Modélisation des processus aléatoires

Jean-Philippe Gayon

4 octobre 2021

1. Introduction

2. Chaînes de Markov à Temps Discret (CMTD)

3. Chaîne de Markov à Temps Continu (CMTC)

Processus aléatoire (à temps discret)

- Processus aléatoire à temps discret : suite de variables aléatoires $X_0, X_1, X_2, \cdots$
- De nombreux phénomènes sont décrits par des suites de variables aléatoires inter-dépendantes
  - Cours d'une action
  - Évolution d'un stock
  - Nombre d'étudiants en retard
  - Évolution du nombre de requêtes serveur en attente d'être traités
  - ...
- Remarque : aléatoire = stochastique

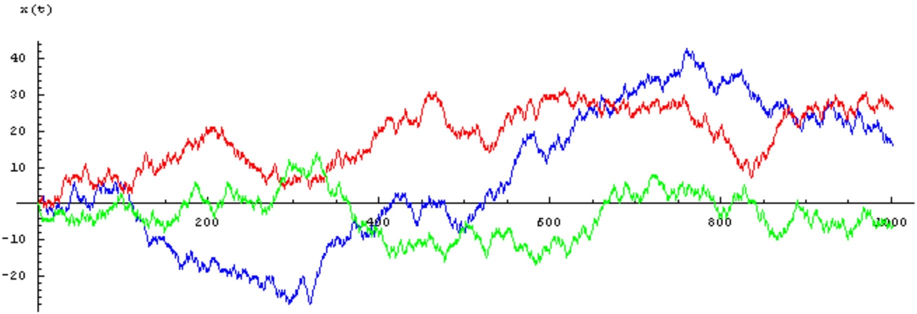
Evolution du CAC 40 sur un an *

- X_t : valeur de l'action le jour t
- Espace des temps discret : $t = 1, 2, \cdots, 365$ (en jours)
- Espace d'état discret : $X_t \in \{0, 0.01, 0.02, \cdots\}$ (en euros)

*. Boursorama, 10 sept. 2019

Marche aléatoire 1D †

- Un pas en avant (+1) avec probabilité 1/2, un pas en arrière (-1) avec probabilité 1/2
- X_t : position à la t-ième étape
- 3 exemples de trajectoires aléatoires en partant de 0



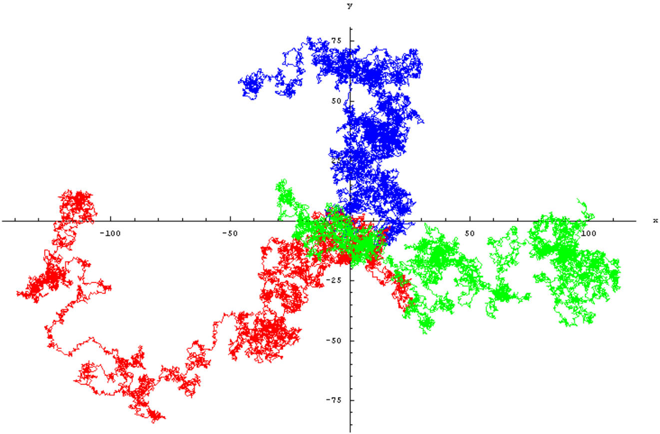
†. Wikipedia, 10 sept. 2019

Quelques questions que nous chercherons à étudier

- Distribution après n étapes : $P(X_t = k) = ?$
- Probabilité de revenir à l'origine ?
  - Probabilité de retour à l'origine =1
  - On dit que la marche est récurrente
- Temps moyen avant de revenir à l'originie ?
  - Infini

Marche aléatoire 2D ‡

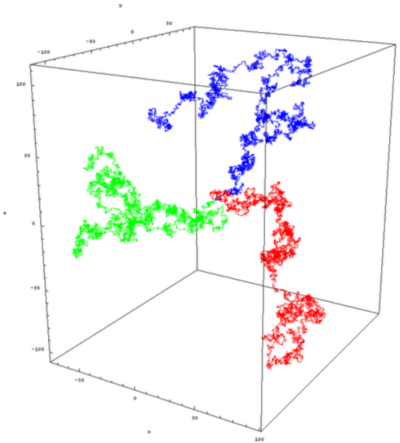
- Avant, arrière, droite, gauche avec probabilité 1/4
- $V_t = (X_t, Y_t)$: position à la t-ième étape



‡. Wikipedia, 10 sept. 2019

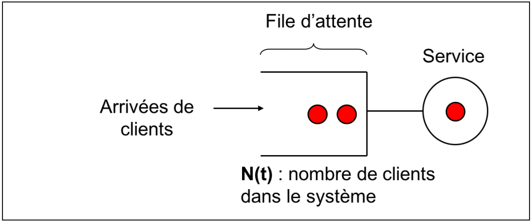
Marche aléatoire 3D §

- avant, arrière, droite, gauche, haut, bas avec probabilité 1/6
- $V_t = (X_t, Y_t, Z_t)$: position à la t-ième étape
- Probabilité de revenir à l'origine < 1 (marche transitoire)



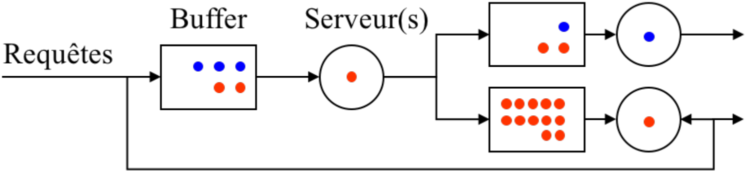
§. Wikipedia, 10 sept. 2019

Files d'attente (ou queues)



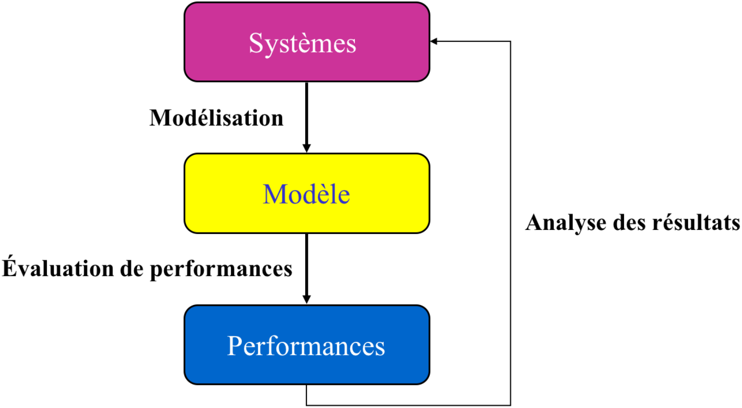
- Applications : serveurs informatiques, caisses dans un supermarché, centres d'appel téléphoniques, systèmes de production, systèmes de soins, ...
- X_t : nombre de clients en attente à l'instant t
- Distribution du temps d'attente ? Temps moyen d'attente ? Taux d'utilisation du serveur ? ...
- Dimensionnement des systèmes : nombre de serveurs ? Type de serveurs ?
- Régulation des systèmes : priorisation des demandes, tarification dynamique, affichage du temps d'attente, ...

Réseau de files d'attente avec plusieurs classes de clients



- X_t^i : nombre de clients en attente à l'instant t à la file d'attente i
- Etat du système à t : (X_t^1, X_t^2, X_t^3)
- Explosion de l'espace d'états quand le nombre de serveurs augmente

Évaluation de performances



- Attention : On obtient les performances du modèle et non celles du système !

Objectifs

- Développer une compréhension intuitive des processus aléatoires
- Maitriser les outils de base d'analyse de ces systèmes
- Modéliser un système réel
- Evaluer ses performances

Programme

- Chaînes de Markov à temps discret ($\pm$ 3 séances)
- Chaînes de Markov à temps continu ($\pm$ 3 séances)
- Théorie des files d'attente ($\pm$ 3 séances)

Evaluation

- Examen terminal de 1h30 (sans document, ni calculatrice)
  - 100 % de la note finale
  - La moitié de l'examen sera constitué d'exercices similaires à ceux proposés en cours ou en TD
- Éventuellement des quizz (question de cours, QCM, ...)
  - Facultatifs
  - Ne peuvent qu'augmenter la note de l'examen terminal
  - Annoncés une semaine à l'avance
  - Présence obligatoire (cf règlement des études pour le décompte des points)

Livre de réference

- Bruno Baynat (2000) : Théorie des files d'attente - Des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit
- Extraits sur l'ENT
- Chapitres à lire au fur et à mesure du cours

1 Introduction

2 Chaînes de Markov à Temps Discret (CMTD)

3 Chaîne de Markov à Temps Continu (CMTC)

Processus stochastique à temps discret

- Processus stochastique à temps discret : suite de variables aléatoires $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$
- Espace d'état E : $X_n \in E$
- Espace d'état fini (ou dénombrable)

Chaîne de Markov à Temps Discret (CMTD)

- CMTD = Processus stochastique à temps discret sans mémoire

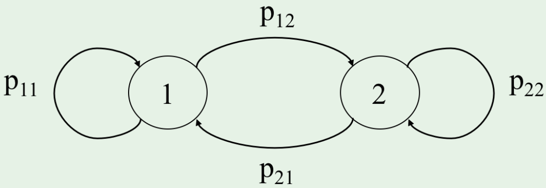
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

- L'état suivant ne dépend que de l'état courant
- Exemple : Marche aléatoire
- $p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) =$ probabilité de transition de l'état i à l'état j à l'instant t
- CMTD homogène : $p_{ij}(n) = p_{ij}$

Graphe d'une CMTD homogène

- Graphe orienté
  - État = sommet
  - Arc orienté de i à j si $p_{ij} > 0$
  - Pondération p_{ij} sur l'arc orienté (i, j)

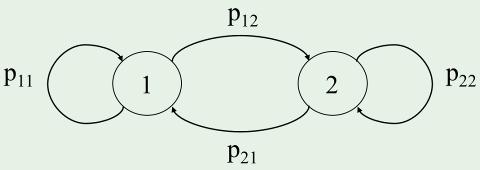
Exemple : CMTD à 2 états



Matrice de transition pour une CMTD fini et homogène

- Matrice de transition : $P = (p_{ij})$

Exemple : CMTD à 2 états



$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

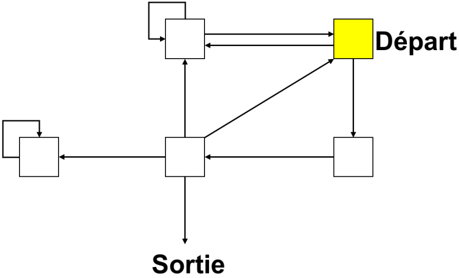
- Une matrice de transition est stochastique : la somme des éléments de chaque ligne vaut 1

$$\sum_j p_{ij} = 1, \forall i$$

Propriétés d'une matrice stochastique

- Le produit de 2 matrices stochastiques est stochastique
- Corollaire : si P stochastique alors P^n stochastique.
- 1 est valeur propre
- Le rayon spectral vaut 1 : les valeurs propres sont inférieures ou égales à 1 en module

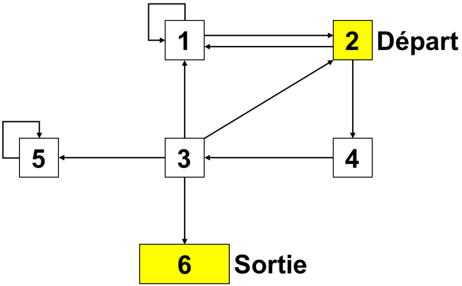
Souris dans un labyrinthe

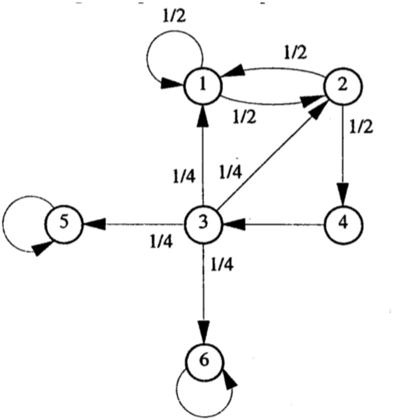


- La souris est amnésique et choisit un des couloirs de façon équiprobable
- On s'intéresse à la succession des pièces visitées (et pas au temps passé dans chaque pièce)
- Modéliser ce système par une CMTD, donner son graphe et sa matrice de transition

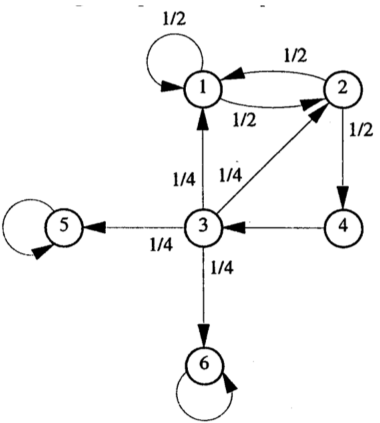
Souris dans un labyrinthe : CMTD et graphe

- X_n : position après le n-ième couloir emprunté
- $X_0 = 2$





Souris dans un labyrhinte : matrice de transition



$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Régime transitoire

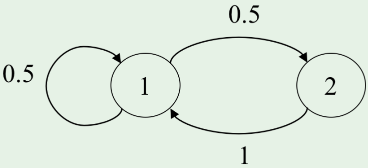
- $\pi_j(n) = P(X_n = j)$: probabilité d'être dans l'état j à l'instant n

$$\pi_j(n+1) = \sum_{i \in E} p_{ij} \pi_i(n)$$

- $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \cdots, \pi_{|E|}(n))$: distribution à l'instant n

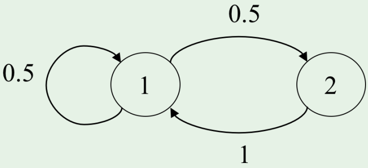
$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$
$$\pi(n) = \pi(0)P^n$$

Exemple : CMTD à 2 états



- Avec $\pi(0) = (1, 0)$, calculer $\pi(1), \pi(2), \pi(3)$.

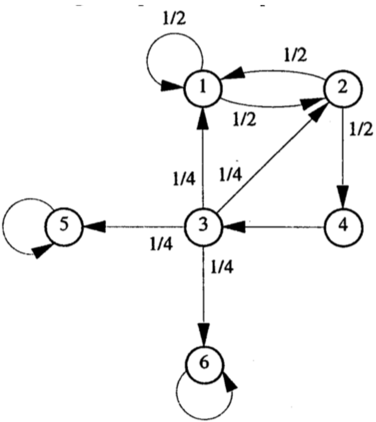
Exemple : CMTD à 2 états



$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= (1,0) \\
\pi(1) &= \pi(0)P = (1/2, 1/2) \\
\pi(2) &= \pi(1)P = (3/4, 1/4) \\
\pi(3) &= \pi(2)P = (5/8, 3/8), \\
\pi(10) &= (0.666015625, 0.333984375) \\
\pi(\infty) &= (2/3, 1/3)
\end{aligned}$$

Souris dans un labyrinthe : régime transitoire



- Supposons que $X_0 = 2$, calculer $\pi(0), \pi(1), \pi(2)$, $\pi(3)$ et $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$.

Souris dans un labyrinthe : régime transitoire (réponse)

$$\pi(0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\pi(1) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\pi(2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$$

$$\pi(3) = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$\pi(\infty) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Probabilité d'aller de i à j en n étapes

- $p_{ij}^{(n)}$: Probabilité, commençant en i, d'être en j après n transitions

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = j | X_t = i)$$

$$P_{ij}^{(n)} = P^n$$

- Equations de Chapman-Kolmogorov

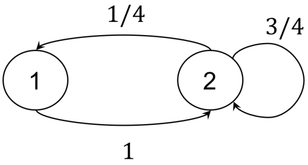
$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

$$P^{n+m} = P^n P^m$$

Travail à la maison

- Lire chapitre 3.1, pages 55 à 62
- Exercice 1 (téléphone arabe)
- Exercice 4 (matrices stochastiques)

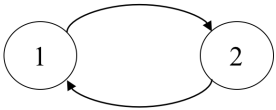
Convergence vers une distribution limite : un exemple



$$\begin{cases} \pi_{n+1}(1) = \dfrac{1}{4}\pi_n(2) \\ \pi_{n+1}(2) = \pi_n(1) + \dfrac{3}{4}\pi_n(2) \end{cases}$$

n	$\pi_n(1)$	$\pi_n(2)$
0	1	0
1	0	1
2	0.25	0.75
3	0.1875	0.8125
4	0.203125	0.796875
...	...	...
13	0.2	0.8
14	0.2	0.8

Exemple de non convergence



$$\begin{cases} \pi_{n+1}(1) = \pi_n(2) \\ \pi_{n+1}(2) = \pi_n(1) \end{cases}$$

n	$\pi_n(1)$	$\pi_n(2)$
0	1	0
1	0	1
2	1	0
3	0	1
4	1	0
...	...	...

- En revanche, convergence au sens de Césaro

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \pi_k(1)}_{\text{Proportion de temps passé en 1 au cours des } n \text{ premières étapes}} \quad \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.5$$

Si convergence, alors ...

- Supposons que $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \cdots)$ converge vers $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$
- Alors

$$\begin{aligned} \pi(n+1) &= \pi(n)P \\ &\Downarrow n \to \infty \\ \pi &= \pi P \end{aligned}$$

- Questions
  - Quels sont les critères de convergence ?
  - La distribution limite dépend-elle de l'état initial ?

Distribution stationnaire

- Une distribution de probabilité π est dite stationnaire si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{array} \right.$$

- "Stationnaire" signifie "qui ne change pas avec le temps"
- Si π est une distribution stationnaire, alors

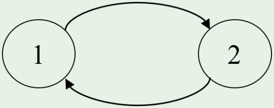
$$\pi(n+1) = \pi(n)P = \pi(n)$$

Lien entre distribution stationnaire et distribution limite

Propriété

Une distribution limite est une distribution stationnaire.

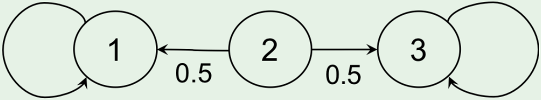
La réciproque est fausse



$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \pi_1 = \pi_2 = 0.5$$

La distribution stationnaire est-elle toujours unique ?

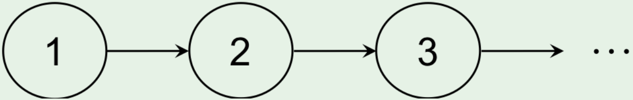
La réponse est non



$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Existe-il toujours une distribution stationnaire ?

La réponse est non

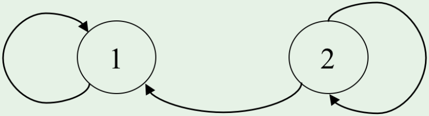


$$\left\{\begin{array}{l}\pi = \pi P\\ \sum_i \pi_i = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\pi_i = 0, \forall i\\ \sum_i \pi_i = 1\end{array}\right.$$

Classification des états

- État absorbant : $p_{jj} = 1$

Exemple

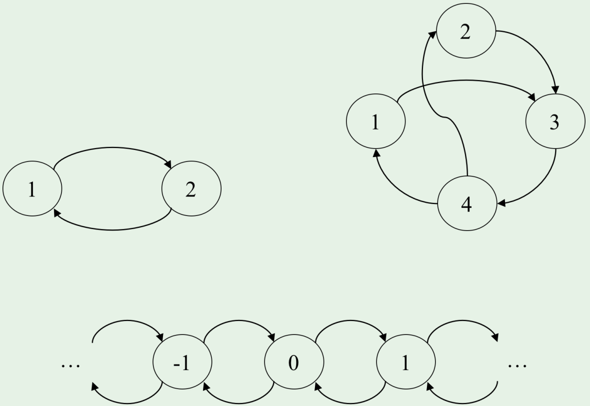


- État périodique ou apériodique
- État récurrent ou transitoire

État périodique versus état apériodique

- État périodique j : il existe $k > 1$ tel qu'on ne puisse retourner en j qu'après un nombre d'étapes multiple de k
- État apériodique : un état n'étant pas périodique

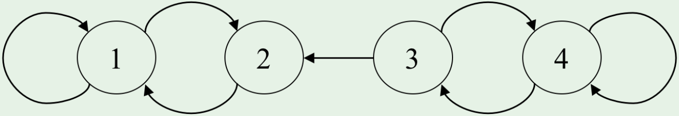
Exemple : CMTD périodiques



État récurrent versus état transitoire

- $f_{jj}^{(n)}$: probabilité que le premier retour en j, en partant de j, ait lieu en n étapes
- $f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$: probabilité, en partant de j, de revenir un jour en j
- Etat récurrent : $f_{jj} = 1$
- Etat transitoire : $f_{jj} < 1$

Exemple : CMTD fini



- 1 et 2 sont récurrents
- 3 et 4 sont transitoires

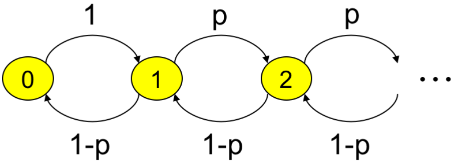
Récurrent nul versus récurrent non nul

- M_j : temps moyen entre 2 visites de j
- État récurrent non nul : $M_j < +\infty$
- État récurrent nul : $M_j = +\infty$

Proposition

Soit E un espace d'état fini. Alors tout état récurrent est récurrent non nul.

Un exemple de CMTD infini



- $p > 1/2$: tous les états sont transitoires
- $p = 1/2$: tous les états sont récurrents nuls
- $0 < p < 1/2$: tous les états sont récurrents non nuls

CMTD irréductible versus irréductible

- Une CMTD est irréductible si son graphe est fortement connexe

$$\forall i, j \in E, \exists m > 1, p_{ij}^{(m)} > 0$$

- CMTD réductible = CMTD qui n'est pas irréductible

Nature des états d'une CMTD irréductible

Théorème (Admis)

Tous les états d'une CMTD irréductible sont de même nature :

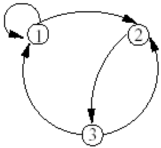
- *Tous transitoires, ou tous récurrents non nuls, ou tous récurrents nuls*
- *Tous périodiques ou tous apériodiques*

Corollaire (Nombre d'états fini)

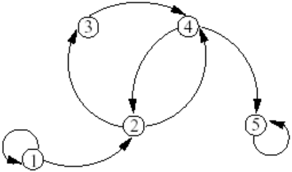
Tous les états d'une CMTD irréductible finie sont récurrents non nuls.

Exercice 5 : classification des états

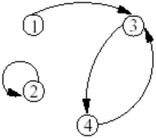
a)



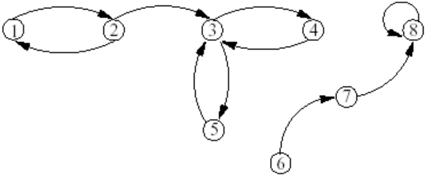
b)



c)



d)



Distribution limite pour une CMTD irréductible et apériodique

Théorème (admis)

Pour une CMTD irréductible et apériodique, la distribution limite $\pi = (\pi_1, \pi_1, \cdots)$ existe et est indépendante de la distribution initiale $\pi(0)$:

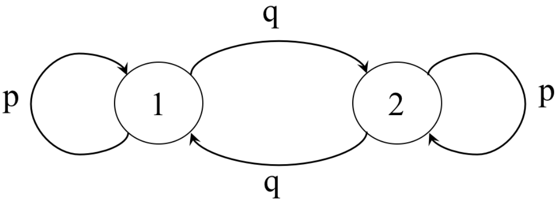
- *Si les états sont tous transitoires ou tous récurrents nuls, alors*

$$\forall j \in E, \pi_j = 0$$

- *Si les états sont tous récurrents non nuls, alors les π_j satisfont*

$$(S) : \begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \forall j \in E \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1 \end{cases}$$

Exemple : Téléphone arabe



- La CMTD est irréductible et apériodique
- Tous les états sont récurrents non nuls
- La distribution limite existe et satisfait

$$\begin{cases} \pi_1 = p\pi_1 + q\pi_2 \\ \pi_2 = p\pi_2 + q\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = 0.5$$

Travail à la maison

- Lire chapitre 3.1, pages 62 à 68
- Exercice 5 (classification des états)
- Exercice 6 (c'est ton destin)
- Exercice 3 (marche aléatoire symétrique)

Interprétation de la distribution limite

Théorème (Césaro)

Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers L, alors la moyenne de Césaro

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

converge également vers L.

La réciproque est fausse

- $u_n = (-1)^n$ ne converge pas
- Mais c_n converge vers 0

Interprétation de la distribution limite

- Supposons que $\pi_i(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi_i$
- Alors, d'après le théorème de Césaro

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi_i(k)}_{\substack{\text{Proportion de temps passé en i} \\ \text{au cours des } n \text{ premières étapes}}} \qquad \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi_i$$

- Interprétation de π_i : proportion de temps passé en i sur un horizon infini

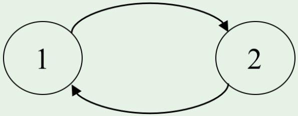
CMTD irréductible et périodique (finie)

- $\pi(n)$ n'a pas de limite

$$(S) : \begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \forall j \in E \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1 \end{cases}$$

- (S) admet une solution unique où π_j représente la proportion de temps passé dans l'état j sur un horizon infini

Exemple



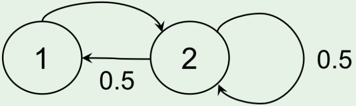
$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \implies \pi_1 = \pi_2 = 0.5$$

Temps moyen entre deux visites d'un état

- M_j : temps moyen entre deux visites d'un état j

$$M_j = \frac{1}{\pi_j}$$

Exemple



Calculer M_1 et M_2 par deux méthodes (avec ou sans le résultat ci-dessus).

Résolution de (S) pour une CMTD à m états (facultatif)

- Soit $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$

$$(S) \begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi \mathbf{1}^T = 1 \end{cases}$$

- A : matrice $m \times m$ avec toutes les entrées à 1 ($a_{ij} = 1$)

$$\pi A = \mathbf{1}$$

- Il suit avec I la matrice identité $m \times m$

$$I\pi + \pi A = \pi P + \mathbf{1}$$

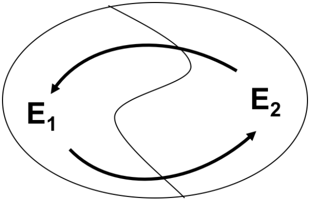
- Propriété : $I - P + A$ est inversible pour une CMTD apériodique et irréductible

$$\pi = \mathbf{1}(I - P + A)^{-1}$$

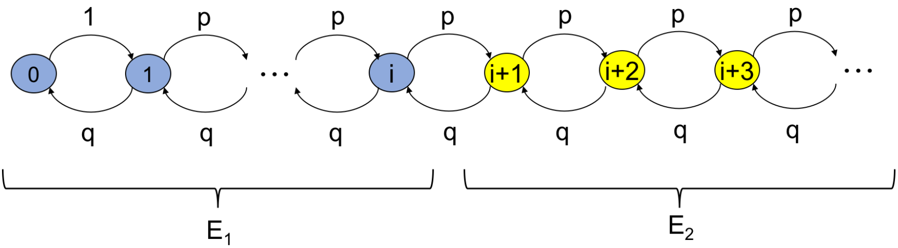
Conservation des flux

- $\pi_i p_{ij}$: Nombre de transitions de i vers j par unité de temps
- Partition des états : $E = E_1 \cup E_2$

$$\overbrace{\sum_{i \in E_1} \sum_{j \in E_2} \pi_i p_{ij}}^{\text{Flux de } E_1 \text{ vers } E_2} = \overbrace{\sum_{i \in E_2} \sum_{j \in E_1} \pi_i p_{ij}}^{\text{Flux de } E_2 \text{ vers } E_1}$$



Exemple



- Flux de E_1 vers E_2 = Flux de E_2 vers E_1 $\quad\Rightarrow\quad$ $p\pi_i = q\pi_{i+1}$
- Soit $\rho = \dfrac{p}{q}$. Alors $\pi_i = \rho^i \pi_0$.
- Si $\rho < 1$, alors $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$

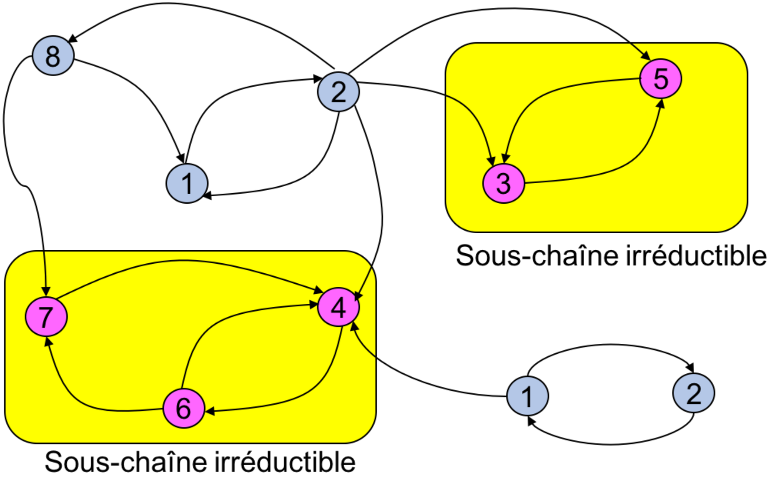
$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i$$

Travail à la maison

- Finir lecture du chapitre 3.1 (pages 55 à 73)
- Exercices 7 et 2

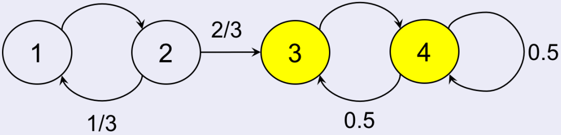
Partition d'une CMTD

- Une CMTD peut être partitionnée en sous-chaînes irréductibles, plus un ensemble d'états transitoires
  - E_T : Ensemble d'états transitoires
  - E_i : Ensemble d'états de la i-ème sous-chaîne irréductible
- Sous-chaîne irréductible = Sous-chaîne absorbante



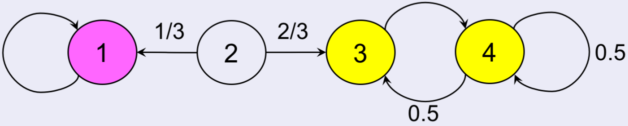
- Peut-on encore appliquer le théorème valable pour une chaîne irréductible ?
- Probabilité d'absorption par une sous-chaîne ?
- Temps moyen avant absorption par une sous-chaîne ?

Uni-chaîne : Une seule sous-chaîne irréductible



- Les résultats pour une CMTD irréductible s'appliquent encore.

Multi-chaîne : Plusieurs sous-chaîne irréductibles



- La distribution limite dépend de l'état initial
- La solution de (S) n'est pas unique

Canonic form for the transition matrix (facultatif)

- P_T : transitions among transient states E_T
- P_i : transitions between states E_i of irreducible sub-chain i
- R_i : transitions from transient states E_T to states E_i of irreducible sub-chain i

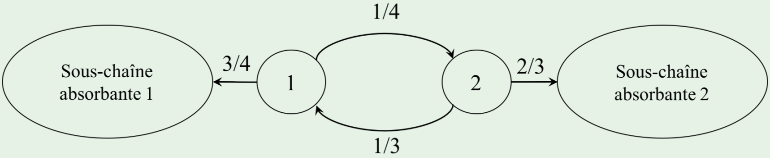
$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & P_k & 0 \\ R_1 & \dots & R_k & P_T \end{pmatrix}$$

Temps moyen avant absorption par une sous-chaîne

- e_i : Temps moyen avant absorption par une sous-chaîne irréductible, en partant de l'état transitoire i

$$e_i = 1 + \sum_{j \in E_T} p_{ij} e_j$$

Exemple



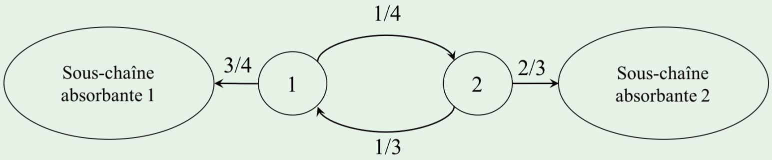
$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 1 + 1/4 e_2 \\ e_2 = 1 + 1/3 e_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = 15/11 \\ e_2 = 16/11 \end{array} \right.$$

Probabilité d'absorption par une sous-chaîne

- a_{ij} : probabilité, en partant de l'état transitoire i, d'être absorbé par la sous-chaîne j

$$a_{ij} = \sum_{k \in E_j} p_{ik} + \sum_{k \in E_T} p_{ik} a_{kj}$$

Exemple



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = 3/4 + 1/4 a_{21} \\ a_{21} = 1/3 a_{11} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{12} = 9/11 \\ a_{21} = 3/11 \end{array} \right.$$

Mean time spent in a transition state (facultatif)

- s_{ij} : mean time spent in state j, starting in $i \in \mathcal{S}_T$

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{S}_T} p_{ik} s_{kj}$$

  with $\delta_{ij} = 1$ when $i = j$ and 0 otherwise
- $S = (s_{ij})$

$$S = I + P_T S$$

$$S = (I - P_T)^{-1}$$

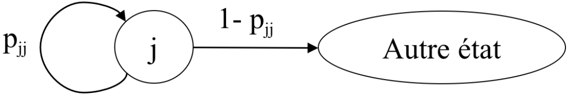
- In an irreducible Markov chain, $s_{ij} = \infty$

Exercice 8 : roulette

Roulette française versus roulette américaine

Temps de séjour dans un état (voir exercice 2)

- T_j : nombres d'étapes passées dans l'état j avant d'en sortir



- T_j distribué suivant une loi géométrique de paramètre $(1 - p_{jj})$

$$P(T_j = k) = (1 - p_{jj})p_{jj}^{k-1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \cdots$$

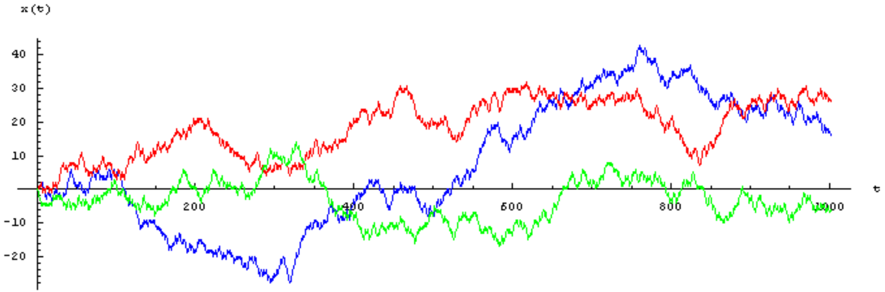
Propriété sans mémoire (ou propriété de Markov)

- Une variable aléatoire T est dite sans mémoire si

$$\forall t, x, \quad P(T > t + x | T > t) = P(T > x)$$

- La loi géométrique est sans mémoire (voir exercice 10)
- Le temps passé dans un état est donc sans mémoire

Chaîne de Markov ergodique



- Hypothèse ergodique : les performances stationnaires sont égales à la performance moyenne de n'importe quelle trajectoire $(X_0, X_1, X_2, \cdots)$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(X_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i\in E} f(i)\pi_i$$

- Propriété : Une CMTD irréductible (ou uni-chaîne) est ergodique
- Implication : on peut simuler le comportement d'un système ergodique avec une seule trajectoire

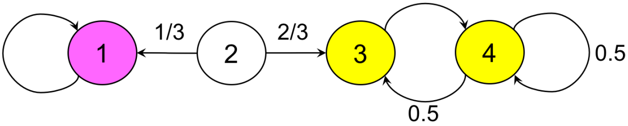
Pourcentage de temps passé dans un état

- Prenons $f(x) = 1$ si $x = j$, 0 sinon
- Alors

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(X_n = j)}_{\substack{\text{Proportion de temps passé en } j \\ \text{sur la trajectoire } X_1, X_2, \cdots, X_N}} \quad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \pi_j$$

- Conclusion : pour une CMTD ergodique, le % de temps passé dans l'état j pour une trajectoire vaut π_j, quelle que soit la trajectoire

Un exemple de chaîne non ergodique



- Si l'on part de l'état 2, il faut plusieurs simulations (en repartant de l'état 2) pour étudier les performances (par exemple estimer la probabilité d'absorption par 1)

Travail à la maison

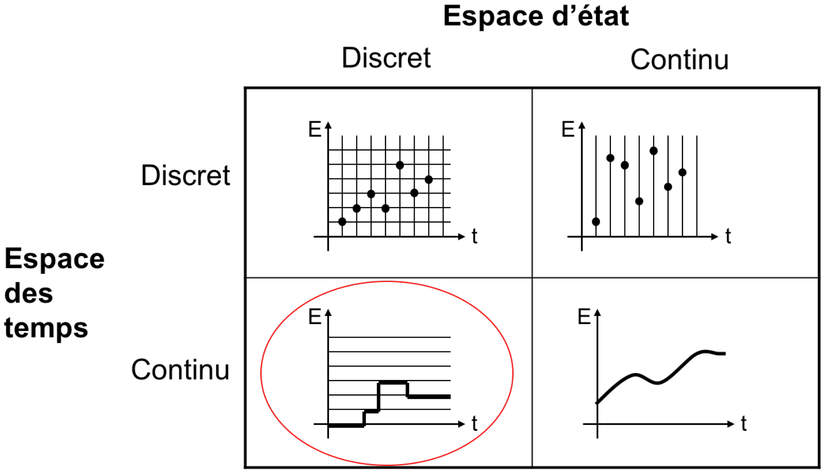
- Exercice 8
- Réviser chapitre 3.1 (pages 55 à 73)
- QCM sur les CMTD. Il vous faut savoir (entre autres) :
  - Classer les états d'une CMTD
  - Calculer la distribution en régime transitoire $\pi(n)$
  - Calculer la distribution limite (et conditions de convergence)
  - Interpréter la distribution limite / stationnaire
  - Calculer le temps moyen avant absorption par une sous-chaîne irréductible
  - Calculer la probabilité d'absorption par une sous-chaîne irréductible

1 Introduction

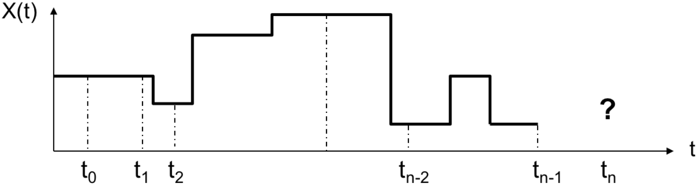
2 Chaînes de Markov à Temps Discret (CMTD)

3 Chaîne de Markov à Temps Continu (CMTC)

Classification des processus aléatoires



Chaîne de Markov à Temps Continu (CMTC)



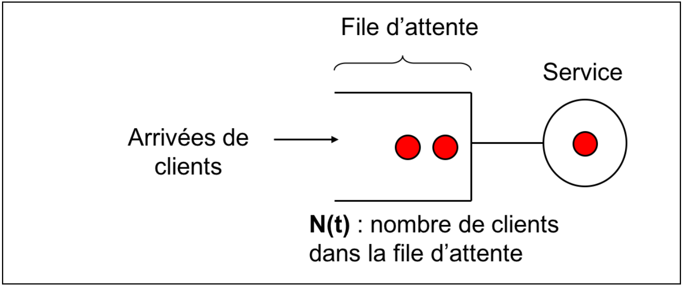
Definition

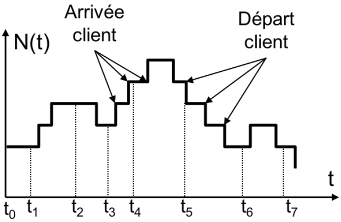
Le processus $(X(t))_{t>0}$ est une CMTC si, $\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_n$,

$$\begin{aligned} & P[X(t_n) = i_n \,|\, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, \cdots, X(t_0) = i_0] \\ = & P[X(t_n) = i_n \,|\, X(t_{n-1}) = i_{n-1}] \end{aligned}$$

- Une information détaillée du passé ne fournit pas plus d'info sur l'évolution future que la connaissance de la dernière observation

Exemple : file d'attente (supermarché, serveur, ...)





CMTC homogène

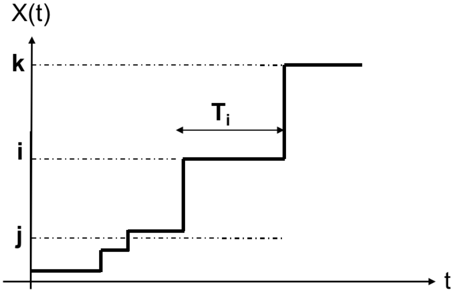
Definition

Une CMTC est dite homogène si les probabilités de transition ne dépendent que de la durée entre 2 observations

$$P[X(t+s) = j \mid X(s) = i] = P[X(s) = j) \mid X(0) = i]$$

- Par la suite, uniquement des CMTC homogènes

Temps de séjour dans un état



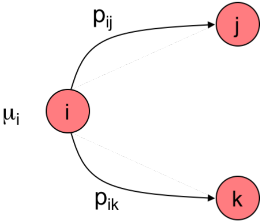
Propriété

Le temps de séjour T_i dans l'état i d'une CMTC homogène suit une loi exponentielle de taux μ_i.

$$T_i \sim \exp(\mu_i)$$

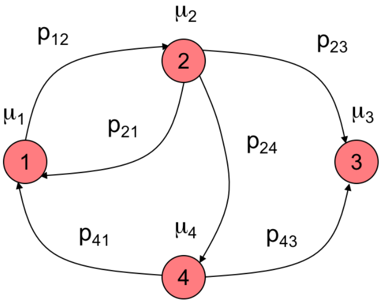
1ère caractérisation d'une CMTC homogène

- $T_i \sim \exp(\mu_i)$: temps de séjour dans l'état i
- p_{ij} : probabilité de transition de i à j, lorsqu'on quitte i



1ère caractérisation d'une CMTC homogène

- Une CMTC homogène est entièrement définie par les $\{\mu_i\}$ et les $\{p_{ij}\}$



Lois exponentielles

- Soit $T \sim \exp(\lambda)$.
- Densité

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Interprétation de la densité

$$f(t)dt \simeq P(t < T \leq t + dt)$$

- Fonction de répartition

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lois exponentielles (suite)

- Espérance, écart-type et coefficient de variation

$$E(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$cv(T) = \frac{\sigma(T)}{E(T)} = 1$$

- Le coefficient de variation est sans dimension et permet de comparer la variabilité de variables aléatoires dans des unités différentes

Lois exponentielles (suite)

Propriété

Soit deux v.a. indépendantes $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ *et* $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$. *Alors :*

- $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $P(X_1 < X_2) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

- Généralisation à n lois exponentielles indépendantes :

$$\min(X_1, \cdots, X_n) \sim \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

$$P(X_1 < \min(X_2, \cdots, X_n)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

Taux de panne

Definition

Le taux de panne d'une v.a. de densité f et de fonction de répartition F est la fonction

$$\tau(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

- Interprétation en fiabilité : soit T la durée de vie d'un appareil.

$$\begin{aligned} \tau(t)dt \simeq\ & \text{proba qu'une panne se produise entre } t \text{ et } t + dt \\ & \text{sachant que l'appareil fonctionne encore à } t \end{aligned}$$

- Interprétation pour les CMTC : soit T le temps de séjour dans un état.

$$\begin{aligned} \tau(t)dt \simeq\ & \text{proba de quitter l'état entre } t \text{ et } t + dt \\ & \text{sachant que l'on est encore dans cet état à } t \end{aligned}$$

Taux de panne d'une loi exponentielle

Propriété

Pour une loi exponentielle de taux λ, le taux de panne est constant :

$$\tau(t) = \lambda$$

Propriété

La loi exponentielle est sans mémoire :

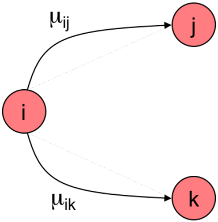
$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t)$$

Travail à la maison

- Lire le chapitre 3.2 jusqu'à la page 75
- Exercices 9, 10, 11

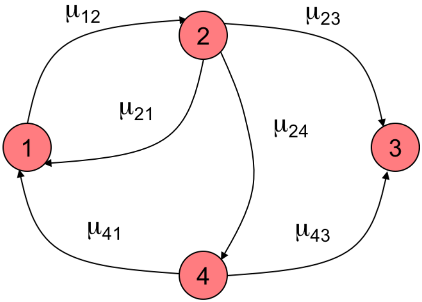
2ème caractérisation d'une CMTC homogène (la plus couramment utilisée)

- $T_{ij} \sim \exp(\mu_{ij})$: temps au bout duquel on passe de l'état i à l'état j



- Si $T_{ij} < T_{ik}$ pour tout $k \neq j$, aller dans l'état j

2ème caractérisation d'une CMTC homogène

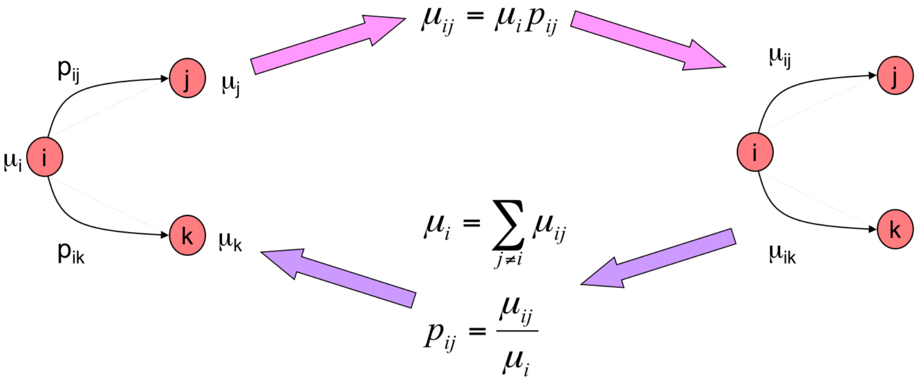


- μ_{ij} : taux de transition de i vers j

$$\mu_{ij} = \frac{1}{E(T_{ij})}$$

- Unité des taux de transition : $[s^{-1}]$

Equivalence entre les 2 caractérisations

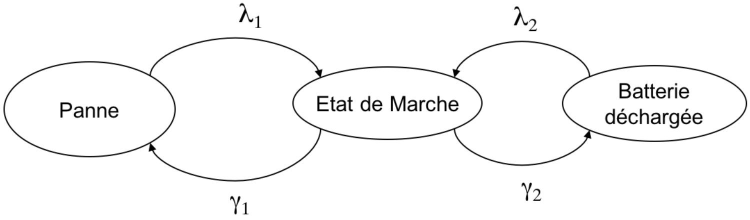


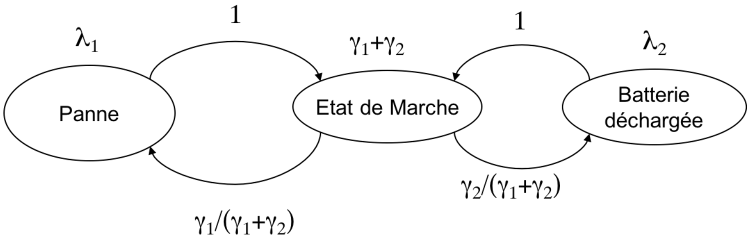
Exemple : téléphone portable

- Panne après un temps exponentiel de taux γ_1
- Réparation après un temps exponentiel de taux λ_1
- Déchargement de batterie après un temps exponentiel de taux γ_2
- Chargement après un temps exponentiel de taux λ_2

- Donner les 2 représentations

Exemple : téléphone portable





Analyse en régime transitoire

- $t \in \mathbb{R}^+$
- $\pi_i(t)$: probabilité d'être dans l'état i à l'instant t

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \cdots)$$

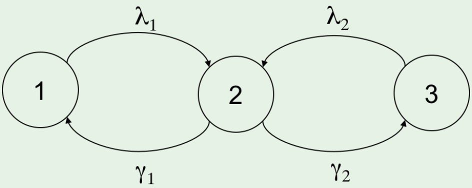
Générateur infinitésimal

- Soit une CMTC de taux de transition (μ_{ij})
- La matrice $Q = (q_{ij})$ avec

$$\begin{cases} q_{ij} & = \mu_{ij} \text{ si } i \neq j \\ q_{ii} & = -\mu_i = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij} \end{cases}$$

est appelé le générateur infinitésimal de la CMTC

Exemple : Téléphone portable



$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ \gamma_1 & -(\gamma_1 + \gamma_2) & \gamma_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Equations en régime transitoire

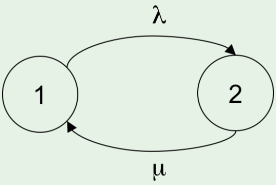
- Cf poly pour la démonstration :

$$\forall j \in E, \quad \frac{d\pi_j(t)}{dt} = \sum_i q_{ij}\pi_i(t)$$

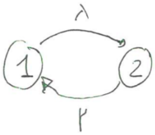
- Sous forme matricielle

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

Exemple



Exprimer $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$ en fonction de λ, μ et t



$$\pi_1(0) = 0$$
$$\pi_2(0) = 1$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_1'(t) = -\lambda \pi_1(t) + \mu \pi_2(t) \\ \pi_2'(t) = \lambda \pi_1(t) - \mu \pi_2(t) \\ \pi_1(t) + \pi_2(t) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1'(t) = -\lambda \pi_1(t) + \mu(1 - \pi_2(t)) \Leftrightarrow \pi_1'(t) + (\lambda+\mu)\pi_1(t) = \mu$$

Solution sans 2nd membre = $\cancel{\pi_1(t)} = A e^{-(\lambda+\mu)t}$

Sol. part. avec ______ = $\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

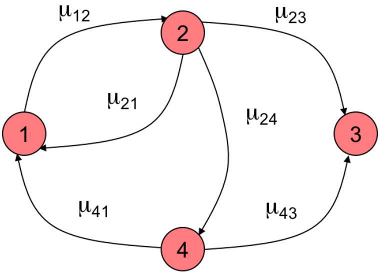
$$\pi_1(t) = A e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$
$$+\ \pi_1(0) = 0$$

D'où
$$\begin{cases} \pi_1(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \\[2ex] \pi_2(t) = \dfrac{\lambda + \mu e^{-(\mu+\lambda)t}}{\lambda+\mu} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

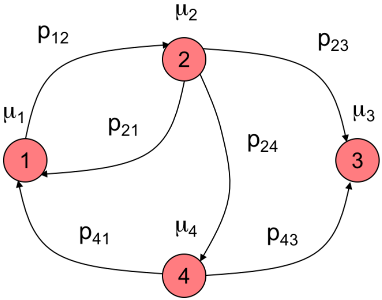
Travail à la maison

- Polycopié : lire jusqu'à la page 81
- Exercices 12 et 13

2ème caractérisation d'une CMTC (rappel)

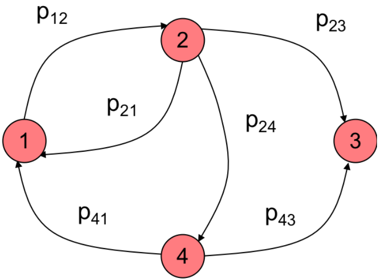


1ère caractérisation d'une CMTC (rappel)



CMTD incluse associée à une CMTC

- CMTD incluse : CMTD de matrice de transition (p_{ij})



Classification des états d'une CMTC

- La nature d'un état est défini de la même manière que pour une CMTD
  - $f_{jj} < 1$: état transitoire
  - $f_{jj} = 1$, $M_j < \infty$: état récurrent non nul
  - $f_{jj} = 1$, $M_j = \infty$: état récurrent nul
- Pas de notion de périodicité dans une CMTC
- Une CMTC est dite irréductible si sa CMTD incluse est irréductible

Proposition

- *Un état i d'une CMTC est transitoire (respectivement récurrent) ssi l'état i de la CMTD incluse est transitoire (respectivement récurrent)*
- *Les états d'une CMTC irréductible sont de même nature : transitoires / récurrents nuls / récurrents non nuls*
- *Les états d'une CMTC finie et irréductible sont récurrents non nuls*

Distribution limite

- $\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \cdots)$
- Equations en régime transitoire pour une CMTC finie

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

- Supposons que $\pi(t)$ converge vers π quand t tend vers l'infini, alors

$$\pi Q = 0$$

Distribution limite pour une CMTC irréductible

Théorème (admis)

Pour une CMTC irréductible , la distribution limite $\pi = (\pi_1, \pi_1, \cdots)$ *existe et est indépendante de la distribution initiale* $\pi(0)$ *:*

- *Si les états sont tous transitoires ou tous récurrents nuls, alors*

$$\forall j \in E, \pi_j = 0$$

- *Si les états sont tous récurrents non nuls, alors les* π_j *satisfont*

$$(S) : \begin{cases} \sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0, \forall j \in E \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1 \end{cases}$$

- Pour une CMTC finie

$$\sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0 \Leftrightarrow \pi Q = 0$$

Flux sortant d'un état = flux entrant dans cet état

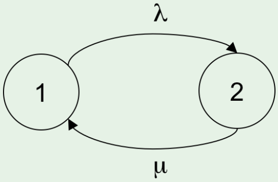
- L'équation $\sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0$ peut s'écrire aussi

$$\overbrace{\pi_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij}}^{\text{Flux sortant de } i} \quad = \quad \overbrace{\sum_{j \neq i} \mu_{ji} \pi_j}^{\text{Flux entrant en } i}$$

- $\mu_{ji}\pi_j$: nombre de transitions par unité de temps de j vers i

Exemple : Marche / Panne

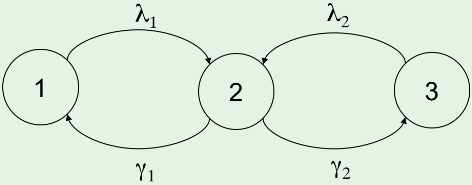
- Un appareil tombe en panne après un temps $\sim \exp(\lambda)$
- En cas de panne, l'appareil est réparé au bout d'un temps $\sim \exp(\mu)$
- Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne ?



$$(S) : \begin{cases} \lambda\pi_1 = \mu\pi_2 & \text{(flux sortant de 1 = flux entrant en 1)} \\ \mu\pi_2 = \lambda\pi_1 & \text{(flux sortant de 2 = flux entrant en 2)} \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \pi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Exemple : Téléphone portable



Déterminer π_1, π_2 et π_3.
Il faut résoudre le système linéaire suivant :

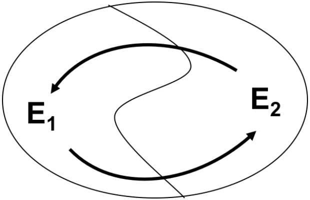
$$(S) : \begin{cases} \lambda_1\pi_1 = \gamma_1\pi_2 & \text{(flux sortant de } 1 = \text{flux entrant en } 1) \\ (\gamma_1+\gamma_2)\pi_2 = \lambda\pi_1 + \lambda_2\pi_3 & \text{(flux sortant de } 2 = \text{flux entrant en } 2) \\ \lambda_2\pi_3 = \gamma_2\pi_2 & \text{(flux sortant de } 3 = \text{flux entrant en } 3) \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 & \end{cases}$$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \pi_1 =?, \pi_2 =?, \pi_3 =?$

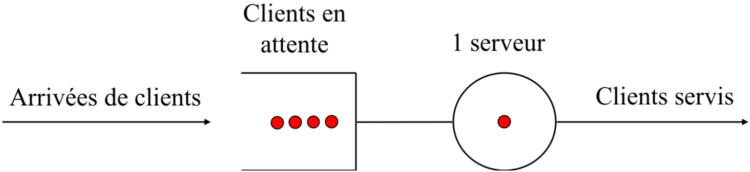
Conservation des flux

- Partition des états : $E = E_1 \cup E_2$

$$\overbrace{\sum_{i \in E_1} \sum_{j \in E_2} \pi_i \mu_{ij}}^{\text{Flux de } E_1 \text{ vers } E_2} = \overbrace{\sum_{i \in E_2} \sum_{j \in E_1} \pi_i \mu_{ij}}^{\text{Flux de } E_2 \text{ vers } E_1}$$



Exemple : file d'attente $M/M/1$



- T_s : temps pour servir un client

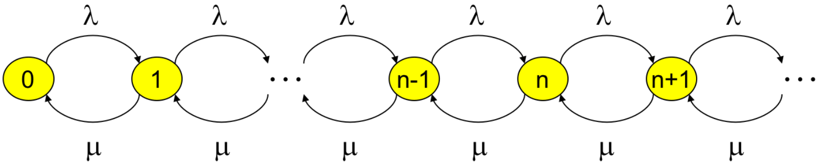
$$T_s \sim exp(\mu)$$

- T_a : temps entre 2 arrivées de clients

$$T_a \sim exp(\lambda)$$

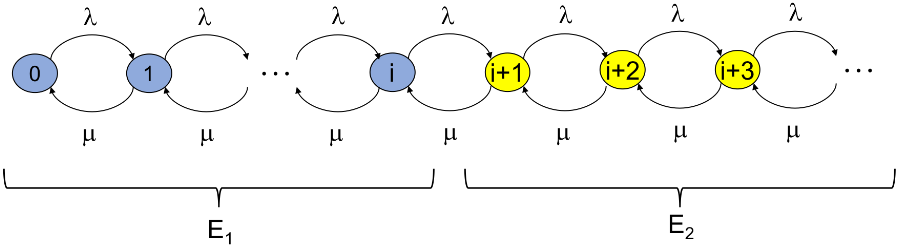
- $N(t)$: nombre de clients dans le système (en attente + en service)

$N(t)$ est une CMTC



- Cette CMTC est irréductible
  - $\mu < \lambda$: états tous transitoires et les $\pi_i = 0$
  - $\mu = \lambda$: états tous récurrents nuls et les $\pi_i = 0$
  - $\mu > \lambda$: états tous récurrents non nuls et les et π_i sont solution de (S)

Distribution limite pour $\mu > \lambda$



- Flux de E_1 vers E_2 = Flux de E_2 vers E_1 $\quad\Rightarrow\quad \lambda\pi_i = \mu\pi_{i+1}$
- Soit $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ le taux d'utilisation de la file d'attente. Alors

$$\pi_i = \rho^i \pi_0$$

- Si $\rho < 1$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i = 1$ donne $\pi_0 = 1 - \rho$ puis

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i$$

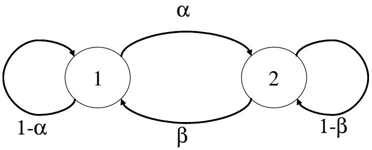
Travail à la maison

- Finir chapitre 3.2 sur les CMTC
- Exercices 14 et 15

Récapitulatif

	CMTD	CMTC
Transitions	p_{ij}	μ_{ij}
Régime transitoire	$\pi(n+1) = \pi(n)P$	$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi Q$
Régime permanent	$\pi = \pi P$	$0 = \pi Q$
Flux de i vers j	$\pi_i p_{ij}$	$\pi_i \mu_{ij}$
Temps passé dans un état	géométrique	exponentiel

Convergence rate : An example (facultatif)



$$\pi(0) = (1,0), P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

- Give π : $\pi_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$
- Give $\pi_1(n)$: $\pi_1(n) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$
- Give $|\pi_1(n) - \pi_1|$: $|\pi_1(n) - \pi_1| = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}|1-\alpha-\beta|^n$
- Study the rate of convergence : converge geometrically but very slowly when $\alpha \simeq \beta \simeq 1$ (quasi-periodic) or if $\alpha \simeq \beta \simeq 0$ (quasi not connected).
- Compute eigenvalues of P : 1 and $1-\alpha-\beta$ ($\lambda_1 = 1$ and $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(P) = 2 - \alpha - \beta$).

Upper bound on the convergence rate (facultatif)

- Eingenvalues of P : $\lambda_1 = 1 \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{\mathcal{S}}|$
- For an aperiodic and irreducible Markov chain

$$|\lambda_2| < 1$$

  - The convergence to the stationary distribution is geometric in the second eigenvalue. There exists $C > 0$ such that

$$|\pi_j(n) - \pi_j| \leq C|\lambda_2|^n$$

- Previous result is trivial when P is diagonalisable : $P^k = AD^kA^{-1}$

Convergence rate : Birth death process (facultatif)

$p = 1 - q$, $|\mathcal{S}|$ states

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & \dots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_j = 2\sqrt{pq} \cos\left(\frac{(j-1)\pi}{|\mathcal{S}|}\right)$$

λ_2 is maximal for $p = q = 0.5$ and goes to 1 when $|\mathcal{S}|$ goes to infinity.
Will be an issue for queuing systems close to instability.