Gestion des stocks *Isima*

Exercices

Jean-Philippe Gayon 2021–2022

1 Modèle de Wilson : questions de cours

Toutes les réponses sont dans les notes de cours sur l'ENT.

On considère le modèle de Wilson classique : un produit, demande continue de taux λ, délai L, coût unitaire de possession h, coût fixe d'approvisionnement k, coût variable d'approvisionnement c, pas de rupture de stock autorisée.

Question 1. Pour $\lambda = 1$/jour, $L = 2$ jours, $r = 3$, $q = 4$ et un stock initial de 4, représenter l'évolution des stocks physiques et bruts pour une politique (r, q) non ZIO. Que vaut le stock de sécurité ?

Question 2. Pour une politique (r, q) ZIO, exprimer r en fonction de L et λ. Donner une relation entre la période de commande u et la quantité commandée q.

Question 3. Exprimer le coût total par unité de temps $C(q)$ d'une politique (r, q) ZIO.

Question 4. Après démonstration, exprimer la quantité optimale, la période optimale et le coût optimal.

Question 5. Montrer qu'à l'optimal, les coûts fixes sont égaux aux coûts de possession.

Question 6. Montrer que si $c = 0$, alors $\dfrac{C(aq^*)}{C(q^*)} = \dfrac{a + 1/a}{2}$.

Question 7. Montrer que si $c > 0$, alors $\dfrac{C(aq^*)}{C(q^*)} < \dfrac{a + 1/a}{2}$.

Question 8. Le coût de possession h est estimé à 1 alors que sa vraie valeur est de 10. Quel est le surcoût lié à cette erreur d'estimation ? On supposera dans un premier temps que $c = 0$ puis vous discuterez brièvement le cas $c > 0$.

Question 9. Définir les termes suivants :

— Politique d'approvisionnement
— Politique ZIO
— Stock brut
— Gestion calendaire
— Politique à point de commande
— Politique (r, q), (r, S), (T, q), (T, S)
— Rotation d'un stock

2 Choix du fournisseur

Adapatation examen 2016

Un entreprise consomme un composant à raison de 160 unités par semaine. Le composant étant assez fragile à entreposer, son coût de possession est estimé à $2,5$€ par semaine. L'entreprise se fournit auprès d'un producteur chinois qui facture le composant $14,5$€ pièce. Le transport d'une commande se fait par container et revient à 1195€ via un transporteur international.

Cependant un second fournisseur basé en Angleterre propose de mettre à disposition un stock de consignation dans l'usine. Cette solution à l'avantage de supprimer le coût de stockage des composants, entièrement supporté par le fournisseur. Le prix unitaire proposé par le second fournisseur est de 21€.

Question 1. Quel fournisseur choisir ? Vous justifierez votre choix.

Réponse :

Chine : Coût optimal $= \lambda c + \sqrt{2\lambda k h} = 3298$ €par semaine (= 20.61 € par unité de demande)

Angleterre : Coût = 3360 euros par semaine (= 21 € par unité de demande)

On choisit le fournisseur chinois.

Question 2. Cependant les approvisionnements depuis la Chine ne peuvent se faire qu'une fois par semaine, les lundis. Quel fournisseur choisir ? Vous justifierez votre choix.

Réponse :

Période de commmande (en semaines)	1	2	3	4	5
Coût par semaine	3715	3317,5	3318,3	3418,7	3559

Il vaut mieux toujours passer par le fournisseur chinois (coût inférieur pour une période de commande de 2 semaines par exemple).

Si l'on ait en revanche obligé de commander toutes les semaines, le coût du fournisseur anglais devient inférieur.

3 Horizon fini

Adaptation examen 2012

Nous allons reprendre dans cet exercice le modèle classique de Wilson à une nuance près. On cherche désormais à minimiser le coût total sur un horizon de temps fini $[0, T]$, et non sur un horizon infini. On supposera que la première commande arrive à l'instant $t = 0$.

Question 1. Représenter graphiquement l'évolution du stock physique et du stock brut pour une politique **non ZIO**, sur l'horizon $[0, T]$. Vous prendrez un délai de livraison strictement positif.

Dans la suite de l'exercice, vous supposerez que le délai de livraison est nul.

Question 2. Démontrer que la politique optimale est nécessairement ZIO. Démontrer par ailleurs que la politique optimale a nécessairement un stock nul à l'instant final $t = T$.

Dans la suite de l'exercice, vous ne considérerez que des politiques ZIO ayant un stock nul à l'instant $t = T$.

Soit la politique $\pi(n)$ qui commande exactement n fois sur l'horizon $[0, T]$ (à chaque fois la même quantité). Soit $C(n)$ le coût total de la politique $\pi(n)$ sur l'horizon $[0, T]$ (à ne pas confondre avec le coût par unité de temps).

Question 3. Exprimer $C(n)$ en fonction de h, k, λ, c, T, n. Montrer que $C(n)$ est une fonction convexe de n.

Réponse :

Tout d'abord, nous avons $u = T/n$ et $q = \lambda u$. Il vient alors :

$$C(n) = \lambda cT + nk + \lambda h \frac{T^2}{2n} \tag{1}$$

En supposant que $n \in \mathbb{R}^+$, $C'(n) = k - \lambda h \frac{T^2}{2n^2}$ et $C''(n) = \lambda h \frac{T^2}{n^3} > 0$. $C(n)$ est donc convexe en n.

Question 4. Quel est le nombre optimal n^* de commandes à passer sur l'horizon $[0, T]$?

Réponse :

$$n_0 := \arg\min_{n \in \mathbb{R}^+} C(n) \text{ et } n^* := \arg\min_{n \in \mathbb{N}^*} C(n)$$

En annulant la dérivant de $C(n)$, on obtient $n_0 = T\sqrt{\frac{\lambda h}{2K}}$. La convexité de $C(n)$ împlique que n^* est l'un des deux entiers les plus proches de n_0.

$$n^* = \begin{cases} \lfloor n_0 \rfloor, & \text{si } C(\lfloor n_0 \rfloor) < C(\lceil n_0 \rceil) \\ \lceil n_0 \rceil, & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 5. Pourquoi le nombre optimal de commandes n^* ne dépend-il pas du coût variable d'approvisionnement c ?

Réponse :

La somme des quantités commandées sur $[0, T]$ est égale à la demande cumulée sur l'horizon $[0, T]$, c'est-à-dire λT. Cela est vrai si le stock final et le stock initial sont nuls. Par conséquent, le coût variable d'approvisionnement vaut $c\lambda T$, quel que soit le nombre de commandes passées. On en conclut que le nombre optimal de commandes est indépendant de c.

Question 6. Calculer le nombre optimal de commandes pour les valeurs suivantes : $T = 365$ jours, $\lambda = 35$ demandes par semaine, $h = 2$ euros par jour et par unité en stock, $k = 100$ euros et $c = 0$. Vous supposerez qu'une semaine est égale à 7 jours.

Réponse :

$n_0 = 81.62$, $C(81) = 16323.8$ euros, $C(82) = 16323.5$ euros, $n^* = 82$.

Question 7. Nous avons considéré jusqu'à présent que la politique $\pi(n)$ placait n ordres de même taille. Considérons maintenant une politique placant n ordres de taille $q_1, \cdots, q_n$, non nécessairement égaux. Montrer que, parmi ces politiques, la meilleur place des ordres de même taille. Pour cela, commencer par exprimer le coût total d'une telle politique sur l'horizon $[0, T]$.

Réponse :

Soit u_i et q_i la période et la quantité commandée à la i-ème commande. Le coût de possession à la période i est $hu_iq_i/2 = \lambda hu_i^2/2$. Les coûts fixes ne dépendent pas de la politique, lorsque le nombre de commandes n est fixé. Les coûts variables sont eux aussi indépendants de la politique.

Le coût variable d'une politique $u = (u_1, \cdots, u_n)$ est alors $\sum_{i=1}^n u_i^2$, à une constante multiplicative près. On cherche donc à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f(u) = \sum_{i=1}^n u_i^2 \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^n u_i = T \\ & u_i > 0, \forall i \end{aligned}$$

Ce programme a pour minimum $u^* = (T/n, \cdots, T/n)$. En effet, soit $u = (T/n + \epsilon_1, \cdots, T/n + \epsilon_n)$ une autre solution. Pour que cette solution satisfasse la contrainte du programme, il faut que $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(u) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{T}{n} + \epsilon_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{T}{n}\right)^2 + \frac{2T}{n}\sum_{i=1}^n \epsilon_i + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \\ &= f(u^*) + 0 + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 > f(u^*) \end{aligned}$$

Une preuve alternative consiste à commencer par démontrer le résultat dans le cas particulier $n = 2$. Dans le cas général, on peut alors raisonner par l'absurde. Soit une politique ayant deux périodes différentes, alors cette politique n'est pas optimale car on peut construire une politique de coût strictement inférieur en utilisant le résultat pour $n = 2$. On peut alors conclure que la politique optimale commande nécessairement à intervalles réguliers.

Question 8. On ajoute deux contraintes à notre problème : le stock physique ne doit pas dépasser SP_{max} et les produits ne doivent pas rester en stock plus de L_{max} pour des raisons de périssabilité. Quelle est alors le nombre optimal n^* de commandes ? Vous pourrez distinguer plusieurs cas de figures.

Réponse :

Tout d'abord, on peut montrer aisément que la politique optimale est ZIO. On va donc se restreindre dans la suite à des politiques ZIO.

La première contrainte s'écrit $q \leq SP_{max}$ ou encore $u \leq SP_{max}/\lambda$. La deuxième contrainte s'écrit $u \leq L_{max}$. On peut agréger ces deux contraintes en : $u \leq u_{max} = \min[SP_{max}/\lambda, L_{max}]$.

Comme $T = nu$, la contrainte sur u se traduit par une contrainte sur n :

$$n \geq n_{min} = T/u_{max} \tag{2}$$

Si $n^* \geq n_{max}$, alors le nombre optimal de commandes est inchangé lorsqu'on ajoute la contrainte (2). Si $n^* < n_{max}$, alors le nombre optimal de commandes est $\lceil n_{min} \rceil$. Ce résultat vient de la convexité en n de $C(n)$.

4 Capacité de production limitée

On considère une variante du modèle de Wilson classique. Désormais, l'approvisionnement n'est plus instantané. Il s'effectue suivant un processus de production continu. Les principales hypothèses sont les suivantes :

- La demande est continue de taux λ et doit être satisfaite immédiatement.
- La production de pièces peut être démarrée ou arrêtée à tout instant. Les pièces sont produites continûment suivant un taux μ , i.e. μ pièces sont produites par unité de temps. Les pièces produites sont immédiatement disponibles pour satisfaire la demande.
- Chaque lancement de production entraîne un coût fixe k.
- Le coût unitaire de production est c.
- La possession d'une unité de stock pendant une unité de temps coûte h.

Une *politique de production* spécifie quand démarrer la machine et quand l'éteindre. L'objectif est de déterminer la politique qui minimise le coût moyen sur un horizon infini. Soit la politique de production de paramètre q suivante :

- Débuter la production à chaque fois que le stock disponible devient nul.
- Arrêter la production à chaque fois que q unités ont été produites.

On notera cette politique $\pi(q)$ et on se restreindra dans un premier temps à des politiques de ce type. On supposera que le stock à l'instant initial est nul.

Ce modèle peut représentée une ligne de production composée de deux machines en série séparées par un stock.

Question 1. Soit $\rho \equiv \lambda/\mu$, le taux d'utilisation. Le symbole "$\equiv$" signifie ici que ρ est défini comme étant égal à λ/μ. Quelle condition doit satisfaire ρ afin que toute la demande puisse être satisfaite ?

Réponse :

On doit avoir $\rho \leq 1$ ($\lambda \leq \mu$) pour pouvoir satisfaire toute la demande.

Question 2. Dessiner le graphique de l'évolution du stock disponible dans le temps. Montrer que le stock maximal atteint vaut $S_{max} = q(1 - \rho)$.

Réponse :

Expliquons comment les valeurs ont été obtenues sur la figure 1. Tout ce qui est produit sur l'intervalle $[0, u']$ est consommé sur l'intervalle $[0, u]$:

$$q = \mu u' = \lambda u$$

Le stock maximum atteint, S_{max}, est égal à ce qui est consommé sur l'intervalle $[u', u]$:

$$S_{max} = \lambda(u - u') = \lambda\left(\frac{q}{\lambda} - \frac{q}{\mu}\right) = q(1 - \rho)$$

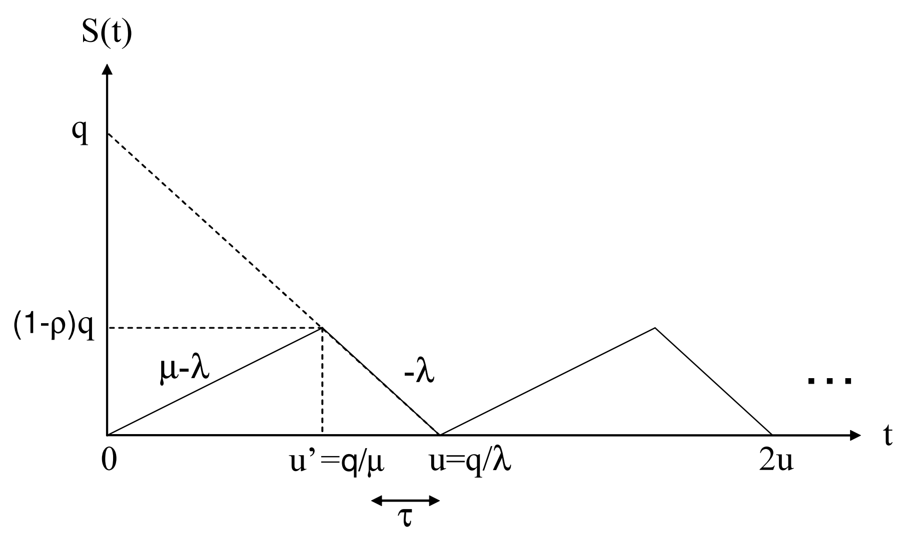

Figure 1 – Evolution du stock disponible

Question 3. Soit $C(q)$ le coût moyen d'une politique $\pi(q)$. Exprimer $C(q)$ en fonction des paramètres du modèle et de q.

Réponse :

En utilisant les résultats précédents, nous obtenons :

$$C(q) = \lambda c + \frac{k}{u} + \frac{1}{2} h S_{max}$$
$$= \lambda c + \frac{\lambda k}{q} + \frac{1}{2}(1-\rho) h q$$

Question 4. Soit q^* la taille de lot qui minimise le coût moyen, u^* la durée optimale entre deux lancements de production et C^* le coût moyen optimal. Exprimer q^*, u^* et C^* en fonction des paramètres du modèle.

Réponse :

Le coût moyen $C(q)$ est le même que pour le modèle EOQ standard, en prenant un coût de possession $h' = (1-\rho)h$. On a donc :

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{(1-\rho)h}}$$
$$u^* = \frac{q^*}{\lambda} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda(1-\rho)h}}$$
$$C^* = \lambda c + \sqrt{2\lambda k(1-\rho)h}$$

Question 5. Représenter graphiquement $q^*(\mu)$ et $C^*(\mu)$ en fonction de μ, en précisant les comportements limites ($\mu \to \lambda$ et $\mu \to \infty$).

Réponse :

q^* est décroissant en μ tandis que C^* est croissant en μ. Lorsque μ tend vers l'infini, nous avons :

$$q^* \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} = q^*(\text{EOQ})$$
$$C^* \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \lambda c + \sqrt{2\lambda k h} = C^*(\text{EOQ})$$

On ré-obtient les formules du modèle EOQ standard, ce qui est logique car, lorsque μ tend vers l'infini, on peut fabriquer instantanément n'importe quelle quantité.

Par ailleurs :

$$q^* \underset{\mu\to\lambda^+}{\longrightarrow} +\infty$$
$$C^* \underset{\mu\to\lambda^+}{\longrightarrow} \lambda c$$

Lorsque μ tend vers λ, il faut produire tout le temps pour pouvoir satisfaire la demande ($q^* \to \infty$). Les coûts fixes moyens sont donc nuls. La production permettant exactement de satisfaire la demande, le stock reste à la valeur du stock initial, i.e. à la valeur 0. Les coûts de possession sont donc nuls et il ne reste plus que les coûts variables.

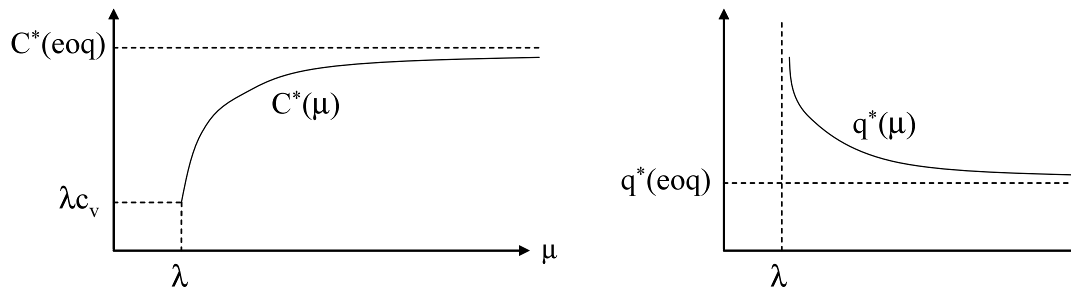

FIGURE 2 – Influence de la capacité de production sur le coût moyen optimale et sur la quantité économique de commande

Question 6. On considère les données suivantes : $\lambda = 2$ unités par heure, $\mu = 3$ unités par heure, $k = 20$ euros, $c = 0$, $h = 1$ euro par heure et par unité. Calculer C^*.

Réponse :

$q^* = 15.5$ unités , $C^* = 5.16$ euros par heure, $u^* = 7.75$ heures.

Question 7. Le manager s'aperçoit qu'il se trompe depuis un an sur l'évaluation du coût fixe qui vaut en réalité 10 euros. Quel est le coût lié à cette erreur d'estimation ?

Réponse :

D'après les questions précédentes, il a choisi une taille de lot $\sqrt{2} \simeq 1.41$ fois la taille de lot optimale ($q^*(20)/q^*(10) = \sqrt{20/10}$), ce qui entraîne un coût moyen 1.06 fois plus important que le coût moyen optimal. Il a donc commis une erreur entraînant un surcoût de 6 %. La notion de gravité dépend de la situation industrielle ...

On rajoute maintenant un temps de set-up τ. Lorsque la production est arrêtée, elle ne peut être reprise qu'après un délai minimum de τ. Ce temps de set-up peut par exemple être lié au nettoyage d'une machine ou à un pré-chauffage.

Question 8. Intuitivement, quelle va être l'influence de τ sur les coûts ?

Réponse :

Le temps de set-up est une contrainte supplémentaire, ce qui doit forcément augmenter les coûts.

Question 9. Notons $\hat{q}^*$ la quantité optimale de commande dans le cas avec un temps de set-up. Déterminer $\hat{q}^*$ en fonction des paramètres du modèle. Il faudra distinguer deux cas de figure.

Réponse :
La politique (q) est réalisable ssi $\tau \leq u - u' = q/\lambda - q/\mu$, c'est-à-dire si le temps entre la fin d'une production et le début d'une autre production est supérieure au temps de set-up. Cette condition est équivalente à $q \geq q_0 \equiv \dfrac{\lambda\tau}{1-\rho}$.

Nous cherchons donc à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\min C(q) \\ \text{s.c.} \quad & q \geq q_0 \end{aligned}$$

Distinguons deux cas de figure. Si $q^* \geq q_0$, alors $\hat{q}^* = q^*$. Si $q^* < q_0$, alors la fonction $C(q)$ est croissant sur l'intervalle $[q_0, \infty]$. La fonction $C(q)$ atteint dons son minimum en $\hat{q}^* = q_0$. Finalement :

$$\hat{q}^* = \max\left[q^*, q_0\right] = \max\left[\sqrt{\frac{2\lambda k}{(1-\rho)h}}, \frac{\lambda\tau}{1-\rho}\right]$$

5 Produits périssables

On reprend le modèle de Wilson standard en ajoutant l'hypothèse suivante. Les produits ne peuvent plus servir à satisfaire la demande après un délai de péremption U passée en stock. En outre, on supposera que tous les produits doivent être consommés avant leur délai de péremption.

Question 1. Déterminer la politique d'approvisionnement optimale. Il vous faudra distinguer deux cas de figure.

Réponse :
Lorsque les produits sont périssables, il s'ajoute la contrainte que $u \leq U$ (u est le temps écoulé entre deux approvisionnements), i.e. $q \leq Q$ avec $Q = \lambda U$.
Soit $C(q)$ le coût moyen du modèle EOQ standard pour une quantité commandée de q. Avec périssabilité, on cherche à minimiser $C(q)$ sous la contrainte que $q \leq Q \equiv \lambda U$.

$$\begin{aligned} &\min C(q) \\ \text{s.c.} \quad & 0 \leq q \leq Q \end{aligned}$$

Soit q^* la quantité économique de commande pour le modèle standard sans périssabilité et $\hat{q}^*$ la quantité économique de commande avec périssabilité. Si $q^* \leq Q$, alors $\hat{q}^* = q^*$. Sinon, $q^* = Q$ car $C(q)$ est convexe en q (voir figure 5). Au final,

$$\hat{q}^* = \min(q^*, Q) = \min(q^*, \lambda U)$$

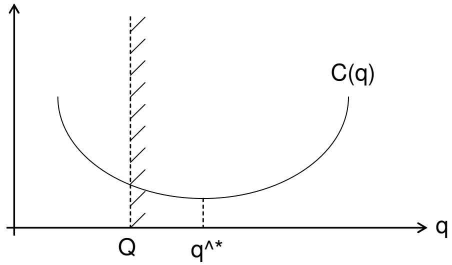

FIGURE 3 – Courbe $C(q)$

Désormais, il n'y a plus de délai de péremption. En revanche, on suppose que le stock devient progressivement inutilisable avec un taux de déterioration δ. Pendant un intervalle de temps dt, nous avons $\delta S(t)dt$ unités de stock qui périment avec $S(t)$ le stock à l'instant t. On suppose que l'on commande q unités de produit à chaque fois que le stock devient nul. On notera u la période.

Question 2. Montrer que $S(t)$ satisfait une équation différentielle du premier ordre.

Réponse :
Nous avons $S(t+dt) = S(t) - \lambda dt - \delta S(t)dt$ qui, après ré-arrangement, donne l'équation différentielle suivante :

$$S'(t) + \delta S(t) = -\lambda$$

Question 3. Résoudre cette équation différentielle en supposant que $S(0) = q$. Vérifier que l'expression obtenue est bien cohérente avec celle obtenue en cours (quand $\delta = 0$).

Réponse :
La solution de l'équation différentielle s'écrit $S(t) = S_0(t) + S_1(t)$ avec $S_0(t)$ la solution de l'équation différentielle sans second membre et $S_1(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.
Nous avons $S_0(t) = \alpha e^{-\delta t}$ et par exemple $S_1(t) = -\lambda/\delta$. La condition initiale $S(0) = q$ entraîne que $\alpha = q + \lambda/\delta$. Finalement :

$$\begin{aligned} S(t) &= (q + \lambda/\delta)e^{-\delta t} - \lambda/\delta \\ &= qe^{-\delta t} - (1 - e^{-\delta t})\lambda/\delta \end{aligned}$$

On obtient bien, lorsque δ tend vers 0, l'évolution du stock du modèle EOQ standard (en utilisant le développement limité $e^x = 1 + x + o(x)$) :

$$S(t) = q - \lambda t$$

Question 4. Exprimer q en fonction de u et des paramètres du modèle. Vérifier que l'expression obtenue est bien cohérente avec celle obtenue en cours (quand $\delta = 0$).

Réponse :
Le stock s'annule à $t = u$:

$$S(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\lambda}{\delta}(e^{\delta u} - 1)$$

Un développement limité de $\exp(\delta u)$ en $\delta = 0$ donne immédiatement la relation $q = \lambda u$ valable pour un modèle sans périssabilité.

Question 5. Calculer le stock moyen $\overline{S}$ en fonction des paramètres du système et de la période u.

Réponse :

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \frac{1}{u}\int_0^u S(t)dt \\ &= \frac{\lambda(e^{\delta u} - \delta u - 1)}{\delta^2 u}\end{aligned}$$

6 Gestion conjointe de références

Adaptation examen 2009

Une entreprise s'approvisionne auprès d'un même fournisseur pour tout un ensemble de composants. Bien évidemment chaque composant diffère par son coût, sa demande moyenne, son volume, son conditionnement, etc : un composant de type i a une demande continue et constante de taux λ_i, un coût de possession unitaire h_i et un coût fixe d'approvisionnement K_i. De plus un coût fixe de livraison K est également facturé par le fournisseur quelles que soient les pièces commandées. Ainsi une commande de pièces 1 et 2 aura un coût fixe de $K + K_1 + K_2$. On supposera que les coûts variables sont nuls. Il s'agira pour l'entreprise de choisir une politique d'approvisionnement de ses composants minimisant ses coûts de commande et de stockage. On s'intéresse à l'instance suivante avec 3 types de pièces et un coût de livraison $K = 13$:

— **Composant** 1 **:** $\lambda_1 = 1$, $h_1 = 1$, $K_1 = 2$
— **Composant** 2 **:** $\lambda_2 = 1$, $h_2 = 2$, $K_2 = 9$
— **Composant** 3 **:** $\lambda_3 = 1/6$, $h_3 = 4$, $K_3 = 12$

On ne considère dans la suite que des politiques ayant les propriétés suivantes :

— ZIO
— A $t = 0$, on passe une commande pour tous les types de composants.

Une première approche consiste à gérer indépendamment les différents composants selon leur quantité économique.

Question 1. Déterminer sur l'exemple la période économique de commande T_i^{EOQ} et le coût moyen optimal (par unité de temps) C_i^{EOQ} pour chacun des composants sans tenir compte du coût fixe de livraison K.

Réponse :
Rappelons que $C_i^{EOQ} = \sqrt{2\lambda_i h_i K_i}$ et $T_i^{EOQ} = \sqrt{2K_i/(\lambda_i h_i)}$

— **Composant** 1 **:** $T_1^{EOQ} = \sqrt{2/0.5} = 2$, $C_1^{EOQ} = 2\sqrt{2 \times 0.5} = 2$
— **Composant** 2 **:** $T_2^{EOQ} = \sqrt{9/1} = 3$, $C_2^{EOQ} = 2\sqrt{9} = 6$
— **Composant** 3 **:** $T_3^{EOQ} = \sqrt{12/0.33} = 6$, $C_3^{EOQ} = 2\sqrt{12/3} = 4$

Question 2. Quelle est le coût moyen (par unité de temps) de la politique $(T_1^{EOQ}, T_2^{EOQ}, T_3^{EOQ})$ obtenue en tenant compte maintenant des coûts de livraison K (attention à ne pas compter plusieurs fois K au même instant !) ?

Réponse :
Les périodes sont donc $(2, 3, 6)$. Sur une période de temps $[0, 6[$, on va commander 4 fois (à $t = 0$, $t = 2$, $t = 3$ et $t = 4$). Le coût fixe est donc de $4K$ toutes les 6 unités de temps.

$$\begin{aligned}C(T^{EOQ}) &= C_1^{EOQ} + C_2^{EOQ} + C_3^{EOQ} + \frac{4}{6}K \\ C(T^{EOQ}) &= 12 + 2/3 \times 13 = 20.66\end{aligned}$$

A l'opposé on peut décider de toujours grouper les commandes des différents composants en prenant une période commune $T' = T_1 = T_2 = T_3$ pour les 3 composants.

Question 3. Quelle est le coût moyen (par unité de temps) $C(T')$ de cette politique ? Quelle est la valeur de T' qui minimise le coût moyen ? Quel est le coût moyen associé ?

Réponse :
En posant $K' = K + K_1 + K_2 + K_3$ et $\lambda' h' = \sum_i \lambda_i h_i$, on peut exprimer le coût moyen comme dans un modèle de Wilson classique :

$$\begin{aligned}C(T') &= \frac{K + K_1 + K_2 + K_3}{T'} + \sum_i \frac{1}{2}\lambda_i h_i T' \\ &= \frac{K'}{T'} + \frac{1}{2}\lambda' h' T'\end{aligned}$$

On a alors un modèle de Wilson avec un coût fixe $K' = K + K_1 + K_2 + K_3 = 36$ et $\lambda' h' = 2(0.5 + 1 + 0.333) = 3.666$. A l'optimal, on obtient finalement :

$$T' = \sqrt{2K'/(\lambda' h')} = 4.43 \qquad C' = \sqrt{2\lambda' h' K'} = 16.24$$

Une 3ème approche consiste à se restreindre à des politiques stationnaires *strictement cycliques*. Une telle politique est décrite par un vecteur $T = (T_1, \ldots, T_n)$ de périodes, tel que $T_i = a_i T_0$ avec a_i un entier ≥ 1 et $T_0 = \min_i T_i$. Dans une politique *strictement cyclique* on passe donc une commande toutes les T_0 unités de temps.

Question 4. Les 2 politiques précédentes $(T_1^{EOQ}, T_2^{EOQ}, T_3^{EOQ})$ et (T', T', T') sont-elles *strictement cycliques* ? Est-ce toujours le cas ?

Réponse :

La politique obtenue $(2, 3, 6)$ est stationnaire mais pas *strictement cyclique* car 3 n'est pas multiple de 2. Pour obtenir de cette manière une politique *strictement cyclique* il faut beaucoup de chance ! Par contre $(4.43, 4.43, 4.43)$ est évidemment strictement cyclique puisque toutes les périodes sont égales.

Question 5. Exprimer le coût moyen $C(T)$ d'une politique T *strictement cyclique* en fonction des différents paramètres.

Réponse :

$$C(T) = K/T_0 + \sum_i \left(K_i/T_i + \frac{1}{2}\lambda_i h_i T_i \right)$$

Le terme $K_i/T_i + \frac{1}{2}\lambda_i h_i T_i$ est le coût moyen d'une politique ZIO stationnaire pour le composant i commandé selon sa période T_i. Comme on commande exactement toutes les T_0 unités de temps, on paie en moyenne un coût de livraison de K/T_0.

7 Vendeur de journaux : questions de cours

Toutes les réponses sont dans les notes de cours sur l'ENT.

Soit un problème de vendeur de journaux classique : une période, demande aléatoire X de fonction de répartition F_X, coût de rupture b, coût d'invendu h, minimisation de l'espérance des coûts.

Demande continue

Dans cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire continue de densité f_X.

Question 1. Exprimer l'espérance du coût $C(q)$ lorsque le stock initial est q.

Question 2. Exprimer $C'(q)$ et $C''(q)$.

Question 3. Démontrer que l'optimal est atteint quand la dérivée s'annule.

Question 4. En déduire un théorème permettant de déterminer la quantité optimale q^*.

Question 5. Exprimer les taux de service en temps et en quantité.

Question 6. Comment varie le stock de sécurité (à l'optimal) avec h ? Avec b ?

Question 7. Que vaut le stock de sécurité (à l'optimal) si l'écart-type de la demande est nul ?

Demande discrète

Dans cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire discrète et on note $p(x) = P(X = x)$.

Question 8. Exprimer l'espérance du coût $C(q)$ lorsque le stock initial est q.

Question 9. Exprimer $C(q+1) - C(q)$. En déduire que $C(q)$ est convexe.

Question 10. En déduire un théorème permettant de déterminer la quantité optimale q^*.

Question 11. Exprimer les taux de service en temps et en quantité.

Loi normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $C_X(q)$ le coût si la demande est X et la quantité commandée est q. Soit q_X^* la quantité optimale si la demande est x.

Question 12. Expliquer pourquoi la loi normale est importante.

Question 13. Montrer que $q_X^* = \mu + \sigma q_Z^*$

Question 14. Démontrer que $C_X(q) = \sigma C_Z(z)$ si $q = \mu + \sigma z$.

Question 15. Démontrer que $C_X^* = \sigma C_Z^*$.

Question 16. Exprimer le stock de sécurité. Comment varie-t-il avec l'écart-type ? Pour quelles valeurs des paramètres a-t-on un stock de sécurité nul ?

8 Demande uniformément distribuée

On se place dans le cadre du modèle du vendeur de journaux et on suppose que la demande X est une variable aléatoire continue uniformément distribuée sur $[a, b]$ avec $b > a$. On note c_i et c_r les coûts d'invendu et de rupture.

Question 1. Soit $C(q)$ l'espérance des coûts lorsque la quantité commandée est q. Exprimer $C(q)$ en fonction des paramètres du modèle.

Réponse :

Soit f la densité de la loi X et F sa fonction de répartition. Rappelons que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Exprimons maintenant l'espérance des coûts :

$$\begin{aligned} C(q) &= c_i E(q-X)^+ + c_r E(X-q)^+ \\ &= c_i \int_0^q (q-x) f(x) dx + c_r \int_q^\infty (x-q) f(x) dx \end{aligned}$$

On peut distinguer 3 cas de figure :

Cas 1 : $\mathbf{a \leq q \leq b}$

$$\begin{aligned} C(q) &= c_i \int_a^q \frac{q-x}{b-a} dx + c_r \int_q^b \frac{x-q}{b-a} dx \\ &= c_i \left[-\frac{(q-x)^2}{2(b-a)} \right]_a^q + c_r \left[\frac{(x-q)^2}{2(b-a)} \right]_q^b \\ &= \frac{c_i (q-a)^2 + c_r (b-q)^2}{2(b-a)} \end{aligned}$$

Cas 2 : $\mathbf{q \leq a}$

Dans ce cas, nous avons toujours $X > q$ (jamais d'invendu), ce qui implique que $(q-X)^+ = 0$ et $(X-q)^+ = X - q$. On a alors :

$$C(q) = c_r E(X-q) = c_r [E(X) - q]$$

On révise au passage le calcul de l'espérance d'une v.a. continue :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

Cas 3 : $\mathbf{q \geq b}$

Dans ce cas, nous avons toujours $X < q$ (jamais de rupture), ce qui implique que $(q-X)^+ = q - X$ et $(X-q)^+ = 0$. On alors :

$$C(q) = c_i E(q-X) = c_i [q - E(X)]$$

Question 2. Soit q^* la quantité qui minimise $C(q)$. En dérivant $C(q)$, déterminer q^* sans utiliser de théorème du cours.

Réponse :

Supposons que $c_i > 0$ et $c_r > 0$. La fonction $C(q)$ est alors strictement décroissante en q pour $q \leq a$ et strictement croissante en q pour $q \geq b$. La quantité optimale q^* appartient donc nécessairement à $[a, b]$.

Étudions la fonction $C(q)$ sur l'intervalle $[a, b]$:

$$C'(q) = \frac{c_i(q-a) + c_r(q-b)}{b-a}$$

$$C''(q) = \frac{c_i + c_r}{b-a} > 0$$

La fonction $C(q)$ est strictement convexe et atteint son unique minimum, q^*, quand sa dérivée s'annule :

$$q^* = \frac{c_i a + c_r b}{c_i + c_r}$$

Question 3. Retrouver l'expression de q^* en utilisant un théorème du cours.

Réponse :

D'après le cours, q^* satisfait est optimale si et seulement si :

$$F(q^*) = \frac{c_r}{c_r + c_i} \Leftrightarrow \frac{q^* - a}{b-a} = \frac{c_r}{c_r + c_i} \Leftrightarrow q^* = \frac{c_i a + c_r b}{c_i + c_r}$$

Question 4. Quand la quantité commandée optimale est-elle égale à l'espérance de la demande ? supérieure à l'espérance de la demande ? Inférieure ?

Réponse :

$$\begin{aligned} & q^* = E(X) \Leftrightarrow \frac{c_i a + c_r b}{c_i + c_r} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow c_i = c_r \\ & q^* > E(X) \Leftrightarrow c_r > c_i \\ & q^* < E(X) \Leftrightarrow c_r < c_i \end{aligned}$$

Question 5. Notons $\alpha(q)$ le taux de service en temps. Exprimer $\alpha(q)$ et $\alpha^* \equiv \alpha(q^*)$ en fonction des paramètres du modèle.

Réponse :

$$\alpha(q) = P(X \leq q) = F(q) = \frac{q-a}{b-a}$$

$$\alpha(q^*) = \frac{c_r}{c_i + c_r}$$

Question 6. Notons $\beta(q)$ le taux de service en quantité, quand q est commandé. Exprimer $\beta(q)$ en fonction des paramètres du modèle.

Réponse :

Rappelons que $\beta(q) = \dfrac{E(Y)}{E(X)}$ où $Y = \min(q, X)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^q x f(x)dx + qP(Y = q) \\ &= \int_a^q \frac{x}{b-a}dx + q(1 - F(q)) \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^q + q\frac{b-q}{b-a} \\ &= \frac{2qb - q^2 - a^2}{2(b-a)} \end{aligned}$$

Puis

$$\beta(q) = \frac{2qb - q^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

Question 7. Application numérique :
- Instance 1 : $a = 40$, $b = 60$, $c_i = 1$, $c_r = 10$
- Instance 2 : $a = 10$, $b = 90$, $c_i = 1$, $c_r = 10$
- Instance 3 : $a = 40$, $b = 60$, $c_i = 10$, $c_r = 1$
- Instance 4 : $a = 10$, $b = 90$, $c_i = 10$, $c_r = 1$

Pour chaque instance, calculer $E(X)$, $\sigma(X)$, $E(Y)$, q^*, ν^* (stock de sécurité à l'optimal), $\alpha*$, β^*. Commenter.

Réponse :

On révise au passage le calcul d'une variance :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

et $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.
Une application numérique des différentes formules vues précédemment donne les résultats suivants :

c_i	c_r	a	b	$E(D)$	$\sigma(D)$	q^*	ν^*	$E(Y)$	α^*	β^*
1	10	40	60	50	5.8	58.2	8.2	49.9	90.9%	99.83 %
1	10	10	90	50	23.1	82.7	32.7	49.7	90.9%	99.3%
10	1	40	60	50	5.8	41.8	-8.2	41.7	9.1%	83.5%
10	1	10	90	50	23.1	17.3	-32.7	16.9	9.1%	33.9%

Le stock de sécurité augmente en valeur absolue avec l'écart-type de la demande. Le stock de sécurité est positif (négatif) quand le coût d'invendu est plus petit (grand) que le coût de rupture. Le taux de service en quantité est bien plus grand que le taux de service en temps.

9 Soldes

Cindy est propriétaire d'une petite boutique qui vend des costumes. En début de saison, elle commande auprès de son fournisseur, une quantité q au prix unitaire w. Au cours de la saison, elle vend ses costumes au prix de vente r ($r > w$). Si à la fin de la saison, Cindy possède encore des articles non vendus, elle les solde au prix s ($s < w$). Tous les articles non vendus pendant la saison trouvent acquéreur lors des soldes.

On suppose que la demande X pendant la saison est une variable aléatoire discrète dont on connaît la distribution $p(x) = P(X = x)$ pour tout x entier.

Question 1. Soit $G(q, X)$ le profit réalisé par Cindy au cours de la saison si elle commande q unités et que la demande est X. Exprimer $G(q, X)$ en fonction de q, X et des paramètres du problème.

Réponse :
La quantité q peut se décomposer comme suit :

$$q = \underbrace{\min(X, q)}_{\text{quantité vendue au prix fort}} + \underbrace{(q - X)^+}_{\text{quantité vendue au prix soldé}}$$

Cindy réalise un profit de $(r - w)$ sur chaque produit vendu au prix fort et un profit de $w - s)$ sur chaque produit soldé. Ainsi :

$$G(q, X) = (r - w)\min(q, X) - (w - s)(q - X)^+$$

Question 2. Vérifier que

$$G(q, X) = (r - w)X - (r - w)(X - q)^+ - (w - s)(q - X)^+$$

Réponse :
En remarquant que

$$\min(q, X) = X + \min(q - X, 0) = X - \max(X - q, 0) = X - (X - q)^+$$

il vient

$$G(q, X) = (r - w)X - (r - w)(X - q)^+ - (w - s)(q - X)^+$$

Question 3. Soit q^* la quantité qui maximise l'espérance du profit. Déduire de la question précédente que l'on peut obtenir q^* résolvant un problème de vendeur de journaux dont on précisera les paramètres.

Réponse :
On cherche à maximiser :

$$G(q) = E[G(q, X)] = (r - w)E(X) - (r - w)E[(X - q)^+] - (w - s)E[(q - X)^+]$$

En posant $(r - w) = b$ et $(w - s) = h$, cela revient à minimiser

$$C(q) = bE[(X - q)^+] + hE[(q - X)^+]$$

et on s'est ramené à un problème du vendeur de journaux classique. Si on suppose que la demande est discrète, il vient d'après un théorème du cours :

$$q^* = \min\left[q \in \mathbb{N} | F(q) \geq \frac{b}{b + h}\right]$$

Question 4. On connaît les demandes des années précédentes :

Année	2010	2009	2008	2007	2006
nombre de costumes demandés	3	5	2	6	4

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. La loi de Poisson est souvent appelée loi des événements rares. On rappelle que :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!} \quad \text{pour } k \geq 0$$
$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

Donner une estimation de λ. En vous basant sur cette estimation, en déduire la quantité optimale à commander si $r = 60$ euros, $w = 50$ euros et $s = 30$ euros.

Réponse :
La moyenne empirique est un estimateur sans biais et convergeant de l'espérance d'une variable aléatoire (cf cours de stats). Ici $E(X) = \lambda$ et la moyenne empirique est donc un estimateur sans biais et convergeant de λ . Une estimation de λ, notée $\hat{\lambda}$ est alors :

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3 + 5 + 2 + 6 + 4}{5} = 4$$

Nous avons $b = 10$, $h = 20$ et la quantité optimale à commander est :

$$\begin{aligned} q^* &= \min\left[q \in \mathbb{N} | F(q) \geq \frac{b}{b + h}\right] \\ &= \min\left[q \in \mathbb{N} | F(q) \geq 0.333\right] \\ &= 3 \end{aligned}$$

Il faut donc commander 3 costumes. On notera que l'on commande moins que l'espérance de la demande. Ceci s'explique par le fait que le coût d'invendu est supérieur au coût de rupture.

Question 5. Le paramètre λ peut avoir été mal estimé, par exemple en raison de variations de la demande d'une année à l'autre. Calculer q^* pour différentes valeurs de λ et commenter.

Réponse :

λ	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
q^*	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Si la demande est en moyenne de 1 costume, il vaut mieux ne rien commander ! Avec notre estimation de λ égale à 3, on commande l'optimal si la vraie valeur de λ est comprise entre 3.5 et 4.5.

Question 6. On suppose désormais que $\lambda = 4$. L'espérance du profit est donnée dans le tableau ci-dessous pour différentes quantités commandées :

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$G(q)$, en euros	0	9.5	16.7	19.6	16.6	7.7	-5.9	-22.5	-41.0	-60.4

Vérifier les résultats du tableau, en utilisant un tableur excel par exemple.

Réponse :
Expliquons comment calculer $G(q)$:

$$\begin{aligned} G(q) &= bE(X) - bE[(X-q)]^+ - hE[(q-X)]^+ \\ &= b\lambda - b\sum_{x=q+1}^{\infty}(x-q)p(x) - h\sum_{x=0}^{q-1}(q-x)p(x) \\ &\approx b\lambda - b\sum_{x=q+1}^{14}(x-q)p(x) - h\sum_{x=0}^{q-1}(q-x)p(x) \end{aligned}$$

On connaît tous les paramètres dans cette dernière expression de $G(q)$: nous avons $\lambda = 4$, $h = 20$, $b = 10$ et $p(x) = \lambda^x \exp(-\lambda)/x!$. La somme infini converge rapidement et on peut tronquer la somme pour avoir une bonne approximation. On vérifie avec une calculatrice ou un tableur excel que l'on obtient bien les résultats escomptés.
Si la quantité q est commandée au lieu de q^*, le profit baisse en pourcentages de :

$$\Delta G(q) = \frac{G(q^*) - G(q)}{G(q^*)}$$

q	1	2	3	4	5
$\Delta G(q)$	52%	15%	0%	15%	61%

Mieux vaut ne pas se tromper dans la quantité commandée !

Question 7. On suppose maintenant que $\lambda = 40$. Calculer la quantité optimale à commander. Vous pourrez utiliser la table de la loi normale centrée réduite ci-jointe.

Réponse :
Rappelons qu'une loi de Poisson de paramètre λ peut être approchée par une loi normale d'espérance λ et de variance λ (si $\lambda > 25$). Ainsi la variable aléatoire

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

peut être approchée par une loi normale centrée réduite.

$$P(X \leq q) = 0.333 \Leftrightarrow P(Z \leq z) = 0.333 \text{ avec } z = \frac{q-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

En utilisant la table de la loi normale, on obtient $z = -0.43$ puis $q = 40 + \sqrt{40} \times (-0.43) = 37.3$. Le problème étant discret, il va falloir commander 38 costumes.

Remarque 1 *Sans approcher la loi de Poisson par une loi normale, on aurait obtenu $q^* = 37$. Avec R, la commande est "qpois(0.333,40)".*

10 Vendeur de journaux avec coûts fixes

On reprend un modèle de vendeur de journaux classique. On ajoute une hypothèse supplémentaire. Si une commande non nulle est passée ($q > 0$), un coût fixe k est encouru.

Question 1. Déterminer quelle est la quantité économique de commande. On supposera qu'on est capable, dans le cas sans coût fixe de commande ($k = 0$), de calculer le coût optimal C_0^* ainsi que la quantité économique de commande correspondante q_0^*.

Réponse :
Distinguons les cas où $q = 0$ et $q > 0$. Lorsque $q = 0$, l'espérance du coût vaut $C(0) = c_r E(X)$ car aucune demande n'est satisfaite.
Notons $C_0(q)$ le coût lorsque le coût fixe $k = 0$. Lorsque $q > 0$, nous avons :

$$\min_{q>0} C(q) = \min_{q>0}[C_0(q) + k] = C_0^* + k$$

En effet, le coût fixe k est une constante que l'on peut sortir de la fonction objectif.
On peut conclure que la quantité économique de commande vaut :

$$q^* = \begin{cases} q_0^* & \text{si } C_0^* + k < bE(X) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que la condition $bE(X) < k$ implique de ne rien commander. En effet, le coût fixe k est alors supérieur au coût de ne satisfaire aucune demande.

Question 2. Application numérique : X suit une loi uniforme sur $[0, 10]$, $h = 5$, $b = 1$, $k = 1$. Quelle est la quantité optimale ainsi que le coût optimal ?

Réponse :
$C(0) = 5$, $q_0^* = 0.6$, $C_0^* = 4.508$, $C_0^* + k = 4.508 + 1 = 5.508$. Mieux vaut ne rien commander.

11 Vendeur de journaux : demande discrète

Adaptation examen 2016

On considère un problème de vendeur de journaux avec un coût d'invendu unitaire $h = 1$ et un coût de rupture unitaire $b = 10$. La demande X a la distribution suivante :

i	0	1	2	3	4
$P(X = i)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

Question 1. Déterminer (numériquement) la quantité optimale ainsi que le coût optimal.

Réponse :

i	0	1	2	3	4
$P(X = i)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16
$P(X \leq i)$	1/2	3/4	7/8	15/16	1

$q^* = \min[x|P(X \leq x) \geq 10/11] = 3$
$C^* = C(3) = 10 \times 1/16 + 1 \times (1/8 + 2/4 + 3/2) = 11/4 = 2.75$

Question 2. Lorsqu'on commande la quantité optimale, déterminer (numériquement) le taux de service en temps, le taux de service en quantité ainsi que le stock de sécurité.

Réponse :
Taux de service en temps $= P(X \leq 3) = 15/16$
$E(X) = 1/4 + 2/8 + 3/16 + 4/16 = 15/16 = 0.9375$
$E(Y) = 1/4 + 2/8 + 3 \times 2/16 = 7/8 = 0.875$
Taux de service en quantité $= E(Y)/E(X) = 14/15$ =0.933
Stock de sécurité $= q^* - E(X) = 3 - 0.9375 = 2.0625$

Question 3. On suppose désormais qu'il y a un coût fixe de commande $k = 8$. Déterminer (numériquement) la quantité optimale ainsi que le coût optimal.

Réponse :
$C(0) = bE(X) = 150/16 = 9.375$
$\min_{q>0} C(q) = k + C_0^* = 8 + 2.75 = 10.275$
L'optimal consiste donc à ne rien commander. Le coût optimal est de 9.375.

12 Vendeur de skis

Adaptation contrôle continu 2013

Un vendeur de skis doit décider combien de paires de skis commander en début de saison. Le prix de vente pendant la saison est de 500 euros. Le vendeur achète 300 euros la paire de skis. La demande pendant la saison est une variable aléatoire suivant une loi uniforme discrète comprise entre 1 et 10, c'est-à-dire $P(X = i) = 1/10, \forall i \in \{1, \cdots, 10\}$. Une fois la saison terminée, le produit est soldé à moitié prix et on suppose que tous les produits soldés sont vendus.

Question 1. Quelle est la quantité optimale ?

Réponse :
C'est un problème de vendeur de journaux avec un coût de rupture $b = 500 - 300 = 200$ et un coût d'invendu $h = 300 - 500/2 = 50$. Puis $b/(b + h) = 0.8$.

$$q^* = \min[q : F_X(q) \geq b/(b + h)] = 8$$

Question 2. Même question si le vendeur achète la paire de skis 200 euros.

Réponse :
C'est un problème de vendeur de journaux avec un coût de rupture $b = 500 - 200 = 300$ et un coût d'invendu $h = 200 - 500/2 = -50$.

Le théorème du cours ne s'applique plus pas car h est négatif, ce qui entraîne que la fonction de coût $C(q)$ n'est plus convexe.

Le coût d'invendu h est négatif, ce qui veut dire que l'on réalise un gain sur chaque produit soldé. Comme on peut vendre tous les produits soldés, on a intérêt à commander une infinité de paires de ski.

13 Simulation et optimisation de politiques de gestion des stocks

13.1 Problématique

Une pièce dont vous avez la gestion a une demande journalière aléatoire. Vous disposez d'un historique des ventes pour cette pièce sur l'année qui précède (cf fichier sur l'ENT). Une demande est l'agrégation des demandes de plusieurs clients. Ainsi, une demande de trois signifie que trois clients ont passé une commande de 1. A chaque commande passée, vous avez un coût fixe s'élevant à 100 €. La possession d'une pièce pendant un jour est de 1 € . Le délai d'approvisionnement de 5 jours est supposé fiable dans un premier temps. Une commande passée en début du jour j est disponible en début du jour $j + 5$. Les demandes non satisfaites sont mises en attente. Il n'y a pas de coût de rupture de stock mais on cherchera à satisfaire une certaine qualité de service. On supposera enfin que les demandes sont servis suivant leur ordre d'arrivée (first come, first served).

Votre mission de stage est de développer un outil d'aide à la décision afin de choisir une politique de gestion des stocks appropriée. Les objectifs de l'entreprise sont, entre autres :

— d'avoir un bon taux de service (en quantité). Le taux de service est défini comme le pourcentage des demandes satisfaites immédiatement.
— de minimiser les coûts

13.2 Questions préliminaires

Question 1. Rappeler la définition des politiques classiques (r, q), (r, S), (T, q) et (T, S).

Réponse :

— Politique (r, q) : commander q unités lorsque le stock brut est $\leq$ à r.
— Politique (r, S) : recompléter le stock brut à S lorsque le stock brut est $\leq$ à r. Cela revient à commander à l'instant t la quantité $(S - Y_t)$.
— Politique (T, S) : recompléter le stock brut toutes les T périodes

Quelques notations utiles pour décrire la dynamique des stocks :

— X_t = stock net au début du jour t (avant réception de la livraison du jour, ayant lieu en début de matinée)
— Y_t = stock brut au début du jour t (avant que la commande du jour soit passée)
— Q_t = quantité commandée au début du jour t
— D_t = demande le jour t
— L = délai de livraison

Question 2. Donner une équation qui relie les stocks nets X_t et X_{t+1}.

Réponse :

$$X_{t+1} = X_t - D_t + Q_{t-L}$$

Question 3. Exprimer le stock brut Y_t en fonction du stock net X_t et des quantités commandées.

Réponse :

$$Y_t = X_t + Q_{t-1} + Q_{t-2} + \cdots + Q_{t-L}$$

Question 4. Donner une équation qui relie les stocks bruts Y_t et Y_{t+1}.

Réponse :

$$Y_{t+1} = Y_t - D_t + Q_t$$

Question 5. En période t, combien de demandes sont satisfaites (en incluant celles déjà en attente) ?

Réponse :

Le nombre de demandes à satisfaire vaut $X_t^- + D_t$, c'est-à-dire les demandes en attente plus les demandes de la période. Le nombre de demandes maximum que l'on peut satisfaire en période t vaut $X_t^+ + Q_{t-L}$, soit le stock physique en début de période plus la quantité réceptionnée en début de période). En conclusion, le nombre de demandes satisfaites en période t vaut $\min(X_t^- + D_t, X_t^+ + Q_{t-L})$

Question 6. En période t, combien de demandes sont satisfaites immédiatement ? On supposera que la politique est premier arrivé, premier servi (first come first served).

Réponse :

Après réception de la commande, le stock physique vaut $(X_t + Q_{t-L})^+$. Il y a donc $\min[(X_t + Q_{t-L})^+, D_t]$ demandes satisfaites sans délai en période t.

13.3 Simulation et optimisation sur la base de l'historique des demandes

Simulation de la politique (r, q)

Question 7. Avec Excel, réaliser un simulateur de politique (r, q) sur une année (365 jours ouvrés) avec un stock initial de 50 pièces et aucune commande en transit. Vous utiliserez l'historique des demandes disponible sur Dokeos.

Vous pourrez par exemple remplir les colonnes suivantes :

Jour	Demande	Stock net	Stock brut	Quantité commandée	...
1	?	50	50	?	...
2	?	?	?	?	...
...	...	...	...	...	...
365	?	?	?	?	...

Réponse :

Cf fichier Excel

Question 8. Représenter l'évolution du stock net et du stock brut en fonction du temps.

Question 9. Compléter le simulateur afin qu'il calcule les paramètres de performance suivants :

— Coût moyen par jour (fixe, possession, total)
— Taux de service en quantité : Proportion des pièces fournies à temps par rapport au nombre de pièces demandées
— Taux de service en temps : % de jours sans rupture de stock
— Stock physique moyen
— Temps moyen passé par une pièce en stock
— Nombre moyen de clients en attente
— Délai moyen pour servir un client (inclure les clients qui n'attendent pas)
— Délai moyen pour servir un client, parmi ceux qui attendent au moins une période pour être servis
— Rotation annuelle des stocks

Réponse :

Notons $T = 365$, $h = 1$ et $k = 100$. Remarquons par ailleurs que $\sum_{t=1}^T d_t \simeq \sum_{t=1}^T q_t$, à moins d'avoir choisi une quantité de commande q trop petite ou un horizon de temps T très court.

- Stock physique moyen : $\overline{x^+} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^+}{T}$
- Nombre moyen de clients en attente : $\overline{x^-} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^-}{T}$
- Temps moyen passé par une pièce en stock : $\overline{t_{piece}} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^+}{\sum_{t=1}^T q_t}$
- Délai moyen pour servir un client (inclure dans ce calcul les clients qui n'attendent pas) : $\overline{t_{client}} \simeq \frac{\sum_{t=1}^T x_t^-}{\sum_{t=1}^T d_t}$
- Délai moyen pour servir un client, parmi ceux qui attendent au moins une période pour être servis

$$\overline{t_{clients\,qui\,attendent}} \simeq \frac{\sum_{t=1}^T x_t^-}{\sum_{t=1}^T (d_t - a_t)}$$

- Coût moyen de possession par jour : $H = h\overline{x^+}$
- Coût moyen fixe par jour : $K = k \times$ Nombre de commandes$/T$
- Coût total moyen par jour : $C = H + K$
- Taux de service en quantité. Le nombre de demandes satisfaites immédiatement le jour t est égal à $a_t = \min[(x_t + q_{t-L})^+, d_t]$. Au final, la proportion de pièces fournies à temps est :

$$\beta = \frac{\sum_{t=1}^T a_t}{\sum_{t=1}^T d_t}$$

- Taux de service en temps. La notion de journée sans rupture de stock est ambigüe. Une définition possible : il n'y a pas rupture de stock en période t si toute la demande de la période t est satisfaite immédiatement, c'est-à-dire si $a_t = d_t$.
- La rotation des stocks annuelle est définie comme la consommation annuelle divisée par le stock moyen. Elle représente le nombre de fois où les stocks sont renouvelés au cours d'une année :

$$Rotation = \frac{\sum_{t=1}^T d_t}{\overline{x^+}}$$

Pour calculer le temps moyen $\overline{t_{piece}}$ passé par une pièce en stock, on peut utiliser la loi de Little appliqué au système "Stock physique" qui voit un débit entrant $D_e = (\sum_{t=1}^T q_t)/T$. Le débit entrant et sortant sont approximativement égaux dans la mesure où les demandes sont satisfaites tôt ou tard. Ainsi

$$\overline{t_{piece}} = \frac{\overline{x^+}}{D_e}$$

Le temps $\overline{t_{piece}}$ obtenu sera exprimé en jours.

Le nombre moyen de demandes en attente vaut

$$\overline{x^-} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^-}{T}$$

On peut alors à nouveau appliquer la loi de Little au système "Clients en attente" pour calculer le temps moyen d'attente $\overline{t_{client}}$ d'un client. Le débit entrant est $D_e = (\sum_{t=1}^T d_t)/T$.

$$\overline{t_{client}} = \frac{\overline{x^-}}{D_e}$$

Les clients se répartissent en deux catégories : ceux qui attendent ($t_{client} > 0$) et ceux qui n'attendent pas ($t_{client} = 0$). Ainsi

$$\overline{t_{client}} = (1 - \alpha_2) * 0 + \alpha_2 * \overline{t_{\text{client qui attendent}}} = \alpha_2 * \overline{t_{\text{client qui attendent}}}$$

Ainsi

$$\overline{t_{\text{client qui attendent}}} = \frac{\overline{t_{client}}}{\alpha_2} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^-}{\sum_{t=1}^T d_t} \times \frac{\sum_{t=1}^T d_t}{\sum_{t=1}^T (d_t - a_t)} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t^-}{\sum_{t=1}^T (d_t - a_t)}$$

Nous allons chercher à déterminer les paramètres optimaux (r^*, q^*) qui minimisent les coûts tout en assurant que $(1 - \alpha)\%$ des pièces sont satisfaites immédiatement.

Question 10. Une heuristique classique consiste à utiliser la formule de Wilson pour approcher q^*. Calculer la quantité q_{EOQ} ainsi obtenu.

Réponse :

Attention aux unités !

$$q^{EOQ} = \sqrt{\frac{2\overline{D}K}{h}}$$

Nous avons $\overline{D} = (\sum_t D_t)/T = 5.32$ pièces/jour $= 160$ pièces/mois, $h = 5$ euro/mois/pièce $= 0.166$ euro/jour/pièce et $K = 100$ euros. Au final, on obtient $q^{EOQ} \simeq 33$ pièces.

Question 11. En prenant comme quantité de commande q^{EOQ}, déterminer les points de commande r^{EOQ} qui assure des taux de service de 80 %, 90 % et 100 %. Au passage, calculer le coût journalier $C(r^{EOQ}, q^{EOQ})$ pour les trois taux de service.

Réponse :

Le taux de service est croissant avec r. On peut facilement trouver par dichotomie r^{EOQ}.

Taux de service	80 %	90 %	100 %
(r^{EOQ}, q^{EOQ})	(24,33)	(29,33)	(43,33)
$C(r^{EOQ}, q^{EOQ})$	27.6	30.63	44.7

Question 12. Déterminer les paramètres optimaux (r^*, q^*) ainsi que le coût journalier associé, pour les 3 taux de service. Pour ce faire, vous utiliserez 2 méthodes

— Par tâtonnements

— En utilisant une macro Visual Basic (guide d'utilisation sur Chamilo)

Réponse :

Procéder par tâtonnements en repartant de la solution (r^{EOQ}, q^{EOQ}) en utilisant quelques principes simples :

— Le taux de service est croissant avec r.

— Le coût est à priori décroissant puis croissant en q (on dit qu'il est unimodal en q). On peut donc réaliser une dichotomie pour trouver la quantité optimale, pour r fixé.

On peut aussi le solveur d'excel (à activer dans Outils/Macros complémentaires) ou une macro VBA qui trouvera la solution optimale pour ce problème simple.

Taux de service	80 %	90 %	100 %
(r^*, q^*)	(20,46)	(27,44)	(43,33)
$C(r^*, q^*)$	25.86	29.98	44.72

Question 13. L'approximation de q^* par la formule de Wilson vous semble-t-elle bonne ? Proposez une explication à partir du graphique d'évolution des stocks.

Réponse :

Oui sur cet exemple en regardant l'évolution des stocks.

13.4 Politique (T, S)

Afin de regrouper les commandes avec d'autres produits, il est envisagé de passer à une gestion calendaire.

Question 14. Réaliser un simulateur de politique (T, S) et trouver les paramètres optimaux (T^*, S^*)

Réponse :

Taux de service	80 %	90 %	100 %
(T^*, S^*)	(8,63)	(7,65)	(7,85)
$C(T^*, S^*)$	27.38	32.81	51.67