une rotation de 3 signifie alors qu'une pièce en stock est renouvelé 3 fois dans l'année.

Si l'on a un entrepôt avec n, on peut exprimer une rotation des stocks en valeur sur tout l'entrepôt comme suit :

$$\text{Rotation des stock en valeur} \;= \frac{\text{Coût d'achat par unité de temps}}{\text{Valeur stock moyen}}$$

Si chaque produit est géré suivant un modèle de Wilson avec une quantité commandée q_i et un coût variable c_i, cela donne :

$$\text{Rotation des stock en valeur} \;= \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i q_i/2}$$

La *couverture de stock* est, à l'instant t, la durée pendant laquelle on peut satisfaire la demande avec le stock physique à t. Ainsi, la couverture de stock est de u en début de période (lorsqu'une commande vient d'arriver) et de 0 en fin de période.

2.1.6 Quantité économique de commande

Notons $C(q)$ le coût par unité de temps (ou coût moyen) sur un horizon infini. $C(q)$ est la somme du coût de possession par unité de temps, $C_h(q)$, du coût fixe d'approvisionnement par unité de temps, $C_k(q)$ et du coût variable d'approvisionnement par unité de temps, $C_c(q)$. Pour calculer ces quantités, il suffit de se placer sur une période car le problème est u-périodique. Le coût fixe sur une période est de k, ce qui donne un coût par unité de temps

$$C_k(q) = k/u = \frac{\lambda k}{q}.$$

Le coût de possession par unité de temps est donné par

$$C_h(q) = \frac{1}{u}\int_0^u hSP(t)dt = h\overline{SP} = \frac{hq}{2}.$$

Toute la demande étant satisfaite, le coût variable par unité de temps vaut

$$C_c(q) = \lambda c.$$

Ce coût est indépendant de la quantité commandée car toute politique réalisable satisfait toute la demande. L'influence de q sur les différents coûts est représentée sur la figure 2.6.

Finalement :

$$\begin{aligned} C(q) &= C_h(q) + C_k(q) + C_c(q) \\ &= \frac{hq}{2} + \frac{\lambda k}{q} + \lambda c \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant chercher la *quantité économique de commande* q^*, la valeur de q qui minimise le coût moyen $C(q)$. Pour cela, calculons les dérivées première et seconde de C :

$$C'(q) = h/2 - \frac{\lambda k}{q^2} \qquad C''(q) = \frac{2\lambda k}{q^3}$$

$C(q)$ est une fonction strictement convexe pour $q > 0$ ($C''(q) > 0$). Le tableau 2.2 résume les variations de $C(q)$.

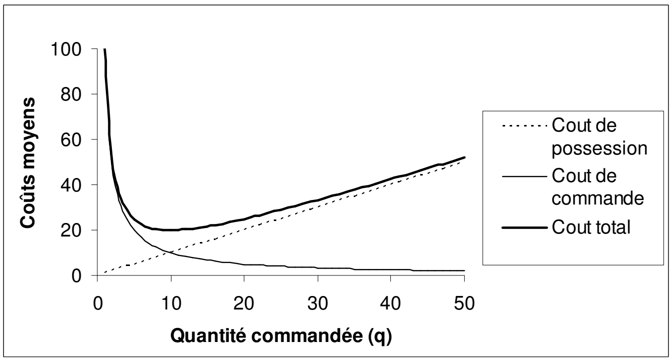


FIGURE 2.6 – Coûts moyens en fonction de la quantité commandée. Données : $\lambda = 10, k = 10, c = 0, h = 2$.

q	0	q^*	$+\infty$
$C''(q)$		$+$	
$C'(q)$	$-\infty$	0	$+h/2$
$C(q)$	$+\infty$	C^*	$+\infty$

TABLE 2.2 – Tableau de variations de $C(q)$

L'unique minimum de $C(q)$ satisfait $C'(q) = 0$ et nous obtenons :

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} \quad \text{(Formule de Wilson)} \tag{2.2}$$

$$C^* \equiv C(q^*) = \lambda c + \sqrt{2\lambda k h} \tag{2.3}$$

$$u^* = \frac{q^*}{\lambda} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}$$

La quantité q^* est souvent appelée quantité économique de commande. La formule de Wilson a été proposée par Harris (1913) et popularisée par Wilson (1934).

Remarque 1. *On peut observer qu'à l'optimal les coûts fixes égalent les coûts de possession :*

$$C_h(q^*) = C_k(q^*) = \sqrt{\frac{\lambda k h}{2}}$$

Si la quantité commandée est q et que les coûts de possession sont inférieurs aux coûts fixes ($C_h(q) < C_k(q)$), cela signifie que l'on commande trop souvent (et inversement).

2.1.7 Analyse de sensibilité

Nous allons regarder l'influence des différents paramètre sur q^* et C^* :

— La quantité économique de commande est indépendante de c et de L, croissante en λ, k et décroissante en h.

— Le coût moyen optimal est indépendant de L et croissant en λ, k, c, h.

Étudions maintenant la sensibilité de q^* et C^* à des variations des paramètres. Supposons que la valeur du paramètre α passe à α'. La quantité économique de commande passe alors de $q^*(\alpha)$ à $q^*(\alpha')$. Ainsi :

$$\frac{q^*(\lambda')}{q^*(\lambda)} = \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \qquad \frac{q^*(k')}{q^*(k)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \qquad \frac{q^*(h')}{q^*(h)} = \sqrt{\frac{h}{h'}} \tag{2.4}$$

De son côté, le coût moyen optimal passe de $C^*(\alpha)$ à $C^*(\alpha')$. Si on suppose un coût variable nul ($c = 0$), on obtient :

$$\frac{C^*(\lambda')}{C^*(\lambda)} = \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \qquad \frac{C^*(k')}{C^*(k)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \qquad \frac{C^*(h')}{C^*(h)} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

Par exemple, une augmentation de 100% du coût de possession ($h' = 2h$) conduit à une augmentation de 41% du coût optimal ($C^*(2h) = \sqrt{2}C^*(h)$) et à une diminution de 29% de la quantité économique de commande ($q^*(2h) = q^*(h)/\sqrt{2}$). Finalement, on peut dire que q^* et C^* sont relativement peu sensibles à des variations des paramètres.

On peut aussi étudier la sensibilité d'une fonction à une petite variation d'un paramètre à l'aide de la fonction d'élasticité. On définit l'*élasticité* d'une fonction f par rapport à un paramètre α par :

$$\theta = \frac{\alpha}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

L'interprétation de l'élasticité est la suivante : si α augmente de ϵ % (avec ϵ petit) alors $f(\alpha)$ augmente de $\theta\epsilon$ %. Pour montrer cela rigoureusement, il suffit d'écrire un développement limité à l'ordre 1 de f :

$$\begin{aligned} f[(1+\epsilon)\alpha] &= f(\alpha) + \alpha\epsilon\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) + o(\epsilon) \\ &= (1 + \epsilon\frac{\alpha}{f(\alpha)} \times \frac{\partial f}{\partial \alpha})f(\alpha) + o(\epsilon) \\ &= (1 + \theta\epsilon)f(\alpha) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Exercice 1. *Retrouver les élasticités de C^* et q^* aux différents paramètres, résumées dans le tableau 2.3. On lira, par exemple, que l'élasticité de q^* par rapport à h vaut $-1/2$, c'est-à-dire qu'une augmentation de 1% de h entraîne une diminution de 0.5% de q^*.*

	C^* (avec $c = 0$)	q^*
L	0	0
c	N.A.	0
λ	1/2	1/2
k	1/2	1/2
h	1/2	$-1/2$

TABLE 2.3 – Élasticité de C^*, q^* et β^* aux différents paramètres

Ainsi, une augmentation de 1% de h entraîne une augmentation de 0.5% du coût optimal C^* et une diminution de 0.5% de la quantité économique de commande q^*

Vérifions que ces résultats sont bien cohérents avec l'analyse de sensibilité précédente. Supposons que $\lambda' = \lambda(1+\epsilon)$. D'après l'équation 2.4, il vient :

$$\begin{aligned} q^*(\lambda(1+\epsilon)) &= \sqrt{1+\epsilon} q^*(\lambda) \\ &= (1+\epsilon/2)q^*(\lambda) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

et on retrouve bien une élasticité de 1/2 de q^* par rapport à λ. Il fallait se rappeler du développement limité suivant : $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$. De même :

$$\begin{aligned} q^*(h(1+\epsilon)) &= (1+\epsilon)^{-1/2} q^*(h) \\ &= (1-\epsilon/2)q^*(h) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

et on retrouve bien une élasticité de -1/2 de q^* par rapport à h.

2.1.8 Robustesse à des erreurs d'estimation des paramètres

Dans un problème réel, l'estimation des paramètres est souvent compliquée. Que se passe-t-il si un paramètre est mal estimé ? Quel est l'impact sur la quantité commandée et sur le coût ?

Dans un premier temps, nous allons regarder la sensibilité du coût moyen à une erreur sur la quantité commandée. Supposons que la quantité commandée est aq^* (avec $a > 0$) alors que la quantité optimale est q^*.

Propriété 2.1. *Lorsque $c = 0$, nous avons* $\dfrac{C(aq^*)}{C^*} = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$

Démonstration. D'après les équations (2.3) et (2.2), nous avons $C^* = \sqrt{2\lambda hk}$ et $q^* = \sqrt{2\lambda k/h}$. Par ailleurs, d'après l'équation (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} C(aq^*) &= \frac{\lambda k}{aq^*} + h\frac{aq^*}{2} = \frac{\lambda k}{a\sqrt{2\lambda k/h}} + h\frac{a\sqrt{2\lambda k/h}}{2} \\ &= \frac{1}{2a}\sqrt{2\lambda kh} + \frac{a}{2}\sqrt{2\lambda kh} = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{2\lambda kh} \\ &= \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)C^* \end{aligned}$$

□

Ainsi, si l'on commande deux fois trop ($a = 2$), le coût moyen est augmenté de 25% seulement (tableau 2.4). On dira que le coût moyen est *robuste* à une erreur sur la quantité commandée.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le coût variable était nul ($c > 0$). Lorsque $c > 0$, on peut montrer que le coût moyen est encore plus robuste à une

a	0.25	0.50	0.75	0.90	1.00	1.10	1.25	1.50	2.00	4.00
$\frac{C(aq^*)}{C^*}$	2.13	1.25	1.04	1.01	1.00	1.00	1.03	1.08	1.25	2.13

Table 2.4 – Sensibilité du coût moyen à une erreur sur la quantité commandée

erreur sur la quantité commandée, dans la mesure où le coût variable moyen est λc, quelle que soit la politique. En effet, nous avons :

$$\frac{C(aq^*)}{C(q^*)} = \frac{\lambda c + \lambda k/aq^* + haq^*/2}{\lambda c + \sqrt{2\lambda hK}} \leq \frac{\lambda k/aq^* + haq^*/2}{\sqrt{2\lambda hK}} \tag{2.5}$$

Montrer l'inégalité ci-dessus revient à montrer que $\frac{x+y}{x+z} \leq \frac{y}{z}$ si $z \leq y$ (à vérifier pour trois réels x, y, z positifs).

Supposons maintenant qu'un paramètre est mal estimé. Nous avons vu que q^* était peu sensible à une variation des paramètres. Comme le coût moyen est lui-même peu sensible à une erreur sur la quantité commandée, le coût moyen sera aussi peu sensible à une erreur d'estimation d'un paramètre.

Prenons l'exemple suivant. Supposons que le coût fixe est estimé à $\hat{K} = 40$ euros alors que le vrai coût fixe est de $K = 10$ euros. La quantité commandée est alors $\hat{q} = \sqrt{\frac{2\lambda\hat{K}}{h}}$ alors que la quantité optimale est $q^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h}}$. Nous avons alors $a = \frac{\hat{q}}{q^*} = \sqrt{\frac{\hat{K}}{K}} = 2$. D'après le tableau 2.4, il suit que $\frac{C(\hat{q})}{C^*} = 1.25$. Au final, une erreur d'estimation de +300% sur le coût fixe a entraîné une erreur sur la quantité commandée de +100% et une augmentation du coût de 25%.

2.2 Ventes différées

2.2.1 Hypothèses

Les hypothèses sont les mêmes que pour le modèle de Wilson, à la différence près que les demandes peuvent être mises en attente. On note b (pour backorder en anglais) le coût d'attente d'une unité de demande pendant une unité de temps (unité : [euros].[s]$^{-1}$). Nous utiliserons aussi les notations suivantes à l'instant t :

— $SP(t)$ = Stock physique

— $B(t)$= Nombre de demandes en attente

— $SN(t)$ = Stock net = $SP(t) - B(t)$
— $SC(t)$ = Quantité commandée mais non encore reçue
— $SB(t)$ = Stock brut = $SN(t) + SC(t)$

Si l'on suppose que l'on ne peut pas avoir à la fois du stock physique et des demandes en attente (i.e. $SP(t) > 0$ et $B(t) > 0$), ce qui serait clairement sous-optimal, nous avons la propriété suivante :

Propriété 2.1. *$SP(t) = [SN(t)]^+$ et $B(t) = [SN(t)]^-$ où $[x]^+ = \max[0, x]$ désigne la partie positive de x et $[x]^- = \max[0, -x]$ désigne la partie négative de x.*

L'évolution du stock net et du stock brut, pour une politique quelconque, est représentée sur la figure 2.7. La figure 2.8 représente l'évolution des stocks pour une politique (r, q). Dans le cas de demandes différées, le paramètre r peut prendre des valeurs positives où négatives.

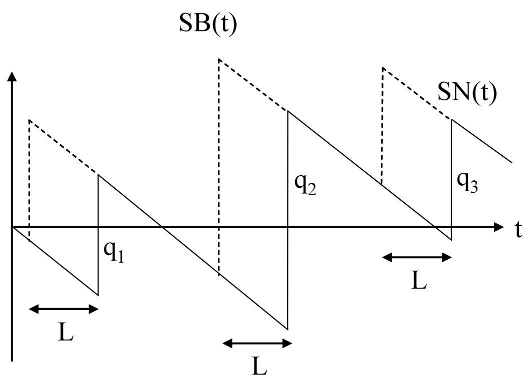


FIGURE 2.7 – Évolution des stocks net et brut pour une politique quelconque

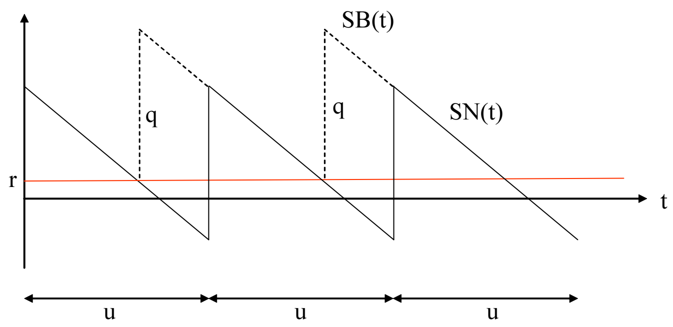


FIGURE 2.8 – Évolution des stock net et brut pour une politique (r, q)

2.2.2 Paramètres de performance

Soit α (resp. β) le stock net minimal (resp. maximal) quand une politique (r, q) est mise en oeuvre (figure 2.9). Nous devrions avoir $\alpha \leq 0$ et $\beta \geq 0$. Nous pouvons utiliser de manière équivalente les paramètres (r, q) ou les paramètres (β, q) pour définir une politique. Pour simplifier les calculs, nous allons exprimer les paramètres de performance en fonction de β et de q.

Exprimons quelques relations utiles en utilisant, entre autres, la figure 2.9 :

$$\alpha = r - \lambda L = \beta - q$$

$$\frac{u_1}{u} = \frac{\beta}{q} \text{ et } \frac{u_2}{u} = \frac{-\alpha}{q} = \frac{q-\beta}{q} \qquad \text{(Thalès)}$$

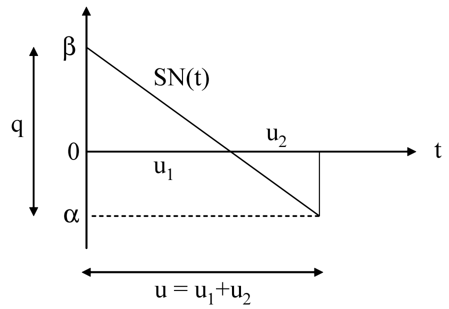


Figure 2.9 – Quelques notations

Exprimons maintenant quelques paramètres de performance en fonction de β et q :

— Stock moyen :

$$\overline{SP} = \frac{1}{u}\int_0^{u_1} SP(t)dt = \frac{u_1\beta}{2u}$$
$$= \frac{\beta^2}{2q}$$

— Nombre moyen de demandes en attente :

$$\overline{B} = \frac{1}{u}\int_{u_1}^{u} B(t)dt = \frac{-u_2\alpha}{2u} = \frac{\alpha^2}{2q}$$
$$= \frac{(q-\beta)^2}{2q}$$

— Temps moyen passé en stock par un produit :

$$\overline{SW} = \frac{\overline{SP}}{\lambda} \quad \text{(Loi de Little appliquée au système "Stock physique")}$$

— Rotation du stock $= \dfrac{1}{\overline{SW}}$

— Attente moyenne :

$$\overline{BW} = \frac{\overline{B}}{\lambda} \quad \text{(Loi de Little appliquée au système "Nombre de demandes en attente")}$$

— % des demandes satisfaites sans délai :

$$QoS = \frac{u_1}{u} = \frac{\beta}{q}$$

— Attente moyenne parmi les demandes qui ont attendu :

$$\overline{BW}_{>0} = \frac{\overline{BW}}{1 - QoS}$$

— Coût moyen :

$$\begin{aligned} C(\beta, q) &= \lambda c + \frac{k}{u} + h\overline{SP} + b\overline{B} \\ &= \lambda c + \frac{\lambda k}{q} + h\frac{\beta^2}{2q} + b\frac{(q-\beta)^2}{2q} \end{aligned}$$

2.2.3 Politique optimale

Dérivons la fonction de coût par rapport à q et β.

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{-2\lambda k + bq^2 - (b+h)\beta^2}{2q^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta} = \frac{(h+b)\beta - bq}{q}$$

$C(\beta, q)$ est deux fois différentiable et strictement convexe [b] (admis) sur son domaine de définition. Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est alors :

$$\nabla C = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial q} = 0 \text{ et } \frac{\partial C}{\partial \beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{b}{h+b} q \text{ et } bq^2 = (b+h)\beta^2 + 2\lambda k$$

En résolvant ce système à deux équations, il vient :

$$q^* = \sqrt{\frac{b+h}{b}} \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} > \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}$$

$$\beta^* = \sqrt{\frac{b}{h+b}} \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} < \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}$$

$$C^* = C(\beta^*, q^*) = \lambda c + \sqrt{\frac{b}{h+b}} \sqrt{2\lambda kh} < \lambda c + \sqrt{2\lambda kh}$$

On remarque au passage que le coût moyen optimal est inférieur au coût moyen optimal du modèle de Wilson sans attente. Ceci est logique dans la mesure où toute solution réalisable du modèle de Wilson sans attente est aussi réalisable dans le modèle avec attente. La quantité économique de commande est, pour sa part, plus grande que celle modèle de Wilson sans attente. On peut aussi calculer, à l'optimal, le stock net minimal, le point de commande et la période :

$$\alpha^* = \beta^* - q^* = -\frac{h}{h+b} q^* < 0$$

$$r^* = \alpha^* + \lambda L$$

$$u^* = q^*/\lambda$$

Si b tend vers l'infini, la politique optimale tend vers celle du modèle de Wilson sans attente. Un coût d'attente infini revient en effet à interdire les attentes des clients.

b. Une fonction f à n variables, définie sur un ensemble convexe $E \subset \mathbb{R}^n$, est dite *convexe* si

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \quad \forall x, y \in E, \forall \alpha \in [0,1]$$

f est dite *strictement convexe* si l'inégalité précédente est stricte.

Pour une fonction f deux fois différentiable, la stricte convexité equivaut à ce que la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ soit définie positive pour tout x (valeurs propres strictement positives).

	C^* (avec $c = 0$)	q^*	β^*
L	0	0	0
c	N.A.	0	0
λ	1/2	1/2	1/2
k	1/2	1/2	1/2
b	$\frac{1}{2}\frac{h}{h+b}$	$-\frac{1}{2}\frac{h}{h+b}$	$\frac{1}{2}\frac{h}{h+b}$
h	$\frac{1}{2}\frac{b}{h+b}$	$-\frac{1}{2}\frac{b}{h+b}$	$-\frac{1}{2}\frac{h+b/2}{h+b}$

Table 2.5 – Élasticité de C^*, q^* et β^* aux différents paramètres

Si l'on regarde la valeur de la qualité de service à l'optimal, on obtient une expression très simple :

$$QoS^* = \frac{\beta^*}{q^*} = \frac{b}{h+b}$$

qui tend vers 1 lorsque b tend vers l'infini ou lorsque h tend vers 0.

Exercice 2. *Montrer que les coûts fixes sont égaux à la somme des coûts de possession et d'attente lorsque l'on adopte la politique optimale.*

2.2.4 Analyse de sensibilité et de robustesse

Les élasticités de C^*, q^* et β^* par rapport aux différents paramètres sont résumées dans le tableau 2.5. En faisant tendre b vers l'infini, on ré-obtient bien les élasticités du modèle de Wilson sans attente (tableau 2.3). En outre, on remarque que les élasticités de C^* et q^* sont plus faibles, en valeur absolue, que dans le modèle de Wilson sans attente. Cela signifie que q^* et C^* sont encore moins sensibles à des variations des paramètres que dans le modèle de Wilson sans attente.

2.3 Ventes perdues

Dans le modèle avec ventes perdues, les ruptures de stock sont toujours autorisées mais leur traitement est différent. On suppose qu'une demande qui n'est pas satisfaite immédiatement est perdue et entraîne un coût c_l (l pour lost en anglais). On peut imaginer que c_l représente la marge réalisée sur la vente d'une unité de produit ou encore le coût additionnel pour procurer rapidement une unité de produit au client en cas de rupture de stock.

Nous nous intéressons toujours au problème de minimiser les coûts moyens sur un horizon infini. Considérons deux politiques totalement opposées :

— Politique π_1 : satisfaire toutes les demandes et adopter la politique optimale (r^*, q^*) du modèle de Wilson standard. Le coût moyen est alors $C_1 = \lambda c + \sqrt{2\lambda kh}$.

— Politique π_2 : ne jamais commander et ne jamais satisfaire de demande. Le coût moyen vaut alors $C_2 = \lambda c_l$.

Il est clair que si $c_l \leq c$, il n'y a aucun intérêt à maintenir l'activité et donc à avoir du stock. Nous montrons dans le théorème suivant que soit la politique π_1 est optimale, soit la politique π_2 est optimale.

Théorème 2.2. *Si $C_1 < C_2$, la politique π_1 est optimale. Si $C_1 > C_2$, la politique π_2 est optimale. Si $C_1 = C_2$, les 2 politiques sont équivalentes et optimales.*

Démonstration. Soit π une politique quelconque telle que une proportion p des demandes est satisfaite et une proportion $(1-p)$ des demandes n'est pas satisfaite. On peut diviser l'horizon de temps en deux : $[0, \infty] = A_1 \cup A_2$ où A_1 désigne l'ensemble des périodes où la demande est satisfaite et A_2 l'ensemble des périodes où la demande n'est pas satisfaite. Notons C^π le coût moyen de la politique π et C_i^π le coût moyen restreint à l'intervalle A_i. Nous avons d'une part $C_1^\pi \geq C_1$. D'autre part, nous avons $C_2^\pi = C_2 = \lambda c_l$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} C^\pi &= pC_1^\pi + (1-p)C_2^\pi \\ &\geq pC_1 + (1-p)C_2 \\ &= p(C_1 - C_2) + C_2 \end{aligned}$$

Si $C_1 \geq C_2$, nous avons $C^\pi \geq C_2$. La politique π_2 atteint la borne inférieure et est donc optimale. Par un raisonnement analogue, si $C_1 \leq C_2$, nous avons $C^\pi \geq C_1$. La politique π_1 atteint la borne inférieure et est donc optimale. □

Chapitre 3

Demande déterministe et variable dans le temps

Dans les modèles de type Wilson (chapitre 1), nous avons considéré un modèle stationnaire où les paramètres sont indépendants du temps, en particulier le taux de la demande. Un problème plus réaliste consiste à considérer que la demande varie dans le temps. Une première approche consiste à supposer que le taux de la demande $\lambda(t)$ dépend de l'instant t considéré. Ainsi, la demande pendant dt vaut $\lambda(t)dt$. Si on note $x(t)$ le stock à l'instant t, nous avons $x(t + dt) = x(t) - \lambda(t)dt$ entre deux commandes, puis :

$$x'(t) = -\lambda(t). \tag{3.1}$$

Entre deux instants de commande s_1 et s_2, le stock évolue comme suit

$$x(t) = x(s_1) - \int_s^t \lambda(u)du, \quad t \in [s_1, s_2[$$

Afin de caractériser la politique optimale, il faut décider des instants de commande et des quantités de commande à ces instants. Ce problème d'optimisation est complexe, sauf pour des fonctions de demande simples (linéaire ou exponentielle par exemple). Par ailleurs, dés que l'on va considérer des hypothèses supplémentaires (périssabilité, ...), l'équation (3.1) ne va pas avoir de solution analytique simple.

Une autre approche consiste à discrétiser le temps et les instants de décision. Dans la suite de ce chapitre, nous adopterons cette modélisation où les décisions de réapprovisionnement ne peuvent intervenir qu'à des instants prédéfinis. Dans la pratique, cette modélisation s'adapte bien à des situations où les commandes ne peuvent être passées qu'une fois par jour, par semaine ou par mois.

3.1 Sans rupture de stock

On considère le modèle DEL (Dynamic Economic Lotsize) :

— T = horizon de temps

— t = instant de décision $t = 0, 1, \cdots, T-1$

— d_t = demande à l'instant t. On notera $D_{[s,t]} = \sum_{i=s}^{t} d_i$, la demande cumulée de s à t.

— L = délai d'approvisionnement

— k_t = coût fixe d'approvisionnement à l'instant t

— c_t = coût linéaire d'approvisionnement à l'instant t

— h_t = coût de possession à l'instant t

— $x_0 = x$ stock en début de période $t = 0$

L'objectif est de déterminer une politique qui satisfait toutes les demandes et qui minimise les coûts sur l'horizon $[0, T]$. Ce problème a été résolu pour la première fois par Wagner and Whitin (1958).

Les demandes étant déterministes, on peut supposer que le délai L est nul, sans perte de généralité. En effet, lorsque $L > 0$, il suffit d'avancer les commandes de L.

Quelques notations :

— x_t = stock en début de période t

— q_t= quantité commandée en début de période t

Une politique de réapprovisionnement est caractérisée par les quantités commandées à chaque instant : $(q_0, q_1, \cdots, q_{T-1})$.

La séquence exacte des événements est la suivante :

— A l'instant t, on observe le stock disponible x_t et on encourt un coût de possession $h_t x_t$

— Une commande q_t est passée et arrive immédiatement, induisant un coût $c_t q_t + k_t \mathbb{1}_{\{q_t>0\}})$

— La demande d_t se produit et est satisfaite avec le stock $x_t + q_t$.

La dynamique du système est alors :

$$x_{t+1} = x_t + q_t - d_t$$

Une représentation possible de la dynamique est donnée sur la figure 3.1.

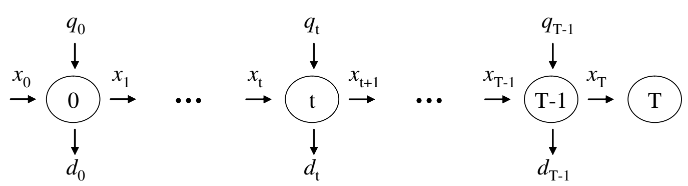


FIGURE 3.1 – Dynamique du système

Dans le cadre de ce cours, nous en resterons à la modélisation du problème. Pour plus de détails sur sa résolution, nous référons le lecteur au cours de "Recherche opérationnelle et planification" (semestre 3 de la filière ICL) ou encore à l'ouvrage de Zipkin (2000).

On peut formuler ce problème d'optimisation comme suit :

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{t=0}^{T-1} \left(h_t x_t + c_t q_t + k_t \mathbb{1}_{\{q_t>0\}}\right) + h_T x_T \\
&s.c. \quad x_0 = x && (3.2)\\
&\qquad\ x_{t+1} = x_t + q_t - d_t \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 && (3.3)\\
&\qquad\ x_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \cdots, T \\
&\qquad\ q_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \cdots, T-1
\end{aligned}$$

La quantité $\mathbb{1}_{\{q_t>0\}}$ n'est pas linéaire en q_t. On peut la linéariser en introduisant la variable binaire z_t ($= 1$ si on commande à t, 0 sinon). Notre obtenons alors un programme linéaire en nombres entiers (PLNE).

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{t=0}^{T-1} (h_t x_t + c_t q_t + k_t z_t) + h_T x_T \\
&s.c. \quad x_0 = x \\
&\qquad\ x_{t+1} = x_t + q_t - d_t \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 && (3.4)\\
&\qquad\ M_t z_t \geq q_t \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
&\qquad\ x_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \cdots, T \\
&\qquad\ q_t \geq 0 \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
&\qquad\ z_t \in \{0, 1\} \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1
\end{aligned}$$

Les paramètres M_t doivent être choisis suffisamment grands. La quantité optimale commandée à t étant nécessairement inférieure à la demande cumulée de 0 à T, on peut prendre $M_t = D_{[t,T[}$. La résolution de ce PLNE peut être longue si le nombre de variables devient important (ici, si T est grand).

Une autre approche consiste à formuler le problème sous la forme d'un plus court chemin dans un graphe orienté. Notons tout d'abord que la politique optimale est ZIO (Zero Inventory Ordering). Pour toute politique ZIO, nous avons $q_t = 0$ si $x_t > 0$ (on ne commande que si le stock est nul). Considérons deux instants de commandes consécutifs s et t d'une politique ZIO. La quantité commandée à s doit couvrir exactement la demande sur l'intervalle $[s, t[$ (l'exclusion de t de l'intervalle vient de la séquence des événements) :

$$q_s = \sum_{i=s}^{t-1} d_i$$

Ainsi, il nous suffit de connaître les instants de commande pour caractériser entièrement une politique ZIO. On peut donc représenter une politique ZIO comme étant un chemin dans un graphe dont les sommets sont les instants $t = 0, \cdots, T$.

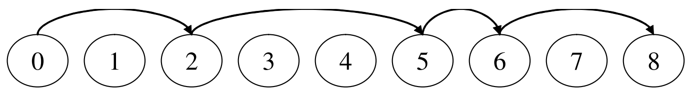


FIGURE 3.2 – Pour un horizon $T = 8$, ce chemin dans le graphe représente une politique où l'on commande aux instants $t = 0, 2, 5, 6$.

Un arc relie le sommet t à t', pour tout $t < t'$. Le poids d'un arc (t, t'), noté $k[t, t'[$, correspond au coût induit par une commande passée à t afin de couvrir la demande cumulée sur l'intervalle $[t, t'[$, notée $D[t, t'[$. Nous avons :

$$k[t, t'[= k(t) + c(t)D[t, t'[+ \sum_{s=t+1}^{t'} h(s)D[s, t'[$$

Le problème revient alors à trouver un plus court chemin du sommet 0 au sommet T. On peut par exemple utiliser l'algorithme de Dijkstra qui calcule en $O(|V|^2)$ le plus court chemin dans un graphe $G = (V, E)$ où V désigne l'ensemble des sommets du graphe, E l'ensemble des arcs et $|V|$ la cardinalité de V. Pour le problème qui nous intéresse, le nombre de sommets du graphe est T et nous avons donc un algorithme en $O(T^2)$.

Signalons enfin quelques heuristiques pour le problème DEL :

— Utiliser la formule de Wilson avec la demande moyenne $\overline{D} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} d_i$.

Commander tous les $T_{EOQ} = \sqrt{\frac{2k}{h\overline{D}}}$ (en arrondissant à l'entier le plus proche strictement positif). La quantité commandée est choisie de manière à satisfaire exactement la demande sur la période.

— Minimiser le coût moyen localement. Si on commande à $t = 0$ de manière à couvrir la demande sur $[0, u[$, le coût encouru moyen est $k[0, u[/u$. On va chercher à minimiser localement cette quantité.

Ces heuristiques peuvent cependant se réveler très mauvaises dans certaines situations.

3.2 Variantes et extensions

De nombreuses variantes et extensions du problème précédent ont été considérées dans la littérature. Nous en présentons ici trois.

Ventes différées

Supposons désormais que les demandes peuvent être mises en attente et que le coût d'attente unitaire à la période t est b_t. La formulation est proche de celle de (3.4). Il suffit d'enlever la contrainte $x_t \geq 0$ et de rajouter les coûts d'attente :

$$\begin{aligned}
\min \sum_{t=0}^{T-1} & \big(h_t x_t^+ + b_t x_t^- + c_t q_t + k_t z_t\big) + h_T x_T^+ + b_T x_T^- \\
s.c. \quad & x_0 = x \\
& x_{t+1} = x_t + q_t - d_t \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
& M z_t \geq q_t \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
& q_t \geq 0 \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
& z_t \in \{0,1\} \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1
\end{aligned}$$

Ce problème peut aussi être modélisé comme un plus court chemin dans un graphe (Zipkin, 2000) mais c'est un peu plus compliqué.

Ventes perdues

On suppose qu'une demande non satisfaite instantanément est définitivement perdue, avec une pénalité b_t par unité de demande non satisfaite.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{t=0}^{T-1} & \big(h_t x_t + b_t[d_t - (x_t + q_t)]^+ + c_t q_t + k_t z_t\big) + h_T x_T \\
s.c. \quad & x_0 = x \\
& x_{t+1} = (x_t + q_t - d_t)^+ \text{ pour } \quad t = 0, \cdots, T-1 \\
& x_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \cdots, T \quad \text{(Contrainte inutile)} \\
& M z_t \geq q_t \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
& q_t \geq 0 \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1 \\
& z_t \in \{0,1\} \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Si la pénalité b_t est indépendante du nombre de ruptures mais est appliquée à chaque fois qu'il y a rupture, il suffit de remplacer dans la fonction objectif $b_t[d_t - (x_t + q_t)]^+$ par $b_t \mathbb{1}_{\{d_t > x_t + q_t\}}$.

Coûts actualisés

Notons α le taux d'intérêt par période et posons $\gamma = 1/(1+\alpha)$. Ainsi, 1 euro investi à l'instant initial rapporte $(1+\alpha)^t$ euros à l'instant t. Réciproquement, un coût de 1 euro à l'instant t correspond à un coût actualisé à l'instant $t = 0$ de $1/(1+\alpha)^t$. La fonction objectif devient alors :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t \left(h_t x_t^+ + c_t q_t + k_t \mathbb{1}_{\{q_t>0\}}\right) + \gamma^T h_T X_T$$

En posant $h'_t = \gamma^t h_t, c'_t = \gamma^t c_t, k'_t = \gamma^t k_t$, on se ramène au problème (3.4).

Système série

Considérons une extension du modèle DEL à un système série à J étages (figure 3.3). Les caractéristiques à l'étage j et à l'instant t sont les suivantes :

— $d_t^j =$: demande à l'instant t
— $k_t^j =$ coût fixe d'approvisionnement
— $c_t^j =$ coût linéaire d'approvisionnement
— $h_t^j =$ coût de possession
— $x^j =$ stock initial

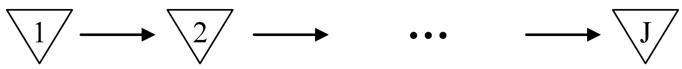


Figure 3.3 – Système série

Soit q_t^j la quantité commandée en période t à l'étage j et z_t^j une variable binaire valant 1 si on commande en période t à l'étage j et 0 sinon. On supposera que $q_t^{J+1} = 0$ pour simplifier l'écriture du PLNE :

$$\begin{aligned}
\min \sum_{j=1}^{J} & \left[\sum_{t=0}^{T-1} \left(h_t^j x_t^j + c_t^j q_t^j + k_t^j z_t^j\right) + h_T^j x_T^j\right] \\
s.c. \quad & x_0^j = x^j \\
& x_{t+1}^j = x_t^j + q_t^j - d_t^j - q_t^{j+1} \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1, \forall j \\
& x_t^j \geq 0 \text{ pour } t = 1, \cdots, T, \forall j \\
& M z_t^j \geq q_t^j \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1, \forall j \\
& q_t^j \geq 0 \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1, \forall j \\
& z_t^j \in \{0,1\} \text{ pour } t = 0, \cdots, T-1, \forall j
\end{aligned}$$

Exercice 3. *On considère un système général avec un ensemble de stocks I. Chaque stock i a un ensemble de successeurs $suc(i) \subset I$. Les autres hypothèses sont les mêmes que pour le système série. Rédiger le PLNE.*

Chapitre 4

Demande aléatoire - Modèle du vendeur de journaux

Nous allons examiner dans ce chapitre le problème dit du "vendeur de journaux" (newsboy problem ou encore newsvendor problem en anglais). L'idée générale est la suivante. Un vendeur de journaux commande la veille pour le lendemain matin un certain nombre de journaux. La demande journalière est aléatoire et le vendeur ne sait donc pas combien de journaux il peut espérer vendre. Néanmoins, au vu de l'historique des ventes passées, il connaît la distribution de cette demande.

Si il lui reste des journaux en fin de journée, il doit les jeter et a un coût d'invendu proportionnel au nombre de journaux jeté. Si il ne commande pas assez de journaux, il perd des ventes et a donc un manque à gagner, proportionnel aux nombres de ventes perdues. Le problème est de déterminer la quantité à commander afin de minimiser l'espérance des coûts.

Ce problème de gestion de stock ne se pose bien évidemment pas qu'aux vendeurs de journaux mais à toute personne ou entreprise cherchant à gérer un stock périssable, sans réapprovisionnement possible. Dans un chapitre ultérieur, nous verrons le cas où plusieurs approvisionnements sont possibles.

Exercice 4. *Un boulanger se pose la question suivante : combien de baguettes fabriquer en début de journée ? On suppose que le prix de la baguette est de 1 euro, que le coût de fabrication est de 0.2 euros et que la demande est distribuée suivant une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 5 ($X \sim \mathcal{N}(100, 5)$). Quelle est le nombre optimal de baguettes à fabriquer chaque jour ?*

Vous pourrez répondre à cette question après avoir lu la section 4.2.

4.1 Hypothèses

Les principales hypothèses sont les suivantes :

— Une période

— q = Stock en début de période (variable de décision)

— X = Variable aléatoire (v.a.) représentant la demande au cours de la période.

— b = Coût unitaire de rupture de stock ($b > 0$)

— h = Coût unitaire d'invendu ($h > 0$)

L'objectif est de déterminer la quantité à commander qui minimise l'espérance des coûts. On notera q^* la quantité optimale.

On distinguera les cas où la demande est discrète et continue :

— Si X est une v.a. continue, elle sera caractérisée par par sa fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$ ou par sa densité $f_X(x) = F'(x)$, si elle existe.

— Si X est une v.a. discrète, elle sera caractérisée par sa fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$ ou par ses probabilités $p(x) = P(X = x)$.

Vous trouverez quelques rappels de probabilité en annexe A.

Notons $C(q, X)$ le coût total si la quantité commandée est q et la demande est X. Nous avons

$$C(q,X) = \underbrace{h(q-X)^+}_{\text{Coût d'invendu}} + \underbrace{b(X-q)^+}_{\text{Coût de rupture}} = \begin{cases} h(q-X), & \text{si } X \leq q \\ b(X-q), & \text{si } X \geq q \end{cases}$$

avec $x^+ = \max[0, x]$.

Notons maintenant $C(q)$ l'espérance du coût total lorsque la quantité commandée est q. Nous avons

$$\begin{aligned} C(q) &= E[C(q,X)] \\ &= hE[(q-X)^+] + bE[(X-q)^+] \end{aligned} \tag{4.1}$$

On peut tout de suite remarquer que l'espérance des coûts d'invendu, $C_h(q)$, est croissante et convexe en q. En effet, la fonction $(q - x)^+$ est croissante et convexe en q et l'espérance préserve ces deux propriétés. De même l'espérance des coûts de rupture, $C_b(q)$, est décroissante et convexe en q. On en conclut que la fonction $C(q)$ est convexe en q.

Notons qu'en utilisant la propriété $x^+ = x + (-x)^+$, on peut ré-écrire les fonctions de coût comme suit :

$$\begin{aligned} C(q,X) &= h(q-X) + (h+b)(X-q)^+ \\ C(q) &= h(q-E(X)) + (h+b)E(X-q)^+ \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 Demande continue

On suppose dans cette partie que la demande X est continue de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Afin de pouvoir traiter ultérieuremnet le cas d'une loi normale, $f_X(x)$ n'est pas nécessairement nulle pour $x < 0$. Une demande négative correspond alors à un retour de produit.

En utilisant la propriété $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$, l'espérance du coût s'exprime

$$\begin{aligned}
C(q) &= hE[(q-X)^+] + bE[(X-q)^+] \\
&= h\int_{-\infty}^{\infty}(q-x)^+ f_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}(x-q)^+ f_X(x)dx \\
&= h\int_{-\infty}^{q}(q-x)f_X(x)dx + b\int_{q}^{\infty}(x-q)f_X(x)dx.
\end{aligned}$$

Théorème 4.1. *q minimise l'espérance des coûts $C(q)$ si et seulement si*

$$F_X(q) = \frac{b}{h+b}$$

Démonstration. Afin de trouver la quantité qui minimise l'espérance du coût, nous allons dériver $C(q)$ à l'aide de la formule de Leibniz [a] :

$$\begin{aligned}
C'(q) &= h\int_{0}^{q} f_X(x)dx - b\int_{q}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= hF_X(q) - b(1-F_X(q)) \\
&= (h+b)F_X(q) - b
\end{aligned}$$

La dérivée seconde est positive :

$$C''(q) = (h+b)F'(q) = (h+b)f_X(q) \geq 0$$

Les variations de $C(q)$ sont résumées dans le tableau 4.1.

La fonction $C(q)$ est donc convexe et est minimale si et seulement si :

$$C'(q) = 0 \Leftrightarrow F_X(q) = \frac{b}{h+b}$$

□

a.

$$\frac{\partial}{\partial_y}\int_{a_1(y)}^{a_2(y)} h(x,y)dx = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} \frac{\partial h(x,y)}{\partial_y}dx + h(a_2(y),y)a_2'(y) - h(a_1(y),y)a_1'(y)$$

q	$-\infty$	q^*	$+\infty$
$C''(q)$		$+$	
$C'(q)$	$-b$	0	$+h$
$C(q)$	$+\infty$	C^*	$+\infty$

TABLE 4.1 – Variations de $C(q)$

Remarque 2. *Si la fonction de répartition F_X est connue, il est facile de calculer par dichotomie la quantité optimale en utilisant le fait que F_X est croissante. Remarquons que la quantité optimale n'est pas forcément unique car F_X peut être constante sur un intervalle.*

Remarque 3. *Si les coûts b et h sont égaux, nous avons alors $F_X(q^*) = 1/2$ et il est optimal de commander la médiane de la demande. Si $b < h$, on commande moins que la médiane tandis que si $b > h$, on commande plus que la médiane.*

4.3 Demande discrète

Désormais on suppose que la demande X est une variable aléatoire discrète et on note $p(x) = P(X = x)$. On supposera que les quantités commandées sont aussi entières. L'espérance du coût est alors :

$$C(q) = h \sum_{0}^{q} (q - x)p(x) + b \sum_{q}^{\infty} (x - q)p(x)$$

Théorème 4.2. *La quantité suivante est optimale :*

$$q^* = \min \left[q \in I\!N | F_X(q) \geq \frac{b}{b+h} \right]$$

Démonstration. Soit $\Delta C(q) = C(q + 1) - C(q)$. Afin de trouver le minimum de cette fonction, nous allons d'abord montrer que $\Delta C(q)$ est croissant en q

(équivalent de la convexité pour une fonction discrète).

$$\begin{aligned}
\Delta C(q) &= h\left[\sum_{0}^{q+1}(q+1-x)p(x) - \sum_{0}^{q}(q-x)p(x)\right] + b\left[\sum_{q+1}^{\infty}(x-q-1)p(x) - \sum_{q}^{\infty}(x-q)p(x)\right] \\
&= h\sum_{0}^{q}p(x) - b\sum_{q+1}^{\infty}p(x) \\
&= hF_X(q) - b(1-F_X(q)) \\
&= (h+b)F_X(q) - b
\end{aligned}$$

La fonction de répartition $F_X(q)$ étant croissante en q, $\Delta C(q)$ l'est aussi et nous pouvons conclure que $C(q)$ est convexe.

La croissance de $\Delta C(q)$ implique que le minimum de $C(q)$ est atteint en :

$$q^* = \min[q \in \mathbb{N} | \Delta C(q) \geq 0] = \min[q \in \mathbb{N} | (h+b)F_X(q) - b \geq 0]$$

On notera que $q^* < \infty$ car $\lim_{q\to\infty} \Delta C(q) = h > 0$.

□

Exercice 5. *Distribution de la demande :* $p(0) = p(2) = p(3) = 0.2, p(1) = 0.4$. *Coûts unitaires :* $b = 3, h = 1$. *Calculer la quantité optimale et le coût optimal.*

Exercice 6. *Si X suit une distribution géométrique, c.a.d.* $P(X = k) = p^k(1-p)$ *pour* $k \geq 0$. *Montrer que la quantité suivante est optimale :*

$$q^* = \left\lfloor \frac{\ln\left(\dfrac{h}{h+b}\right)}{\ln p} \right\rfloor.$$

4.4 Taux de service

Nous allons maintenant définir deux taux de service différents.

Taux de service en temps Quel pourcentage du temps suis-je capable de satisfaire toute la demande ?

Taux de service en quantité Quel pourcentage des pièces demandées suis-je capable de fournir immédiatement ?

Nous utiliserons les notations suivantes :

— $\alpha(q)$ = Taux de service en temps si la quantité commandée est q

— $\beta(q)$ = Taux de service en quantité si la quantité commandée est q

Illustrons ces notions à partir de l'exemple du tableau 4.2.

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Total
Demande x	6	12	14	9	10	51
Ruptures $= (x-q)^+$	0	2	4	0	0	6
Invendus $= (q-x)^+$	4	0	0	1	0	5
Demande satisfaite $= \min(x,q)$	6	10	10	9	10	45

Table 4.2 – Exemple 1 : Ruptures, invendus et demande satisfaite pour une quantité commandée $q = 10$

Nous pouvons estimer $\alpha(q)$ et $\beta(q)$ à partir de cet échantillon : $\hat{\alpha}(q) = 3/5 = 60\%$ et $\hat{\beta}(q) = 45/51 = 88.2\%$. Le chapeau ˆ indique que ces quantités sont des estimations empiriques des probabilités. Sur cet exemple, le taux de service en quantité est meilleur que le taux de service en temps.

Prenons maintenant un exemple (tableau 4.3) où le taux de service en temps est meilleur que le taux de service en quantité. Sur cet exemple, nous avons $\hat{\alpha}(q) = 4/5 = 80\%$ et $\hat{\beta}(q) = 5/104 = 4.8\%$.

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	
Demande x	100	1	1	1	1	104
Ruptures $= (x-q)^+$	99	0	0	0	0	99
Invendus $= (q-x)^+$	0	0	0	1	0	0
Demande satisfaite $= \min(x,q)$	1	1	1	1	1	5

Table 4.3 – Exemple : Ruptures, invendus et demande satisfaite pour une quantité commandée $q = 1$

Taux de service en temps

Imaginons que l'on répète une infinité de fois l'expérience du vendeur de journaux, le taux de service en temps représente la proportion de périodes où toute la demande est satisfaite, soit

$$\alpha(q) = P(X \leq q) = F_X(q).$$

A l'optimal, nous avons :

— $\alpha^* = \dfrac{b}{h+b}$ pour une demande continue,

— $\alpha^* \geq \dfrac{b}{h+b}$ pour une demande discrète.

Taux de service en quantité

Le deuxième taux de service est moins immédiat à calculer. On notera $Y = \min(X, q)$ la quantité vendue (= demande satisfaite).

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon de demandes indépendantes, de même distribution que X. Soit Y_i la quantité vendue demande satisfaite) correspondant à la demande X_i : $Y_i = \min(X_i, q)$.

Sur cet échantillon, la proportion de demandes satisfaites vaut

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{E(Y)}{E(X)}$$

Cette dernière limite n'est rien d'autre qu'une application de la loi des grands nombres. Nous avons donc un taux de service en quantité qui vaut

$$\beta(q) = \frac{E(Y)}{E(X)}.$$

Demande discrète. Regardons maintenant comment calculer $E(Y)$ lorsque la demande X est discrète. Pour ce faire, commençons par déterminer la distribution de Y :

$$P(Y = y) = \begin{cases} P(X = y), & \text{si } y < q \\ P(X \geq q) & \text{si } y = q \end{cases}$$

Il vient alors

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{q} yP(Y = y) = \sum_{y=0}^{q-1} yP(X = y) + qP(X \geq q)$$

Demande continue. Lorsque la demande X est une variable aléatoire continue, la quantité vendue Y a pour fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(\min(X, q) \leq x) = P(X \leq x \text{ ou } q \leq x) \\ &= \begin{cases} P(X \leq x) = F_X(x) & \text{si } x < q \\ 1 & \text{si } x \geq q \end{cases}. \end{aligned}$$

La fonction de répartition est discontinue en q : $F_Y(q^-) = F(q)$ et $F_Y(q) = 1$. Nous avons en effet une probabilité non nulle d'avoir $Y = q$: $P(Y = q) = P(X \geq q) = 1 - F(q)$. Ainsi Y est une variable aléatoire mixte (voir annexe A).

Nous avons alors

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^q x f_X(x)dx + qP(Y = q) \\ &= \int_0^q x f_X(x)dx + qP(X \geq q) \end{aligned}$$

4.5 Stock de sécurité

On appellera *stock de sécurité* ce qui est commandé en plus de l'espérance de la demande. On notera ν le stock de sécurité.

$$\nu = q - E(X)$$

Le stock de sécurité peut être négatif si on commande moins que l'espérance de la demande.

Exercice 7. *Supposons que la médiane de X est égale à l'espérance de X. Lorsque l'on commande la quantité optimale, montrer que le stock de sécurité est positif (respectivement négatif) si $b \geq h$ (respectivement $b \leq h$).*

4.6 Loi normale

Supposons dans cette partie que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ d'espérance μ et d'écart-type σ. Il est à noter que X peut prendre des valeurs négatives, ce qui peut correspondre à des retours de produits. Si l'écart-type est faible, la probabilité d'avoir des valeurs négatives sera faible aussi. Si $\sigma/\mu = 0.1$, alors $P(X < 0) = 7.6.10^{-24}$. Si $\sigma/\mu = 1$, alors $P(X < 0) = 0.159$.

Soit $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ la variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, de densité ϕ. Pour mémoire, nous avons pour $x \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

Notons $\alpha = \dfrac{b}{h+b}$. D'après le théorème du vendeur de journaux (version continue), la quantité optimale satisfait $P(X \leq q) = \alpha$. En notant z_α la quantité telle que $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$, il vient

$$q = \mu + \sigma z_\alpha.$$

D'après (4.2), le coût $C(q)$ s'écrit

$$\begin{aligned} C(q) &= h(q-\mu) + (h+b)E(X-q)^+ \\ &= hz\sigma + (h+b)\sigma E(Z-z)^+. \end{aligned}$$

Nous remarquons au passage que $C(q)$ augmente linéairement avec l'écart-type σ. Nous avons par ailleurs

$$\begin{aligned} E(Z-z_\alpha)^+ &= \int_{z_\alpha}^{\infty} (x-z_\alpha)\phi(x)dx \\ &= \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})dx - z_\alpha \int_{x=z_\alpha}^{\infty} \phi(x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \right]_{z_\alpha}^{+\infty} - z_\alpha P(Z \geq z_\alpha) \\ &= \phi(z_\alpha) - z_\alpha(1-\alpha) \\ &= \phi(z_\alpha) - z_\alpha \frac{h}{h+b} \end{aligned}$$

Le coût optimal se simplifie alors en $C(q^*) = (h+b)\sigma\phi(z_\alpha)$.

Théorème 4.3. *Soit une demande suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, nous avons*

$$\begin{aligned} q^* &= \mu + \sigma z_\alpha && \textit{(quantité optimale)} \\ C^* &= (h+b)\sigma\phi(z_\alpha) && \textit{(coût optimal)} \\ \nu^* &= \sigma z_\alpha && \textit{(stock de sécurité à l'optimal)} \\ \beta^* &= 1 - \frac{\sigma}{\mu}[\phi(z_\alpha) - z_\alpha(1-\alpha)] && \textit{(taux de service en qté à l'optimal)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'écart-type a une influence linéaire sur le stock de sécurité et le coût optimal. Plus la demande est variable, plus le coût optimal est élevé. Si l'écart-type est nul, le coût optimal ainsi que le stock de sécurité sont nuls car la demande est égale à μ avec une probabilité 1 et il est optimal de commander exactement μ (cela revient à un problème déterministe). La médiane étant égale à l'espérance pour une loi normale, nous avons par ailleurs un stock de sécurité ν^* positif si $b \geq h$, négatif si $b \leq h$ et nul si $b = h$.

Pourquoi la loi normale est-elle si importante ?

La loi normale est très importante car la demande peut souvent être approchée par une loi normale. En effet, supposons que la demande X soit la somme des demandes indépendantes de n clients (ce qui est le cas en pratique !) :

$$X = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

où A_i est la demande du client i, de distribution quelconque (discrète ou continue). On notera l'espérance et l'écart-type de A_i comme suit :

$$E(A_i) = \mu_i, \sigma(A_i) = \sigma_i$$

Nous avons alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$$

Une version généralisée du théorème centrale limite nous dit que si les demandes $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendantes et que n est suffisamment grand (en général $n > 20$), alors on peut approcher la distribution de X par la loi normale $\mathcal{N}\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$. Ainsi, dans de nombreuses applications, la loi normale apparaît tout naturellement.

Mutualisation des stocks

On considère un système avec n entrepôts de stockage indexés par $i = 1, \ldots, n$. A chaque entrepôt, le coût d'invendu est h et le coût de rupture est p. L'entrepôt i voit une demande X_i distribuée suivant une loi normale de moyenne μ_i et d'écart-type $\sigma_i > 0$. On notera par ailleurs σ_{ij} la covariance entre X_i et X_j et $\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ le coefficient de corrélation entre X_i et X_j. On notera enfin la demande totale $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Considérons les deux situations extrêmes suivantes :

- Un système décentralisé où un stock séparé est géré pour chaque type de demande
- Un système centralisé où toutes les demandes sont satisfaites par un entrepôt central

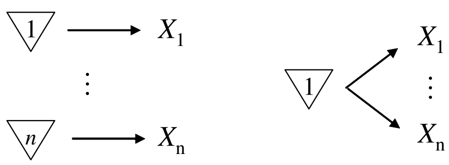


FIGURE 4.1 – Système décentralisé versus système centralisé

Demandes quelconques Le coût optimal du système décentralisé correspond à la somme des coûts des n entrepôts. En posant $K = (h + b)\phi(z_\alpha)$, il vient d'après le théorème 4.3 :

$$C^*_{\text{décentralisé}} = K \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$$

Pour le système centralisé, en notant $\sigma(X)$ l'écart-type d'une variable aléatoire X, nous avons

$$C^*_{\text{centralisé}} = K\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Lemme 4.1. *L'écart-type de la somme est inférieur ou égal à la somme des écart-types :*

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

Il y a égalité si $\rho_{ij} = 1$ pour tout (i, j).

Démonstration. En utilisant le fait que $\rho_{ij} \in [-1, 1]$ et $\sigma_i > 0$,il vient :

$$\begin{aligned}
Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \sigma_i\sigma_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i\right)^2
\end{aligned}$$

Il y a égalité entre si et seulement si $\rho_{ij} = 1$ pour tout (i, j). □

Le lemme implique immédiatement qu'un système centralisé est plus économique qu'un système décentralisé :

$$C^*_{\text{centralisé}} \leq C^*_{\text{décentralisé}}.$$

Le système centralisé est plus économique car les aléas entre les différentes demandes peuvent se compenser, réduisant la variabilité de la demande.

Il y aura égalité des coûts si et seulement si il y a une corrélation linéaire parfaite (et croissante) entre les X_j, c'est-à-dire si $\rho_{ij} = 1$ pour tout (i, j). Par exemple, si $X_3 = X_2 = 2X_1 + 3$, les v.a. X_1, X_2 et X_3 ont un coefficient de corrélation de 1. Dans ce cas, une grande demande X_1 entrainera une grande demande X_2 et X_3 et les aléas des différentes v.a. ne se compensent pas.

La variance de la demande totale peut s'exprimer en fonction des écart-types et des coefficients de corrélation

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \end{aligned}$$

Demandes i.i.d. Considérons maintenant des demandes i.i.d. de moyenne μ et d'écart-type σ. Les covariances et coefficients de corrélation sont nulles dans le cas de demandes indépendantes.

Les coûts se réduisent à

$$C^*_{\text{décentralisé}} = n\sigma K$$

$$C^*_{\text{centralisé}} = \sqrt{n}\sigma K = \frac{C^*_{\text{décentralisé}}}{\sqrt{n}}$$

Demandes égales Si on suppose que $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$, alors $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = Var(nX) = n^2 Var(X) = n^2\sigma^2$. Il vient alors

$$C^*_{\text{centralisé}} = C^*_{\text{décentralisé}} = n\sigma K$$

Somme des demandes constante Si on suppose que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est égal à une constante, alors l'écart-type de la demande totale est nul et la solution décentralisée a un coût nul.

$$C^*_{\text{décentralisé}} = n\sigma K$$
$$C^*_{\text{centralisé}} = 0$$

4.7 Maximisation du profit

On considère un vendeur devant acheter q produits en début de saison et ne pouvant pas réapprovisionner son stock en cours de saison (par exemple des articles de mode). Si il lui reste des produits en fin de saison, il pourra tous les écouler au moment des soldes en proposant un prix soldé au client. Les paramètres du modèle sont les suivants :

— X : demande aléatoire continue (fonction de répartition F, densité f)

— r : prix de vente normal

— s : prix de vente en solde
— w : coût d'achat unitaire
— p : pénalité par unité de demande non satisfaite (pendant la saison)
— v : coût unitaire en magasin (mise en rayon, etc.)

L'objectif est de déterminer la quantité qui maximise le profit du vendeur.

Nous allons montrer comment ramener ce problème à un problème de vendeur de journaux classique où les paramètres du modèle sont :

$$b = p + r - w - v, \quad h = w' - s$$

Notons $G(q, X)$ le profit associé à une quantité q et à une demande X et $G(q) = E[G(q, X)]$. Par ailleurs notons $w' = w + v$, le coût associé à l'achat d'une unité. La quantité q peut se décomposer comme suit :

$$q = \underbrace{\min(X, q)}_{\text{quantité vendue au prix fort}} + \underbrace{(q - X)^+}_{\text{quantité vendue au prix soldé}}$$

Nous allons utiliser la propriété suivante :

$$\min(q, X) = X - (X - q)^+$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} G(q, X) &= (r - w')\min(X, q) + (s - w')(q - X)^+ - \underbrace{p(X - q)^+}_{\text{Pénalités pour les ruptures}} \\ &= (r - w')X - [\underbrace{(w' - s)}_{h}(q - X)^+ + \underbrace{(p + r - w')}_{b}(X - q)^+] \end{aligned}$$

puis

$$G(q) = (r - w')E(X) - \underbrace{[hE(q - X)^+ + bE(X - q)^+]}_{=C(q)}$$

Maximiser $G(q)$ revient à minimiser $C(q)$ qui est précisément la fonction de coût du vendeur de journaux. On peut donc utiliser les thèorèmes 4.2 et 4.3.

4.8 Variantes

Dans le problème du vendeur de journaux, nous avons supposé que le coût de rupture de stock était proportionnel au nombre de ruptures. Nous proposons une première variante où le coût de rupture est indépendant du nombre de ruptures. L'estimation des coûts de rupture pouvant se révéler complexe dans certaines situation, nous proposons des variantes où l'on se fixe un taux de service.

	Coûts	Contrainte sur le taux de service
Cycle	(I) Pénalité fixe b si il y a rupture de stock au cours de la période	(III) Probabilité de rupture de stock $\alpha(q) \geq \alpha_0$
Quantité	(II) Pénalité proportionnelle au nombre de demandes non satisfaites (b=coût de rupture unitaire)	(IV) Proportion de demandes non satisfaites $\beta(q) \geq \beta_0$

Table 4.4 – Différentes modélisations de du taux de service

Les problèmes d'optimisation associés sont les suivants. Pour simplifier, nous discuterons uniquement le cas où la demande et la quantité commandée sont continues.

(I)

$$\min_q \; C(q) = hE(q-X)^+ + bP(X > q) = h\int_0^q (q-x)f_X(x)dx + b(1-F_X(q))$$

Nous avons en utilisant la formule de dérivation de Leibniz :

$$C'(q) = hF_X(q) - bf_X(q)$$

La fonction $C(q)$ n'est pas nécessairement convexe. Il est nécessaire de connaître plus précisément la distribution de la demande pour pouvoir résoudre ce problème d'optimisation.

(II)

$$\min_q \; hE(q-X)^+ + bE(X-q)^+$$

Comme nous l'avons vu dans le théorème 4.1, la quantité q est optimale si et seulement si $F_X(q) = b/(h+b)$.

(III)

$$\min_q \; C(q) = hE(q-X)^+$$
$$s.c. \quad \alpha(q) \geq \alpha_0$$

Les fonctions $C(q)$ et $\alpha(q)$ sont croissantes en q. Il suffit donc de trouver la quantité q qui satisfait

$$\alpha(q) = \alpha_0 \Leftrightarrow F_X(q) = \alpha_0$$

(IV)

$$\min_q \; hE(q-X)^+$$
$$s.c. \quad \beta(q) \geq \beta_0$$

Les fonctions $C(q)$ et $\alpha(q)$ sont croissantes en q. A nouveau, il suffit donc de trouver la quantité q qui satisfait

$$\beta(q) = \beta_0 \Leftrightarrow \frac{E(\min(q, X))}{E(X)} = \beta_0$$

Chapitre 5

Demande aléatoire sur plusieurs périodes

Dans ce chapitre, nous considérons une demande aléatoire sur plusieurs périodes, contrairement au problème du vendeur de journaux qui ne s'intéresse qu'à une période.

5.1 Hypothèses

Les hypothèses seront les suivantes dans ce chapitre :

— T : horizon de temps

— t = instant de décision ($t = 0, 1, \ldots, T$)

— D_t = demande aléatoire à l'instant t.

— L = délai d'approvisionnement fixe. Les demandes étant aléatoires, nous ne pouvons pas nous ramener simplement au cas $L = 0$. Nous considérons brièvement le cas où L est aléatoire.

— Traitement des ruptures de stock : nous discuterons le cas des ventes différées ainsi que le cas des ventes perdues.

Nous spécifierons ultérieurement la structure des coûts et la fonction objectif.

Quelques notations supplémentaires concernant la demande :

— $D_{a,b} = \sum_{t=a}^{b} D_t$ = Demande cumulée sur les périodes $a, a+1, \ldots, b$

— $D^a = \sum_{t=1}^{a} D_t$ = Demande cumulée sur a périodes. Cette notation sera utile pour des demandes $D_1, \ldots, D_T$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

Quelques notations :

— X_t = Stock net à t (stock disponible moins le nombre de demandes en attente)

— $X_t^+ = \max(0, X_t)$ = Stock physique à t

— $X_t^- = \max(0, -X_t)$ = Demandes en attente à t

— Q_t = Quantité commandée à t

— Y_t = Stock brut à l'instant t (stock net + commandes en transit)

$$Y_t = X_t + \sum_{i=t-L}^{t-1} Q_i \tag{5.1}$$

Remarquons que X_t, Y_t et Q_t sont a priori des variables aléatoires car les demandes sont aléatoires. En outre, ces variables aléatoires dépendent du stock initial $X_0 = x_0$ et de la politique d'approvisionnement choisie.

La séquence des événements est la suivante :

— En début de période t, le stock net est X_t et les commandes en transit sont $Q_{t-1}, \cdots, Q_{T-L}$.

— On réceptionne Q_{t-L} unités, c'est-à-dire la commande passée L périodes auparavant.

— Immédiatement après, on passe une commande de taille Q_t qui arrivera L périodes après.

— La demande D_t se réalise entre t et $t+1$

5.2 Dynamique

5.2.1 Ventes différées

Dans le cas de ventes différées, la séquence des événements implique la relation suivante :

$$X_{t+1} = X_t + Q_{t-L} - D_t \tag{5.2}$$

Si l'on raisonne en stocks bruts, nous avons :

$$Y_{t+1} = Y_t + Q_t - D_t \tag{5.3}$$

Démonstration. En utilisant (5.1) et (5.2), il vient :

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= X_{t+1} + Q_t + Q_{t-1} + \cdots + Q_{t+1-L} \\ &= (X_t + Q_{t-L} - D_t) + Q_t + Q_{t-1} + \cdots + Q_{t+1-L} \\ &= (X_t + Q_{t-1} + \cdots + Q_{t+1-L} + Q_{t-L}) + Q_t - D_t \\ &= Y_t + Q_t - D_t \end{aligned}$$

□

On peut aussi exprimer le stock net à $t+L$ en fonction du stock brut à t :

$$X_{t+L} = Y_t - D_{t,t+L-1} \tag{5.4}$$

En effet, toutes les commandes passées avant t (et intégrées dans Y_t) seront arrivées en $t+L$.

Démonstration. En utilisant (5.1) et (5.3), il vient

$$\begin{aligned}
X_{t+L} &= Y_{t+L} - \sum_{i=t}^{t+L-1} Q_i \\
&= Y_t + \sum_{i=t}^{t+L-1} (Y_{i+1} - Y_i) - \sum_{i=t}^{t+L-1} Q_i \\
&= Y_t + \sum_{i=t}^{t+L-1} (Y_{i+1} - Y_i - Q_i) \\
&= Y_t - \sum_{i=t}^{t+L-1} D_i = Y_t - D_{t,t+L-1}
\end{aligned}$$

□

Enfin, (5.3) et (5.4) donnent :

$$X_{t+L+1} = Y_t + Q_t - D_{t,t+L} \tag{5.5}$$

Lorsque les demandes sont i.i.d., on peut légèrement simplifier l'écriture de (5.4) et (5.5) :

$$X_{t+L} = Y_t - D^L \tag{5.6}$$

$$X_{t+L+1} = Y_t + Q_t - D^{L+1} \tag{5.7}$$

5.2.2 Ventes perdues

Dans le cas de ventes perdues, la dynamique des stocks nets est légèrement différente :

$$X_{t+1} = \max[X_t + Q_{t-L} - D_t, 0] = [X_t + Q_{t-L} - D_t]^+$$

Malheureusement, il n'y a pas de relation simple entre Y_{t+1} et Y_t comme dans le cas avec ventes différées :

$$Y_{t+1} = Y_t + Q_t - D_t + \underbrace{[D_t - X_t - Q_{t-L}]^+}_{\text{Ventes perdues à } t} \tag{5.8}$$

En général, le problème avec ventes perdues est plus difficile à étudier sur un plan théorique.

5.3 Politiques d'approvisionnement

Une politique π d'approvisionnement spécifie à chaque instant la quantité à commander. On peut distinguer deux types de politiques :

— Les politiques statiques : les quantités commandées $(q_0, q_1, \dots)$ sont décidées à l'instant $t = 0$. Ce type de politique est très mal adapté à un environnement aléatoire car ne s'adapte absolument pas aux événements.

— Les politiques dynamiques : la décision d'approvisionnement à l'instant t est prise en fonction des informations dont on dispose (niveau de stock, réalisations des demandes passées, quantités commandées précédemment). Ce type de politique est beaucoup plus adapté à des demandes aléatoires.

Les définitions des principales politiques données au chapitre 2.1.2 restent valables dans le contexte de ce chapitre. Avec les notations de ce chapitre, cela donne :

— (r, q) : $Q_t = q$ si $Y_t \leq r$ ($Q_t = 0$ sinon)

— (r, S) : $Q_t = [S - Y_t]^+$ si $Y_t \leq r$ ($Q_t = 0$ sinon)

— (T, q) : $Q_t = q$ si $t = 0, T, 2T, \dots$ ($Q_t = 0$ sinon)

— (T, S) : $Q_t = [S - Y_t]^+$ si $t = 0, T, 2T, \dots$ ($Q_t = 0$ sinon)

Nous allons maintenant définir une nouvelle politique qui est adaptée lorsque les coûts fixes sont faibles. Une *politique à stock nominal* (S) consiste à viser en permanence le stock brut S et revient à commander $(S - SB(t))$ dés que $SB(t) < S$:

— (S) : $Q_t = [S - Y_t]^+$

Lorsque le temps est discrétisé, la politique (S) est équivalente à une politique (T, S) avec $T = 1$. Lorsque les demandes sont entières, la politique (S) est aussi équivalente à une politique (r, S) où l'on prendrait $r = S - 1$.

Le tableau 5.1 présente quelques avantages et inconvénients des principales politiques.

5.4 Distribution de la demande cumulée pendant un délai de livraison

Supposons que les demandes $D_1, D_2, \cdots, D_L$ sont i.i.d., de même distribution que D. La demande cumulée pendant un délai d'approvisionnement a alors la même distribution que $D^L = \sum_{t=1}^{L} D_t$. Nous utiliserons les notations suivantes :

— μ_D et σ_D : moyenne et écart-type de la demande D ;

— μ_L et σ_L : moyenne et écart-type du délai de livraison L ;

— $\mu(D^L)$ et $\sigma(D^L)$: moyenne et écart-type de D^L, la demande cumulée sur

	Avantages	Inconvénients
Gestion à point de commande (r)	— Bonne réactivité à des variations de la demande — Coûts fixes peuvent être optimisés	— Nécessité d'un suivi permanent des stocks — Gestion administrative complexe — Difficulté à regrouper des commandes
Gestion calendaire (T)	— Gestion administrative plus facile — Possibilité de regrouper des commandes auprès d'un fournisseur	— Mal adapté à des fortes variations de la demande — Stock de sécurité élevé — Coûts fixes élevés si un seul produit
Quantité variable (S)	— Bonne réactivité à des variations de la demande	— Pas de prise en compte des contraintes de conditionnement
Quantité fixe (q)	— Prise en compte de contraintes de conditionnement	— Mal adapté à des fortes variations de la demande car la quantité commandée est toujours q

TABLE 5.1 – Comparaison des politiques

un délai de livraison L.

Délai fixe

Théorème 5.1. *Lorsque le délai L est fixe, nous avons :*

$$\mu(D^L) = L.\mu_D$$
$$\sigma(D^L) = \sqrt{L}.\sigma_D$$

Démonstration. Nous avons par linéarité de l'espérance et de la variance :

$$\mu(D^L) = E(D^L) = E(\sum_{t=1}^{L} D_t) = \sum_{t=1}^{L} E(D_t) = L.E(D) = L.\mu_D$$
$$Var(D^L) = \sum_{t=1}^{L} Var(D_t) = L.Var(D) = L.\sigma_D^2$$
$$\sigma(D^L) = \sqrt{Var(D^L)} = \sqrt{L}.\sigma_D$$

□

Si la demande D est distribuée suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D)$, alors la demande sur un délai de livraison D^L est distribuée suivant une loi normale $\mathcal{N}(L\mu_D, \sqrt{L}\sigma_D)$.

Délai aléatoire

Supposons désormais que L est une variable aléatoire discrète. On peut exprimer simplement l'espérance et la variance de D^L en fonction de celles de D et L.

Théorème 5.2.

$$\mu_L = \mu_L.\mu_D$$
$$\sigma(D^L) = \sqrt{\mu_L.\sigma_D^2 + \mu_D^2.\sigma_L}$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, notons $Z = D^L$. Tout d'abord, calculons l'espérance conditionnelle de Z sachant L :

$$E(Z|L) = E\left(\sum_{t=1}^{L} D_t|L\right) = \sum_{t=1}^{L} E(D_t) = LE(D). \tag{5.9}$$

Il vient alors :

$$E(Z) = E[E(Z|L)] = E[LE(D)] = E[L]E[D]. \tag{5.10}$$

Calculons maintenant l'espérance conditionnelle de Z^2 sachant L :

$$\begin{aligned}
E(Z^2|L) = E\left[\left(\sum_{t=1}^{L} D_t\right)^2\right] &= E\left[\sum_{t=1}^{L} D_t^2 + \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1,j\neq i}^{L} D_i D_j\right] \\
&= L.E(D^2) + L(L-1)E(D)^2 = L[E(D^2) - E(D)^2] + L^2E(D)^2 \\
&= L.Var(D) + L^2E(D)^2.
\end{aligned}$$

Puis :

$$E(Z^2) = E(L)Var(D) + E(L^2)E(D)^2 \tag{5.11}$$

Enfin, en utilisant (5.10) et (5.11) :

$$\begin{aligned}
Var(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 & (5.12)\\
&= E(L)Var(D) + E(L^2)E(D)^2 - E(L)^2E(D)^2 & (5.13)\\
&= E(L)Var(D) + E(D)^2Var(L) & (5.14)
\end{aligned}$$

□

5.5 Détermination du point de commande

Supposons que l'on souhaite avoir une probabilité de ne pas avoir de rupture de stock (pendant le délai de livraison) supérieure ou égale à α, il faut alors avoir un point de commande r tel que

$$P(D^L \leq r) \geq \alpha.$$

Notons r^* le plus petit point de commande respectant cette contrainte.

Théorème 5.3. *Si D^L suit une loi normale alors*

$$r^* = \mu(D^L) + \sigma(D^L)z_\alpha$$

où z_α est tel que $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$ avec Z suivant une loi normale centrée réduite.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&P(D^L \leq r^*) = \alpha \\
\Leftrightarrow &P\left(\frac{D^L - \mu(D_L)}{\sigma(D^L)} \leq \frac{r^* - \mu(D_L)}{\sigma(D^L)}\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow &P\left(Z \leq z_\alpha\right) = \alpha
\end{aligned}$$

avec Z suivant une loi normale centrée réduite et $z_\alpha = \dfrac{r^* - \mu(D_L)}{\sigma(D^L)}$. □

Pour déterminer $\mu(D^L)$ et $\sigma(D^L)$, on peut alors utiliser les théorèmes 5.1 et 5.2 suivant que le délai L est fixe ou aléatoire.

5.6 Évaluation des performances d'une politique

Nous allons voir maintenant comment évaluer les performances d'une politique (stock moyen, probabilité de rupture, coût moyen, ...). On peut distinguer deux approches.

5.6.1 Simulation

La première approche pour évaluer les performances d'une politique est de la simuler (cf TP simulation).

Notons au passage que simulation et méthodes analytiques constituent des approches complémentaires (tableau 5.2). Par exemple, le modèle de Wilson ou le modèle du vendeur de journaux permettent d'obtenir des formules analytiques faciles à interpréter. Néanmoins, dés que l'on ajoute des hypothèses supplémentaires, obtenir des formules analytiques simples se révèle en général impossible. La simulation permet alors de prendre le relais.

Simulation	Méthodes analytiques
— Approche générique permettant d'aborder des problèmes complexes — Gourmande en temps de calcul, surtout si on souhaite une bonne précision — Analyse des résultats délicate	— Permet de traiter uniquement certains problèmes — Peu coûteuses en temps de calcul — Bonne compréhension du système

Table 5.2 – Comparaison de la simulation et des méthodes analytiques

5.6.2 Chaînes de Markov à temps discret

Une autre approche consiste à modéliser l'évolution du système par une chaîne de Markov à temps discret (CMTD). On peut alors calculer les paramètres de performance d'une politique de manière exacte, à l'aide de méthodes numériques ou analytiques.

Pour simplifier les notations et nous placer en régime stationnaire, nous supposerons que :

— Les demandes D_t sont indépendantes d'une période à l'autre et identiquement distribuées (i.i.d.), de même distribution que D.

— L'horizon de temps T est infini

Ventes différées

Quelques hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour décrire l'évolution du système par une CMTD :

— Les demandes ainsi que les quantités commandées prennent des valeurs entières

— La décision d'approvisionnement Q_t dépend uniquement du stock brut Y_t.

Dans le cas de ventes différées, nous avons :

$$X_{t+1} = X_t + Q_{t-L} - D_t$$

Lorsque $L > 0$, le processus (X_t) n'est pas une CMTD car Q_{t-L} dépend de X_{t-L}.

En revanche, le processus (Y_t) est bien une CMTD. En effet, nous avons

$$Y_{t+1} = Y_t + Q_t - D_t$$

où Q_t dépend uniquement de Y_t (par hypothèse). Ainsi, le comportement futur ne dépend que de l'état actuel :

$$P(Y_{t+1} = y_{t+1}|Y_t = y_t, Y_{t-1} = y_{t-1}, \cdots, Y_0 = y_0) = P(Y_{t+1} = y_{t+1}|Y_t = y_t)$$

Nous noterons $p_{ij}(t) = P(Y_{t+1} = j|Y_t = i)$ la probabilité de passer d'un stock brut i à l'instant t à un stock brut j à l'instant $t+1$. Le tableau 5.3 donnent les probabilités de transition pour quelques politiques classiques.

Politique	Dynamique	Probabilités de transition
(r, S)	$Y_{t+1} = \begin{cases} S - D_t, & \text{si } Y_t \leq r \\ Y_t - D_t, & \text{si } Y_t > r \end{cases}$	$p_{ij}(t) = \begin{cases} P(D_t = S - j), & \text{si } Y_t \leq r \\ P(D_t = i - j), & \text{si } Y_t > r \end{cases}$
(r, q)	$Y_{t+1} = Y_t - D_t + q\mathbb{1}_{\{Y_t \leq r\}}$	$p_{ij}(t) = \begin{cases} P(D_t = i - j + q), & \text{si } Y_t \leq r \\ P(D_t = i - j), & \text{si } Y_t > r \end{cases}$

TABLE 5.3 – Probabilités de transition pour quelques politiques classiques

Si la distribution de la demande est connue (Bernouilli, Poisson, ...), on connaît alors les probabilités de transition de la CMTD et on peut calculer les probabilités en régime transitoire $P(Y_t = j)$ (probabilité que le stock brut vale j à l'instant t), ainsi que les probabilités en régime stationnaire $P(Y = j) = \lim_{t\to\infty} P(Y_t = j)$.

On peut alors en déduire les probabilités en régime transitoire et stationnaire des stocks nets. D'après (5.6), le stock net s'exprime en fonction du stock brut et de la demande cumulée sur un délai livraison :

$$X_t = Y_{t-L} - D^L$$

Si l'on connaît la distribution de D^L, on peut alors en déduire la distribution de X_t :

$$P(X_t = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y_{t-L} = k+i)P(D^L = i)$$

En régime stationnaire, cela se simplifie à

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y = k+i)P(D^L = i)$$

Une fois les probabilités stationnaires calculées, on peut en déduire aisément tous les paramètres de performance du système. Quelques exemples :

— Stock moyen = $\sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i)$
— Nombre moyen de demandes en attente = -$\sum_{i=-\infty}^{0} iP(X = i)$
— Pourcentage de jours sans rupture jour = $P(X \geq 0) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i)$
— ...

Ventes perdues

Pour des ventes perdues, on peut analyser facilement le problème avec délai de livraison nul. Dans ce cas, le stock net est égal au stock brut et évolue suivant une chaîne de Markov :

$$X_{t+1} = [X_t + Q_t - D_t]^+$$

On peut alors calculer aisément les probabilités en régime transitoire et en régime stationnaire.

En revanche, pour un délai d'approvisionnement quelconque, ni le stock net, ni le stock brut n'évoluent suivant une chaîne de Markov. Il est néanmoins possible de représenter l'évolution du système par une autre chaîne de Markov en gardant en mémoire les ordres passés au cours des L dernières périodes. Considérons le processus stochastique (Z_t) suivant :

$$Z_t = (X_t, Q_{t-1}, Q_{t-2}, \cdots, Q_{t-L})$$

Nous avons alors

$$Z_{t+1} = (X_t + Q_{t-L} - D_t, Q_t, Q_{t-1}, \cdots, Q_{t-L+1})$$

qui ne dépend que de Z_t et D_t, à condition que la quantité Q_t soit basée uniquement sur Z_t. On peut alors dire que (Z_t) est une CMTD. Malheureusement, l'espace d'état de cette chaîne de Markov explose lorsque le délai d'approvisionnement augmente et il devient vite difficile de calculer numériquement les probabilités transitoires et stationnaires.

Annexe A

Rappels de probabilité

	X = v.a. discrète	X = v.a. continue
Densité	$p(x) = P(X = x)$	$f_X(x)$
Fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$	$F_X(x) = \sum_{t=0}^{x} p(t)$	$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$
Espérance de X	$E(X) = \sum_{t=0}^{\infty} tp(t)$	$E(X) = \int_0^\infty xf_X(x)dx$
Espérance de $g(X)$	$E[g(X)] = \sum_{t=0}^{\infty} g(t)p(t)$	$E[g(X)] = \int_0^\infty g(x)f_X(x)dx$
Variance	$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	Idem
Écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$	Idem
Coefficient de variation	$cv(X) = \dfrac{E(X)}{\sigma(X)}$	Idem

La densité d'une variable aléatoire continue est la dérivée de la fonction de répartition. Nous avons ainsi

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Ainsi la quantité $f_X(x)dx$ s'interprète comme la probabilité que X appartienne à l'intervalle $]x, x + dx]$:

$$P(x < X \leq x + dx) = f_X(x)dx + o(dx)$$

On peut aussi définir une *variable aléatoire mixte* qui soit en partie continue, et en partie discrète. Une variable aléatoire mixte X a une fonction de répartition F_X qui peut s'écrire comme

$$F_X(x) = P(X \leq x) = aF_W(x) + (1 - a)F_D(x)$$

où F_W est la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue W et F_D la fonction de répartition d'une variable discrète D. Ainsi, la fonction de répartition d'une variable aléatoire mixte est croissante et continue par morceaux.

Notons $f_W = F'_W$ la densité de W. Par ailleurs, soit $(x_1, \cdots, x_n)$ les valeurs prises par D et $p_D(x_i) = P(D = x_i)$ la probabilité que D prenne la valeur x_i. On peut alors définir la densité de X comme

$$f_X(x) = af_W(x) + (1-a)f_D(x)$$

où

$$f_D(x) = \sum_{i=1}^{n} p_D(x_i)\delta(x - x_i)$$

La fonction δ est la fonction Dirac qui prend une valeur infinie en 0 et la valeur zéro ailleurs. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. On peut voir cette fonction comme la limite de $\delta_a(x) = \dfrac{1}{2a}\mathbb{1}_{\{x\in[-a,a]\}}$ quand a tend vers 0.

On peut alors définir l'espérance de X comme étant

$$E(X) = aE(W) + (1-a)E(D) = a\int_{\mathbb{R}} xf_W(x)dx + (1-a)\sum_{i=1}^{n} p_D(x_i)$$

Prenons un exemple simple. Soit une variable aléatoire X qui soit continue uniforme sur $[0, 1]$ et qui prend la valeur discrète 3 avec une probabilité $3/4$. Nous avons alors

$$f_X(x) = 0.25 \times \mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} + 0.75 \times \delta(x-3)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x/4, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0.25, & \text{si } 1 < x < 3 \\ 1, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Puis $E(X) = 0.25\int_0^1 dx + 0.75 \times 3 = 1/8 + 9/4 = 19/8$

Bibliographie

B. Baynat. *Théorie des files d'attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit.* Hermes science, 2000.

V. Giard. *Gestion de la production et des flux.* Economica, 2003. ISBN 2717844988.

F.W. Harris. How many parts to make at once. *Factory, the Magazine of management*, 10 :135–136, 1913.

E.L. Porteus. *Foundations of stochastic inventory theory.* Stanford University Press, 2002.

P. Vallin. *La Logistique. Modèles et Méthodes de Pilotage Des Flux.* Collection Techniques de Gestion. Economica, 2001.

Harvey M. Wagner and Thomson M. Whitin. Dynamic version of the economic lot size model. *Management science*, 5(1) :89–96, 1958.

R.H. Wilson. A scientific routine for stock control. *Harvard business review*, 13 :116–128, 1934.

P.H. Zipkin. *Foundations of inventory management.* McGraw-Hill, 2000.