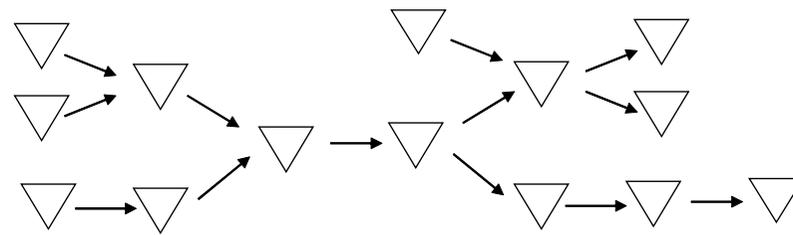


# GESTION DES STOCKS

## Notes de cours



Jean-Philippe Gayon (ISIMA - Clermont Auvergne INP)

12 octobre 2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>		
<b>2</b>	<b>Demande constante - Modèle de Wilson et variantes</b>	<b>5</b>		
2.1	Sans rupture de stock	5		
2.1.1	Hypothèses	5		
2.1.2	Politiques d'approvisionnement	6		
2.1.3	Politiques ZIO	7		
2.1.4	Dynamique du système	7		
2.1.5	Paramètres de performance	7		
2.1.6	Quantité économique de commande	8		
2.1.7	Analyse de sensibilité	9		
2.1.8	Robustesse à des erreurs d'estimation des paramètres	10		
2.2	Ventes différées	11		
2.2.1	Hypothèses	11		
2.2.2	Paramètres de performance	11		
2.2.3	Politique optimale	12		
2.2.4	Analyse de sensibilité et de robustesse	13		
2.3	Ventes perdues	13		
<b>3</b>	<b>Demande constante - Systèmes multi-échelon</b>	<b>14</b>		
3.1	Représentation d'un réseau logistique	14		
3.2	Système série	15		
3.2.1	Modèle	15		
3.2.2	Caractéristiques de la politique optimale	15		
3.2.3	Stock local et stock échelon	16		
3.2.4	Coût de possession local et échelon	16		
3.2.5	Coût d'une politique	16		
3.2.6	Optimisation	17		
3.2.7	Ventes différées et délai de livraison	18		
3.3	Système en arbre	19		
3.3.1	Modèle	19		
3.3.2	Caractéristiques de la politique optimale	19		
3.3.3	Politique imbriquée	20		
<b>4</b>	<b>Demande déterministe et variable dans le temps</b>	<b>21</b>		
4.1	Sans rupture de stock	21		
4.2	Variantes et extensions	23		
<b>5</b>	<b>Demande aléatoire - Modèle du vendeur de journaux</b>	<b>25</b>		
5.1	Hypothèses	25		
5.2	Demande continue	26		
5.3	Demande discrète	26		
5.4	Taux de service	27		
5.5	Stock de sécurité	28		
5.6	Loi normale	28		
5.7	Maximisation du profit	30		
5.8	Variantes	31		
<b>6</b>	<b>Demande aléatoire sur plusieurs périodes</b>	<b>32</b>		
6.1	Hypothèses	32		
6.2	Dynamique	32		
6.2.1	Ventes différées	32		

6.2.2	Ventes perdues . . . . .	33
6.3	Politiques d'approvisionnement . . . . .	33
6.4	Distribution de la demande cumulée pendant un délai de livraison . . . . .	33
6.5	Détermination du point de commande . . . . .	35
6.6	Évaluation des performances d'une politique . . . . .	35
6.6.1	Simulation . . . . .	35
6.6.2	Chaînes de Markov à temps discret . . . . .	35

# Chapitre 1

## Introduction

Ces notes de cours<sup>a</sup> ont été réalisées, entre autres, à partir des ouvrages de Zipkin (2000), Giard (2003), Porteus (2002) et Vallin (2001).

Les stocks sont présents partout. Toute personne ou entreprise constitue des stocks de natures variées. Les particuliers stockent de la nourriture, des feuilles de papier, de l'argent, du produit lessive ou encore des stylos. Les entreprises stockent des feuilles de papier mais également des produits plus techniques tels que roulements à billes, moteurs, circuits imprimés.

La première question légitime à se poser est celle de leurs fonctions. La fonction la plus évidente d'un stock est de pouvoir disposer rapidement d'un produit. Prenons l'exemple des feuilles de papier qui semblent être un besoin universel, pour l'instant du moins. Nous les stockons afin d'y recourir dès que nécessaire ; ce serait une perte de temps considérable que d'acheter une feuille de papier chaque fois que nécessaire. Dans un environnement concurrentiel, les fournisseurs doivent répondre rapidement à la demande de leurs clients et la constitution de stocks leur permet de répondre à cette contrainte. Ainsi, lorsqu'un client se rend chez son boulanger, il apprécie de pouvoir repartir avec sa baguette. En cas de rupture de stock, il doit attendre la prochaine fournée de pain, ce qui l'encourage à aller voir à la concurrence ou le décourage d'acheter du pain ce soir-là. Du point de vue du boulanger, une rupture de stock signifie un manque à gagner, voire la perte d'un client. Acheter un produit en grande quantité permet en outre de réaliser des économies d'échelle en diminuant le coût unitaire d'achat. La spéculation peut aussi être une autre bonne raison de constituer des stocks. Le marché des matières premières telles que l'or, le pétrole en sont de frappants exemples. La constitution de stocks permet enfin d'anticiper des aléas sur les demandes, les livraisons ou encore la production.

Afin de se passer totalement de stocks, il faudrait être capable de livrer ou de produire instantanément un produit. Cette solution est malheureusement impossible ou trop coûteuse dans la majorité des situations. Prenons l'exemple d'un fabricant de téléviseurs à écran plat qui ne constituerait pas de stocks et qui recevrait des commandes d'un distributeur. Sur un plan technique, il est capable d'assembler un téléviseur en une demi-journée, délai raisonnable pour son client. Mais est-il capable de répondre dans un délai raisonnable à

a. Notes du cours de gestion des stocks à Grenoble INP - Génie Industriel, rédigées par Jean-Philippe Gayon.

une commande de 1000 téléviseurs ? C'est à priori possible de fabriquer 1000 téléviseurs en une demi-journée si l'on peut en fabriquer un en une demi-journée. Malheureusement, cela nécessiterait des moyens de production et une main d'oeuvre considérables. Une production rapide coûte cher et il en est de même pour une livraison rapide.

Les stocks semblent inévitables dans de nombreuses situations. La deuxième question qui vient alors à l'esprit est : pourquoi ne pas constituer des stocks très importants afin d'éviter toute rupture ? Les raisons de ne pas stocker de grandes quantités sont nombreuses. Nous n'achetons pas des rames de papier par camions par manque de place ou encore du lait frais en grandes quantités car il risque de se périmé. Une autre raison pour ne pas stocker de grandes quantités est d'ordre financier. Si on ne dispose que de peu d'argent, on ne peut constituer que des stocks limités. Si l'on dispose de beaucoup d'argent, il peut être plus intéressant de placer cet argent plutôt que de constituer de gros stocks.

Pour résumer, nous pouvons lister un certain nombre de raisons encourageant le stockage :

- Satisfaction rapide des demandes
- Anticipation des aléas (demande, livraison, production)
- Économies d'échelle
- Capacité de production adaptée et non surdimensionnée
- Spéculation (anticipation d'une hausse des prix)

D'autres raisons poussant au contraire à limiter ses stocks :

- Immobilisation d'argent
- Immobilisation d'espace
- Péréemption et obsolescence des produits
- Fabrication de produits très spécifiques, voire uniques, difficiles à anticiper
- Spéculation (anticipation d'une baisse des prix)
- Fournisseur en situation de monopole

Sans forcément le formaliser, nous développons des stratégies afin d'optimiser les quantités que nous stockons. Les stratégies diffèrent d'un individu à l'autre et d'une entreprise à l'autre et dépendent de l'objectif recherché. Dans un couple, l'un voudra constituer des stocks énormes de nourriture afin de faire les courses le moins souvent possible tandis que l'autre voudra le moins de stocks possibles afin d'éviter de jeter des produits périmés ou encore pour ne pas encombrer les placards.

La question qui se pose alors est de savoir quand se réapprovisionner et en quelles quantités. A travers ce cours, nous tenterons de répondre à ces questions à l'aide de modèles plus ou moins élaborés.

# Chapitre 2

## Demande constante - Modèle de Wilson et variantes

### 2.1 Sans rupture de stock

#### 2.1.1 Hypothèses

Les principales hypothèses du modèle le plus simple sont les suivantes :

- Un seul produit
- Demande continue de taux  $\lambda$
- $L$  = Délai d'approvisionnement
- $h$  = Coût de possession d'une unité de stock pendant une unité de temps ( $h$  pour holding en anglais)
- $k$  = Coût fixe d'approvisionnement
- $c$  = Coût variable d'approvisionnement
- Objectif : Trouver une politique d'approvisionnement qui minimise les coûts moyens à horizon infini, sous la contrainte de satisfaire toutes les demandes sans délai

Ce modèle est souvent appelé *modèle de Wilson*. Il a été introduit au début du 20ème siècle et constitue l'une des pierres angulaires de la gestion des stocks ainsi que de la recherche opérationnelle. Revenons maintenant un peu plus en détail sur certaines hypothèses et introduisons quelques notations.

#### Produit

Nous considérons un produit unique, indéfiniment divisible. Nous dirons que ce produit est continu. Cette hypothèse semble réaliste pour des matières liquides (jus d'orange, pétrole, etc.) mais l'est moins pour des produits discrets, c'est à dire non sécables (stylo, voiture, etc.). Ainsi, pourra-t-on avoir 5.37 unités. Une telle hypothèse peut être une bonne approximation pour des produits discrets, si les quantités de réapprovisionnement sont suffisamment importantes.

#### Demande

La demande pour ce produit est continue et constante, de taux  $\lambda$  (unité : [produit].[s]<sup>-1</sup>). Ainsi, pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , la demande est de  $\lambda\Delta t$ , quel que soit la longueur de l'intervalle  $\Delta t$ . La demande est déterministe car connue à l'avance. Nous supposons par ailleurs qu'il ne peut y avoir de rupture de stock, c'est-à-dire que les demandes doivent toutes être satisfaites immédiatement.

#### Structure des coûts

Nous considérons trois types de coûts :

- $h$  : coût de possession du stock par produit stocké et par unité de temps (unité : [euro].[produit]<sup>-1</sup>. [s]<sup>-1</sup>)
- $k$  : coût fixe pour passer une commande (unité : [euro])
- $c$  : coût variable pour chaque produit commandé (unité : [euro].[produit]<sup>-1</sup>)

Ainsi, lorsque lorsqu'une commande de  $q > 0$  unités est passée, il en coûte  $k + qc$ . Si aucune commande n'est passée ( $q = 0$ ), le coût de commande est nul. En utilisant la fonction indicatrice, on peut résumer le coût d'une commande ainsi :

$$k\mathbb{1}_{q>0} + qc = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 0 \\ k + qc & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

#### Stock physique et stock brut

Quelques notations à l'instant  $t$  :

- $SP(t)$  = Stock physique disponible
- $SC(t)$  = Quantité commandée mais non encore reçue
- $SB(t)$  = Stock brut =  $SP(t) + SC(t)$

La notion de stock brut est essentielle en gestion des stocks. Les décisions doivent être en prises en fonction du stock brut et non du stock physique.

Lorsque le délai d'approvisionnement  $L$  est nul, le stock physique est toujours égal au stock

brut. En effet, une quantité commandée arrive immédiatement et  $SC(t) = 0$  pour tout  $t$ .

## 2.1.2 Politiques d'approvisionnement

Une *politique d'approvisionnement* est un ensemble de règles qui spécifient à chaque instant quelle quantité commander. On peut résumer une politique d'approvisionnement par deux suites de nombres :

- $\{t_i\}_{i \geq 1}$  : les instants où des commandes sont passées
- $\{q_i\}_{i \geq 1}$  : quantités commandées à ces instants

Un exemple illustratif est donné sur la figure 2.1.

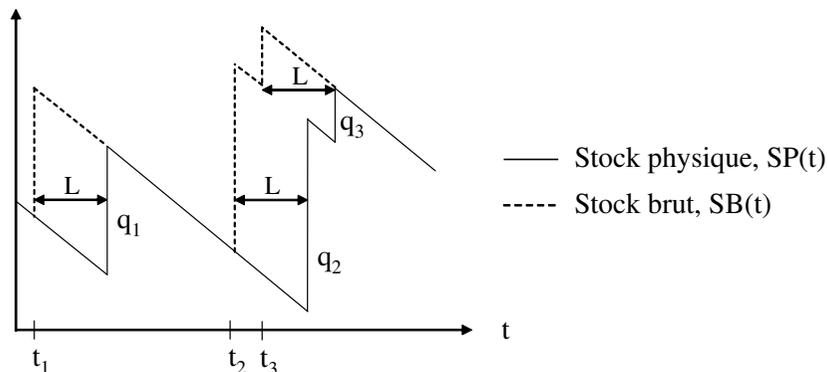


FIGURE 2.1 – Évolution des stocks pour une politique quelconque

Présentons maintenant quelques politiques classiques.

### Gestion à point de commande

Une *gestion à point de commande* consiste à passer commande lorsque le stock brut  $SB(t)$  atteint  $r$ . Le paramètre  $r$  sera appelé le *point de commande* (ou seuil d'alerte). On peut distinguer plusieurs classes de politiques à point de commande :

- Une politique  $(r, q)$  commande une quantité  $q$  si  $SB(t) \leq r$ .
- Une politique  $(r, S)$  (avec  $r \leq S$ ) commande  $S - SB(t)$  si  $SB(t) \leq r$ . Ainsi, une politique  $(r, S)$  reconstitue le stock brut à  $S$  à chaque fois qu'il tombe en-dessous de  $r$ . Le paramètre  $S$  est appelé *stock nominal* ou *niveau de reconstitèment*.

### Gestion calendaire

Dans une politique à *gestion calendaire*, les commandes sont passées à intervalle de temps fixe, toutes les  $u$  unités de temps.

- Une politique  $(T, q)$  commande toutes les  $T$  périodes une quantité  $q$ .

- Une politique  $(T, S)$  commande toutes les  $T$  périodes une quantité  $(S - SB(t))$ , afin de reconstituer le stock brut à  $S$ .

Dans le tableau 2.1, les politiques sont classées suivant deux critères :

- Les quantités commandées sont-elles fixes ou variables ?
- Les intervalles de temps entre deux commandes sont-ils fixes ou variables ?

		QUAND ?	
		Intervalle fixe	Intervalle variable
COMBIEN ?	quantité fixe	$(T, q)$	$(r, q)$
	quantité variable	$(T, S)$	$(r, S)$

TABLE 2.1 – Classification des politiques, d'après Vallin (2001)

Il existe de nombreuses variantes de ces politiques. Lorsque les paramètres sont non stationnaires (par exemple la demande augmente dans le temps), il peut être judicieux de considérer des politiques non stationnaires. Par exemple, une politique  $(r_t, S_t)$  consiste à reconstituer le stock à  $S_t$  lorsque le stock brut atteint  $r_t$  à l'instant  $t$ .

On peut aussi combiner plusieurs politiques. Ainsi, une politique  $(T, r, S)$  consiste à reconstituer le stock brut à  $S$  toutes les  $T$  unités de temps, uniquement si le stock brut tombe à  $r$ .

### Equivalence des politiques

Pour le problème qui nous intéresse (décrit à la section 2.1.1), les quatre types de politique sont équivalentes. En posant  $T = q/\lambda$  et  $S = r + q$ , les politiques  $(r, q)$ ,  $(r, S)$ ,  $(T, q)$  et  $(T, S)$  ont alors la même évolution de stock et donc le même coût moyen.

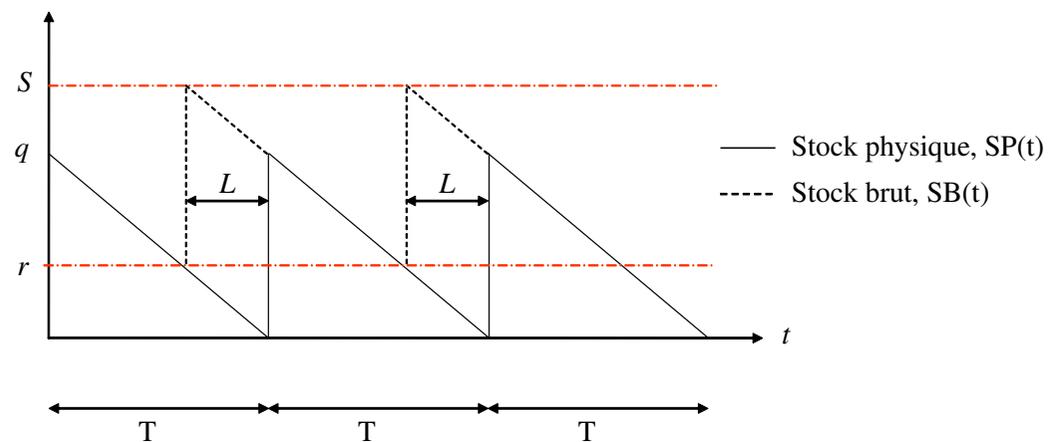


FIGURE 2.2 – Equivalence entre les politiques

Cette équivalence n'est en général pas vraie, notamment lorsque l'on considère des demandes aléatoires.

### 2.1.3 Politiques ZIO

Une politique d'approvisionnement est dite *Zero Inventory Ordering* (ZIO) si les commandes arrivent exactement quand le stock physique s'annule. La figure 2.3 donne un exemple de l'évolution du stock physique pour une politique ZIO.

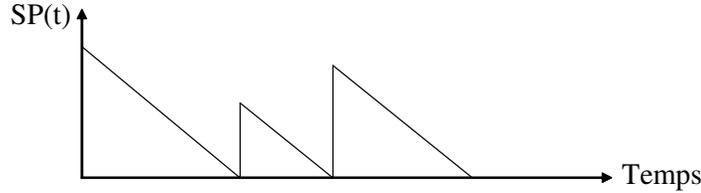


FIGURE 2.3 – Exemple de politique ZIO

Nous allons montrer que la politique optimale est nécessairement ZIO. Cette propriété n'est plus vraie lorsque l'on considère d'autres modèles de gestion des stocks (typiquement une demande aléatoire).

**Théorème 2.1.** *La propriété ZIO est dominante : pour toute politique non ZIO, il existe une politique ZIO de coût inférieur.*

*Démonstration.* Soit une politique  $\pi$  qui ne soit pas ZIO et caractérisée par des instants d'approvisionnement  $\{t_i\}_{i \geq 1}$  et des quantités commandées  $\{q_i\}_{i \geq 1}$ . Soit  $t_j$  le premier instant où une commande est passée alors que le stock n'est pas nul. Nous allons construire une politique  $\pi'$ , caractérisée par  $\{t'_i\}_{i \geq 1}$  et  $\{q'_i\}_{i \geq 1}$  (figure 2.4) tels que

- $t'_i = t_i, q'_i = q_i$  pour  $i < j$  (l'évolution du stock est la même pour  $t < t_j$ )
- $t'_j = t_j + \frac{SP(t_j^-)}{\lambda}, q'_j = \sum_{i: t_j \leq t_i \leq t'_j} q_i$  (attendre que le stock atteigne 0 pour passer la  $j$ -ième commande)
- $t'_i = t_{i+k}, q'_i = q_{i+k}$  pour  $i > j$  et avec  $k$  le nombre de commandes passées par la politique  $\pi$  sur l'intervalle  $[t_j, t'_j]$  (l'évolution du stock est la même pour  $t \geq t'_j$ )

La politique  $\pi'$  a un coût fixe inférieur (nombre de commandes inférieur) mais aussi un coût de possession strictement inférieur. En itérant la même procédure, on réussit ainsi à construire une politique ZIO de coût moyen strictement inférieur à la politique  $\pi$ .  $\square$

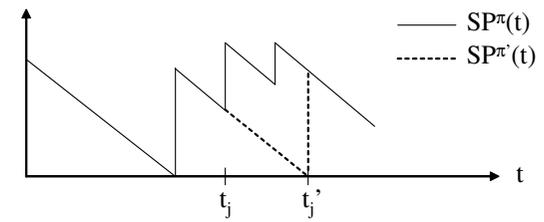


FIGURE 2.4 – Construction d'une politique ZIO ( $\pi'$ ) meilleure qu'une politique non ZIO ( $\pi$ )

### 2.1.4 Dynamique du système

Considérons une politique  $(r, q)$  et ZIO. La consommation pendant le délai d'approvisionnement doit être égale à  $r$  car la politique est ZIO. Nous avons donc la relation

$$r = \lambda L.$$

Le point de commande  $r$  est donc le même pour toute politique ZIO réalisable. On peut donc dire que le paramètre  $q$  suffit à caractériser une politique  $(r, q)$  et ZIO.

Nous allons exprimer le niveau de stock  $SP(t)$  à l'instant  $t$  en supposant qu'une commande de taille  $q$  a été passée à  $t = -L$  et est arrivée à  $t = 0^+$ . Notons  $u$  la date à laquelle tout le stock initial est consommé :

$$u = \frac{q}{\lambda}$$

Nous pouvons alors exprimer  $SP(t)$  entre les instants 0 et  $u$  :

$$\begin{aligned} \begin{cases} SP(t+dt) = SP(t) - \lambda dt \text{ pour } 0 \leq t < u \\ SP(0^+) = q \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} SP'(t) = -\lambda \text{ pour } 0 \leq t < u \\ SP(0^+) = q \end{cases} \\ \Rightarrow SP(t) = q - \lambda t &\text{ pour } 0 \leq t < u \end{aligned}$$

Le problème est  $u$ -périodique et on en déduit aisément le niveau de stock à tout instant :

$$SP(t) = q - \lambda(t - nu) \quad \text{pour} \quad nu \leq t < (n+1)u, n \in \mathbb{N}$$

### 2.1.5 Paramètres de performance

Nous allons exprimer différents paramètres de performance en fonction des données du problème  $(\lambda, k, h, c, L)$  et de  $q$ . Le *niveau de stock moyen*, noté  $\overline{SP}$ , vaut :

$$\overline{SP} = \frac{1}{u} \int_0^u SP(t) dt = \frac{1}{u} \times \frac{qu}{2} = \frac{q}{2}$$

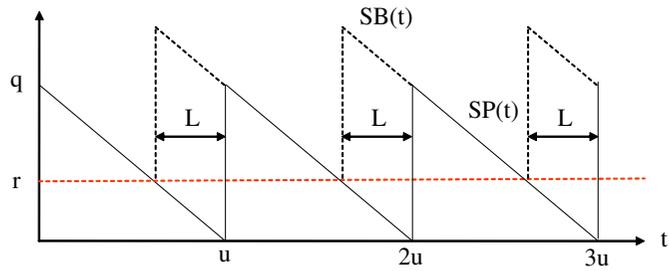


FIGURE 2.5 – Evolution du stock physique et du stock brut pour une politique  $(r, q)$  et ZIO

On obtient le *temps moyen passé en stock* par un produit (ou *temps d'écoulement d'un produit* ou *temps de rotation d'un stock*), noté  $\overline{SW}$  ( $W$  pour waiting), en appliquant la loi de Little<sup>a</sup> :

$$\overline{SW} = \frac{\overline{SP}}{\lambda} = \frac{q}{2\lambda} \quad (\text{Loi de Little})$$

On aurait pu aussi obtenir ce résultat par un calcul direct :

$$\overline{SW} = \frac{1}{u} \int_0^u t dt = \frac{u}{2} = \frac{q}{2\lambda}$$

La *rotation des stocks* (ou *turnover*) est définie comme le nombre de fois où les stocks sont renouvelés par unité de temps :

$$\frac{1}{\overline{SW}} = \frac{2\lambda}{q}$$

Une faible rotation signifie que les pièces restent longtemps en stock. En entreprise, la période de référence sera souvent l'année et la rotation du stock sera alors :

$$\text{Rotation des stocks (par année)} = \frac{\text{Consommation annuelle}}{\text{Stock moyen}}$$

Une rotation de 3 signifie alors que les stocks sont renouvelés entièrement 3 fois dans l'année.

La *couverture de stock* est, à l'instant  $t$ , la durée pendant laquelle on peut satisfaire la demande avec le stock physique à  $t$ . Ainsi, la couverture de stock est de  $u$  en début de période (lorsqu'une commande vient d'arriver) et de 0 en fin de période.

a. La loi de Little dit que le nombre moyen de clients dans un système stable est égal à leur fréquence moyenne d'arrivée multipliée par leur temps moyen passé dans le système (voir n'importe cours de file d'attente, par exemple celui de Baynat (2000) disponible à la bibliothèque de GI). Ici les clients considérés sont les produits en stock. La fréquence de sortie (et d'arrivée) des produits est  $\lambda$ , le nombre moyen de produits dans le système est  $\overline{SP}$  et le temps moyen passé par un produit dans le système est  $\overline{SW}$ . La loi de Little nous dit alors que  $\overline{SP} = \lambda \overline{SW}$ .

## 2.1.6 Quantité économique de commande

Notons  $C(q)$  le coût par unité de temps (ou coût moyen) sur un horizon infini.  $C(q)$  est la somme du coût de possession par unité de temps,  $C_h(q)$ , du coût fixe d'approvisionnement par unité de temps,  $C_k(q)$  et du coût variable d'approvisionnement par unité de temps,  $C_c(q)$ . Pour calculer ces quantités, il suffit de se placer sur une période car le problème est  $u$ -périodique. Le coût fixe sur une période est de  $k$ , ce qui donne un coût par unité de temps

$$C_k(q) = k/u = \frac{\lambda k}{q}$$

Le coût de possession par unité de temps est donné par

$$C_h(q) = \frac{1}{u} \int_0^u hSP(t) dt = h\overline{SP} = \frac{hq}{2}$$

Toute la demande étant satisfaite, le coût variable par unité de temps vaut

$$C_c(q) = \lambda c.$$

Ce coût est indépendant de la quantité commandée car toute politique réalisable satisfait toute la demande. L'influence de  $q$  sur les différents coûts est représentée sur la figure 2.6.

Finalement :

$$\begin{aligned} C(q) &= C_h(q) + C_k(q) + C_c(q) \\ &= \frac{hq}{2} + \frac{\lambda k}{q} + \lambda c \end{aligned} \quad (2.1)$$

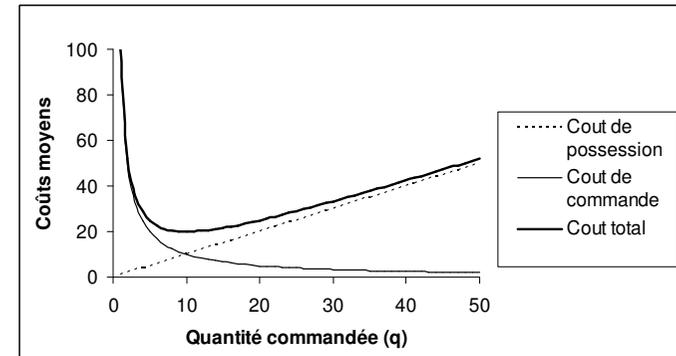


FIGURE 2.6 – Coûts moyens en fonction de la quantité commandée. Données :  $\lambda = 10, k = 10, c = 0, h = 2$ .

$q$	0	$q^*$	$+\infty$
$C''(q)$		+	
$C'(q)$	$-\infty$	0	$+h/2$
$C(q)$	$+\infty$	$C^*$	$+\infty$

TABLE 2.2 – Tableau de variations de  $C(q)$

Nous allons maintenant chercher la *quantité économique de commande*  $q^*$ , la valeur de  $q$  qui minimise le coût moyen  $C(q)$ . Pour cela, calculons les dérivées première et seconde de  $C$  :

$$C'(q) = h/2 - \frac{\lambda k}{q^2} \quad C''(q) = \frac{2\lambda k}{q^3}$$

$C(q)$  est une fonction strictement convexe pour  $q > 0$  ( $C''(q) > 0$ ). Le tableau 2.2 résume les variations de  $C(q)$ .

L'unique minimum de  $C(q)$  satisfait  $C'(q) = 0$  et nous obtenons :

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} \quad (\text{Formule de Wilson}) \quad (2.2)$$

$$C^* \equiv C(q^*) = \lambda c + \sqrt{2\lambda k h} \quad (2.3)$$

$$u^* = \frac{q^*}{\lambda} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}$$

La quantité  $q^*$  est souvent appelée quantité économique de commande. La formule de Wilson a été proposée par Harris (1913) et popularisée par Wilson (1934).

**Remarque 1.** On peut observer qu'à l'optimal les coûts fixes égalent les coûts de possession :

$$C_h(q^*) = C_k(q^*) = \sqrt{\frac{\lambda k h}{2}}$$

Si la quantité commandée est  $q$  et que les coûts de possession sont inférieurs aux coûts fixes ( $C_h(q) < C_k(q)$ ), cela signifie que l'on commande trop souvent (et inversement).

## 2.1.7 Analyse de sensibilité

Nous allons regarder l'influence des différents paramètres sur  $q^*$  et  $C^*$  :

- La quantité économique de commande est indépendante de  $c$  et de  $L$ , croissante en  $\lambda, k$  et décroissante en  $h$ .
- Le coût moyen optimal est indépendant de  $L$  et croissant en  $\lambda, k, c, h$ .

Étudions maintenant la sensibilité de  $q^*$  et  $C^*$  à des variations des paramètres. Supposons que la valeur du paramètre  $\alpha$  passe à  $\alpha'$ . La quantité économique de commande passe alors de  $q^*(\alpha)$  à  $q^*(\alpha')$ . Ainsi :

$$\frac{q^*(\lambda')}{q^*(\lambda)} = \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \quad \frac{q^*(k')}{q^*(k)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \quad \frac{q^*(h')}{q^*(h)} = \sqrt{\frac{h}{h'}} \quad (2.4)$$

De son côté, le coût moyen optimal passe de  $C^*(\alpha)$  à  $C^*(\alpha')$ . Si on suppose un coût variable nul ( $c = 0$ ), on obtient :

$$\frac{C^*(\lambda')}{C^*(\lambda)} = \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \quad \frac{C^*(k')}{C^*(k)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \quad \frac{C^*(h')}{C^*(h)} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

Par exemple, une augmentation de 100% du coût de possession ( $h' = 2h$ ) conduit à une augmentation de 41% du coût optimal ( $C^*(2h) = \sqrt{2}C^*(h)$ ) et à une diminution de 29% de la quantité économique de commande ( $q^*(2h) = q^*(h)/\sqrt{2}$ ). Finalement, on peut dire que  $q^*$  et  $C^*$  sont relativement peu sensibles à des variations des paramètres.

On peut aussi étudier la sensibilité d'une fonction à une petite variation d'un paramètre à l'aide de la fonction d'élasticité. On définit l'*élasticité* d'une fonction  $f$  par rapport à un paramètre  $\alpha$  par :

$$\theta = \frac{\alpha}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

L'interprétation de l'élasticité est la suivante : si  $\alpha$  augmente de  $\epsilon$  % (avec  $\epsilon$  petit) alors  $f(\alpha)$  augmente de  $\theta\epsilon$  %. Pour montrer cela rigoureusement, il suffit d'écrire un développement limité à l'ordre 1 de  $f$  :

$$\begin{aligned} f[(1 + \epsilon)\alpha] &= f(\alpha) + \alpha\epsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) + o(\epsilon) \\ &= \left(1 + \epsilon \frac{\alpha}{f(\alpha)} \times \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) f(\alpha) + o(\epsilon) \\ &= (1 + \theta\epsilon) f(\alpha) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

**Exercice 1.** Retrouver les élasticité de  $C^*$  et  $q^*$  aux différents paramètres, résumées dans le tableau 2.3. On lira, par exemple, que l'élasticité de  $q^*$  par rapport à  $h$  vaut  $-1/2$ , c'est-à-dire qu'une augmentation de 1% de  $h$  entraîne une diminution de 0.5% de  $q^*$ .

	$C^*$ (avec $c = 0$ )	$q^*$
$L$	0	0
$c$	N.A.	0
$\lambda$	1/2	1/2
$k$	1/2	1/2
$h$	1/2	-1/2

TABLE 2.3 – Élasticité de  $C^*$ ,  $q^*$  et  $\beta^*$  aux différents paramètres

Ainsi, une augmentation de 1% de  $h$  entraîne une augmentation de 0.5% du coût optimal  $C^*$  et une diminution de 0.5% de la quantité économique de commande  $q^*$

Vérifions que ces résultats sont bien cohérents avec l'analyse de sensibilité précédente. Supposons que  $\lambda' = \lambda(1 + \epsilon)$ . D'après l'équation 2.4, il vient :

$$\begin{aligned} q^*(\lambda(1 + \epsilon)) &= \sqrt{1 + \epsilon} q^*(\lambda) \\ &= (1 + \epsilon/2) q^*(\lambda) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

et on retrouve bien une élasticité de 1/2 de  $q^*$  par rapport à  $\lambda$ . Il fallait se rappeler du développement limité suivant :  $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ . De même :

$$\begin{aligned} q^*(h(1 + \epsilon)) &= (1 + \epsilon)^{-1/2} q^*(h) \\ &= (1 - \epsilon/2) q^*(h) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

et on retrouve bien une élasticité de -1/2 de  $q^*$  par rapport à  $h$ .

### 2.1.8 Robustesse à des erreurs d'estimation des paramètres

Dans un problème réel, l'estimation des paramètres est souvent compliquée. Que se passe-t-il si un paramètre est mal estimé? Par exemple, que se passe-t-il si le coût fixe est estimé à  $\hat{K} = 40$  euros alors que le vrai coût fixe est de  $K = 10$  euros?

Dans un premier temps, nous allons regarder la robustesse du coût moyen à une erreur sur la quantité commandée. Supposons que la quantité commandée est  $aq^*$  ( $a > 0$ ) alors que la quantité optimale est  $q^*$ .

**Propriété 2.1.** Lorsque  $c = 0$ , nous avons  $C(aq^*) = \epsilon(a)C^*$  avec  $\epsilon(a) = \frac{a + \frac{1}{a}}{2}$

*Démonstration.* D'après les équations (2.3) et (2.2), nous avons  $C^* = \sqrt{2\lambda hk}$  et  $q^* =$

$\sqrt{2\lambda k/h}$ . Par ailleurs, d'après l'équation (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} C(aq^*) &= \frac{\lambda k}{aq^*} + h \frac{aq^*}{2} = \frac{\lambda k}{a\sqrt{2\lambda k/h}} + h \frac{a\sqrt{2\lambda k/h}}{2} \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{2\lambda kh} + \frac{a}{2} \sqrt{2\lambda kh} = \epsilon(a)C^* \end{aligned}$$

□

a	0.25	0.50	0.75	0.90	1.00	1.10	1.25	1.50	2.00	4.00
$\frac{C(aq^*)}{C^*}$	2.13	1.25	1.04	1.01	1.00	1.00	1.03	1.08	1.25	2.13

TABLE 2.4 – Robustesse du coût moyen à une erreur sur la quantité commandée

Ainsi, si l'on commande deux fois trop ( $a = 2$ ), le coût moyen est augmenté de 25% seulement (tableau 2.4). On dira que le coût moyen est *robuste* à une erreur sur la quantité commandée.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le coût variable était nul ( $c > 0$ ). Lorsque  $c > 0$ , on peut montrer que le coût moyen est encore plus robuste à une erreur sur la quantité commandée, dans la mesure où le coût variable moyen est  $\lambda c$ , quelle que soit la politique. En effet, nous avons :

$$\frac{C(aq^*)}{C(q^*)} = \frac{\lambda c + \lambda k/aq^* + haq^*/2}{\lambda c + \sqrt{2\lambda hK}} \leq \frac{\lambda k/aq^* + haq^*/2}{\sqrt{2\lambda hK}} \quad (2.5)$$

Montrer l'inégalité ci-dessus revient à montrer que  $\frac{x+y}{x+z} \leq \frac{y}{z}$  si  $z \leq y$  (à vérifier pour trois réels  $x, y, z$  positifs).

Supposons maintenant qu'un paramètre est mal estimé. Nous avons vu que  $q^*$  était peu sensible à une variation des paramètres. Comme le coût moyen est lui-même peu sensible à une erreur sur la quantité commandée, le coût moyen sera aussi robuste à une erreur d'estimation d'un paramètre. Reprenons l'exemple du début. Supposons que le coût fixe est estimé à 40 euros alors que le vrai coût fixe est de 10 euros. D'après l'équation 2.4, on commande 2 fois plus que la quantité optimale  $q^*$ . D'après le tableau 2.4, commander 2 fois trop entraîne un surcoût de 25%. Au final, une erreur d'estimation de +300% sur le coût fixe n'a entraîné qu'une augmentation de 25% du coût moyen.

## 2.2 Ventés différées

### 2.2.1 Hypothèses

Les hypothèses sont les mêmes que pour le modèle de Wilson, à la différence près que les demandes peuvent être mises en attente. On note  $b$  (pour backorder en anglais) le coût d'attente d'une unité de demande pendant une unité de temps (unité : [euros].[s]<sup>-1</sup>). Nous utiliserons aussi les notations suivantes à l'instant  $t$  :

- $SP(t)$  = Stock physique
- $B(t)$  = Nombre de demandes en attente
- $SN(t)$  = Stock net =  $SP(t) - B(t)$
- $SC(t)$  = Quantité commandée mais non encore reçue
- $SB(t)$  = Stock brut =  $SN(t) + SC(t)$

Si l'on suppose que l'on ne peut pas avoir à la fois du stock physique et des demandes en attente (i.e.  $SP(t) > 0$  et  $B(t) > 0$ ), ce qui serait clairement sous-optimal, nous avons la propriété suivante :

**Propriété 2.1.**  $SP(t) = [SN(t)]^+$  et  $B(t) = [SN(t)]^-$  où  $[x]^+ = \max[0, x]$  désigne la partie positive de  $x$  et  $[x]^- = \max[0, -x]$  désigne la partie négative de  $x$ .

L'évolution du stock net et du stock brut, pour une politique quelconque, est représentée sur la figure 2.7. La figure 2.8 représente l'évolution des stocks pour une politique  $(r, q)$ . Dans le cas de demandes différées, le paramètre  $r$  peut prendre des valeurs positives ou négatives.

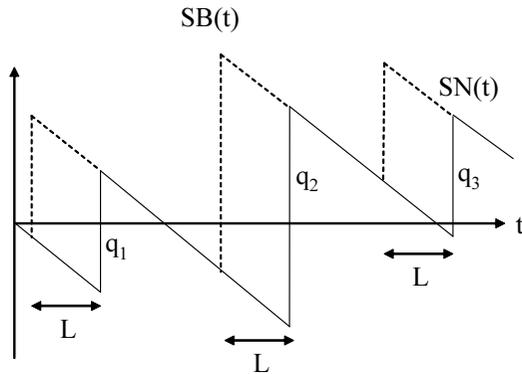


FIGURE 2.7 – Évolution des stocks net et brut pour une politique quelconque

### 2.2.2 Paramètres de performance

Soit  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le stock net minimal (resp. maximal) quand une politique  $(r, q)$  est mise en oeuvre (figure 2.9). Nous devrions avoir  $\alpha \leq 0$  et  $\beta \geq 0$ . Nous pouvons utiliser de manière

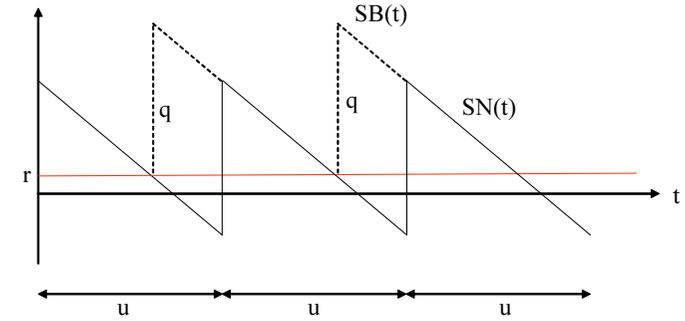


FIGURE 2.8 – Évolution des stock net et brut pour une politique  $(r, q)$

équivalente les paramètres  $(r, q)$  ou les paramètres  $(\beta, q)$  pour définir une politique. Pour simplifier les calculs, nous allons exprimer les paramètres de performance en fonction de  $\beta$  et de  $q$ .

Exprimons quelques relations utiles en utilisant, entre autres, la figure 2.9 :

$$\alpha = r - \lambda L = \beta - q$$

$$\frac{u_1}{u} = \frac{\beta}{q} \text{ et } \frac{u_2}{u} = \frac{-\alpha}{q} = \frac{q - \beta}{q} \quad (\text{Thalès})$$

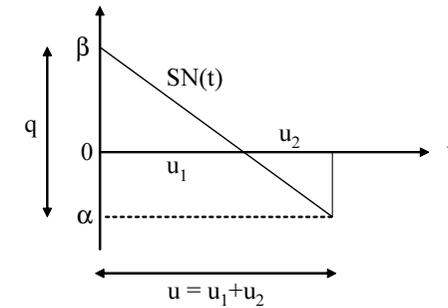


FIGURE 2.9 – Quelques notations

Exprimons maintenant quelques paramètres de performance en fonction de  $\beta$  et  $q$  :

— Stock moyen :

$$\begin{aligned} \overline{SP} &= \frac{1}{u} \int_0^{u_1} SP(t) dt = \frac{u_1 \beta}{2u} \\ &= \frac{\beta^2}{2q} \end{aligned}$$

— Nombre moyen de demandes en attente :

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{1}{u} \int_{u_1}^u B(t) dt = \frac{-u_2 \alpha}{2u} = \frac{\alpha^2}{2q} \\ &= \frac{(q - \beta)^2}{2q}\end{aligned}$$

— Temps moyen passé en stock par un produit :

$$\overline{SW} = \frac{\overline{SP}}{\lambda} \quad (\text{Loi de Little appliquée au système "Stock physique"})$$

— Rotation du stock =  $\frac{1}{\overline{SW}}$

— Attente moyenne :

$$\overline{BW} = \frac{\bar{B}}{\lambda} \quad (\text{Loi de Little appliquée au système "Nombre de demandes en attente"})$$

— % des demandes satisfaites sans délai :

$$QoS = \frac{u_1}{u} = \frac{\beta}{q}$$

— Attente moyenne parmi les demandes qui ont attendu :

$$\overline{BW}_{>0} = \frac{\overline{BW}}{1 - QoS}$$

— Coût moyen :

$$\begin{aligned}C(\beta, q) &= \lambda c + \frac{k}{u} + h \overline{SP} + b \bar{B} \\ &= \lambda c + \frac{\lambda k}{q} + h \frac{\beta^2}{2q} + b \frac{(q - \beta)^2}{2q}\end{aligned}$$

### 2.2.3 Politique optimale

Dérivons la fonction de coût par rapport à  $q$  et  $\beta$ .

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{-2\lambda k + bq^2 - (b+h)\beta^2}{2q^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta} = \frac{(h+b)\beta - bq}{q}$$

$C(\beta, q)$  est deux fois différentiable et strictement convexe<sup>b</sup> (admis) sur son domaine de définition. Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est alors :

$$\begin{aligned}\nabla C = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial q} = 0 \text{ et } \frac{\partial C}{\partial \beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta = \frac{b}{h+b}q \text{ et } bq^2 = (b+h)\beta^2 + 2\lambda k\end{aligned}$$

En résolvant ce système à deux équations, il vient :

$$\begin{aligned}q^* &= \sqrt{\frac{b+h}{b}} \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} > \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} \\ \beta^* &= \sqrt{\frac{b}{h+b}} \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} < \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} \\ C^* = C(\beta^*, q^*) &= \lambda c + \sqrt{\frac{b}{h+b}} \sqrt{2\lambda k h} < \lambda c + \sqrt{2\lambda k h}\end{aligned}$$

On remarque au passage que le coût moyen optimal est inférieur au coût moyen optimal du modèle de Wilson sans attente. Ceci est logique dans la mesure où toute solution réalisable du modèle de Wilson sans attente est aussi réalisable dans le modèle avec attente. La quantité économique de commande est, pour sa part, plus grande que celle du modèle de Wilson sans attente. On peut aussi calculer, à l'optimal, le stock net minimal, le point de commande et la période :

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \beta^* - q^* = -\frac{h}{h+b}q^* < 0 \\ r^* &= \alpha^* + \lambda L \\ u^* &= q^*/\lambda\end{aligned}$$

Si  $b$  tend vers l'infini, la politique optimale tend vers celle du modèle de Wilson sans attente. Un coût d'attente infini revient en effet à interdire les attentes des clients.

Si l'on regarde la valeur de la qualité de service à l'optimal, on obtient une expression très simple :

$$QoS^* = \frac{\beta^*}{q^*} = \frac{b}{h+b}$$

b. Une fonction  $f$  à  $n$  variables, définie sur un ensemble convexe  $E \subset \mathbb{R}^n$ , est dite *convexe* si

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall x, y \in E, \forall \alpha \in [0, 1]$$

$f$  est dite *strictement convexe* si l'inégalité précédente est stricte.

Pour une fonction  $f$  deux fois différentiable, la stricte convexité équivaut à ce que la matrice hessienne  $\nabla^2 f(x)$  soit définie positive pour tout  $x$  (valeurs propres strictement positives).

	$C^*$ (avec $c = 0$ )	$q^*$	$\beta^*$
$L$	0	0	0
$c$	N.A.	0	0
$\lambda$	1/2	1/2	1/2
$k$	1/2	1/2	1/2
$b$	$\frac{1}{2} \frac{h}{h+b}$	$\frac{1}{2} \frac{h}{h+b}$	$\frac{1}{2} \frac{h}{h+b}$
$h$	$\frac{1}{2} \frac{b}{h+b}$	$\frac{1}{2} \frac{b}{h+b}$	$\frac{1}{2} \frac{h+b/2}{h+b}$

TABLE 2.5 – Élasticité de  $C^*$ ,  $q^*$  et  $\beta^*$  aux différents paramètres

qui tend vers 1 lorsque  $b$  tend vers l'infini ou lorsque  $h$  tend vers 0.

**Exercice 2.** Montrer que les coûts fixes sont égaux à la somme des coûts de possession et d'attente lorsque l'on adopte la politique optimale.

### 2.2.4 Analyse de sensibilité et de robustesse

Les élasticités de  $C^*$ ,  $q^*$  et  $\beta^*$  par rapport aux différents paramètres sont résumées dans le tableau 2.5. En faisant tendre  $b$  vers l'infini, on ré-obtient bien les élasticités du modèle de Wilson sans attente (tableau 2.3). En outre, on remarque que les élasticités de  $C^*$  et  $q^*$  sont plus faibles, en valeur absolue, que dans le modèle de Wilson sans attente. Cela signifie que  $q^*$  et  $C^*$  sont encore moins sensibles à des variations des paramètres que dans le modèle de Wilson sans attente.

## 2.3 Ventes perdues

Dans le modèle avec ventes perdues, les ruptures de stock sont toujours autorisées mais leur traitement est différent. On suppose qu'une demande qui n'est pas satisfaite immédiatement est perdue et entraîne un coût  $c_l$  ( $l$  pour lost en anglais). On peut imaginer que  $c_l$  représente la marge réalisée sur la vente d'une unité de produit ou encore le coût additionnel pour procurer rapidement une unité de produit au client en cas de rupture de stock.

Nous nous intéressons toujours au problème de minimiser les coûts moyens sur un horizon infini. Considérons deux politiques totalement opposées :

- Politique  $\pi_1$  : satisfaire toutes les demandes et adopter la politique optimale ( $r^*$ ,  $q^*$ ) du modèle de Wilson standard. Le coût moyen est alors  $C_1 = \lambda c + \sqrt{2\lambda k h}$ .
- Politique  $\pi_2$  : ne jamais commander et ne jamais satisfaire de demande. Le coût moyen vaut alors  $C_2 = \lambda c_l$ .

Il est clair que si  $c_l \leq c$ , il n'y a aucun intérêt à maintenir l'activité et donc à avoir du stock. Nous montrons dans le théorème suivant que soit la politique  $\pi_1$  est optimale, soit la politique  $\pi_2$  est optimale.

**Théorème 2.2.** Si  $C_1 < C_2$ , la politique  $\pi_1$  est optimale. Si  $C_1 > C_2$ , la politique  $\pi_2$  est optimale. Si  $C_1 = C_2$ , les 2 politiques sont équivalentes et optimales.

*Démonstration.* Soit  $\pi$  une politique quelconque telle que une proportion  $p$  des demandes est satisfaite et une proportion  $(1-p)$  des demandes n'est pas satisfaite. On peut diviser l'horizon de temps en deux :  $[0, \infty] = A_1 \cup A_2$  où  $A_1$  désigne l'ensemble des périodes où la demande est satisfaite et  $A_2$  l'ensemble des périodes où la demande n'est pas satisfaite. Notons  $C^\pi$  le coût moyen de la politique  $\pi$  et  $C_i^\pi$  le coût moyen restreint à l'intervalle  $A_i$ . Nous avons d'une part  $C_1^\pi \geq C_1$ . D'autre part, nous avons  $C_2^\pi = C_2 = \lambda c_l$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} C^\pi &= pC_1^\pi + (1-p)C_2^\pi \\ &\geq pC_1 + (1-p)C_2 \\ &= p(C_1 - C_2) + C_2 \end{aligned}$$

Si  $C_1 \geq C_2$ , nous avons  $C^\pi \geq C_2$ . La politique  $\pi_2$  atteint la borne inférieure et est donc optimale. Par un raisonnement analogue, si  $C_1 \leq C_2$ , nous avons  $C^\pi \geq C_1$ . La politique  $\pi_1$  atteint la borne inférieure et est donc optimale.  $\square$

# Chapitre 3

## Demande constante - Systèmes multi-échelon

### 3.1 Représentation d'un réseau logistique

Nous allons maintenant considérer un réseau logistique avec plusieurs stocks. On peut représenter un tel système par un graphe orienté  $G = (V, E)$  où  $V$  désigne l'ensemble des sommets du graphe et  $E$  l'ensemble des arcs orientés du graphe. Un sommet du graphe est un point de stockage et un arc relie le sommet  $i$  au sommet  $j$  si  $i$  est fournisseur de  $j$ . On dira que  $j$  est un *successeur immédiat* de  $i$  si  $(i, j)$  est un arc du graphe. De même, on dira que  $i$  est un *prédécesseur immédiat* de  $j$  si  $(i, j)$  est un arc du graphe.

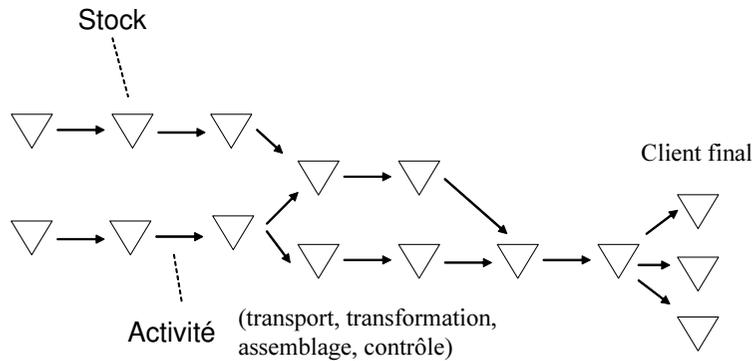


FIGURE 3.1 – Représentation graphique d'un réseau logistique

On distingue différents types de réseaux logistiques :

- Série (figure 3.2) : un sommet possède au plus un successeur immédiat et au plus un prédécesseur immédiat.
- Assemblage (figure 3.3) : un sommet possède au plus un successeur mais peut posséder plusieurs prédécesseurs immédiats.
- Distribution (figure 3.4) : un sommet possède au plus un prédécesseur immédiat mais peut posséder plusieurs successeurs immédiats.

- Arbre (figure 3.5) : il n'y a pas de cycles dans le graphe non-orienté associé.
- Général (figure 3.1) : le graphe peut avoir n'importe quelle structure, notamment des cycles dans le graphe non orienté associé.

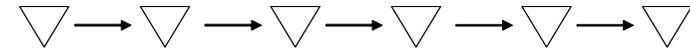


FIGURE 3.2 – Série

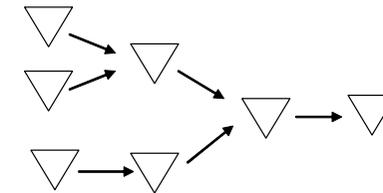


FIGURE 3.3 – Assemblage

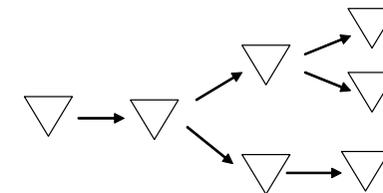


FIGURE 3.4 – Distribution

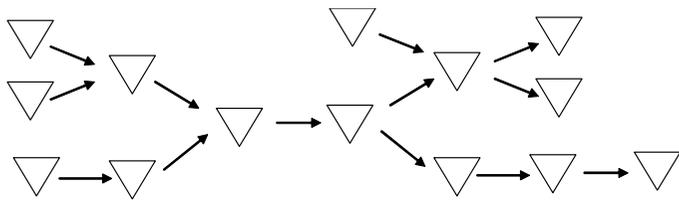


FIGURE 3.5 – Arbre

## 3.2 Système série

### 3.2.1 Modèle

Nous allons étendre dans cette section le modèle de Wilson (chapitre 1) à un modèle série. Numérotons de 1 à  $J$  les différents étages, de telle sorte que l'étage  $j$  soit le fournisseur de l'étage  $j + 1$  pour  $1 \leq j \leq J - 1$  (figure 3.6).



FIGURE 3.6 – Système série

Pour fabriquer 1 unité de stock  $j$ , l'étage  $j$  a besoin d'exactly 1 unité du stock  $j - 1$  ( $\alpha_j > 0$ ). Le stock  $J$  sert à satisfaire la demande finale, continue de taux  $\lambda$ . Le stock 1 s'approvisionne à l'extérieur du système, sans contrainte de capacité. Les caractéristiques de l'étage  $j$  sont les suivantes :

- $L_j$  = Délai d'approvisionnement
- $h_j$  = Coût de possession d'une unité de stock pendant une unité de temps
- $k_j$  = Coût fixe d'approvisionnement  $j$
- $c_j$  = Coût variable d'approvisionnement

Nous supposons dans un premier temps que  $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_J$ . Cette hypothèse est réaliste, dans la mesure où la valeur des produits augmentent avec l'étage (et donc les coûts financiers). Par ailleurs, les coûts de manutention ont tendance aussi à augmenter avec l'étage.

L'objectif sera à nouveau de trouver une politique d'approvisionnement qui minimise les coûts moyens à horizon infini, sans ruptures de stock.

Les coûts variables sont indépendants de la politique utilisée et nous les supposons nuls par la suite ( $c_j = 0$ ). En outre, nous supposons que les délais d'approvisionnement sont nuls ( $L_j = 0$ ). Nous pourrions toujours ramener l'étude d'un problème avec des  $L_j > 0$  au cas avec des  $L_j = 0$ .

### 3.2.2 Caractéristiques de la politique optimale

Nous allons tout d'abord définir les notions de politique *ZIO*, de politique à *intervalles stationnaires* et de politique *imbriquée*.

#### Politique ZIO

Une politique d'approvisionnement est dite *ZIO* (Zero Inventory Ordering) si, à chaque étage, les commandes ne peuvent arriver que lorsque le stock est nul.

#### Politique à intervalles stationnaires

Une politique d'approvisionnement est dite à *intervalles stationnaires* si les commandes arrivent à intervalles réguliers à l'étage  $j$ , pour tout  $j$ .

On peut décrire une politique à intervalles stationnaires par le vecteur  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_J)$  où  $u_j$  est la période d'approvisionnement de l'étage  $j$ . Si une politique d'approvisionnement est à intervalles stationnaires et *ZIO*, les quantités commandées sont nécessairement constantes et on les notera  $(q_1, \dots, q_J)$ . La relation suivante est alors valable à chaque étage  $j$  :

$$q_j = \lambda u_j$$

#### Politique imbriquée

Une politique d'approvisionnement est dite *imbriquée* si l'étage  $j + 1$  commande à chaque fois que l'étage  $j$  commande.

Pour une politique imbriquée, une commande à l'étage  $j$  déclenche automatiquement une commande à l'étage  $j + 1$ . Ainsi, l'étage  $J$  (qui voit la demande finale) est celui qui commande le plus souvent tandis que l'étage 1, qui commande à l'extérieur du système, est celui qui commande le moins souvent.

Soit une politique à intervalles stationnaires  $(u_1, \dots, u_J)$  qui serait par ailleurs imbriquée et *ZIO*. Les périodes de commande vérifient :

$$u_j = a_j u_{j+1} \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{N}^*$$

#### Structure de la politique optimale

**Théorème 3.1.** *Il existe une politique optimale qui soit imbriquée, à intervalles stationnaires et ZIO.*

**Démonstration :** La démonstration de ce théorème sera admise dans le cadre de ce cours. Pour une démonstration complète, voir par exemple (Zipkin, 2000, p.135-136).  $\square$

Nous allons maintenant nous restreindre à l'étude des politiques imbriquées, à intervalles stationnaires et ZIO. Pour qu'une telle politique soit réalisable, il faut que les périodes vérifient :

$$u_j = a_j u_{j+1} \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{N}^*$$

### 3.2.3 Stock local et stock échelon

On définit l'échelon  $j$  comme l'ensemble des étages en aval de  $j$ , c'est à dire les étages  $i \geq j$  (voir figure 3.7).

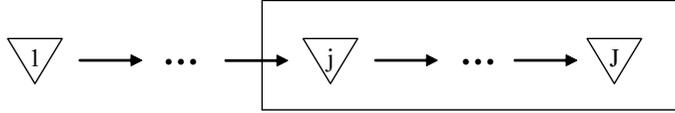


FIGURE 3.7 – Echelon  $j$

On définit alors le *stock local* et le *stock échelon* comme suit (à l'instant  $t$ ) :

- $SP_j(t)$  = stock physique local à l'étage  $j$
- $SP_j^e(t) = \sum_{i=j}^J SP_i(t)$  = Stock physique de l'échelon  $j$

Dans un système série, il est plus pertinent de prendre les décisions d'approvisionnement sur la base du stock échelon plutôt que sur la base du stock local. En effet, si il y a beaucoup de produits en stock (ou en transit) entre l'étage  $j$  et le dernier étage  $J$ , il n'est sans doute pas intéressant de réapprovisionner l'étage  $j$  puisque il y a déjà suffisamment de produits en transit ou en stock pour satisfaire la demande finale.

L'évolution d'un stock échelon est très simple et correspond à celle du modèle de Wilson de période  $u_j$  et de demande de taux  $\lambda$ . En effet, le stock échelon  $SP_j^e$  n'est modifié que par des commandes passés par l'étage  $j$  et par la demande finale  $\lambda$ . Lorsque qu'une commande est passé entre deux étages  $k$  et  $k+1$  ( $j \leq k < J$ ), le stock échelon n'est pas modifié.

Pour un système à trois étages ( $J = 3$ ), la figure 3.8 représente l'évolution des stocks locaux (en trait plein) et échelons (en pointillés) pour une politique stationnaire, imbriquée et ZIO de périodes  $\mathbf{u} = (6, 3, 1)$ . Nous avons supposé que l'étage 3 commande trois fois plus souvent que l'étage 2 qui commande lui-même deux fois plus souvent que l'étage 1. Au dernier étage (étage 3), l'évolution du stock est similaire à celle du modèle de Wilson. Aux autres étages, l'évolution des stocks est plus complexe.

### 3.2.4 Coût de possession local et échelon

Soit  $h_j^e$  le cout de possession échelon (par unité de temps) d'une unité de stock dans l'échelon  $j$  :

$$h_j^e = h_j - h_{j-1} \quad \text{avec } h_0 = 0$$

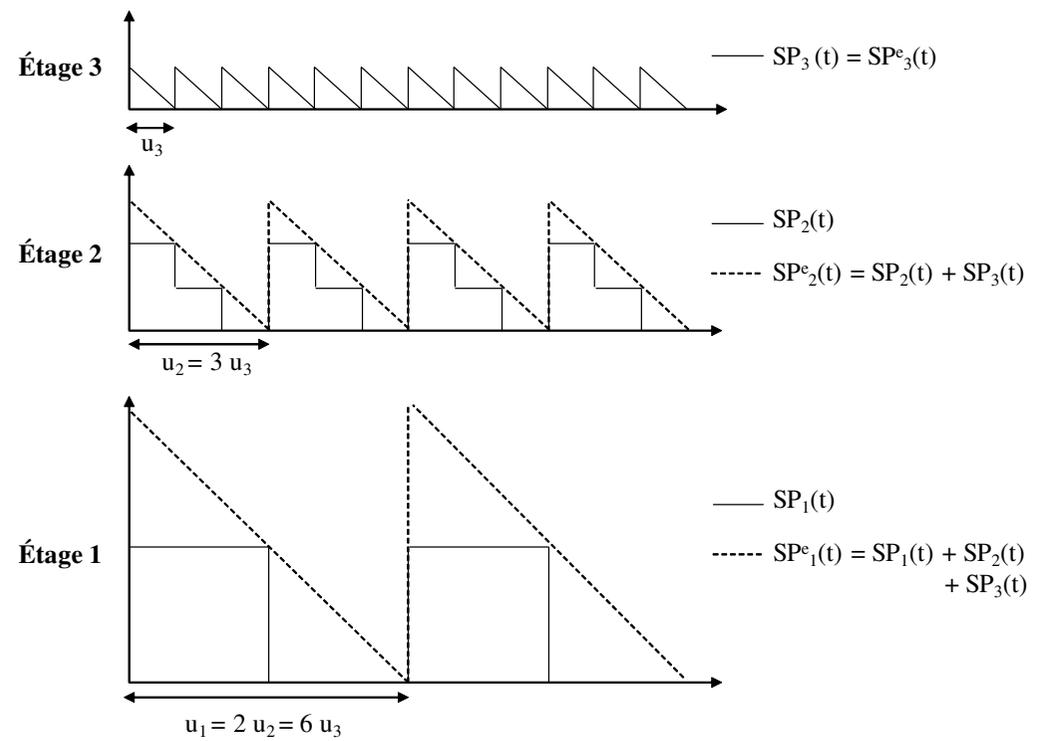


FIGURE 3.8 – Evolution des stocks locaux et des stocks échelon pour la politique  $\mathbf{u} = (6, 3, 1)$

On supposera dans la suite que  $h_j^e \geq 0$ , c'est-à-dire que  $h_j \geq h_{j-1}$ . Cette hypothèse est réaliste dans la mesure où les coûts de possession tendent à augmenter avec la valeur du produit et donc avec l'étage.

Nous avons alors la relation suivante entre les coûts de possession (par unité de temps) locaux et échelon :

$$\sum_j h_j SP_j(t) = \sum_j h_j^e SP_j^e(t). \quad (3.1)$$

### 3.2.5 Coût d'une politique

Évaluons maintenant le coût par unité de temps d'une politique stationnaire  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_J)$  (imbriquée et ZIO) en fonction des paramètres du système. Les coûts fixes

par unité de temps valent tout simplement

$$C_k(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^J \frac{k_j}{u_j}.$$

Le coût de possession par unité de temps peut se calculer sur la période  $u_1$  dans la mesure où les stocks  $SP_j^e(t)$  sont tous  $u_1$ -périodiques.

$$C_h(\mathbf{u}) = \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \left( \sum_{j=1}^J h_j SP_j^e(t) \right) dt$$

En l'état, le calcul des coûts de possession n'est pas triviale, dans la mesure où l'évolution des stocks  $SP_j(t)$  est relativement complexe (figure 3.8). Nous allons utiliser la relation (3.1) pour simplifier le calcul :

$$C_h(\mathbf{u}) = \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \left( \sum_{j=1}^J h_j^e SP_j^e(t) \right) dt \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{u_1} \sum_{j=1}^J \left( \int_0^{u_1} h_j^e SP_j^e(t) dt \right) \quad (3.3)$$

$$= \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} h_j^e SP_j^e(t) dt \right) \quad (3.4)$$

$$= \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{u_j} \int_0^{u_j} h_j^e SP_j^e(t) dt \right) \quad (3.5)$$

Le passage de (3.3) à (3.4) vient du fait que  $SP_j^e(t)$  est  $u_1$ -périodique mais aussi  $u_j$ -périodique. Le passage de (3.4) à (3.5) vient du fait que l'évolution du stock échelon  $SP_j^e(t)$  est précisément celle du modèle de Wilson (chapitre 1) avec période  $u_j$  et demande de taux  $\lambda$ .

Finalement, le coût par unité de temps  $C(\mathbf{u})$  de la politique  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_J)$  s'exprime facilement en utilisant les coûts de possession échelon :

$$C(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^J C_j(u_j) \quad \text{avec} \quad C_j(u_j) = \frac{k_j}{u_j} + \frac{\lambda h_j^e}{2} u_j$$

La quantité  $C_j(u_j)$  représente le coût moyen d'un modèle de Wilson à un étage de paramètres  $h_j^e, k_j, \lambda$ .

### 3.2.6 Optimisation

Nous allons maintenant tenter de rechercher la meilleure politique (ou du moins une bonne politique) parmi les politiques imbriquées, à intervalles stationnaires et ZIO. Cela revient au problème d'optimisation suivant.

$$\begin{aligned} C^* = \min \quad & C(\mathbf{u}) \\ \text{s.c.} \quad & u_j = a_j u_{j+1} \text{ pour } 1 \leq j < J \\ & a_j \in N^* \text{ pour } 1 \leq j < J \\ & u_j \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq J \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ce problème est un problème d'optimisation non-linéaire et mixte (variables entières et réelles) qui est difficile à résoudre directement. Il existe néanmoins des heuristiques avec de très bonnes garanties de performance (Zipkin, 2000).

Si l'on enlève complètement la contrainte  $u_j = a_j u_{j+1}$ , on obtient un problème trivial car il suffit d'optimiser séparément les fonctions  $C_j(u_j)$  qui ont pour période optimale  $\sqrt{2k_j/(\lambda h_j^e)}$  à l'étage  $j$ .

#### Relaxation

Une relaxation plus fine consiste à remplacer la contrainte  $u_j = a_j u_{j+1}$  par  $u_j \geq u_{j+1}$  :

$$\begin{aligned} C^- = \text{minimiser} \quad & C(\mathbf{u}) \\ \text{s.c.} \quad & u_j \geq u_{j+1} \text{ pour } 1 \leq j < J \\ & u_j \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq J \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le problème (3.7) est facile à résoudre avec un solveur car la fonction objectif est strictement convexe, les variables sont continues et les contraintes sont linéaires.

Supposons que l'on ait obtenu une solution optimale de (3.7), notée  $\mathbf{u}^- = (u_1^-, \dots, u_J^-)$ . Son coût moyen,  $C^- = C(\mathbf{u}^-)$ , est alors une borne inférieure du coût moyen optimal du problème (3.6) :

$$C^- \leq C^* \quad (3.8)$$

#### Solution en puissance de deux

Nous allons maintenant construire à partir de  $\mathbf{u}^-$  une solution réalisable, dite en *puissance de deux*, du problème (3.6) et montrer que son coût est au maximum à 6% de l'optimal.

**Définition 3.1.** Une solution  $(u_1, \dots, u_J)$  est en puissance de deux si chaque période peut s'écrire sous la forme

$$u_j = 2^{k_j} \alpha$$

avec :

- $\alpha$  un réel strictement positif, que l'on appellera la période de référence
- $k_j$  un entier relatif, décroissant en  $j$

La période  $u_j$  d'une solution en puissance de deux est donc de la forme  $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, 8\alpha$ , etc, ou de la forme  $\alpha/2, \alpha/4, \alpha/8$ , etc. Par exemple, pour un système à 7 étages, la solution  $\mathbf{u} = (4\alpha, 4\alpha, 4\alpha, \alpha, \alpha/2, \alpha/2, \alpha/4)$  est une solution en puissance de deux.

Par ailleurs, notons qu'une solution en puissance de deux est réalisable pour le problème (3.6) car

$$\frac{u_j}{u_{j+1}} = 2^{k_j - k_{j+1}} \quad \text{avec } (k_j - k_{j+1}) \in \mathbb{N}^*$$

Cherchons la solution en puissance de deux la plus proche possible de  $\mathbf{u}^-$ . Nous pouvons réécrire les  $u_j^-$  sous la forme de puissances de deux :

$$u_j^- = 2^{x_j} \alpha \quad \Rightarrow \quad x_j = \log_2 \left( \frac{u_j^-}{\alpha} \right)$$

Considérons maintenant la solution en puissance de deux  $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, \dots, u_J^+)$  telle que :

$$u_j^+ = 2^{k_j} \alpha \quad \text{avec } k_j \text{ l'entier relatif le plus proche de } x_j$$

Illustrons le choix de la politique  $\mathbf{u}^+$  sur un exemple. Soit un système à trois étages où la solution de (3.7) est  $\mathbf{u}^- = (6.7, 2.8, 0.3)$ . Prenons une période de référence  $\alpha = 1$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} 6.7 &= 2^{\log_2 6.7} = 2^{2.74} \simeq 2^3 \\ 2.8 &= 2^{\log_2 2.8} = 2^{1.49} \simeq 2^1 \\ 0.3 &= 2^{\log_2 0.3} = 2^{-1.74} \simeq 2^{-2} \end{aligned}$$

La solution en puissance de 2 retenue est alors  $\mathbf{u}^+ = (2^3, 2^1, 2^{-2}) = (8, 2, 0.25)$ .

### Théorème 3.2.

$$C^* \leq C^+ \leq 1.06C^*$$

La coût de la solution  $\mathbf{u}^+$  est, dans le pire des cas, à 6 % de la solution optimale, quelle que soit la période de référence  $\alpha$  choisie.

*Démonstration.* Admise (Zipkin, 2000, p.135-136). □

### 3.2.7 Ventas différées et délai de livraison

Nous allons maintenant généraliser les notions de stock local et de stock échelon dans le cas où le délai d'approvisionnement est positif et les demandes peuvent être mises en attente.

Tout d'abord, les stocks locaux à l'instant  $t$  :

- $SP_j(t)$  = Stock physique local à l'étage  $j$
- $B_j(t)$  = Demandes en attente à l'étage  $j$
- $SN_j(t)$  = Stock net local à l'étage  $j = SP_j(t) - B_j(t)$
- $SC_j(t)$  = Quantité commandée par l'étage  $j$  mais non encore reçue par l'étage  $j$
- $SB_j(t)$  = Stock brut local à l'étage  $j = SN_j(t) + SC_j(t)$

Faisons l'hypothèse que toute demande en attente est, si possible, satisfaite immédiatement. Nous avons alors les relations suivantes pour les stocks locaux :

$$SP_j = [SN_j]^+ \text{ et } B_j = [SN_j]^- \quad (3.9)$$

Ensuite, les stocks échelon à l'instant  $t$  :

- $ST_j(t)$  = Stock en transit vers  $j$  (uniquement depuis le prédécesseur immédiat de  $j$ )
- $SP_j^e(t)$  = Stock physique dans l'échelon  $j$  (locaux ou en transit)

$$SP_j^e(t) = SP_j(t) + \sum_{i=j+1}^J (SP_i(t) + ST_i(t))$$

- $SN_j^e(t)$  = Stock net de l'échelon  $j = SP_j^e(t) - B_j(t)$   
*Remarque : on ne compte que les demandes en attente vis-à-vis de l'extérieur de l'échelon  $j$ .*
- $SB_j^e(t)$  = Stock brut de l'échelon  $j = SN_j^e(t) + SC_j(t)$   
*Remarque : on ne compte que la quantité commandée (en attente de réception) à l'extérieur de l'échelon  $j$*

Illustrons ces notations sur l'exemple de la figure 3.9. Au-dessus des triangles sont indiqués les stocks nets locaux. Au-dessus des flèches sont indiqués les stocks en transit depuis le prédécesseur immédiat (ici égaux aux stocks commandés). Ceci ne sera vrai si le prédécesseur est en rupture de stock.

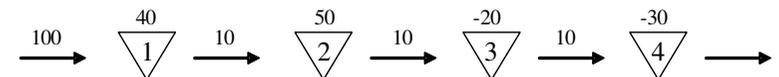


FIGURE 3.9 – Stock échelon avec délai de livraison et ventes différées.

Les données sont donc :

- $ST_1(t) = SC_1(t) = 100$  et  $ST_j(t) = SC_j(t) = 10$  pour  $j = 2, 3, 4$
- $SN_1(t) = 40, SN_2(t) = 50, SN_3(t) = -20, SN_4(t) = -30$

On peut alors par exemple calculer les stocks échelon :

- $SP_1^e(t) = 120, SP_2^e(t) = 70, SP_3^e(t) = 10, SP_4^e(t) = 0$
- $SN_1^e(t) = 90, SN_2^e(t) = 40, SN_3^e(t) = -20, SN_4^e(t) = -30$
- $SB_1^e(t) = 190, SB_2^e(t) = 50, SB_3^e(t) = -10, SB_4^e(t) = -20$

Il n'y a de relation analogue à (3.9) pour les stocks échelons. Sur l'exemple ci-dessus :

$$[SN_1^e]^+ = 90 \neq SP_1^e(t) = 120 \text{ et } [SN_1^e]^- = 0 \neq B_4(t) = 30$$

### 3.3 Système en arbre

Un système en arbre est un mélange de systèmes d'assemblage et de distribution (figure 3.5).

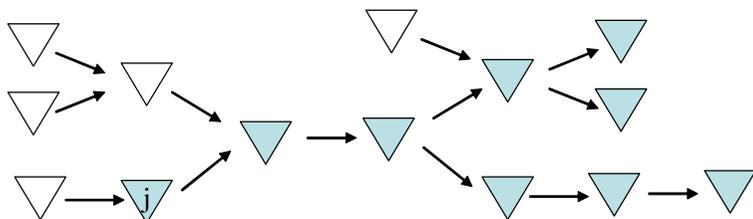


FIGURE 3.10 – Echelon  $j$  pour un système en arbre (en grisé)

#### 3.3.1 Modèle

Soit  $E$  l'ensemble des étages. Les caractéristiques de l'étage  $i \in E$  sont les suivantes :

- $\lambda_i$  = taux de la demande pour l'étage  $i$
- $L_{ij}$  = délai pour acheminer une commande de l'étage  $i$  à l'étage  $j$  (défini seulement si l'arc  $(i, j) \in E$ )
- $L_i$  = délai d'approvisionnement pour qu'un étage initial s'approvisionne à l'extérieur.
- $h_i$  = Coût de possession d'une unité de stock pendant une unité de temps
- $k_i$  = Coût fixe d'approvisionnement à l'étage  $i$
- $c_i$  = Coût variable d'approvisionnement à l'étage  $i$

L'objectif sera à nouveau de trouver une politique d'approvisionnement qui minimise les coûts moyens à horizon infini, sans ruptures de stock. Sans perte de généralité, on supposera que les délais d'approvisionnement et les coûts variables sont nuls ( $L_{ij} = L_i = 0$  et  $c_j = 0$ ).

Nous allons introduire quelques notations supplémentaires :

- $PreIm(j)$  = ensemble des prédécesseurs immédiats de  $j$
- $Pre(j)$  = ensemble des prédécesseurs de  $j$  (immédiats ou non)
- $SucIm(i)$  = ensemble des successeurs immédiats de  $i$
- $Suc(i)$  = ensemble des successeurs de  $i$  (immédiats ou non)

On peut aussi étendre les notions d'échelon, de stock échelon, de coûts échelon. L'échelon  $j$  comprend l'ensemble des successeurs immédiats ou non de  $j$  (figure 3.10) de :

- $SP_i^e(t) = SP_i(t) + \sum_{j \in Suc(i)} SP_j(t)$
- $h_j^e = h_j - \sum_{i \in PreIm(j)} h_i(t)$

$$\lambda_i^e = \lambda_i + \sum_{j \in Suc(i)} \lambda_j$$

Illustrons les notations sur l'exemple de la figure 3.11 :

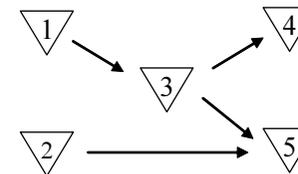


FIGURE 3.11 – Exemple pour les notations

$$\lambda_1^e = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5, \quad \lambda_2^e = \lambda_2 + \lambda_5$$

$$\lambda_3^e = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5, \quad \lambda_4^e = \lambda_4, \quad \lambda_5^e = \lambda_5$$

$$h_1^e = h_1, \quad h_2^e = h_2, \quad h_3^e = h_3 - h_1, \quad h_4^e = h_4 - h_3, \quad h_5^e = h_5 - h_3 - h_2$$

$$SP_1^e(t) = SP_1(t) + SP_3(t) + SP_4(t) + SP_5(t), \quad SP_2^e(t) = SP_2(t) + SP_5(t)$$

$$SP_3^e(t) = SP_3(t) + SP_4(t) + SP_5(t), \quad SP_4^e(t) = SP_4(t), \quad SP_5^e(t) = SP_5(t)$$

#### 3.3.2 Caractéristiques de la politique optimale

Toute l'approche développée pour un système série s'applique pour un système d'assemblage. En effet, on peut montrer que la politique optimale est imbriquée, stationnaire et ZIO (une commande à l'étage  $j$  déclenche automatiquement une commande à tous les étages en aval de  $j$ ).

Pour un système de distribution, la politique optimale n'est pas nécessairement imbriquée. Considérons le système de distribution le plus simple possible (figure 3.12).

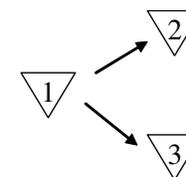


FIGURE 3.12 – Système de distribution le plus simple

Supposons que les coûts fixes aux étages 1 et 2,  $k_1$  et  $k_2$ , sont beaucoup plus petits que le coût fixe à l'étage 3,  $k_3$ . On commandera alors beaucoup moins souvent à l'étage 3 qu'aux étages 1 et 2. La politique optimale n'est donc pas imbriquée. Néanmoins, on peut s'inspirer de l'approche adoptée pour un système série et obtenir des algorithmes avec des garanties de performance comparables (Zipkin, 2000).

### 3.3.3 Politique imbriquée

Restreignons nous à des politiques à intervalles stationnaires, imbriquée et ZIO et cherchons à déterminer la meilleure politique de ce type. Pour un système d'assemblage, cela n'est pas une restriction dans la mesure où la politique optimale est de ce type.

Soit  $(u_1, \dots, u_J)$  le vecteur des périodes. A chaque fois que l'étage  $i$  commande, tous les successeurs immédiats de  $i$  commandent :

$$\forall (i, j) \in E, \exists a_{ij} \in \mathbb{N}^*, u_i = a_{ij}u_j$$

A nouveau le stock de l'étage  $j$  évolue comme dans le modèle de Wilson avec un taux  $\lambda_j$ . La relation suivant est toujours valable :

$$\sum_j h_j SP_j(t) = \sum_j h_j^e SP_j^e(t)$$

Le coût moyen est alors :

$$C(\mathbf{u}) = \sum_j \left( \frac{k_j}{u_j} + \frac{h_j^e \lambda_j}{2} u_j \right)$$

Rechercher la meilleur politique imbriquée revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} C^* = \min \quad & C(\mathbf{u}) \\ \text{s.c.} \quad & u_i = a_{ij}u_j, \forall (i, j) \in E \\ & a_{ij} \in \mathbb{N}^*, \forall (i, j) \in E \\ & u_j \geq 0, \forall j \in V \end{aligned}$$

Ce problème d'optimisation non-linéaire et mixte est difficile à résoudre directement. Nous allons relâcher la contrainte  $u_i = a_{ij}u_j$  :

$$\begin{aligned} C^- = \min \quad & C(\mathbf{u}) \\ \text{s.c.} \quad & u_i \geq u_j, \forall (i, j) \in E \\ & u_j \geq 0, \forall j \in V \end{aligned}$$

A partir de la solution  $\mathbf{u}^-$  du problème relâché, on peut construire une solution en puissance de deux,  $\mathbf{u}^+$ , de coût  $C^+$  garantie à 6% de  $C^*$ . La démonstration est similaire à celle effectuée pour un système série.

# Chapitre 4

## Demande déterministe et variable dans le temps

Dans les modèles de type Wilson (chapitre 1), nous avons considéré un modèle stationnaire où les paramètres sont indépendants du temps, en particulier le taux de la demande. Un problème plus réaliste consiste à considérer que la demande varie dans le temps. Une première approche consiste à supposer que le taux de la demande  $\lambda(t)$  dépend de l'instant  $t$  considéré. Ainsi, la demande pendant  $dt$  vaut  $\lambda(t)dt$ . Si on note  $x(t)$  le stock à l'instant  $t$ , nous avons  $x(t + dt) = x(t) - \lambda(t)dt$  entre deux commandes, puis :

$$x'(t) = -\lambda(t). \quad (4.1)$$

Entre deux instants de commande  $s_1$  et  $s_2$ , le stock évolue comme suit

$$x(t) = x(s_1) - \int_{s_1}^t \lambda(u)du, \quad t \in [s_1, s_2[$$

Afin de caractériser la politique optimale, il faut décider des instants de commande et des quantités de commande à ces instants. Ce problème d'optimisation est complexe, sauf pour des fonctions de demande simples (linéaire ou exponentielle par exemple). Par ailleurs, dès que l'on va considérer des hypothèses supplémentaires (périssabilité, ...), l'équation (4.1) ne va pas avoir de solution analytique simple.

Une autre approche consiste à discrétiser le temps et les instants de décision. Dans la suite de ce chapitre, nous adopterons cette modélisation où les décisions de réapprovisionnement ne peuvent intervenir qu'à des instants prédéfinis. Dans la pratique, cette modélisation s'adapte bien à des situations où les commandes ne peuvent être passées qu'une fois par jour, par semaine ou par mois.

### 4.1 Sans rupture de stock

On considère le modèle DEL (Dynamic Economic Lotsize) :

- $T$  = horizon de temps
- $t$  = instant de décision  $t = 0, 1, \dots, T - 1$
- $d_t$  = demande à l'instant  $t$ . On notera  $D_{[s,t]} = \sum_{i=s}^t d_i$ , la demande cumulée de  $s$  à  $t$ .

- $L$  = délai d'approvisionnement
- $k_t$  = coût fixe d'approvisionnement à l'instant  $t$
- $c_t$  = coût linéaire d'approvisionnement à l'instant  $t$
- $h_t$  = coût de possession à l'instant  $t$
- $x_0 = x$  stock en début de période  $t = 0$

L'objectif est de déterminer une politique qui satisfait toutes les demandes et qui minimise les coûts sur l'horizon  $[0, T]$ . Ce problème a été résolu pour la première fois par Wagner and Whitin (1958).

Les demandes étant déterministes, on peut supposer que le délai  $L$  est nul, sans perte de généralité. En effet, lorsque  $L > 0$ , il suffit d'avancer les commandes de  $L$ .

Quelques notations :

- $x_t$  = stock en début de période  $t$
- $q_t$  = quantité commandée en début de période  $t$

Une politique de réapprovisionnement est caractérisée par les quantités commandées à chaque instant :  $(q_0, q_1, \dots, q_{T-1})$ .

La séquence exacte des événements est la suivante :

- A l'instant  $t$ , on observe le stock disponible  $x_t$  et on encourt un coût de possession  $h_t x_t$
- Une commande  $q_t$  est passée et arrive immédiatement, induisant un coût  $c_t q_t + k_t \mathbb{1}_{\{q_t > 0\}}$
- La demande  $d_t$  se produit et est satisfaite avec le stock  $x_t + q_t$ .

La dynamique du système est alors :

$$x_{t+1} = x_t + q_t - d_t$$

Une représentation possible de la dynamique est donnée sur la figure 4.1.

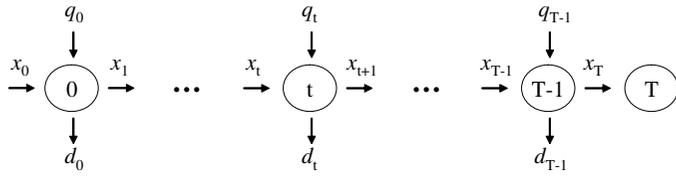


FIGURE 4.1 – Dynamique du système

Dans le cadre de ce cours, nous en resterons à la modélisation du problème. Pour plus de détails sur sa résolution, nous référons le lecteur au cours de "Recherche opérationnelle et planification" (semestre 3 de la filière ICL) ou encore à l'ouvrage de Zipkin (2000).

On peut formuler ce problème d'optimisation comme suit :

$$\min \sum_{t=0}^{T-1} (h_t x_t + c_t q_t + k_t \mathbb{1}_{\{q_t > 0\}}) + h_T x_T$$

$$\text{s.c. } x_0 = x \quad (4.2)$$

$$x_{t+1} = x_t + q_t - d_t \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \quad (4.3)$$

$$x_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \dots, T$$

$$q_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \dots, T-1$$

La quantité  $\mathbb{1}_{\{q_t > 0\}}$  n'est pas linéaire en  $q_t$ . On peut la linéariser en introduisant la variable binaire  $z_t$  ( $= 1$  si on commande à  $t$ ,  $0$  sinon). Notre obtenons alors un programme linéaire en nombres entiers (PLNE).

$$\min \sum_{t=0}^{T-1} (h_t x_t + c_t q_t + k_t z_t) + h_T x_T$$

$$\text{s.c. } x_0 = x$$

$$x_{t+1} = x_t + q_t - d_t \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \quad (4.4)$$

$$M_t z_t \geq q_t \text{ pour } t = 0, \dots, T-1$$

$$x_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \dots, T$$

$$q_t \geq 0 \text{ pour } t = 0, \dots, T-1$$

$$z_t \in \{0, 1\} \text{ pour } t = 0, \dots, T-1$$

Les paramètres  $M_t$  doivent être choisis suffisamment grands. La quantité optimale commandée à  $t$  étant nécessairement inférieure à la demande cumulée de  $0$  à  $T$ , on peut prendre  $M_t = D_{[t, T]}$ . La résolution de ce PLNE peut être longue si le nombre de variables devient important (ici, si  $T$  est grand).

Une autre approche consiste à formuler le problème sous la forme d'un plus court chemin dans un graphe orienté. Notons tout d'abord que la politique optimale est ZIO (Zero Inventory Ordering). Pour toute politique ZIO, nous avons  $q_t = 0$  si  $x_t > 0$  (on ne commande que si le stock est nul). Considérons deux instants de commandes consécutifs  $s$  et  $t$

d'une politique ZIO. La quantité commandée à  $s$  doit couvrir exactement la demande sur l'intervalle  $[s, t[$  (l'exclusion de  $t$  de l'intervalle vient de la séquence des événements) :

$$q_s = \sum_{i=s}^{t-1} d_i$$

Ainsi, il nous suffit de connaître les instants de commande pour caractériser entièrement une politique ZIO. On peut donc représenter une politique ZIO comme étant un chemin dans un graphe dont les sommets sont les instants  $t = 0, \dots, T$ .

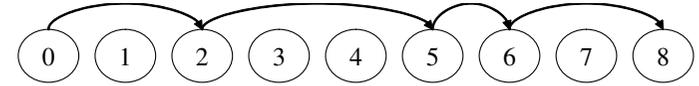


FIGURE 4.2 – Pour un horizon  $T = 8$ , ce chemin dans le graphe représente une politique où l'on commande aux instants  $t = 0, 2, 5, 6$ .

Un arc relie le sommet  $t$  à  $t'$ , pour tout  $t < t'$ . Le poids d'un arc  $(t, t')$ , noté  $k[t, t']$ , correspond au coût induit par une commande passée à  $t$  afin de couvrir la demande cumulée sur l'intervalle  $[t, t']$ , notée  $D[t, t']$ . Nous avons :

$$k[t, t'] = k(t) + c(t)D[t, t'] + \sum_{s=t+1}^{t'} h(s)D[s, t']$$

Le problème revient alors à trouver un plus court chemin du sommet  $0$  au sommet  $T$ . On peut par exemple utiliser l'algorithme de Dijkstra qui calcule en  $O(|V|^2)$  le plus court chemin dans un graphe  $G = (V, E)$  où  $V$  désigne l'ensemble des sommets du graphe,  $E$  l'ensemble des arcs et  $|V|$  la cardinalité de  $V$ . Pour le problème qui nous intéresse, le nombre de sommets du graphe est  $T$  et nous avons donc un algorithme en  $O(T^2)$ .

Signalons enfin quelques heuristiques pour le problème DEL :

- Utiliser la formule de Wilson avec la demande moyenne  $\bar{D} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T d_i$ . Commander

$$\text{tous les } T_{EOQ} = \sqrt{\frac{2k}{h\bar{D}}} \text{ (en arrondissant à l'entier le plus proche strictement positif).}$$

La quantité commandée est choisie de manière à satisfaire exactement la demande sur la période.

- Minimiser le coût moyen localement. Si on commande à  $t = 0$  de manière à couvrir la demande sur  $[0, u]$ , le coût encouru moyen est  $k[0, u]/u$ . On va chercher à minimiser localement cette quantité.

Ces heuristiques peuvent cependant se révéler très mauvaises dans certaines situations.

## 4.2 Variantes et extensions

De nombreuses variantes et extensions du problème précédent ont été considérées dans la littérature. Nous en présentons ici trois.

### Ventes différées

Supposons désormais que les demandes peuvent être mises en attente et que le coût d'attente unitaire à la période  $t$  est  $b_t$ . La formulation est proche de celle de (4.4). Il suffit d'enlever la contrainte  $x_t \geq 0$  et de rajouter les coûts d'attente :

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=0}^{T-1} (h_t x_t^+ + b_t x_t^- + c_t q_t + k_t z_t) + h_T x_T^+ + b_T x_T^- \\ \text{s.c. } x_0 = x \\ x_{t+1} = x_t + q_t - d_t \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \\ M z_t \geq q_t \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \\ q_t \geq 0 \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \\ z_t \in \{0, 1\} \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \end{aligned}$$

Ce problème peut aussi être modélisé comme un plus court chemin dans un graphe (Zipkin, 2000) mais c'est un peu plus compliqué.

### Ventes perdues

On suppose qu'une demande non satisfaite instantanément est définitivement perdue, avec une pénalité  $b_t$  par unité de demande non satisfaite.

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=0}^{T-1} (h_t x_t + b_t [d_t - (x_t + q_t)]^+ + c_t q_t + k_t z_t) + h_T x_T \\ \text{s.c. } x_0 = x \tag{4.5} \\ x_{t+1} = (x_t + q_t - d_t)^+ \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \\ x_t \geq 0 \text{ pour } t = 1, \dots, T \quad (\text{Contrainte inutile}) \\ M z_t \geq q_t \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \\ q_t \geq 0 \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \\ z_t \in \{0, 1\} \text{ pour } t = 0, \dots, T-1 \end{aligned}$$

Si la pénalité  $b_t$  est indépendante du nombre de ruptures mais est appliquée à chaque fois qu'il y a rupture, il suffit de remplacer dans la fonction objectif  $b_t [d_t - (x_t + q_t)]^+$  par  $b_t \mathbb{1}_{\{d_t > x_t + q_t\}}$ .

## Coûts actualisés

Notons  $\alpha$  le taux d'intérêt par période et posons  $\gamma = 1/(1 + \alpha)$ . Ainsi, 1 euro investi à l'instant initial rapporte  $(1 + \alpha)^t$  euros à l'instant  $t$ . Réciproquement, un coût de 1 euro à l'instant  $t$  correspond à un coût actualisé à l'instant  $t = 0$  de  $1/(1 + \alpha)^t$ . La fonction objectif devient alors :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t (h_t x_t^+ + c_t q_t + k_t \mathbb{1}_{\{q_t > 0\}}) + \gamma^T h_T x_T$$

En posant  $h'_t = \gamma^t h_t$ ,  $c'_t = \gamma^t c_t$ ,  $k'_t = \gamma^t k_t$ , on se ramène au problème (4.4).

### Système série

Considérons une extension du modèle DEL à un système série à  $J$  étages (figure 4.3). Les caractéristiques à l'étage  $j$  et à l'instant  $t$  sont les suivantes :

- $d_t^j$  = : demande à l'instant  $t$
- $k_t^j$  = coût fixe d'approvisionnement
- $c_t^j$  = coût linéaire d'approvisionnement
- $h_t^j$  = coût de possession
- $x^j$  = stock initial



FIGURE 4.3 – Système série

Soit  $q_t^j$  la quantité commandée en période  $t$  à l'étage  $j$  et  $z_t^j$  une variable binaire valant 1 si on commande en période  $t$  à l'étage  $j$  et 0 sinon. On supposera que  $q_t^{j+1} = 0$  pour simplifier l'écriture du PLNE :

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{t=0}^{T-1} (h_t^j x_t^j + c_t^j q_t^j + k_t^j z_t^j) + h_T^j x_T^j \right] \\ \text{s.c. } x_0^j = x^j \\ x_{t+1}^j = x_t^j + q_t^j - d_t^j - q_t^{j+1} \text{ pour } t = 0, \dots, T-1, \forall j \\ x_t^j \geq 0 \text{ pour } t = 1, \dots, T, \forall j \\ M z_t^j \geq q_t^j \text{ pour } t = 0, \dots, T-1, \forall j \\ q_t^j \geq 0 \text{ pour } t = 0, \dots, T-1, \forall j \\ z_t^j \in \{0, 1\} \text{ pour } t = 0, \dots, T-1, \forall j \end{aligned}$$

**Exercice 3.** On considère un système général avec un ensemble de stocks  $I$ . Chaque stock  $i$  a un ensemble de successeurs  $\text{suc}(i) \subset I$ . Les autres hypothèses sont les mêmes que pour le système série. Rédiger le PLNE.

# Chapitre 5

## Demande aléatoire - Modèle du vendeur de journaux

Nous allons examiner dans ce chapitre le problème dit du "vendeur de journaux" (newsboy problem ou encore newsvendor problem en anglais). L'idée générale est la suivante. Un vendeur de journaux commande la veille pour le lendemain matin un certain nombre de journaux. La demande journalière est aléatoire et le vendeur ne sait donc pas combien de journaux il peut espérer vendre. Néanmoins, au vu de l'historique des ventes passées, il connaît la distribution de cette demande.

Si il lui reste des journaux en fin de journée, il doit les jeter et a un coût d'inventu proportionnel au nombre de journaux jeté. Si il ne commande pas assez de journaux, il perd des ventes et a donc un manque à gagner, proportionnel aux nombres de ventes perdues. Le problème est de déterminer la quantité à commander afin de minimiser l'espérance des coûts.

Ce problème de gestion de stock ne se pose bien évidemment pas qu'aux vendeurs de journaux mais à toute personne ou entreprise cherchant à gérer un stock périssable, sans réapprovisionnement possible. Dans un chapitre ultérieur, nous verrons le cas où plusieurs approvisionnements sont possibles.

**Exercice 4.** *Un boulanger se pose la question suivante : combien de baguettes fabriquer en début de journée ? On suppose que le prix de la baguette est de 1 euro, que le coût de fabrication est de 0.2 euros et que la demande est distribuée suivant une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 5 ( $X \sim \mathcal{N}(100, 5)$ ). Quelle est le nombre optimal de baguettes à fabriquer chaque jour ?*

*Vous pourrez répondre à cette question après avoir lu la section 5.2.*

### 5.1 Hypothèses

Les principales hypothèses sont les suivantes :

- Une période
- $q$  = Stock en début de période (variable de décision)
- $X$  = Variable aléatoire (v.a.) représentant la demande au cours de la période.
- $b$  = Coût unitaire de rupture de stock ( $b > 0$ )

- $h$  = Coût unitaire d'inventu ( $h > 0$ )

L'objectif est de déterminer la quantité à commander qui minimise l'espérance des coûts. On notera  $q^*$  la quantité optimale.

On distinguera les cas où la demande est discrète et continue :

- Si  $X$  est une v.a. continue, elle sera caractérisée par sa fonction de répartition  $F_X(x) = P(X \leq x)$  ou par sa densité  $f_X(x) = F'(x)$ , si elle existe.
- Si  $X$  est une v.a. discrète, elle sera caractérisée par sa fonction de répartition  $F_X(x) = P(X \leq x)$  ou par ses probabilités  $p(x) = P(X = x)$ .

Vous trouverez quelques rappels de probabilité en annexe ??.

Notons  $C(q, X)$  le coût total si la quantité commandée est  $q$  et la demande est  $X$ . Nous avons

$$C(q, X) = \underbrace{h(q - X)^+}_{\text{Coût d'inventu}} + \underbrace{b(X - q)^+}_{\text{Coût de rupture}} = \begin{cases} h(q - X), & \text{si } X \leq q \\ b(X - q), & \text{si } X \geq q \end{cases}$$

avec  $x^+ = \max[0, x]$ .

Notons maintenant  $C(q)$  l'espérance du coût total lorsque la quantité commandée est  $q$ . Nous avons

$$\begin{aligned} C(q) &= E[C(q, X)] \\ &= hE[(q - X)^+] + bE[(X - q)^+] \end{aligned} \quad (5.1)$$

On peut tout de suite remarquer que l'espérance des coûts d'inventu,  $C_h(q)$ , est croissante et convexe en  $q$ . En effet, la fonction  $(q - x)^+$  est croissante et convexe en  $q$  et l'espérance préserve ces deux propriétés. De même l'espérance des coûts de rupture,  $C_b(q)$ , est décroissante et convexe en  $q$ . On en conclut que la fonction  $C(q)$  est convexe en  $q$ .

Notons qu'en utilisant la propriété  $x^+ = x + (-x)^+$ , on peut ré-écrire les fonctions de coût comme suit :

$$\begin{aligned} C(q, X) &= h(q - X) + (h + b)(X - q)^+ \\ C(q) &= h(q - E(X)) + (h + b)E(X - q)^+ \end{aligned} \quad (5.2)$$

## 5.2 Demande continue

On suppose dans cette partie que la demande  $X$  est continue de densité  $f_X$  et de fonction de répartition  $F_X$ . Afin de pouvoir traiter ultérieurement le cas d'une loi normale,  $f_X(x)$  n'est pas nécessairement nulle pour  $x < 0$ . Une demande négative correspond alors à un retour de produit.

En utilisant la propriété  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$ , l'espérance du coût s'exprime

$$\begin{aligned} C(q) &= hE[(q - X)^+] + bE[(X - q)^+] \\ &= h \int_{-\infty}^{\infty} (q - x)^+ f_X(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} (x - q)^+ f_X(x)dx \\ &= h \int_{-\infty}^q (q - x)f_X(x)dx + b \int_q^{\infty} (x - q)f_X(x)dx. \end{aligned}$$

**Théorème 5.1.**  $q$  minimise l'espérance des coûts  $C(q)$  si et seulement si

$$F_X(q) = \frac{b}{h + b}$$

*Démonstration.* Afin de trouver la quantité qui minimise l'espérance du coût, nous allons dériver  $C(q)$  à l'aide de la formule de Leibniz<sup>a</sup> :

$$\begin{aligned} C'(q) &= h \int_0^q f_X(x)dx - b \int_q^{\infty} f_X(x)dx \\ &= hF_X(q) - b(1 - F_X(q)) \\ &= (h + b)F_X(q) - b \end{aligned}$$

La dérivée seconde est positive :

$$C''(q) = (h + b)F'(q) = (h + b)f_X(q) \geq 0$$

Les variations de  $C(q)$  sont résumées dans le tableau 5.1.

La fonction  $C(q)$  est donc convexe et est minimale si et seulement si :

$$C'(q) = 0 \Leftrightarrow F_X(q) = \frac{b}{h + b}$$

□

<sup>a.</sup>  $\frac{\partial}{\partial y} \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} h(x, y)dx = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} dx + h(a_2(y), y)a_2'(y) - h(a_1(y), y)a_1'(y)$

$q$	$-\infty$	$q^*$	$+\infty$
$C''(q)$	+		
$C'(q)$	$-b$	$0$	$+h$
$C(q)$	$+\infty$	$C^*$	$+\infty$

TABLE 5.1 – Variations de  $C(q)$

**Remarque 2.** Si la fonction de répartition  $F_X$  est connue, il est facile de calculer par dichotomie la quantité optimale en utilisant le fait que  $F_X$  est croissante. Remarquons que la quantité optimale n'est pas forcément unique car  $F_X$  peut être constante sur un intervalle.

**Remarque 3.** Si les coûts  $b$  et  $h$  sont égaux, nous avons alors  $F_X(q^*) = 1/2$  et il est optimal de commander la médiane de la demande. Si  $b < h$ , on commande moins que la médiane tandis que si  $b > h$ , on commande plus que la médiane.

## 5.3 Demande discrète

Désormais on suppose que la demande  $X$  est une variable aléatoire discrète et on note  $p(x) = P(X = x)$ . On supposera que les quantités commandées sont aussi entières. L'espérance du coût est alors :

$$C(q) = h \sum_0^q (q - x)p(x) + b \sum_q^{\infty} (x - q)p(x)$$

**Théorème 5.2.** La quantité suivante est optimale :

$$q^* = \min \left[ q \in \mathbb{N} \mid F_X(q) \geq \frac{b}{b + h} \right]$$

*Démonstration.* Soit  $\Delta C(q) = C(q + 1) - C(q)$ . Afin de trouver le minimum de cette fonction, nous allons d'abord montrer que  $\Delta C(q)$  est croissant en  $q$  (équivalent de la

convexité pour une fonction discrète).

$$\begin{aligned}\Delta C(q) &= h \left[ \sum_0^{q+1} (q+1-x)p(x) - \sum_0^q (q-x)p(x) \right] + b \left[ \sum_{q+1}^{\infty} (x-q-1)p(x) - \sum_q^{\infty} (x-q)p(x) \right] \\ &= h \sum_0^q p(x) - b \sum_{q+1}^{\infty} p(x) \\ &= hF_X(q) - b(1 - F_X(q)) \\ &= (h+b)F_X(q) - b\end{aligned}$$

La fonction de répartition  $F_X(q)$  étant croissante en  $q$ ,  $\Delta C(q)$  l'est aussi et nous pouvons conclure que  $C(q)$  est convexe.

La croissance de  $\Delta C(q)$  implique que le minimum de  $C(q)$  est atteint en :

$$q^* = \min[q \in \mathbb{N} | \Delta C(q) \geq 0] = \min[q \in \mathbb{N} | (h+b)F_X(q) - b \geq 0]$$

On notera que  $q^* < \infty$  car  $\lim_{q \rightarrow \infty} \Delta C(q) = h > 0$ .

□

**Exercice 5.** *Distribution de la demande :  $p(0) = p(2) = p(3) = 0.2, p(1) = 0.4$ . Coûts unitaires :  $b = 3, h = 1$ . Calculer la quantité optimale et le coût optimal.*

**Exercice 6.** *Si  $X$  suit une distribution géométrique, c.a.d.  $P(X = k) = p^k(1-p)$  pour  $k \geq 0$ . Montrer que la quantité suivante est optimale :*

$$q^* = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{h}{h+b}\right)}{\ln p} \right\rceil.$$

## 5.4 Taux de service

Nous allons maintenant définir deux taux de service différents.

**Taux de service en temps** Quel pourcentage du temps suis-je capable de satisfaire toute la demande ?

**Taux de service en quantité** Quel pourcentage des pièces demandées suis-je capable de fournir immédiatement ?

Nous utiliserons les notations suivantes :

- $\alpha(q)$  = Taux de service en temps si la quantité commandée est  $q$
- $\beta(q)$  = Taux de service en quantité si la quantité commandée est  $q$

Illustrons ces notions à partir de l'exemple du tableau 5.2.

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Total
Demande $x$	6	12	14	9	10	51
Ruptures = $(x-q)^+$	0	2	4	0	0	6
Invendus = $(q-x)^+$	4	0	0	1	0	5
Demande satisfaite = $\min(x, q)$	6	10	10	9	10	45

TABLE 5.2 – Exemple 1 : Ruptures, invendus et demande satisfaite pour une quantité commandée  $q = 10$

Nous pouvons estimer  $\alpha(q)$  et  $\beta(q)$  à partir de cet échantillon :  $\hat{\alpha}(q) = 3/5 = 60\%$  et  $\hat{\beta}(q) = 45/51 = 88.2\%$ . Le chapeau  $\hat{\phantom{x}}$  indique que ces quantités sont des estimations empiriques des probabilités. Sur cet exemple, le taux de service en quantité est meilleur que le taux de service en temps.

Prenons maintenant un exemple (tableau 5.3) où le taux de service en temps est meilleur que le taux de service en quantité. Sur cet exemple, nous avons  $\hat{\alpha}(q) = 4/5 = 80\%$  et  $\hat{\beta}(q) = 5/104 = 4.8\%$ .

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Total
Demande $x$	100	1	1	1	1	104
Ruptures = $(x-q)^+$	99	0	0	0	0	99
Invendus = $(q-x)^+$	0	0	0	1	0	0
Demande satisfaite = $\min(x, q)$	1	1	1	1	1	5

TABLE 5.3 – Exemple : Ruptures, invendus et demande satisfaite pour une quantité commandée  $q = 1$

### Taux de service en temps

Imaginons que l'on répète une infinité de fois l'expérience du vendeur de journaux, le taux de service en temps représente la proportion de périodes où toute la demande est satisfaite, soit

$$\alpha(q) = P(X \leq q) = F_X(q).$$

A l'optimal, nous avons :

- $\alpha^* = \frac{b}{h+b}$  pour une demande continue,
- $\alpha^* \geq \frac{b}{h+b}$  pour une demande discrète.

## Taux de service en quantité

Le deuxième taux de service est moins immédiat à calculer. On notera  $Y = \min(X, q)$  la quantité vendue (= demande satisfaite).

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de demandes indépendantes, de même distribution que  $X$ . Soit  $Y_i$  la quantité vendue (demande satisfaite) correspondant à la demande  $X_i$  :  $Y_i = \min(X_i, q)$ .

Sur cet échantillon, la proportion de demandes satisfaites vaut

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{E(Y)}{E(X)}$$

Cette dernière limite n'est rien d'autre qu'une application de la loi des grands nombres. Nous avons donc un taux de service en quantité qui vaut

$$\beta(q) = \frac{E(Y)}{E(X)}.$$

**Demande discrète.** Regardons maintenant comment calculer  $E(Y)$  lorsque la demande  $X$  est discrète. Pour ce faire, commençons par déterminer la distribution de  $Y$  :

$$P(Y = y) = \begin{cases} P(X = y), & \text{si } y < q \\ P(X \geq q), & \text{si } y = q \end{cases}$$

Il vient alors

$$E(Y) = \sum_{y=0}^q yP(Y = y) = \sum_{y=0}^{q-1} yP(X = y) + qP(X \geq q)$$

**Demande continue.** Lorsque la demande  $X$  est une variable aléatoire continue, la quantité vendue  $Y$  a pour fonction de répartition

$$F_Y(x) = P(\min(X, q) \leq x) = P(X \leq x \text{ ou } q \leq x) \\ = \begin{cases} P(X \leq x) = F_X(x) & \text{si } x < q \\ 1 & \text{si } x \geq q \end{cases}.$$

La fonction de répartition est discontinue en  $q$  :  $F_Y(q^-) = F(q)$  et  $F_Y(q) = 1$ . Nous avons en effet une probabilité non nulle d'avoir  $Y = q$  :  $P(Y = q) = P(X \geq q) = 1 - F(q)$ . Ainsi  $Y$  est une variable aléatoire mixte (voir annexe ??).

Nous avons alors

$$E(Y) = \int_0^q x f_X(x) dx + qP(Y = q) \\ = \int_0^q x f_X(x) dx + qP(X \geq q)$$

## 5.5 Stock de sécurité

On appellera *stock de sécurité* ce qui est commandé en plus de l'espérance de la demande. On notera  $\nu$  le stock de sécurité.

$$\nu = q - E(X)$$

Le stock de sécurité peut être négatif si on commande moins que l'espérance de la demande.

**Exercice 7.** Supposons que la médiane de  $X$  est égale à l'espérance de  $X$ . Lorsque l'on commande la quantité optimale, montrer que le stock de sécurité est positif (respectivement négatif) si  $b \geq h$  (respectivement  $b \leq h$ ).

## 5.6 Loi normale

Supposons dans cette partie que  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ . Il est à noter que  $X$  peut prendre des valeurs négatives, ce qui peut correspondre à des retours de produits. Si l'écart-type est faible, la probabilité d'avoir des valeurs négatives sera faible aussi. Si  $\sigma/\mu = 0.1$ , alors  $P(X < 0) = 7.6 \cdot 10^{-24}$ . Si  $\sigma/\mu = 1$ , alors  $P(X < 0) = 0.159$ .

Soit  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  la variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ , de densité  $\phi$ . Pour mémoire, nous avons pour  $x \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Notons  $\alpha = \frac{b}{h+b}$ . D'après le théorème du vendeur de journaux (version continue), la quantité optimale satisfait  $P(X \leq q) = \alpha$ . En notant  $z_\alpha$  la quantité telle que  $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$ , il vient

$$q = \mu + \sigma z_\alpha.$$

D'après (5.2), le coût  $C(q)$  s'écrit

$$C(q) = h(q - \mu) + (h + b)E(X - q)^+ \\ = hz\sigma + (h + b)\sigma E(Z - z)^+.$$

Nous remarquons au passage que  $C(q)$  augmente linéairement avec l'écart-type  $\sigma$ . Nous avons par ailleurs

$$\begin{aligned} E(Z - z_\alpha)^+ &= \int_{z_\alpha}^{\infty} (x - z_\alpha)\phi(x)dx \\ &= \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx - z_\alpha \int_{x=z_\alpha}^{\infty} \phi(x)dx \\ &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{z_\alpha}^{+\infty} - z_\alpha P(Z \geq z_\alpha) \\ &= \phi(z_\alpha) - z_\alpha(1 - \alpha) \\ &= \phi(z_\alpha) - z_\alpha \frac{h}{h + b} \end{aligned}$$

Le coût optimal se simplifie alors en  $C(q^*) = (h + b)\sigma\phi(z_\alpha)$ .

**Théorème 5.3.** *Soit une demande suivant une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , nous avons*

$$\begin{aligned} q^* &= \mu + \sigma z_\alpha && \text{(quantité optimale)} \\ C^* &= (h + b)\sigma\phi(z_\alpha) && \text{(coût optimal)} \\ \nu^* &= \sigma z_\alpha && \text{(stock de sécurité à l'optimal)} \\ \beta^* &= 1 - \frac{\sigma}{\mu} [\phi(z_\alpha) - z_\alpha(1 - \alpha)] && \text{(taux de service en qté à l'optimal)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'écart-type a une influence linéaire sur le stock de sécurité et le coût optimal. Plus la demande est variable, plus le coût optimal est élevé. Si l'écart-type est nul, le coût optimal ainsi que le stock de sécurité sont nuls car la demande est égale à  $\mu$  avec une probabilité 1 et il est optimal de commander exactement  $\mu$  (cela revient à un problème déterministe). La médiane étant égale à l'espérance pour une loi normale, nous avons par ailleurs un stock de sécurité  $\nu^*$  positif si  $b \geq h$ , négatif si  $b \leq h$  et nul si  $b = h$ .

## Pourquoi la loi normale est-elle si importante ?

La loi normale est très importante car la demande peut souvent être approchée par une loi normale. En effet, supposons que la demande  $X$  soit la somme des demandes indépendantes de  $n$  clients (ce qui est le cas en pratique!) :

$$X = \sum_{i=1}^n A_i$$

où  $A_i$  est la demande du client  $i$ , de distribution quelconque (discrète ou continue). On notera l'espérance et l'écart-type de  $A_i$  comme suit :

$$E(A_i) = \mu_i, \sigma(A_i) = \sigma_i$$

Nous avons alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i, \sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

Une version généralisée du théorème centrale limite nous dit que si les demandes  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendantes et que  $n$  est suffisamment grand (en général  $n > 20$ ), alors on peut approcher la distribution de  $X$  par la loi normale  $\mathcal{N}\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$ . Ainsi, dans de nombreuses applications, la loi normale apparaît tout naturellement.

## Mutualisation des stocks

On considère un système avec  $n$  entrepôts de stockage indexés par  $i = 1, \dots, n$ . A chaque entrepôt, le coût d'inventu est  $h$  et le coût de rupture est  $p$ . L'entrepôt  $i$  voit une demande  $X_i$  distribuée suivant une loi normale de moyenne  $\mu_i$  et d'écart-type  $\sigma_i > 0$ . On notera par

ailleurs  $\sigma_{ij}$  la covariance entre  $X_i$  et  $X_j$  et  $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$  le coefficient de corrélation entre  $X_i$

et  $X_j$ . On notera enfin la demande totale  $T = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Considérons les deux situations extrêmes suivantes :

- Un système décentralisé où un stock séparé est géré pour chaque type de demande
- Un système centralisé où toutes les demandes sont satisfaites par un entrepôt central

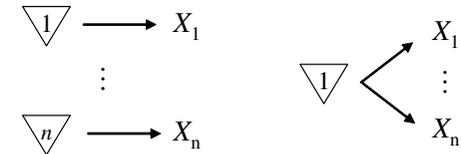


FIGURE 5.1 – Système décentralisé versus système centralisé

**Demandes quelconques** Le coût optimal du système décentralisé correspond à la somme des coûts des  $n$  entrepôts. En posant  $K = (h + b)\phi(z_\alpha)$ , il vient d'après le théorème 5.3 :

$$C_{\text{décentralisé}}^* = K \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

Pour le système centralisé, en notant  $\sigma(X)$  l'écart-type d'une variable aléatoire  $X$ , nous avons

$$C_{\text{centralisé}}^* = K \sigma \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

**Lemme 5.1.** *L'écart-type de la somme est inférieur ou égal à la somme des écart-types :*

$$\sigma \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Il y a égalité si  $\rho_{ij} = 1$  pour tout  $(i, j)$ .

*Démonstration.* En utilisant le fait que  $\rho_{ij} \in [-1, 1]$  et  $\sigma_i > 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_i \sigma_j = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i \right)^2 \end{aligned}$$

Il y a égalité entre si et seulement si  $\rho_{ij} = 1$  pour tout  $(i, j)$ . □

Le lemme implique immédiatement qu'un système centralisé est plus économique qu'un système décentralisé :

$$C_{\text{centralisé}}^* \leq C_{\text{décentralisé}}^*$$

Le système centralisé est plus économique car les aléas entre les différentes demandes peuvent se compenser, réduisant la variabilité de la demande.

Il y aura égalité des coûts si et seulement si il y a une corrélation linéaire parfaite (et croissante) entre les  $X_j$ , c'est-à-dire si  $\rho_{ij} = 1$  pour tout  $(i, j)$ . Par exemple, si  $X_3 = X_2 = 2X_1 + 3$ , les v.a.  $X_1, X_2$  et  $X_3$  ont un coefficient de corrélation de 1. Dans ce cas, une grande demande  $X_1$  entrainera une grande demande  $X_2$  et  $X_3$  et les aléas des différentes v.a. ne se compensent pas.

La variance de la demande totale peut s'exprimer en fonction des écart-types et des coefficients de corrélation

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \end{aligned}$$

**Demandes i.i.d.** Considérons maintenant des demandes i.i.d. de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ . Les covariances et coefficients de corrélation sont nulles dans le cas de demandes indépendantes.

Les coûts se réduisent à

$$\begin{aligned} C_{\text{décentralisé}}^* &= n\sigma K \\ C_{\text{centralisé}}^* &= \sqrt{n}\sigma K = \frac{C_{\text{décentralisé}}^*}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

**Demandes égales** Si on suppose que  $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ , alors  $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \text{Var}(nX) = n^2 \text{Var}(X) = n^2 \sigma^2$ . Il vient alors

$$C_{\text{centralisé}}^* = C_{\text{décentralisé}}^* = n\sigma K$$

**Somme des demandes constante** Si on suppose que  $\sum_{i=1}^n X_i$  est égal à une constante, alors l'écart-type de la demande totale est nul et la solution décentralisée a un coût nul.

$$\begin{aligned} C_{\text{décentralisé}}^* &= n\sigma K \\ C_{\text{centralisé}}^* &= 0 \end{aligned}$$

## 5.7 Maximisation du profit

On considère un vendeur devant acheter  $q$  produits en début de saison et ne pouvant pas réapprovisionner son stock en cours de saison (par exemple des articles de mode). Si il lui reste des produits en fin de saison, il pourra tous les écouler au moment des soldes en proposant un prix soldé au client. Les paramètres du modèle sont les suivants :

- $X$  : demande aléatoire continue (fonction de répartition  $F$ , densité  $f$ )
- $r$  : prix de vente normal
- $s$  : prix de vente en solde
- $w$  : coût d'achat unitaire
- $p$  : pénalité par unité de demande non satisfaite (pendant la saison)
- $v$  : coût unitaire en magasin (mise en rayon, etc.)

L'objectif est de déterminer la quantité qui maximise le profit du vendeur.

Nous allons montrer comment ramener ce problème à un problème de vendeur de journaux classique où les paramètres du modèle sont :

$$b = p + r - w - v, \quad h = w' - s$$

Notons  $G(q, X)$  le profit associé à une quantité  $q$  et à une demande  $X$  et  $G(q) = E[G(q, X)]$ . Par ailleurs notons  $w' = w + v$ , le coût associé à l'achat d'une unité. La quantité  $q$  peut se décomposer comme suit :

$$q = \underbrace{\min(X, q)}_{\text{quantité vendue au prix fort}} + \underbrace{(q - X)^+}_{\text{quantité vendue au prix soldé}}$$

Nous allons utiliser la propriété suivante :

$$\min(q, X) = X - (X - q)^+$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} G(q, X) &= (r - w') \min(X, q) + (s - w')(q - X)^+ - \underbrace{p(X - q)^+}_{\text{Pénalités pour les ruptures}} \\ &= (r - w')X - \underbrace{[(w' - s)(q - X)^+ + (p + r - w')(X - q)^+]}_h \end{aligned}$$

puis

$$G(q) = (r - w')E(X) - \underbrace{[hE(q - X)^+ + bE(X - q)^+]}_{=C(q)}$$

Maximiser  $G(q)$  revient à minimiser  $C(q)$  qui est précisément la fonction de coût du vendeur de journaux. On peut donc utiliser les théorèmes 5.2 et 5.3.

## 5.8 Variantes

Dans le problème du vendeur de journaux, nous avons supposé que le coût de rupture de stock était proportionnel au nombre de ruptures. Nous proposons une première variante où le coût de rupture est indépendant du nombre de ruptures. L'estimation des coûts de rupture pouvant se révéler complexe dans certaines situation, nous proposons des variantes où l'on se fixe un taux de service.

	Coûts	Contrainte sur le taux de service
Cycle	(I) Pénalité fixe $b$ si il y a rupture de stock au cours de la période	(III) Probabilité de rupture de stock $\alpha(q) \geq \alpha_0$
Quantité	(II) Pénalité proportionnelle au nombre de demandes non satisfaites ( $b$ =coût de rupture unitaire)	(IV) Proportion de demandes non satisfaites $\beta(q) \geq \beta_0$

TABLE 5.4 – Différentes modélisations de du taux de service

Les problèmes d'optimisation associés sont les suivants. Pour simplifier, nous discuterons uniquement le cas où la demande et la quantité commandée sont continues.

(I)

$$\min_q C(q) = hE(q - X)^+ + bP(X > q) = h \int_0^q (q - x)f_X(x)dx + b(1 - F_X(q))$$

Nous avons en utilisant la formule de dérivation de Leibniz :

$$C'(q) = hF_X(q) - bf_X(q)$$

La fonction  $C(q)$  n'est pas nécessairement convexe. Il est nécessaire de connaître plus précisément la distribution de la demande pour pouvoir résoudre ce problème d'optimisation.

(II)

$$\min_q hE(q - X)^+ + bE(X - q)^+$$

Comme nous l'avons vu dans le théorème 5.1, la quantité  $q$  est optimale si et seulement si  $F_X(q) = b/(h + b)$ .

(III)

$$\begin{aligned} \min_q C(q) &= hE(q - X)^+ \\ \text{s.c. } \alpha(q) &\geq \alpha_0 \end{aligned}$$

Les fonctions  $C(q)$  et  $\alpha(q)$  sont croissantes en  $q$ . Il suffit donc de trouver la quantité  $q$  qui satisfait

$$\alpha(q) = \alpha_0 \Leftrightarrow F_X(q) = \alpha_0$$

(IV)

$$\begin{aligned} \min_q hE(q - X)^+ \\ \text{s.c. } \beta(q) &\geq \beta_0 \end{aligned}$$

Les fonctions  $C(q)$  et  $\alpha(q)$  sont croissantes en  $q$ . A nouveau, il suffit donc de trouver la quantité  $q$  qui satisfait

$$\beta(q) = \beta_0 \Leftrightarrow \frac{E(\min(q, X))}{E(X)} = \beta_0$$

# Chapitre 6

## Demande aléatoire sur plusieurs périodes

Dans ce chapitre, nous considérons une demande aléatoire sur plusieurs périodes, contrairement au problème du vendeur de journaux qui ne s'intéresse qu'à une période.

### 6.1 Hypothèses

Les hypothèses seront les suivantes dans ce chapitre :

- $T$  : horizon de temps
- $t$  = instant de décision ( $t = 0, 1, \dots, T$ )
- $D_t$  = demande aléatoire à l'instant  $t$ .
- $L$  = délai d'approvisionnement fixe. Les demandes étant aléatoires, nous ne pouvons pas nous ramener simplement au cas  $L = 0$ . Nous considérons brièvement le cas où  $L$  est aléatoire.
- Traitement des ruptures de stock : nous discuterons le cas des ventes différées ainsi que le cas des ventes perdues.

Nous spécifierons ultérieurement la structure des coûts et la fonction objectif.

Quelques notations supplémentaires concernant la demande :

- $D_{a,b} = \sum_{t=a}^b D_t$  = Demande cumulée sur les périodes  $a, a+1, \dots, b$
- $D^a = \sum_{t=1}^a D_t$  = Demande cumulée sur  $a$  périodes. Cette notation sera utile pour des demandes  $D_1, \dots, D_T$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

Quelques notations :

- $X_t$  = Stock net à  $t$  (stock disponible moins le nombre de demandes en attente)
- $X_t^+ = \max(0, X_t)$  = Stock physique à  $t$
- $X_t^- = \max(0, -X_t)$  = Demandes en attente à  $t$
- $Q_t$  = Quantité commandée à  $t$
- $Y_t$  = Stock brut à l'instant  $t$  (stock net + commandes en transit)

$$Y_t = X_t + \sum_{i=t-L}^{t-1} Q_i \quad (6.1)$$

Remarquons que  $X_t$ ,  $Y_t$  et  $Q_t$  sont a priori des variables aléatoires car les demandes sont aléatoires. En outre, ces variables aléatoires dépendent du stock initial  $X_0 = x_0$  et de la politique d'approvisionnement choisie.

La séquence des événements est la suivante :

- En début de période  $t$ , le stock net est  $X_t$  et les commandes en transit sont  $Q_{t-1}, \dots, Q_{T-L}$ .
- On réceptionne  $Q_{t-L}$  unités, c'est-à-dire la commande passée  $L$  périodes auparavant.
- Immédiatement après, on passe une commande de taille  $Q_t$  qui arrivera  $L$  périodes après.
- La demande  $D_t$  se réalise entre  $t$  et  $t+1$

### 6.2 Dynamique

#### 6.2.1 Ventes différées

Dans le cas de ventes différées, la séquence des événements implique la relation suivante :

$$X_{t+1} = X_t + Q_{t-L} - D_t \quad (6.2)$$

Si l'on raisonne en stocks bruts, nous avons :

$$Y_{t+1} = Y_t + Q_t - D_t \quad (6.3)$$

*Démonstration.* En utilisant (6.1) et (6.2), il vient :

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= X_{t+1} + Q_t + Q_{t-1} + \dots + Q_{t+1-L} \\ &= (X_t + Q_{t-L} - D_t) + Q_t + Q_{t-1} + \dots + Q_{t+1-L} \\ &= (X_t + Q_{t-1} + \dots + Q_{t+1-L} + Q_{t-L}) + Q_t - D_t \\ &= Y_t + Q_t - D_t \end{aligned}$$

□

On peut aussi exprimer le stock net à  $t + L$  en fonction du stock brut à  $t$  :

$$X_{t+L} = Y_t - D_{t,t+L-1} \quad (6.4)$$

En effet, toutes les commandes passées avant  $t$  (et intégrées dans  $Y_t$ ) seront arrivées en  $t + L$ .

*Démonstration.* En utilisant (6.1) et (6.3), il vient

$$\begin{aligned} X_{t+L} &= Y_{t+L} - \sum_{i=t}^{t+L-1} Q_i \\ &= Y_t + \sum_{i=t}^{t+L-1} (Y_{i+1} - Y_i) - \sum_{i=t}^{t+L-1} Q_i \\ &= Y_t + \sum_{i=t}^{t+L-1} (Y_{i+1} - Y_i - Q_i) \\ &= Y_t - \sum_{i=t}^{t+L-1} D_i = Y_t - D_{t,t+L-1} \end{aligned}$$

□

Enfin, (6.3) et (6.4) donnent :

$$X_{t+L+1} = Y_t + Q_t - D_{t,t+L} \quad (6.5)$$

Lorsque les demandes sont i.i.d., on peut légèrement simplifier l'écriture de (6.4) et (6.5) :

$$X_{t+L} = Y_t - D^L \quad (6.6)$$

$$X_{t+L+1} = Y_t + Q_t - D^{L+1} \quad (6.7)$$

## 6.2.2 Ventes perdues

Dans le cas de ventes perdues, la dynamique des stocks nets est légèrement différente :

$$X_{t+1} = \max[X_t + Q_{t-L} - D_t, 0] = [X_t + Q_{t-L} - D_t]^+$$

Malheureusement, il n'y a pas de relation simple entre  $Y_{t+1}$  et  $Y_t$  comme dans le cas avec ventes différées :

$$Y_{t+1} = Y_t + Q_t - D_t + \underbrace{[D_t - X_t - Q_{t-L}]^+}_{\text{Ventes perdues à } t} \quad (6.8)$$

En général, le problème avec ventes perdues est plus difficile à étudier sur un plan théorique.

## 6.3 Politiques d'approvisionnement

Une politique  $\pi$  d'approvisionnement spécifie à chaque instant la quantité à commander. On peut distinguer deux types de politiques :

- Les politiques statiques : les quantités commandées  $(q_0, q_1, \dots)$  sont décidées à l'instant  $t = 0$ . Ce type de politique est très mal adapté à un environnement aléatoire car ne s'adapte absolument pas aux événements.
- Les politiques dynamiques : la décision d'approvisionnement à l'instant  $t$  est prise en fonction des informations dont on dispose (niveau de stock, réalisations des demandes passées, quantités commandées précédemment). Ce type de politique est beaucoup plus adapté à des demandes aléatoires.

Les définitions des principales politiques données au chapitre 2.1.2 restent valables dans le contexte de ce chapitre. Avec les notations de ce chapitre, cela donne :

- $(r, q)$  :  $Q_t = q$  si  $Y_t \leq r$  ( $Q_t = 0$  sinon)
- $(r, S)$  :  $Q_t = [S - Y_t]^+$  si  $Y_t \leq r$  ( $Q_t = 0$  sinon)
- $(T, q)$  :  $Q_t = q$  si  $t = 0, T, 2T, \dots$  ( $Q_t = 0$  sinon)
- $(T, S)$  :  $Q_t = [S - Y_t]^+$  si  $t = 0, T, 2T, \dots$  ( $Q_t = 0$  sinon)

Nous allons maintenant définir une nouvelle politique qui est adaptée lorsque les coûts fixes sont faibles. Une *politique à stock nominal* ( $S$ ) consiste à viser en permanence le stock brut  $S$  et revient à commander  $(S - SB(t))$  dès que  $SB(t) < S$  :

- $(S)$  :  $Q_t = [S - Y_t]^+$

Lorsque le temps est discrétisé, la politique  $(S)$  est équivalente à une politique  $(T, S)$  avec  $T = 1$ . Lorsque les demandes sont entières, la politique  $(S)$  est aussi équivalente à une politique  $(r, S)$  où l'on prendrait  $r = S - 1$ .

Le tableau 6.1 présente quelques avantages et inconvénients des principales politiques.

## 6.4 Distribution de la demande cumulée pendant un délai de livraison

Supposons que les demandes  $D_1, D_2, \dots, D_T$  sont i.i.d., de même distribution que  $D$ . La demande cumulée pendant un délai d'approvisionnement a alors la même distribution que  $D^L = \sum_{t=1}^L D_t$ . Nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mu_D$  et  $\sigma_D$  : moyenne et écart-type de la demande  $D$  ;
- $\mu_L$  et  $\sigma_L$  : moyenne et écart-type du délai de livraison  $L$  ;
- $\mu(D^L)$  et  $\sigma(D^L)$  : moyenne et écart-type de  $D^L$ , la demande cumulée sur un délai de livraison  $L$ .

	Avantages	Inconvénients
Gestion à point de commande ( $r$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Bonne réactivité à des variations de la demande</li> <li>— Coûts fixes peuvent être optimisés</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Nécessité d'un suivi permanent des stocks</li> <li>— Gestion administrative complexe</li> <li>— Difficulté à regrouper des commandes</li> </ul>
Gestion calendaire ( $T$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Gestion administrative plus facile</li> <li>— Possibilité de regrouper des commandes auprès d'un fournisseur</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Mal adapté à des fortes variations de la demande</li> <li>— Stock de sécurité élevé</li> <li>— Coûts fixes élevés si un seul produit</li> </ul>
Quantité variable ( $S$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Bonne réactivité à des variations de la demande</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Pas de prise en compte des contraintes de conditionnement</li> </ul>
Quantité fixe ( $q$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Prise en compte de contraintes de conditionnement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Mal adapté à des fortes variations de la demande car la quantité commandée est toujours <math>q</math></li> </ul>

TABLE 6.1 – Comparaison des politiques

## Délai fixe

**Théorème 6.1.** Lorsque le délai  $L$  est fixe, nous avons :

$$\begin{aligned}\mu(D^L) &= L \cdot \mu_D \\ \sigma(D^L) &= \sqrt{L} \cdot \sigma_D\end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous avons par linéarité de l'espérance et de la variance :

$$\begin{aligned}\mu(D^L) &= E(D^L) = E\left(\sum_{t=1}^L D_t\right) = \sum_{t=1}^L E(D_t) = L \cdot E(D) = L \cdot \mu_D \\ \text{Var}(D^L) &= \sum_{t=1}^L \text{Var}(D_t) = L \cdot \text{Var}(D) = L \cdot \sigma_D^2 \\ \sigma(D^L) &= \sqrt{\text{Var}(D^L)} = \sqrt{L} \cdot \sigma(D)\end{aligned}$$

□

Si la demande  $D$  est distribuée suivant une loi normale  $\mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D)$ , alors la demande sur un délai de livraison  $D^L$  est distribuée suivant une loi normale  $\mathcal{N}(L\mu_D, \sqrt{L}\sigma_D)$ .

## Délai aléatoire

Supposons désormais que  $L$  est une variable aléatoire discrète. On peut exprimer simplement l'espérance et la variance de  $D^L$  en fonction de celles de  $D$  et  $L$ .

**Théorème 6.2.**

$$\begin{aligned}\mu_L &= \mu_L \cdot \mu_D \\ \sigma(D^L) &= \sqrt{\mu_L \cdot \sigma_D^2 + \mu_D^2 \cdot \sigma_L}\end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour simplifier les notations, notons  $Z = D^L$ . Tout d'abord, calculons l'espérance conditionnelle de  $Z$  sachant  $L$  :

$$E(Z|L) = E\left(\sum_{t=1}^L D_t | L\right) = \sum_{t=1}^L E(D_t) = LE(D). \quad (6.9)$$

Il vient alors :

$$E(Z) = E[E(Z|L)] = E[LE(D)] = E[L]E[D]. \quad (6.10)$$

Calculons maintenant l'espérance conditionnelle de  $Z^2$  sachant  $L$  :

$$\begin{aligned} E(Z^2|L) &= E\left[\left(\sum_{t=1}^L D_t\right)^2\right] = E\left[\sum_{t=1}^L D_t^2 + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1, j \neq i}^L D_i D_j\right] \\ &= L.E(D^2) + L(L-1)E(D)^2 = L[E(D^2) - E(D)^2] + L^2 E(D)^2 \\ &= L.Var(D) + L^2 E(D)^2. \end{aligned}$$

Puis :

$$E(Z^2) = E(L)Var(D) + E(L^2)E(D)^2 \quad (6.11)$$

Enfin, en utilisant (6.10) et (6.11) :

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 \quad (6.12)$$

$$= E(L)Var(D) + E(L^2)E(D)^2 - E(L)^2 E(D)^2 \quad (6.13)$$

$$= E(L)Var(D) + E(D)^2 Var(L) \quad (6.14)$$

□

## 6.5 Détermination du point de commande

Supposons que l'on souhaite avoir une probabilité de rupture de stock (pendant le délai de livraison) au plus égale à  $(1 - \alpha)$ , il faut alors avoir un stock de sécurité  $r$  tel que  $P(D^L > r) \leq \alpha$  ou de manière équivalente

$$P(D^L \leq r) \geq \alpha.$$

Notons  $r^*$  le plus petit point de commande respectant cette contrainte.

**Théorème 6.3.** *Si  $D^L$  suit une loi normale alors*

$$r^* = \mu(D^L) + \sigma(D^L)z_\alpha$$

où  $z_\alpha$  est tel que  $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$  avec  $Z$  suivant une loi normale centrée réduite.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} P(D^L \leq r^*) &= \alpha \\ \Leftrightarrow P\left(\frac{D^L - \mu(D^L)}{\sigma(D^L)} \leq \frac{r^* - \mu(D^L)}{\sigma(D^L)}\right) &= \alpha \\ \Leftrightarrow P(Z \leq z_\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

avec  $Z$  suivant une loi normale centrée réduite et  $z_\alpha = \frac{r^* - \mu(D^L)}{\sigma(D^L)}$ . □

Pour déterminer  $\mu(D^L)$  et  $\sigma(D^L)$ , on peut alors utiliser les théorèmes 6.1 et 6.2 suivant que le délai  $L$  est fixe ou aléatoire.

## 6.6 Évaluation des performances d'une politique

Nous allons voir maintenant comment évaluer les performances d'une politique (stock moyen, probabilité de rupture, coût moyen, ...). On peut distinguer deux approches.

### 6.6.1 Simulation

La première approche pour évaluer les performances d'une politique est de la simuler (cf TP simulation).

Notons au passage que simulation et méthodes analytiques constituent des approches complémentaires (tableau 6.2). Par exemple, le modèle de Wilson ou le modèle du vendeur de journaux permettent d'obtenir des formules analytiques faciles à interpréter. Néanmoins, dès que l'on ajoute des hypothèses supplémentaires, obtenir des formules analytiques simples se révèle en général impossible. La simulation permet alors de prendre le relais.

Simulation	Méthodes analytiques
<ul style="list-style-type: none"> <li>— Approche générique permettant d'aborder des problèmes complexes</li> <li>— Gourmande en temps de calcul, surtout si on souhaite une bonne précision</li> <li>— Analyse des résultats délicate</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Permet de traiter uniquement certains problèmes</li> <li>— Peu coûteuses en temps de calcul</li> <li>— Bonne compréhension du système</li> </ul>

TABLE 6.2 – Comparaison de la simulation et des méthodes analytiques

### 6.6.2 Chaînes de Markov à temps discret

Une autre approche consiste à modéliser l'évolution du système par une chaîne de Markov à temps discret (CMTD). On peut alors calculer les paramètres de performance d'une politique de manière exacte, à l'aide de méthodes numériques ou analytiques.

Pour simplifier les notations et nous placer en régime stationnaire, nous supposons que :

- Les demandes  $D_t$  sont indépendantes d'une période à l'autre et identiquement distribuées (i.i.d.), de même distribution que  $D$ .
- L'horizon de temps  $T$  est infini

## Ventes différées

Quelques hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour décrire l'évolution du système par une CMTD :

- Les demandes ainsi que les quantités commandées prennent des valeurs entières
- La décision d'approvisionnement  $Q_t$  dépend uniquement du stock brut  $Y_t$ .

Dans le cas de ventes différées, nous avons :

$$X_{t+1} = X_t + Q_{t-L} - D_t$$

Lorsque  $L > 0$ , le processus  $(X_t)$  n'est pas une CMTD car  $Q_{t-L}$  dépend de  $X_{t-L}$ .

En revanche, le processus  $(Y_t)$  est bien une CMTD. En effet, nous avons

$$Y_{t+1} = Y_t + Q_t - D_t$$

où  $Q_t$  dépend uniquement de  $Y_t$  (par hypothèse). Ainsi, le comportement futur ne dépend que de l'état actuel :

$$P(Y_{t+1} = y_{t+1} | Y_t = y_t, Y_{t-1} = y_{t-1}, \dots, Y_0 = y_0) = P(Y_{t+1} = y_{t+1} | Y_t = y_t)$$

Nous noterons  $p_{ij}(t) = P(Y_{t+1} = j | Y_t = i)$  la probabilité de passer d'un stock brut  $i$  à l'instant  $t$  à un stock brut  $j$  à l'instant  $t + 1$ . Le tableau 6.3 donnent les probabilités de transition pour quelques politiques classiques.

Politique	Dynamique	Probabilités de transition
$(r, S)$	$Y_{t+1} = \begin{cases} S - D_t, & \text{si } Y_t \leq r \\ Y_t - D_t, & \text{si } Y_t > r \end{cases}$	$p_{ij}(t) = \begin{cases} P(D_t = S - j), & \text{si } Y_t \leq r \\ P(D_t = i - j), & \text{si } Y_t > r \end{cases}$
$(r, q)$	$Y_{t+1} = Y_t - D_t + q\mathbb{1}_{\{Y_t \leq r\}}$	$p_{ij}(t) = \begin{cases} P(D_t = i - j + q), & \text{si } Y_t \leq r \\ P(D_t = i - j), & \text{si } Y_t > r \end{cases}$

TABLE 6.3 – Probabilités de transition pour quelques politiques classiques

Si la distribution de la demande est connue (Bernouilli, Poisson, ...), on connaît alors les probabilités de transition de la CMTD et on peut calculer les probabilités en régime transitoire  $P(Y_t = j)$  (probabilité que le stock brut vale  $j$  à l'instant  $t$ ), ainsi que les probabilités en régime stationnaire  $P(Y = j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_t = j)$ .

On peut alors en déduire les probabilités en régime transitoire et stationnaire des stocks nets. D'après (6.6), le stock net s'exprime en fonction du stock brut et de la demande cumulée sur un délai livraison :

$$X_t = Y_{t-L} - D^L$$

Si l'on connaît la distribution de  $D^L$ , on peut alors en déduire la distribution de  $X_t$  :

$$P(X_t = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y_{t-L} = k + i)P(D^L = i)$$

En régime stationnaire, cela se simplifie à

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y = k + i)P(D^L = i)$$

Une fois les probabilités stationnaires calculées, on peut en déduire aisément tous les paramètres de performance du système. Quelques exemples :

- Stock moyen =  $\sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i)$
- Nombre moyen de demandes en attente =  $-\sum_{i=-\infty}^0 iP(X = i)$
- Pourcentage de jours sans rupture jour =  $P(X \geq 0) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i)$
- ...

## Ventes perdues

Pour des ventes perdues, on peut analyser facilement le problème avec délai de livraison nul. Dans ce cas, le stock net est égal au stock brut et évolue suivant une chaîne de Markov :

$$X_{t+1} = [X_t + Q_t - D_t]^+$$

On peut alors calculer aisément les probabilités en régime transitoire et en régime stationnaire.

En revanche, pour un délai d'approvisionnement quelconque, ni le stock net, ni le stock brut n'évoluent suivant une chaîne de Markov. Il est néanmoins possible de représenter l'évolution du système par une autre chaîne de Markov en gardant en mémoire les ordres passés au cours des  $L$  dernières périodes. Considérons le processus stochastique  $(Z_t)$  suivant :

$$Z_t = (X_t, Q_{t-1}, Q_{t-2}, \dots, Q_{t-L})$$

Nous avons alors

$$Z_{t+1} = (X_t + Q_{t-L} - D_t, Q_t, Q_{t-1}, \dots, Q_{t-L+1})$$

qui ne dépend que de  $Z_t$  et  $D_t$ , à condition que la quantité  $Q_t$  soit basée uniquement sur  $Z_t$ . On peut alors dire que  $(Z_t)$  est une CMTD. Malheureusement, l'espace d'état de cette chaîne de Markov explose lorsque le délai d'approvisionnement augmente et il devient vite difficile de calculer numériquement les probabilités transitoires et stationnaires.

# Bibliographie

- B. Baynat. *Théorie des files d'attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*. Hermes science, 2000.
- V. Giard. *Gestion de la production et des flux*. Economica, 2003. ISBN 2717844988.
- F.W. Harris. How many parts to make at once. *Factory, the Magazine of management*, 10 :135–136, 1913.
- E.L. Porteus. *Foundations of stochastic inventory theory*. Stanford University Press, 2002.
- P. Vallin. *La Logistique. Modèles et Méthodes de Pilotage Des Flux*. Collection Techniques de Gestion. Economica, 2001.
- Harvey M. Wagner and Thomson M. Whitin. Dynamic version of the economic lot size model. *Management science*, 5(1) :89–96, 1958.
- R.H. Wilson. A scientific routine for stock control. *Harvard business review*, 13 :116–128, 1934.
- P.H. Zipkin. *Foundations of inventory management*. McGraw-Hill, 2000.