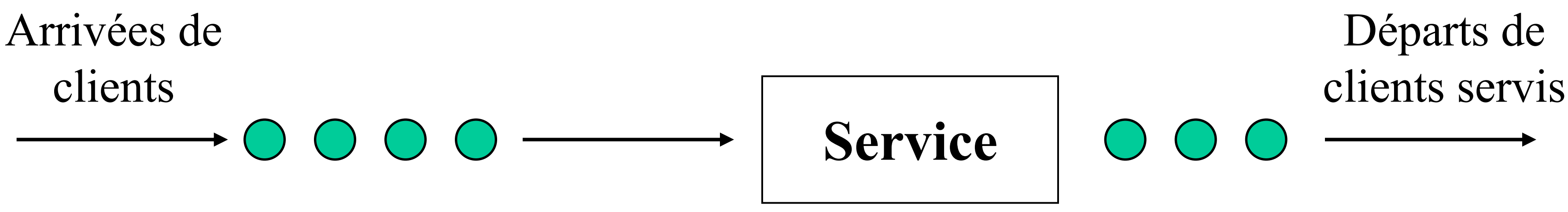
Files d’attente simples

File d'attente



Origine de la théorie des files d’attente

- Modèles permettant de prévoir le comportement de systèmes répondant à des demandes aléatoires
- Premiers problèmes sur la congestion du trafic téléphonique (Erlang, « the theory of probabilities and telephone conversations », 1909)

Exemples d’application

- Réseaux informatiques et de télécommunication
- Systèmes de production
- Centres d’appel téléphonique
- Hôpitaux
- Banque
- Restauration rapide
- …

Caractéristiques des files d’attente simples

- Processus d’arrivée des clients
- Temps de service
- Nombre de serveurs
- Discipline de service
- Capacité de la file d’attente
- Nombre de clients potentiels

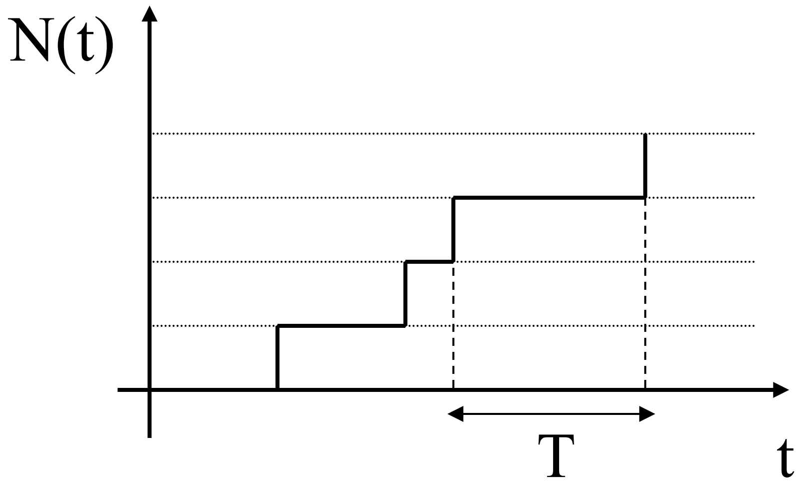
Notation de Kendall

- T/X/C/K/P/Z avec
  - T : distribution du temps inter-arrivées
  - X : la distribution du temps de service
  - C : nombre de serveurs
  - K : capacité de la file
  - P : taille de la population
  - Z : discipline de service

Processus d'arrivée des clients
T/X/C/K/P/Z

- T décrit la distribution du temps inter-arrivées
  - M : markovien (i.e. exponentiel)
  - G : loi générale
  - GI : lois générales indépendantes
  - D : loi déterministe
  - E_k : loi de Erlang-k
  - H_k : loi hyperexponentielle-k
  - $T^{[X]}$: arrivées groupées
  - …

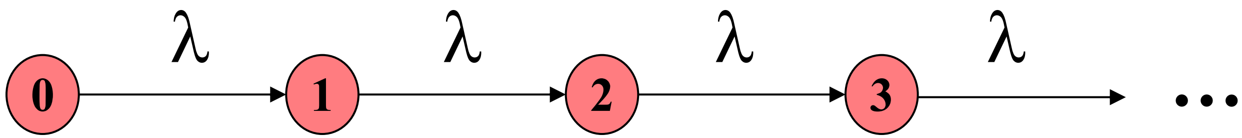
Processus de Poisson



- Un **processus de Poisson de paramètre λ** est un processus stochastique N(t) tel que
  - N(0) = 0
  - N(t) est incrémenté de + 1 après un temps T distribué suivant une loi exponentielle de paramètre λ
- On dira que des arrivées sont poissoniennes si le temps inter-arrivées est exponentiel

Propriétés des processus de Poisson

- Un processus de Poisson est une CMTC réductible



- N(t) est distribué suivant une loi de Poisson de paramètre λt

$$P[N(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

Propriétés des processus de Poisson (2)

- **Superposition**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Poisson } \lambda_1 \\ \\ \text{Poisson } \lambda_2\end{array}\right\} \longrightarrow \text{Poisson } \lambda_1 + \lambda_2$$

- **Décomposition**

$$\text{Poisson } \lambda \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{p_1} \text{Poisson } \lambda p_1 \\ \\ \xrightarrow{p_2} \text{Poisson } \lambda p_2\end{array}\right.$$

Propriétés des processus de Poisson (3)

- Probabilité pour qu'un client arrive pendant dt ~ λdt

$$P\left[N(t+dt)=k+1 \middle| N(t)=k\right]=\lambda dt+o(dt)$$

- Probabilité pour que 0 client arrive pendant dt ~ 1-λdt

$$P\left[N(t+dt)=k \middle| N(t)=k\right]=1-\lambda dt+o(dt)$$

- Probabilité pour que plus d'un client arrive pendant dt ~ o(dt)

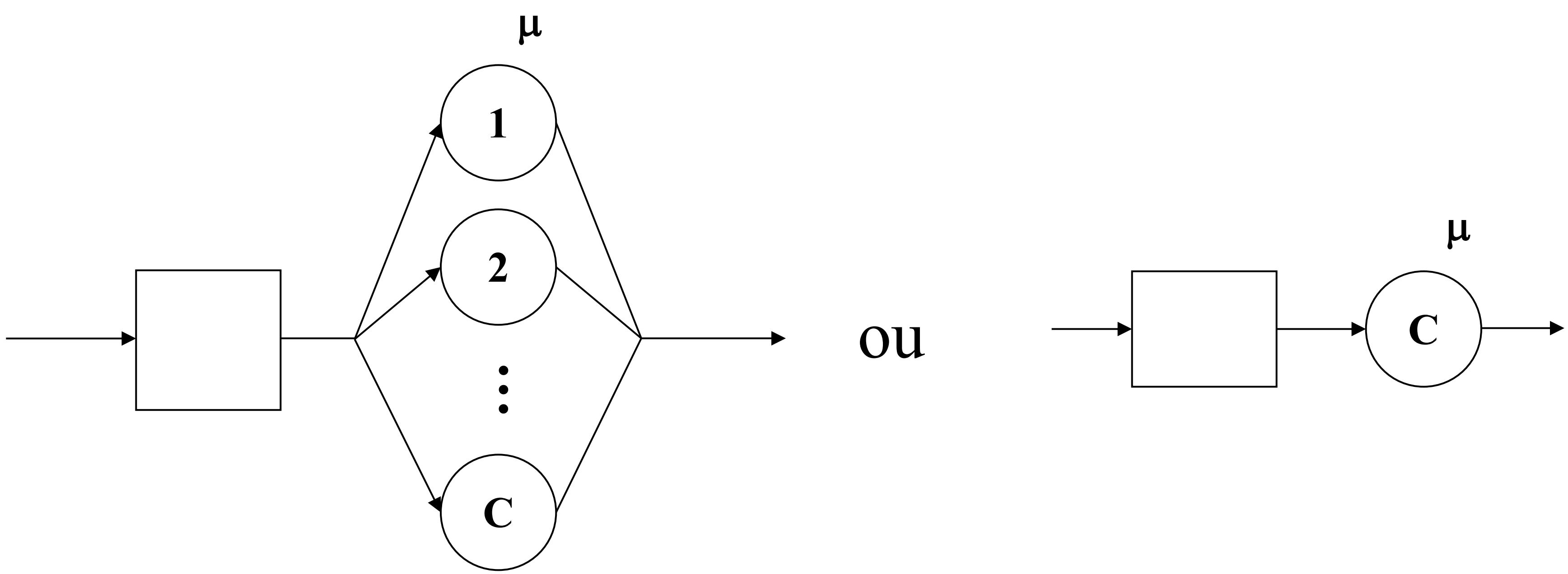
$$P\left[N(t+dt)=k+j \middle| N(t)=k\right]=o(dt),\quad j\geq 2$$

Temps de service
T/**X**/C/K/P/Z

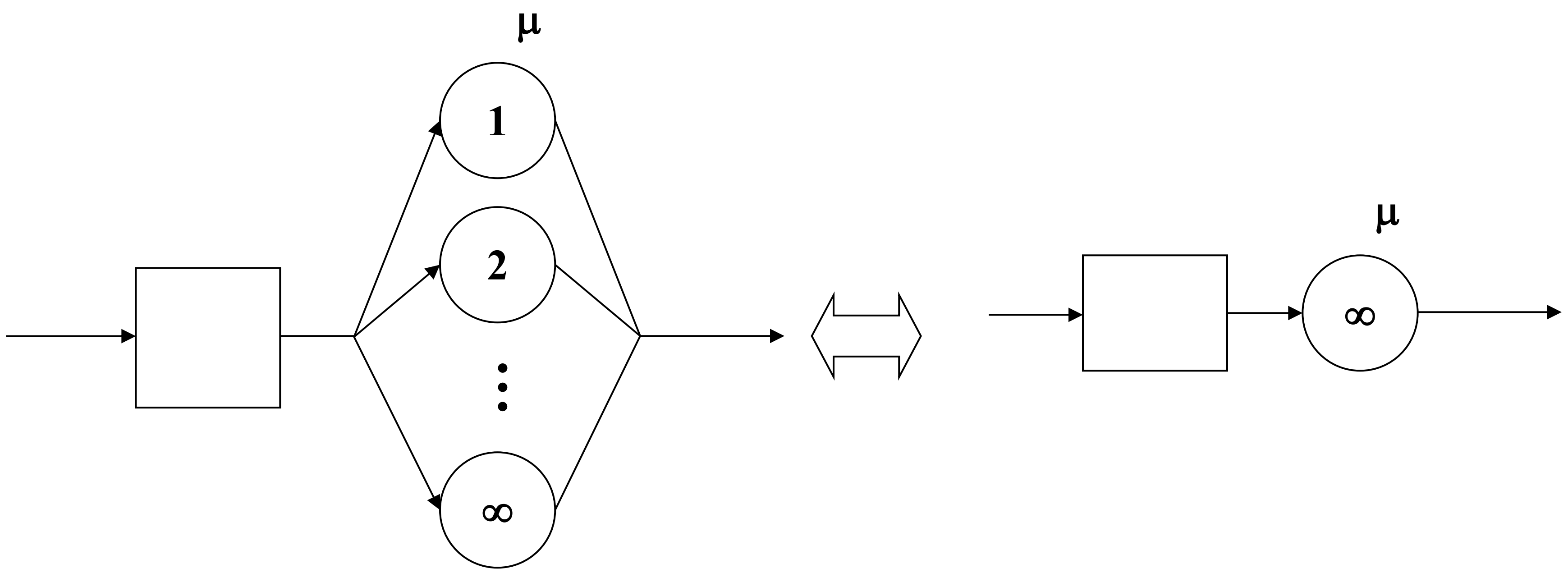
- X décrit la distribution du temps de service :
  - M : markovien (i.e. exponentiel)
  - G : loi générale
  - GI : lois générales indépendantes
  - D : loi déterministe
  - E_k : loi de Erlang-k
  - H_{k} : loi hyperexponentielle-k
  - …

Nombre de serveurs

T/X/**C**/K/P/Z

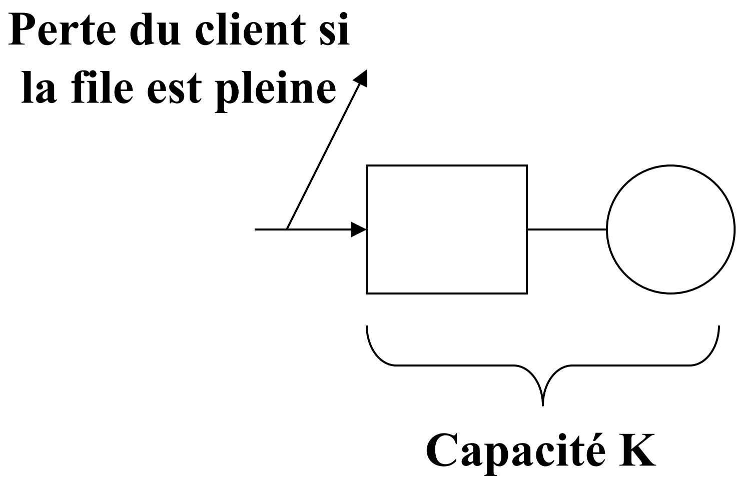


Nombre de serveurs infini



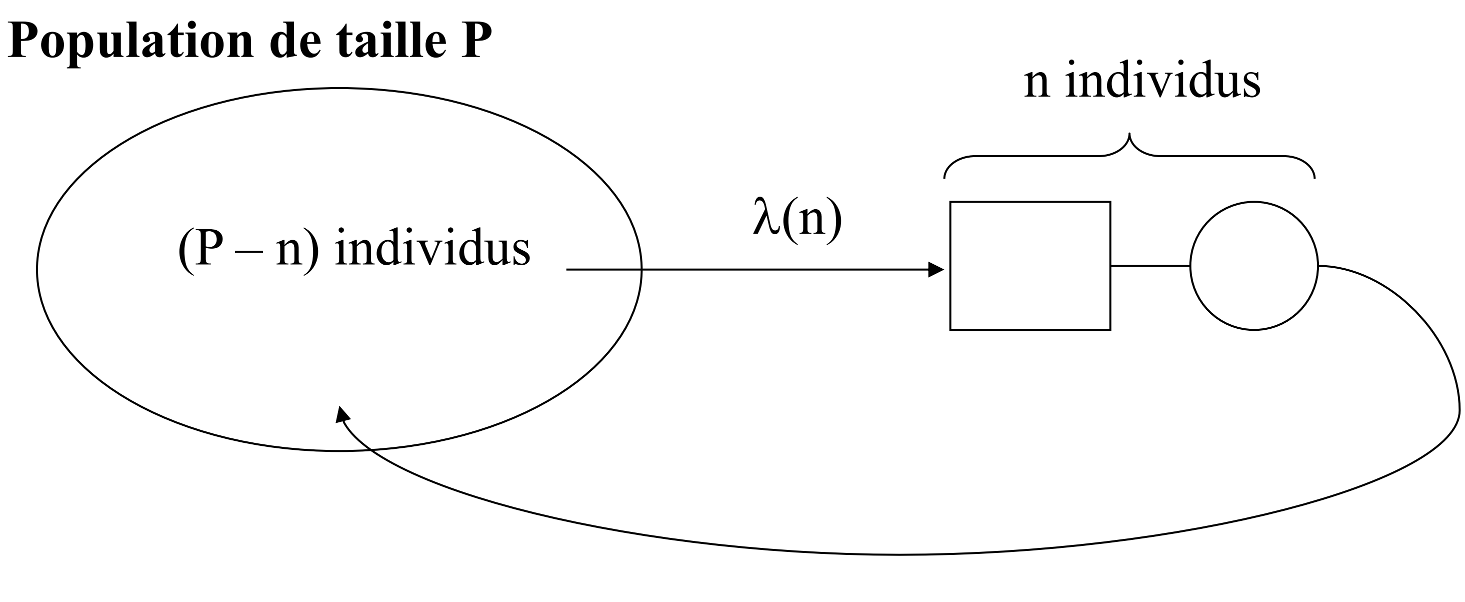
Pas d'attente

Capacité de la file
T/X/C/**K**/P/Z



Taille de la population
T/X/C/K/**P**/Z

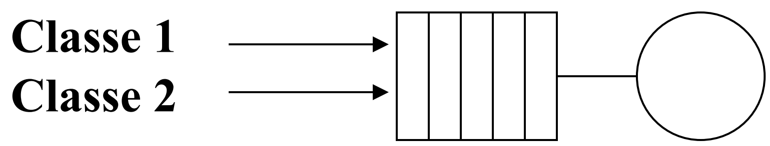
- En général, on suppose que $P = \infty$
- Pour une population finie, le taux d'arrivée des clients dépend du nombre de clients dans le système



Discipline de la file
T/X/C/K/P/**Z**

- Z peut prendre les valeurs suivantes:
  - FCFS : First Come First Served
  - LCFS : Last Come First Served
  - FIFO : First In First Out
  - RANDOM : aléatoire
  - HL (Hold On Line)
  - PR (Preemption)
  - PS (Processor Sharing)
  - GD (General Disciplin)

Notion de classe de clients



- Une file d’attente peut être parcourue par différentes classes de clients
- Caractéristiques d’une classe
  - Processus d’arrivée
  - Temps de service
  - Coûts
  - Priorité

Notation abrégée

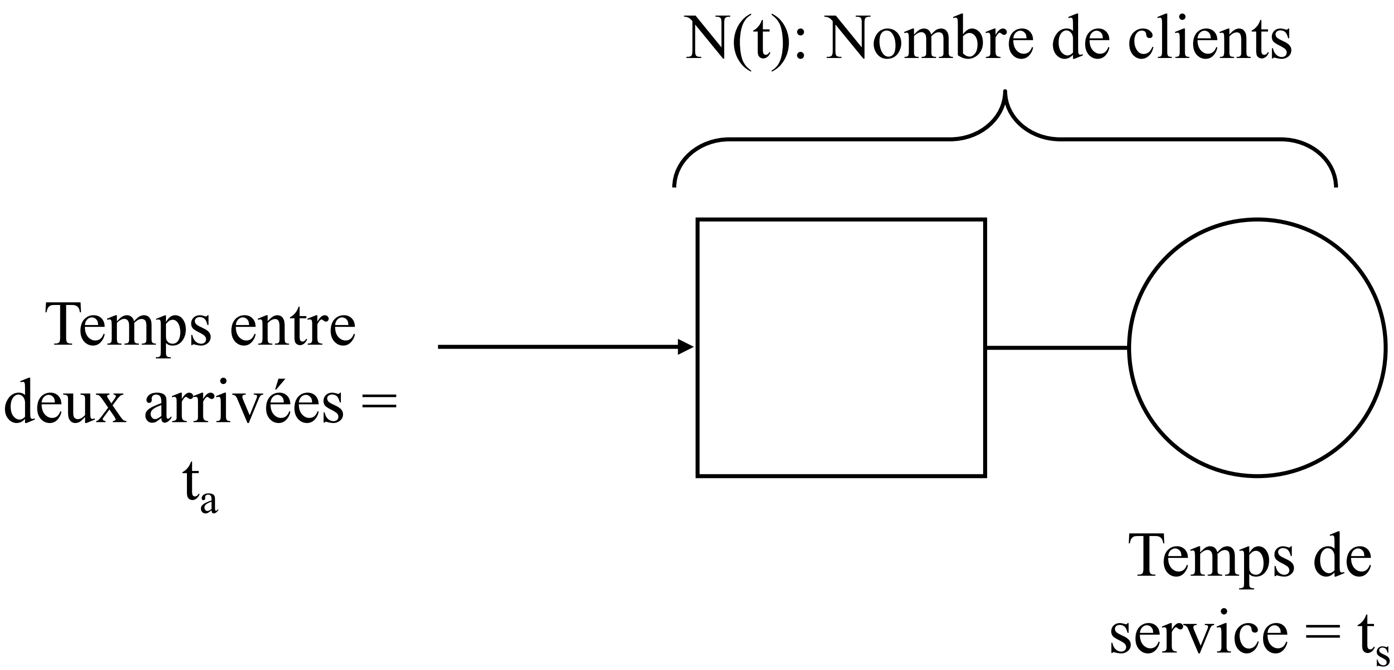
- $T/X/C = T/X/C/\infty/\infty/FCFS$
  - La capacité de la file est infinie
  - La taille de la population est infinie
  - La discipline est FCFS

Paramètres de performance d’une file d’attente

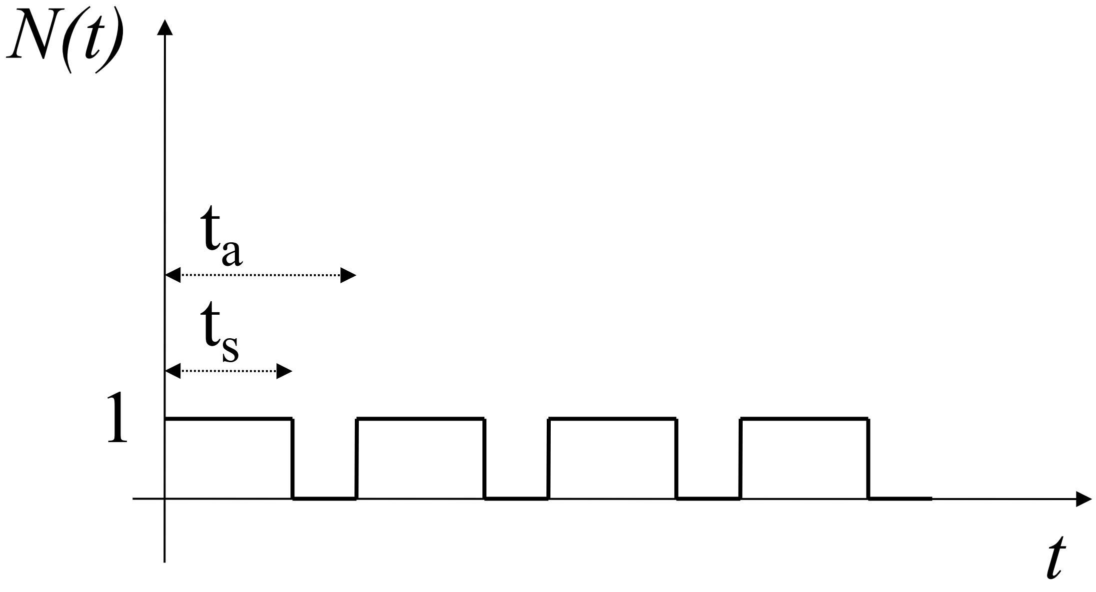
- Paramètres de performance fréquemment utilisés :
  - Débit moyen X
  - Nombre de clients moyens Q
  - Taux d’utilisation U du serveur
  - Temps de séjour moyen R
- Paramètres calculés (en général) en régime permanent

La file D/D/1

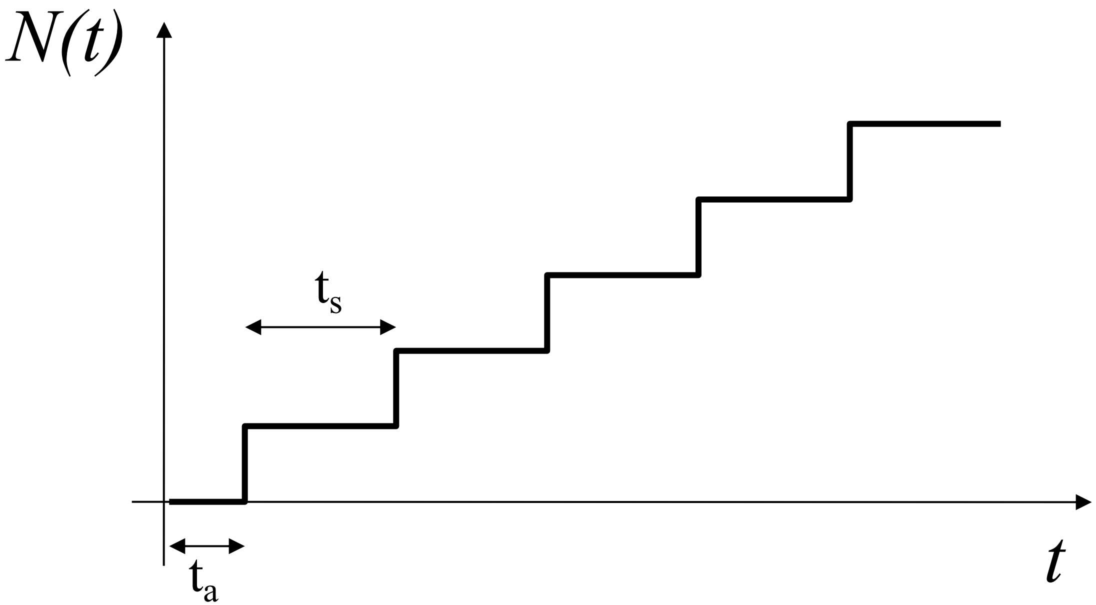
- Entièrement déterministe



Stabilité si $t_a \geq t_s \Leftrightarrow \rho = t_a / t_s \leq 1$



Instabilité si $t_a < t_s$ ($\Leftrightarrow \rho > 1$)



Ici $t_s = t_a/2$

- Nombre moyen de clients dans la file $Q = \infty$

Paramètres de performance d'une file D/D/1 stable

- Débit moyen de la file en sortie

$$X = \frac{1}{t_a}$$

- Taux d'utilisation du serveur

$$U = \frac{t_s}{t_a}$$

- Nombre moyen de clients dans la file

$$Q = \frac{t_s}{t_a}$$

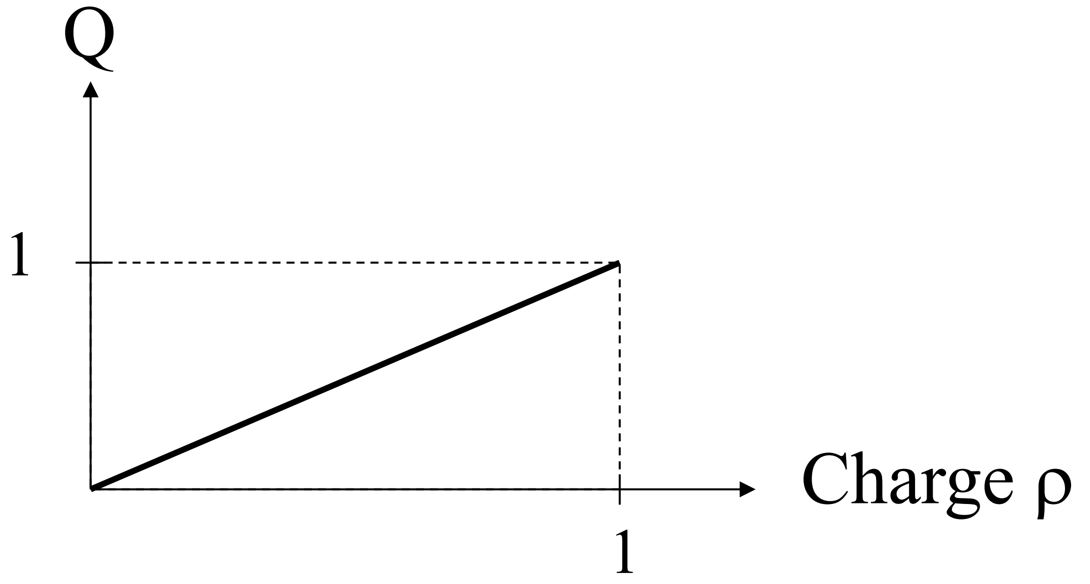
- Temps de séjour moyen

(temps d'attente + temps de service)

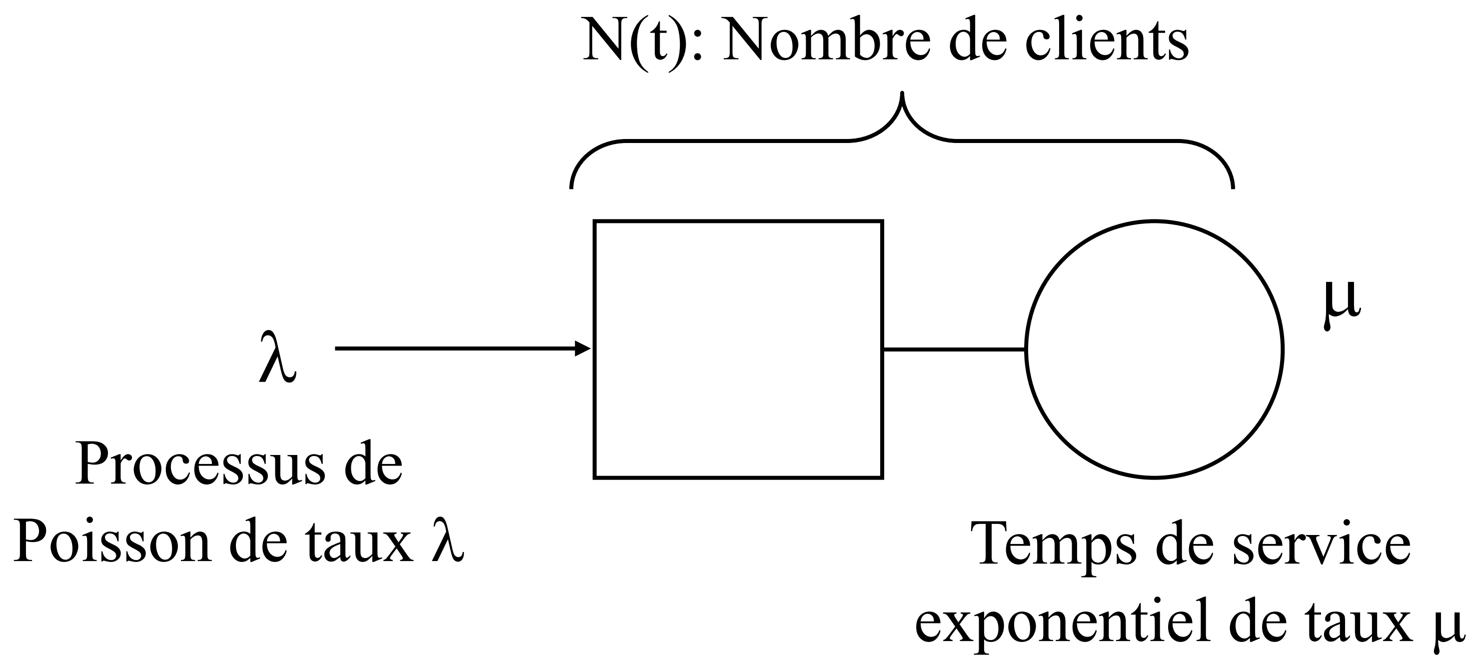
$$R = t_s$$

- Temps d'attente moyen

Effet de la charge sur le nombre moyen de clients



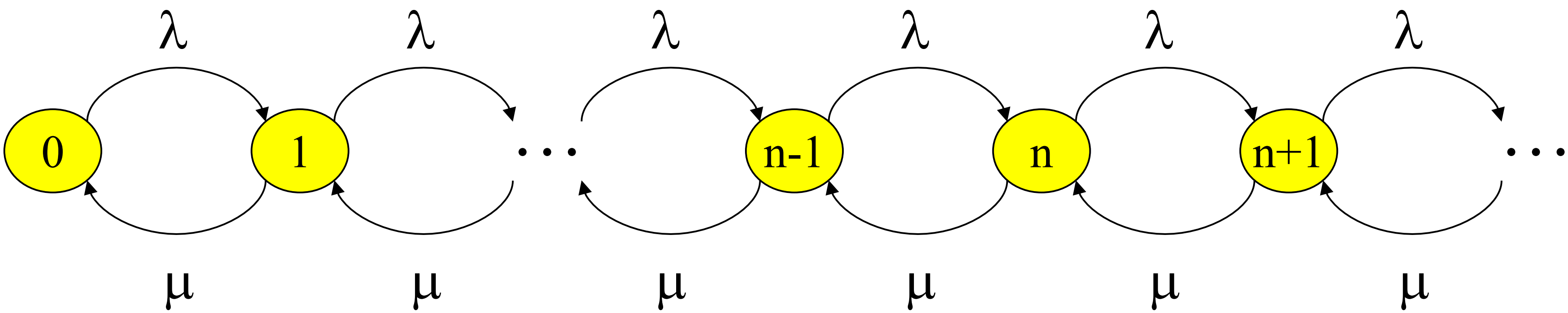
La file M/M/1



- N(t) = nombre de clients en attente

  + nombre de clients en train d'être servis

Chaîne de Markov représentant le nombre de clients dans une file M/M/1



- Les probabilités stationnaires existent car la CMTC est irréductible
- Notons $p(n) = \lim_{t \to +\infty} P[N(t) = n]\ ,\ \ n \geq 0$

Probabilités stationnaires

- $\rho = \lambda/\mu$: **taux d'utilisation** de la file d'attente

$$\begin{cases} p(n) = (1-\rho)\rho^n \quad si \quad \rho < 1 \\ p(n) = 0 \quad si \quad \rho \geq 1 \end{cases}$$

- La file est **stable** si $\rho < 1$
- La file est **instable** si $\rho \geq 1$

Paramètres de performance d'une file M/M/1

- Tous les paramètres de performance sont calculés en régime stationnaire dans le cas où la file est stable ($\rho = \lambda/\mu < 1$)

- Débit moyen de la file en sortie $$X = \lambda$$

- Taux d'utilisation du serveur $$U = \rho$$

- Nombre moyen de clients dans la file $$Q = \frac{\rho}{1-\rho} = \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- Temps de séjour moyen

(temps d'attente + temps de service)

$$R = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

Débit de la file M/M/1

- Le service s'effectue avec un taux μ dans chaque état où le système contient au moins un client

$$X = P[\,file\ non\ vide\,] = \mu \sum_{n=1}^{+\infty} p(n) = \mu(1 - p(0)) = \lambda$$

- On peut noter que le débit moyen en sortie X est égal au débit moyen en entrée λ
- De manière générale, on dira qu'**une file d'attente simple est stable si et seulement si son débit moyen en sortie est égal à son débit moyen en entrée**

Taux d'utilisation du serveur U d'une file M/M/1

- Le taux d'utilisation correspond à la probabilité que le serveur de la file soit occupé, soit la probabilité qu'il y ait au moins un client dans le système « file + serveur »

$$U = 1 - p(0) = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

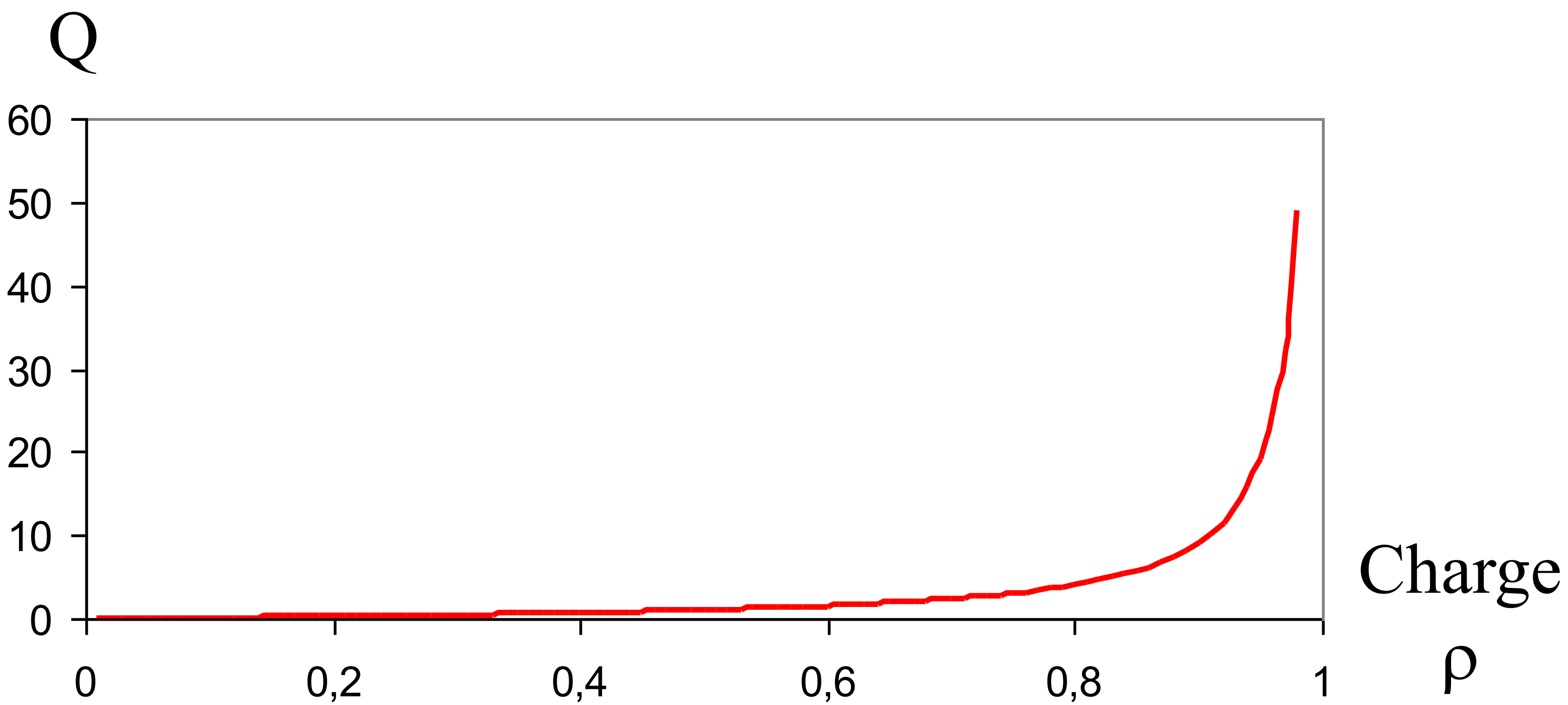
- La charge du serveur tend vers 100 % quand $\lambda \rightarrow \mu$

Le nombre moyen de clients Q d'une file M/M/1

$$Q = \sum_{n=1}^{+\infty} np(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

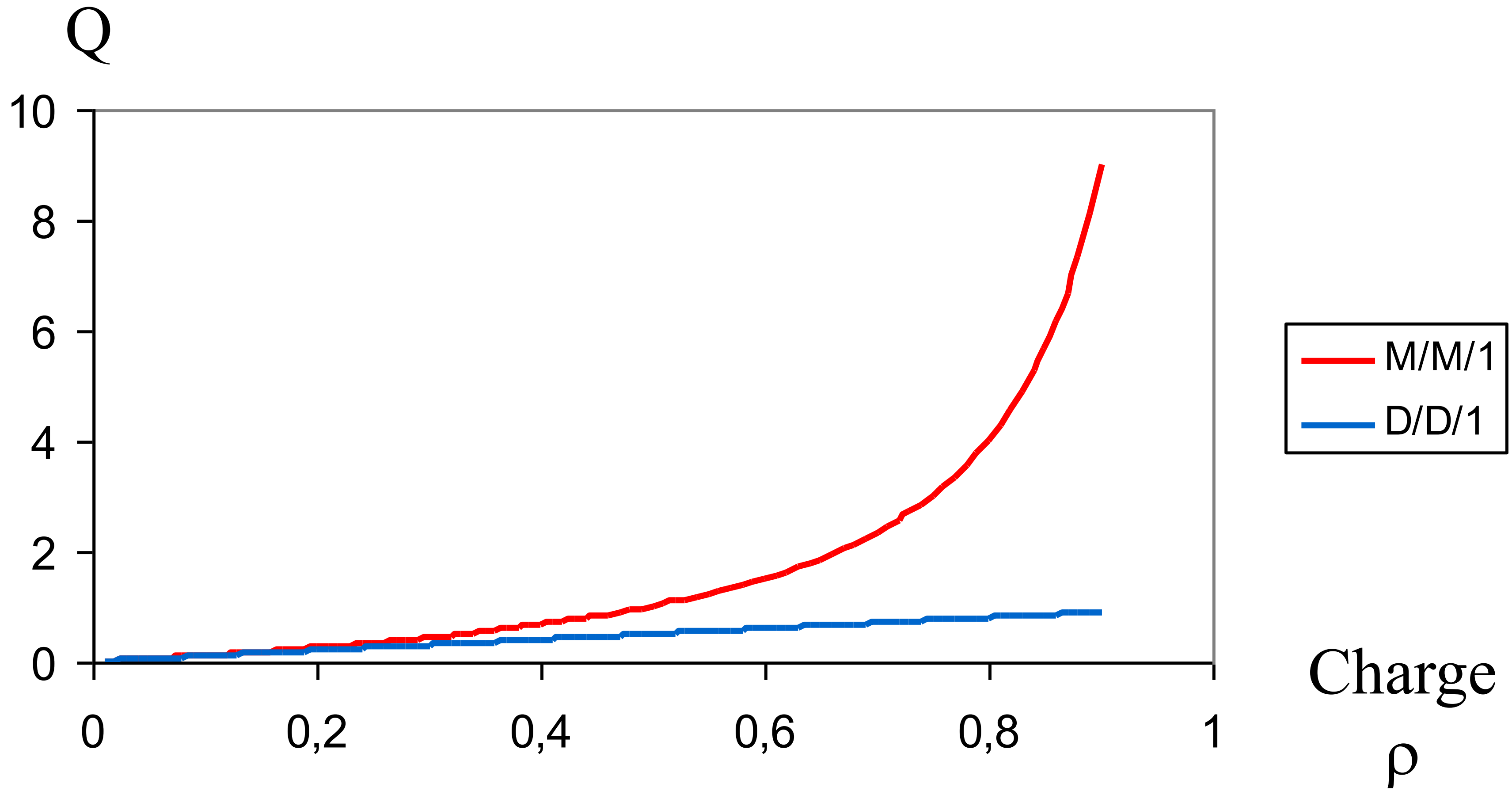
- Le nombre moyen de clients dans la file tend vers l'infini quand $\lambda \to \mu$

Nombre moyen de clients dans la file



Phénomène de congestion

Comparaison avec la file D/D/1



Le temps moyen de séjour R dans une file M/M/1

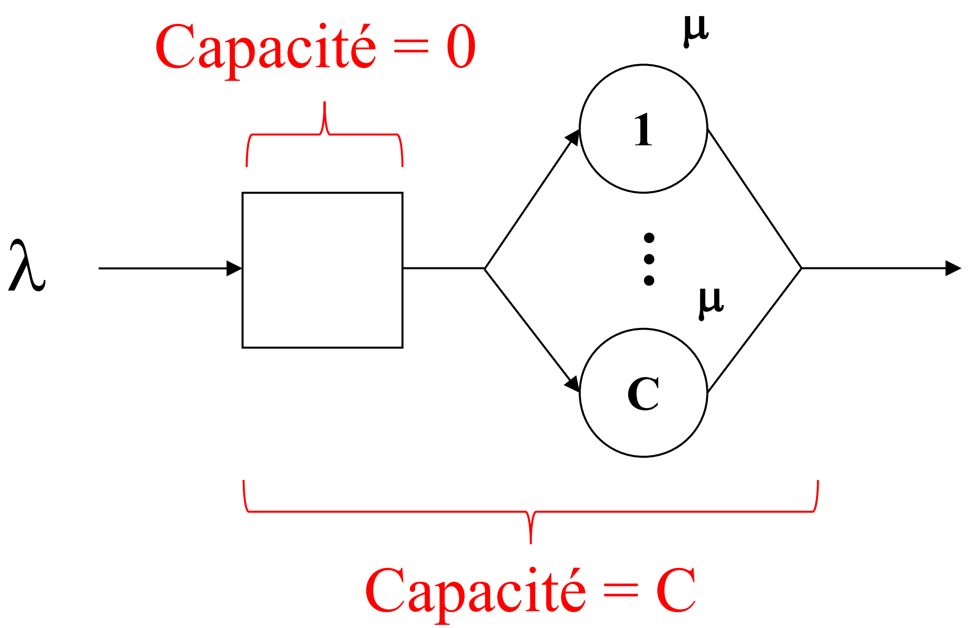
- R = Σ Proba(de trouver n clients en arrivant)*(temps moyen de séjour si l'on a n clients devant soi dans la file)

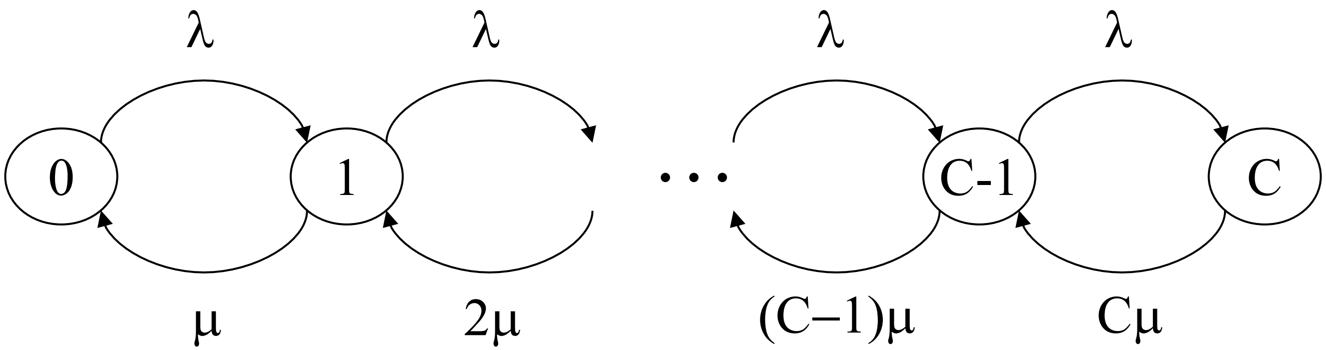
$$R = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)\frac{n+1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Travail à la maison

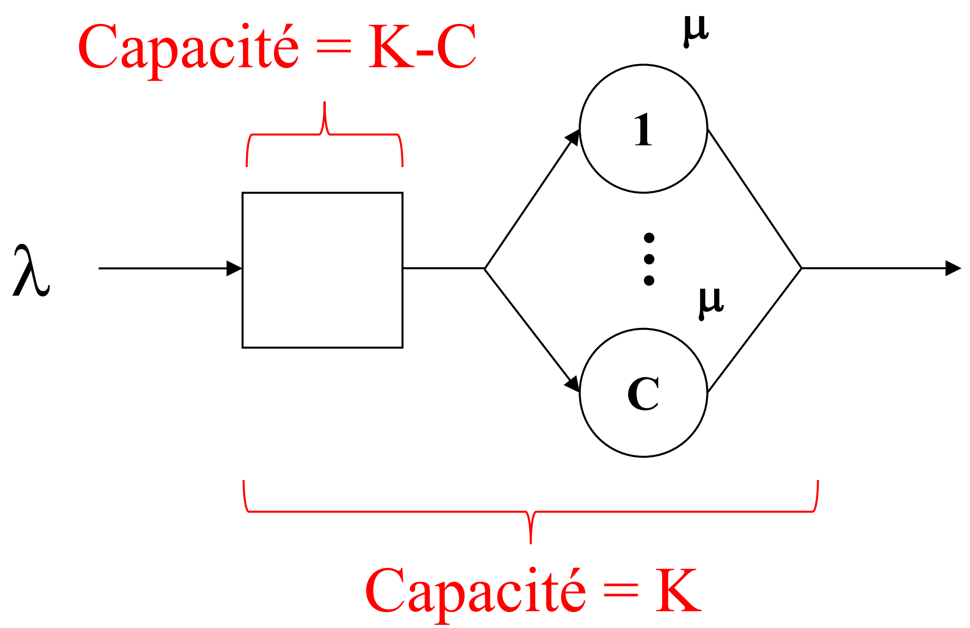
- Exercices 16 et 17
- Lire chapitre 4.1 et 4.2 (formalisme files d’attente)
- Lire chapitre 6.1 (file M/M/1)

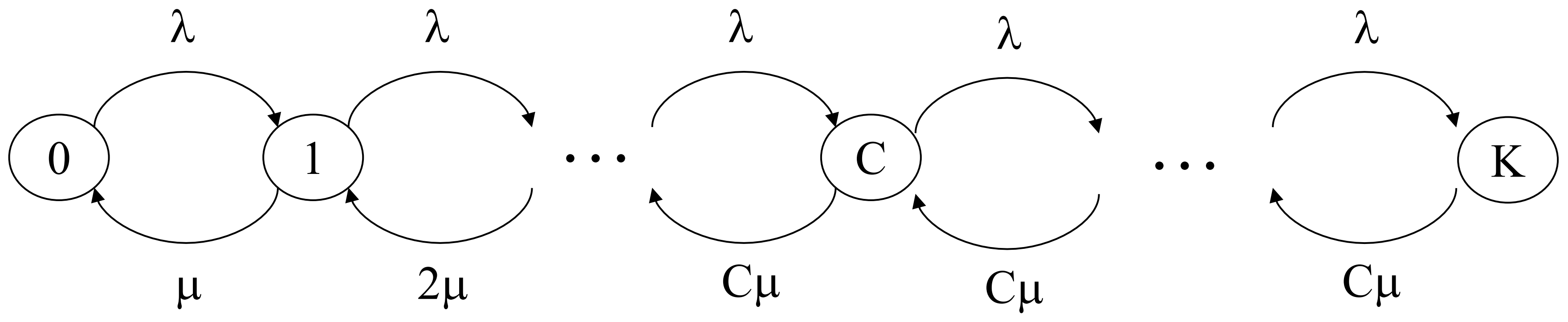
La file M/M/C/C : une file sans attente !



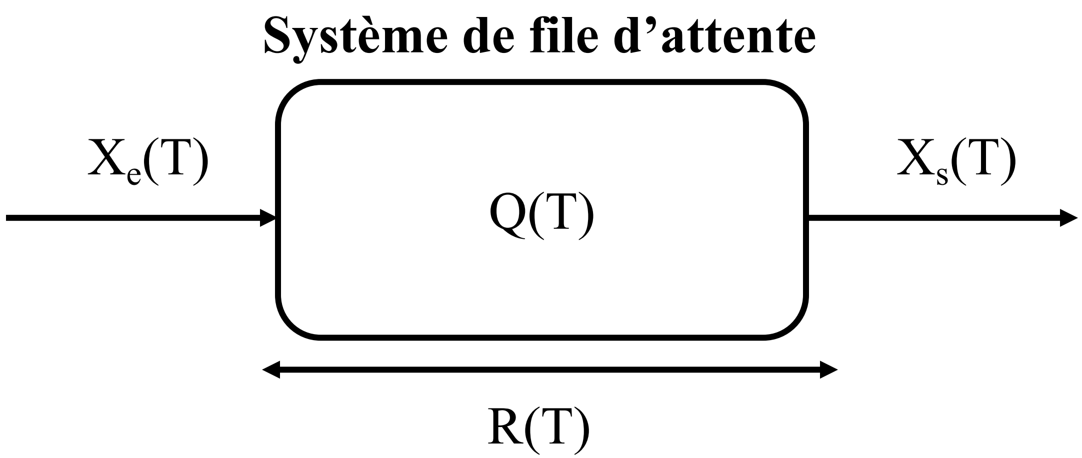


La file M/M/C/K





Paramètres de performance en régime transitoire

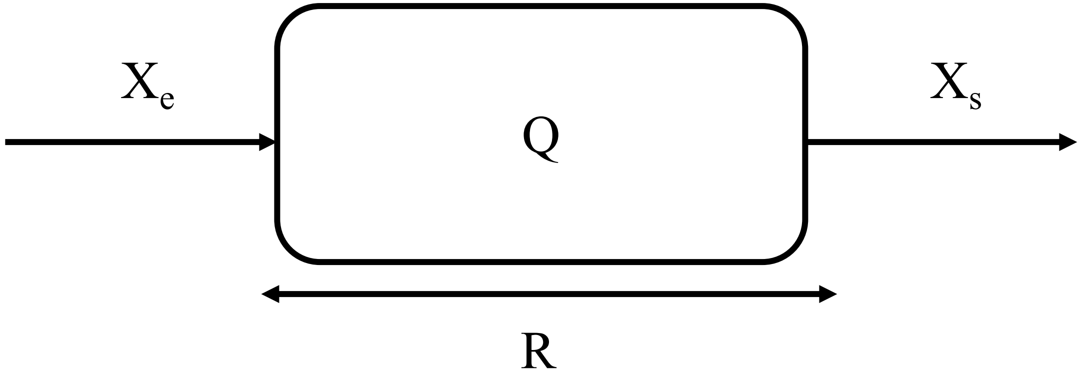


- A(T) : nombre d 'arrivées dans le système entre 0 et T
- D(T) : nombre de départs du système entre 0 et T
- $X_e(T) = A(T)/T$: débit moyen d 'entrée entre 0 et T
- $X_s(T) = D(T)/T$: débit moyen de sortie entre 0 et T
- Q(T) : nombre de clients moyen entre 0 et T
- R_k: temps de séjur du k$^{\text{ième}}$ client arrivé
- $R(T) = \dfrac{1}{A(T)} \sum_{k=1}^{A(T)} R_k$: temps moyen de séjour entre 0 et T

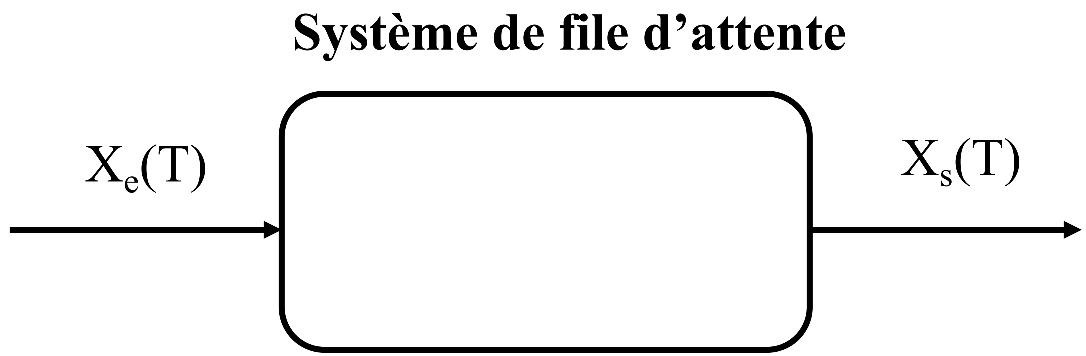
Paramètres de performance en régime permanent

- Les limites (si elles existent) de $R(T)$, $X_e(T)$, $X_s(T)$ et $Q(T)$ sont notées X_e, X_s et Q

Système de file d'attente



Stabilité d'une file d'attente



- Définition : Une file d 'attente est **stable** si et seulement si :

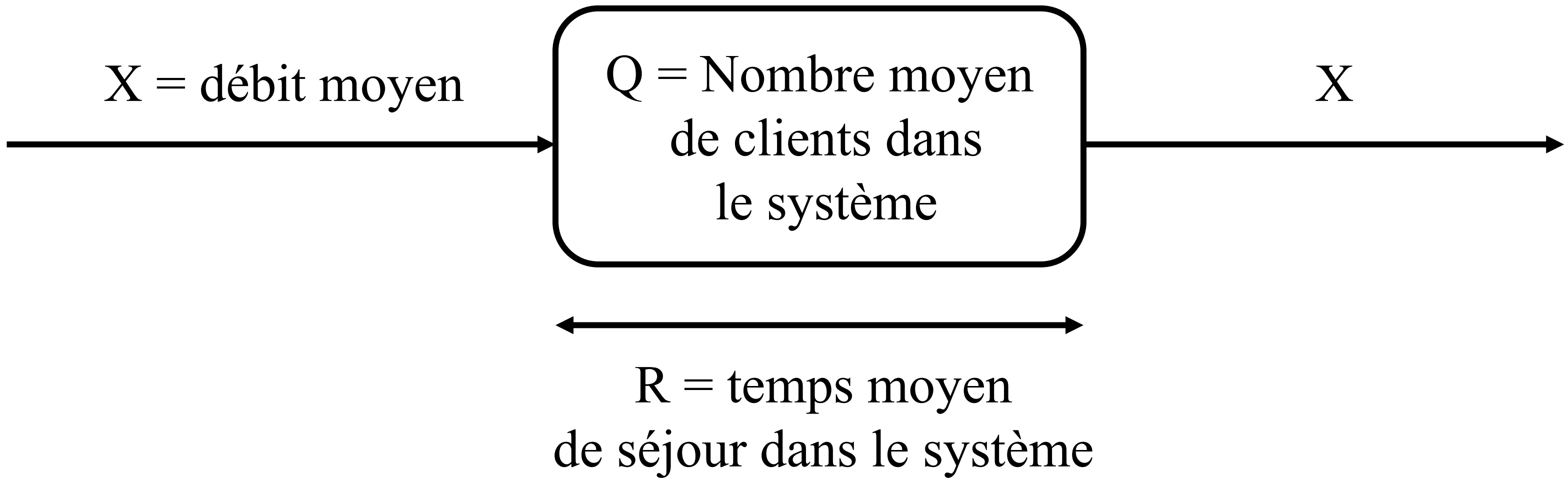
$$\lim_{T \to +\infty} X_s(T) = \lim_{T \to +\infty} X_e(T) = X$$

- Dans une file stable, le nombre de clients reste fini

- Dans une file instable, le nombre de clients tend vers l'infini avec le temps

Loi de Little

Système de file d'attente

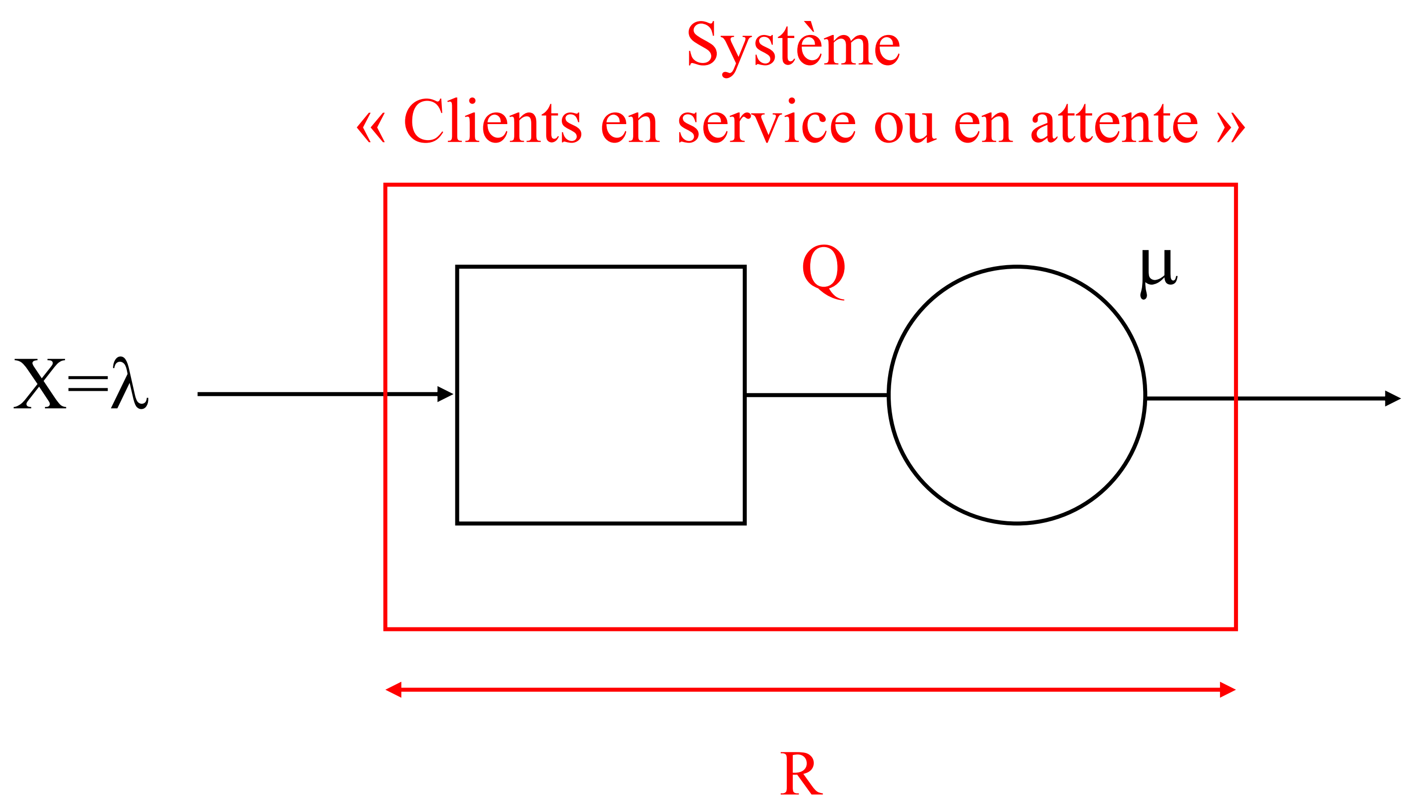


- Dans un système **stable** en régime **permanent** :

$$Q = RX$$

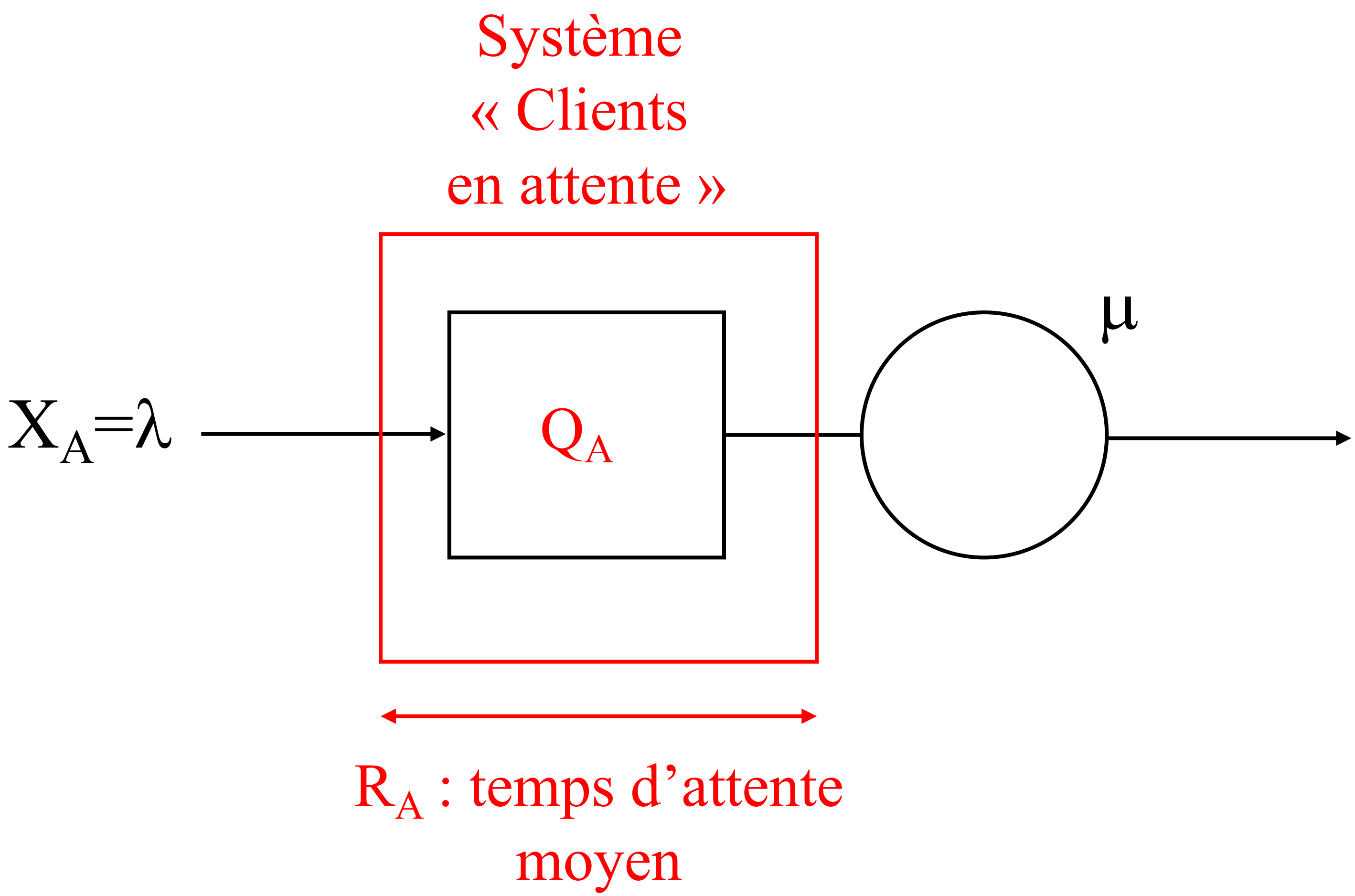
- Cette loi est valable pour n'importe quel système

Application de la loi de Little à une file M/M/1



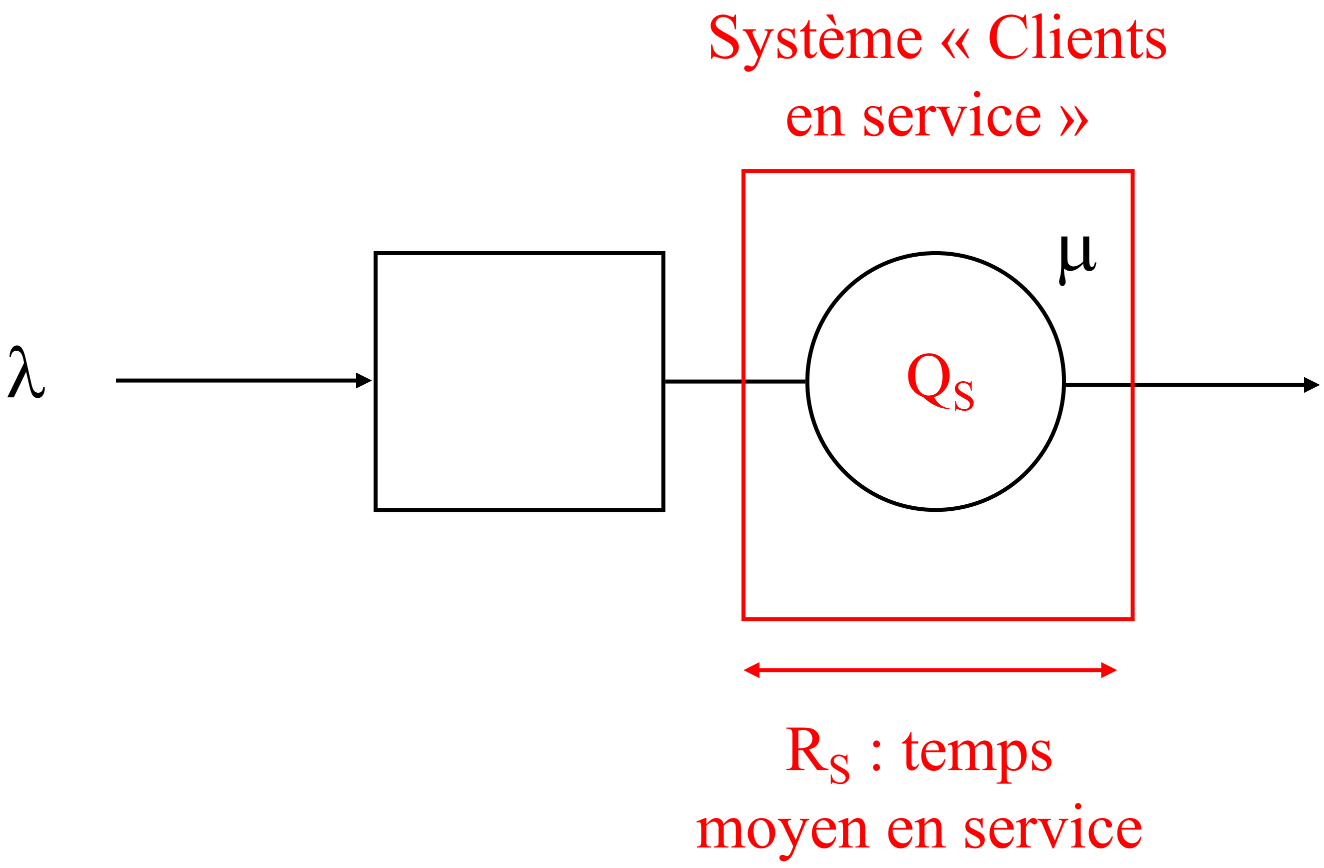
$$R = \frac{Q}{X} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Application de la loi de Little à une file M/M/1 (suite)



$$R_A = \frac{Q_A}{X_A} = \frac{\frac{\rho^2}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

Application de la loi de Little à une file M/M/1 (suite)



$$R_S = \frac{Q_S}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Démonstration de la loi de Little (admise)

- Pour simplifier la démonstration, on va supposer que la file est vide à l'instant 0 et à l'instant T, ce qui implique A(T) = D (T)

$$R(T)X(T) = \left(\frac{1}{A(T)} \sum_{k=1}^{A(T)} R_k \right) \left(\frac{D(T)}{T} \right) = \left(\frac{D(T)}{A(T)} \right) \left(\frac{\sum_{k=1}^{A(T)} R_k}{T} \right)$$

$$= Q(T)$$

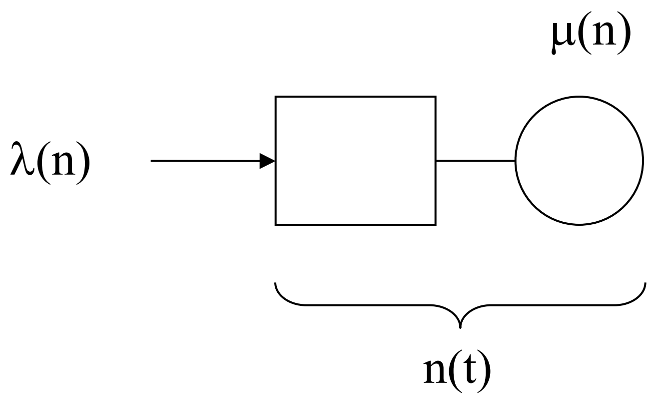
- La stabilité entraîne : $\lim_{T \to +\infty} \frac{D(T)}{A(T)} = 1$

- En faisant tendre T vers l'infini, on obtient la loi de Little

Travail à la maison

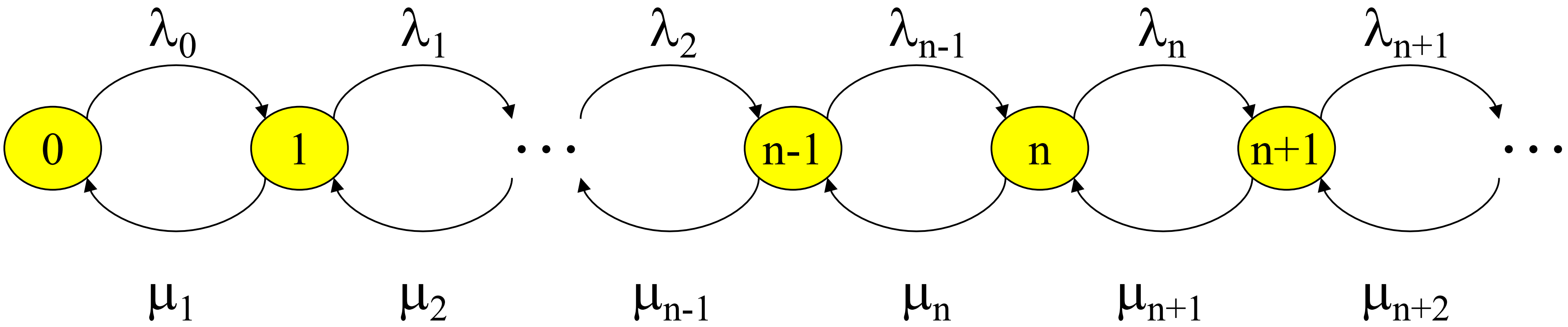
- Lire chapitre 5.1 et 5.2 et 5.4
  - Paramètres de performance
  - Stabilité
  - Loi de Little
- Lire chapitre 6.2 (file M/M/1/K)
- Lire chapitre 6.3 (file M/M/C)
- Exercices 18 et 19

Files markoviennes



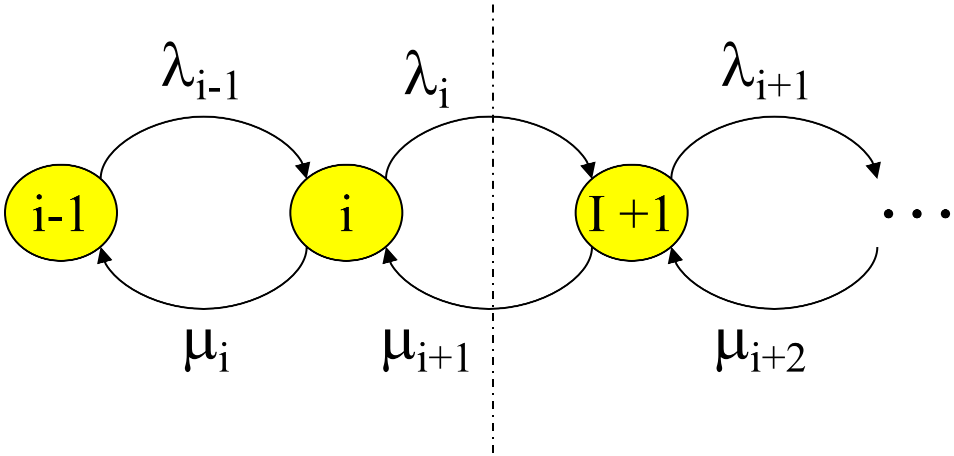
- Temps inter-arrivées exponentiel de taux $\lambda(n)$
- Temps de service exponentiel de taux $\mu(n)$

Chaîne de Markov associée aux files markoviennes



Probabilités stationnaires des files markoviennes

- On écrit les équations de frontière entre les états ≤ i et les états > i



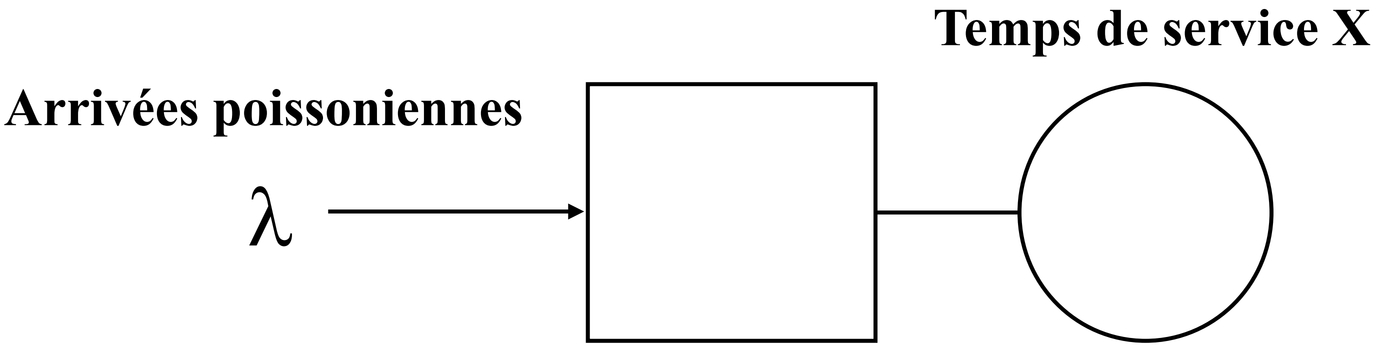
$$\lambda_i p(i) = \mu_{i+1} p(i+1)$$

$$\Downarrow$$

$$p(n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p(0)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) = 1 \Rightarrow p(0) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}$$

La file M/G/1



- Moyenne et écart-type de X supposés connus

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{1}{E[X]} \\ c_s = \dfrac{\sigma[X]}{E[X]} \end{cases}$$

Paramètres de performance de la file M/G/1 (admis)

$$\begin{cases} X = \lambda \\ U = \rho \\ R = \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{\lambda(1+c_s{}^2)}{2\mu^2(1-\rho)} \\ Q = \rho + \dfrac{\rho^2(1+c_s{}^2)}{2(1-\rho)} \end{cases}$$

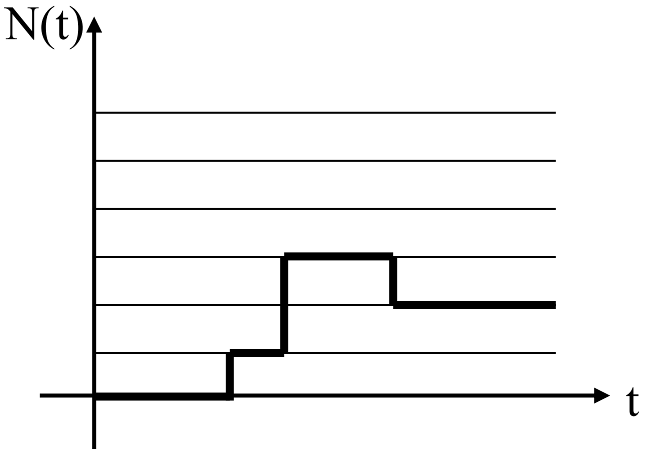
$\longleftarrow$ Formule de Pollaczeck-Kinchin (PK)

Exemple : retrouver la file M/M/1

Remarques

- Cas particuliers
  - Loi exponentielle
  - Temps déterministe
- Effet linéaire du coefficient de variation

Le processus stochastique N(t) n'est plus une chaîne de Markov à temps continu



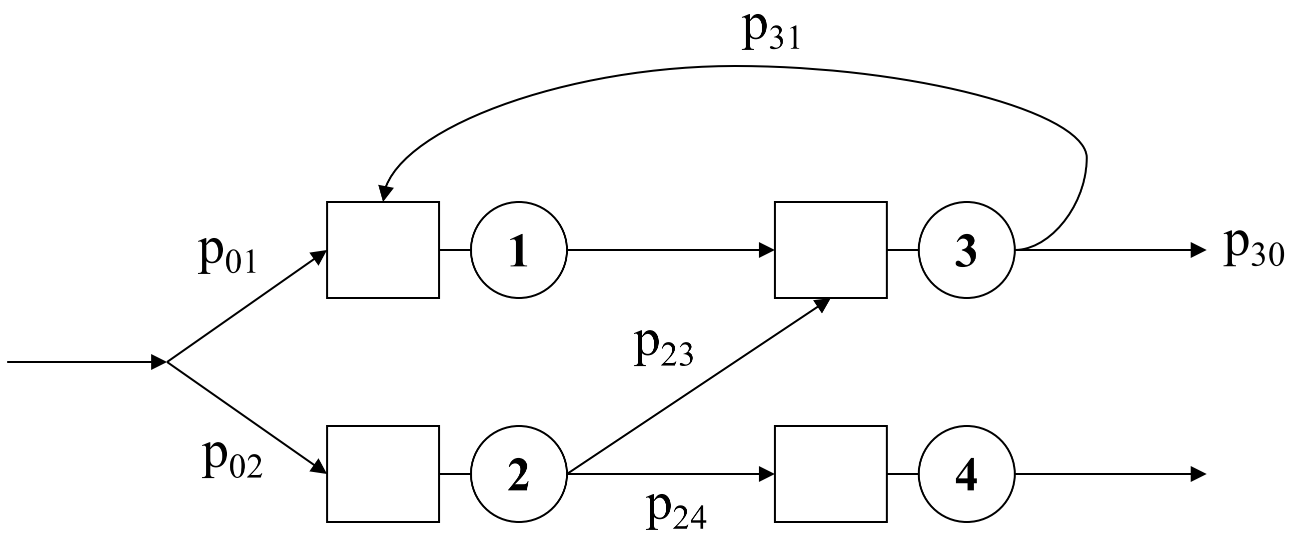
- La distribution du temps de service restant à exécuter dépend du temps de service déjà exécuté

Réseaux de files d’attente (introduction)

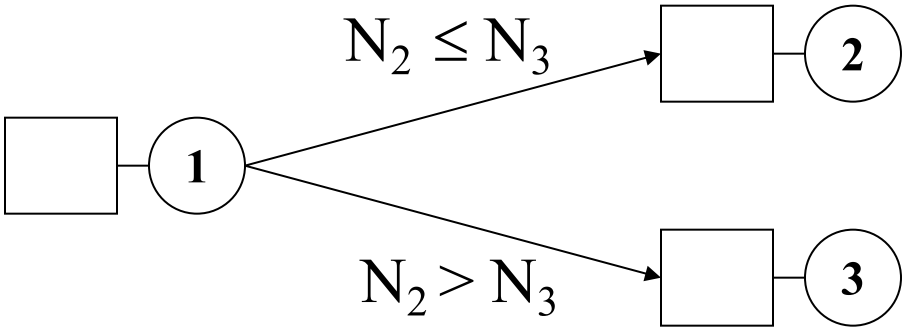
Définition d'un réseau de files d'attente

- Plusieurs files d'attente reliées entre elles
- Les clients, une fois leur service terminé dans une station, se déplacent vers une autre station ou quittent le système selon des **règles de routage**
  - Probabiliste
  - Déterministe

Un exemple de routages probabiliste

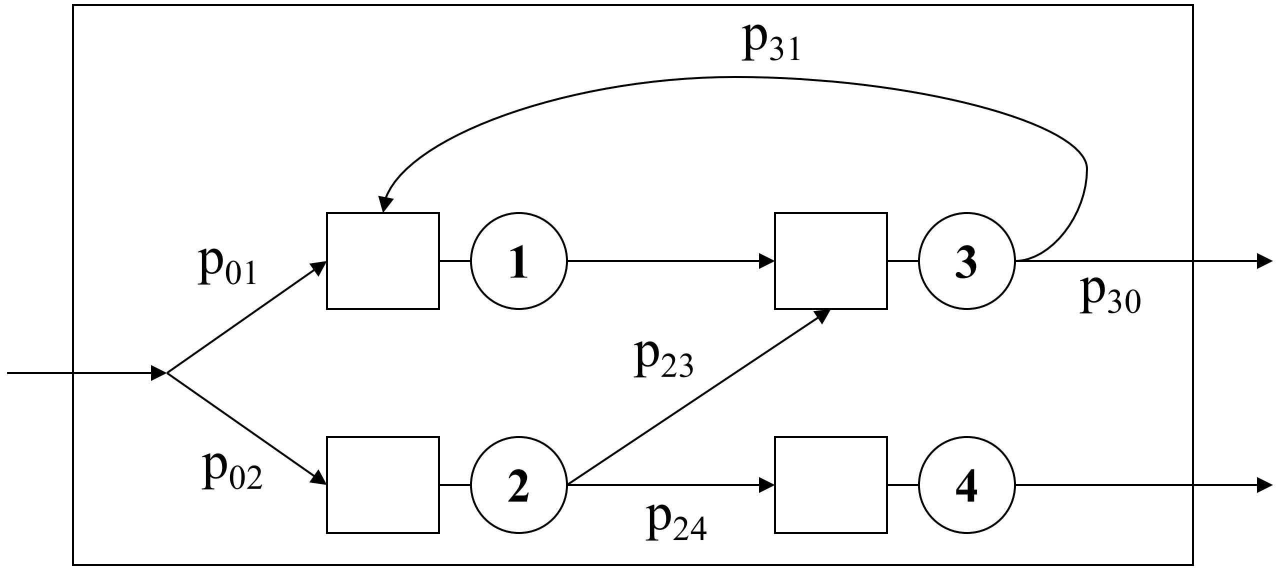


Un exemple de routage déterministe

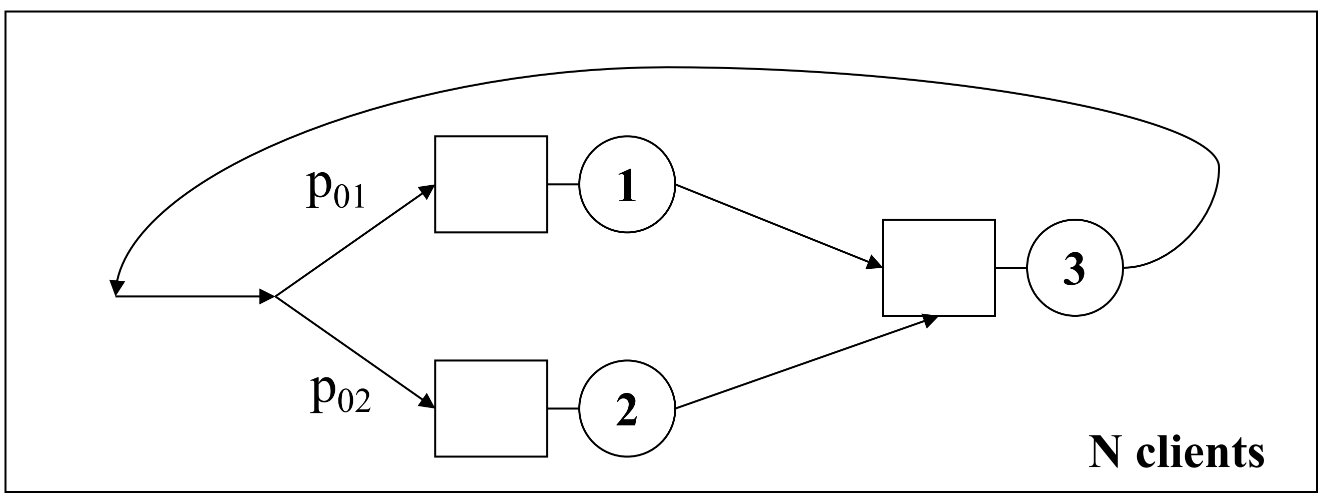


Routage vers la file la plus courte

Réseaux fermés et réseaux ouverts

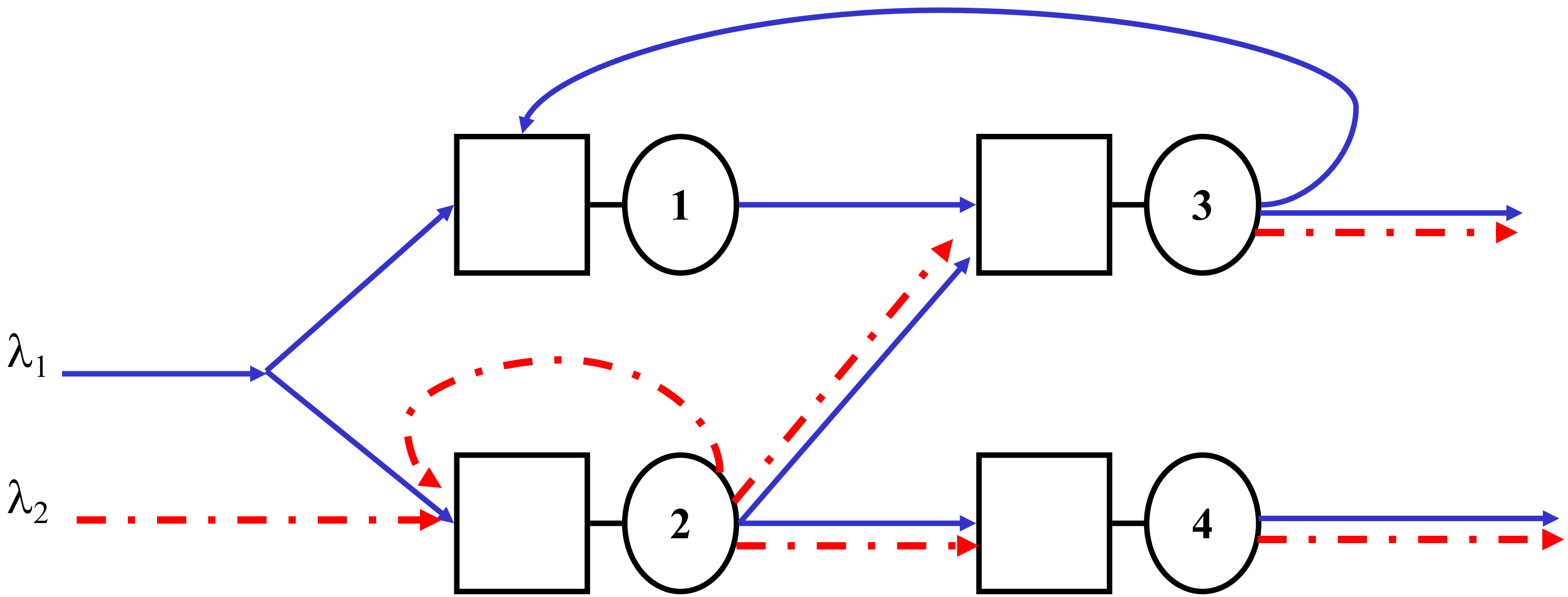


Réseau ouvert

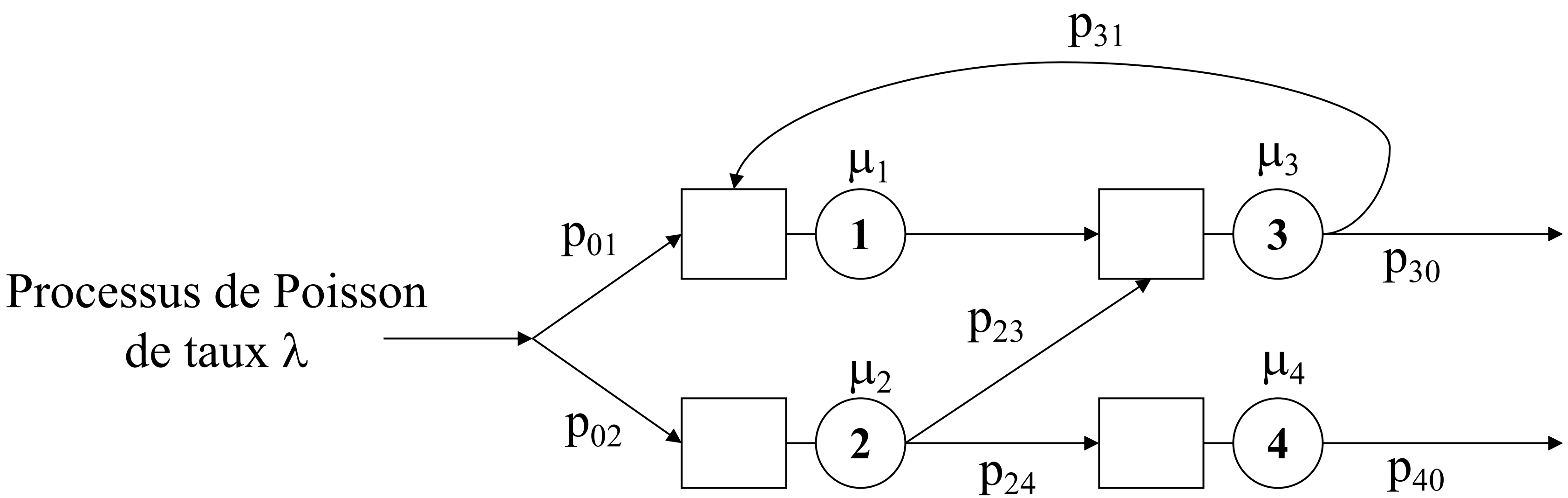


Réseau fermé

Réseaux multi-classes

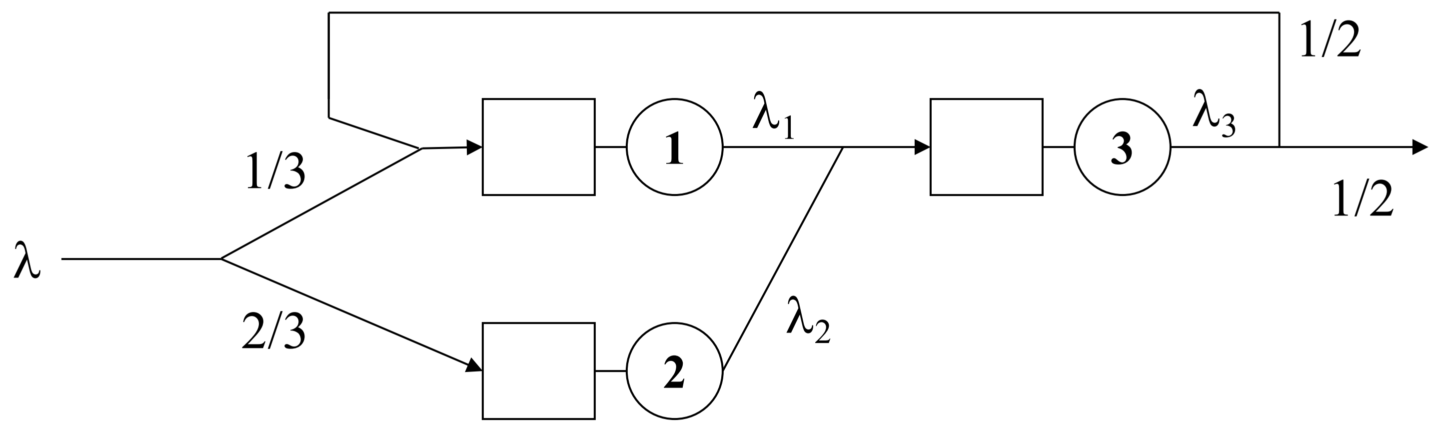


Réseaux de Jackson ouvert (généralise la file M/M/1)



- Généralisation de la file M/M/1
- M stations avec
  - Un seul serveur
  - Temps de service exponentiel
  - Capacité de stockage illimitée
  - FIFO

Débit moyen λ_i à la station i



- Débit moyen sortant de i = Débit moyen entrant en i

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}\lambda_3 \qquad\qquad \lambda_1 = \frac{4}{3}\lambda$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda$$

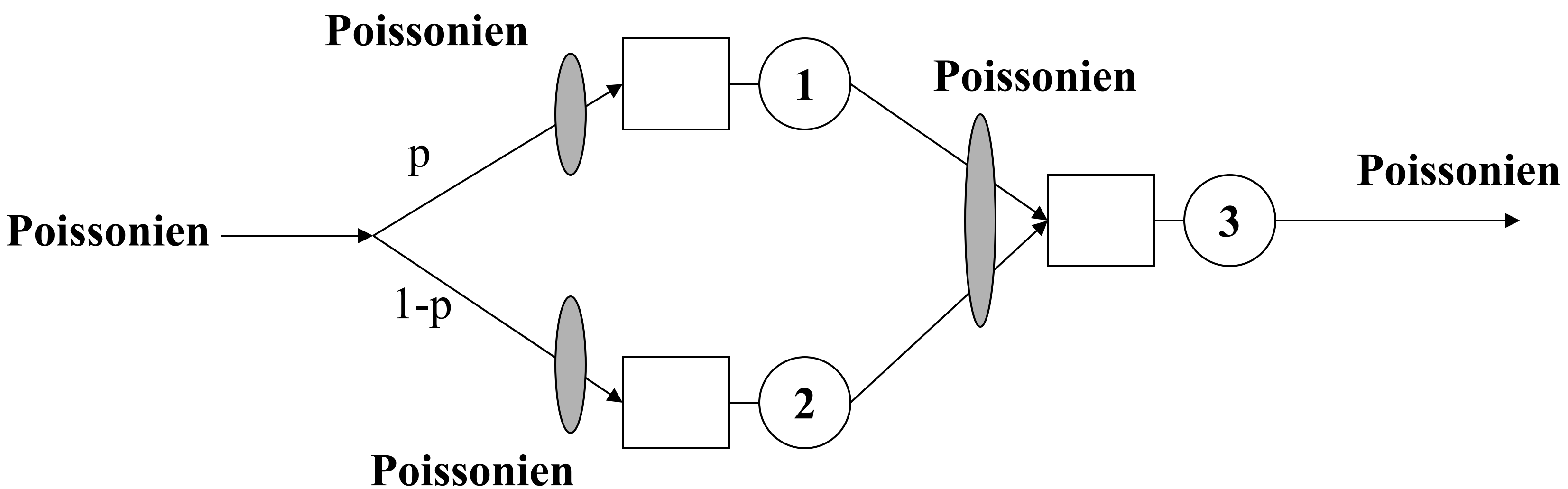
$$\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad\qquad \lambda_3 = 2\lambda$$

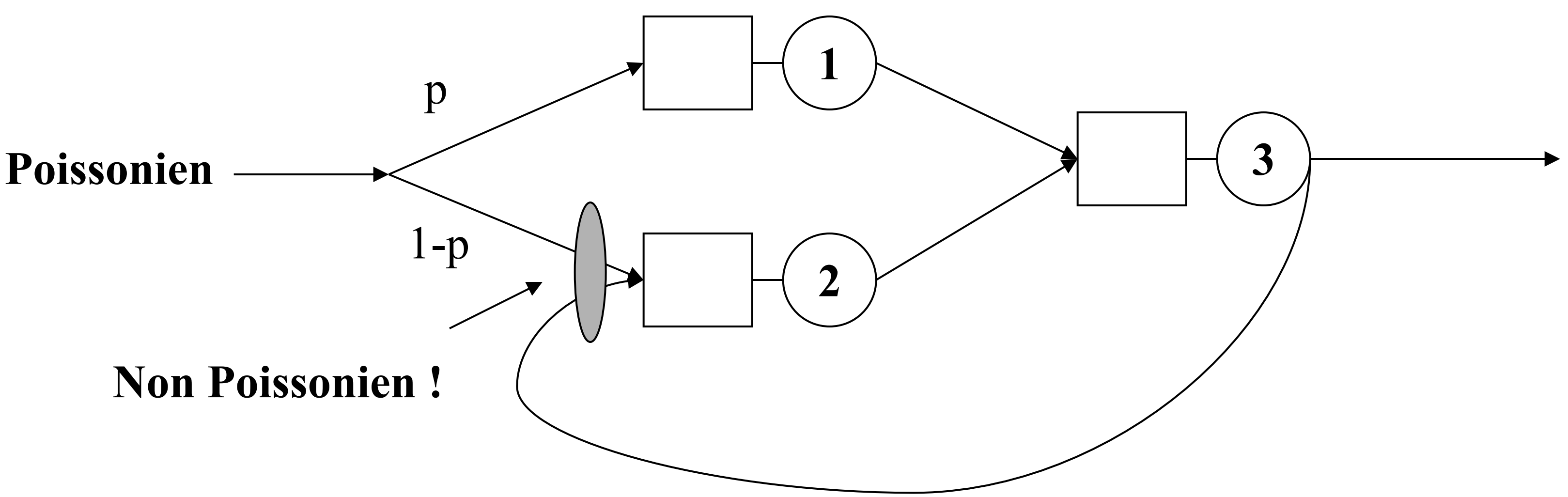
Conditions de stabilité du système

- Toutes les stations doivent être stables :

$$\lambda_i < \mu_i \quad i = 1, \ldots, M$$

Arrivées poissoniennes ?





Paramètres de performance (admis)

- Soit $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$
- A la station *i* :

$$U_i = \rho_i$$

$$X_i = \lambda_i$$

$$Q_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

$$R_i = \frac{Q_i}{X_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

Autres résultats

- Files d’attente avec plusieurs serveurs
- Réseaux de Jackson fermés
- Réseaux multiclasses

Travail à la maison d'ici l'examen

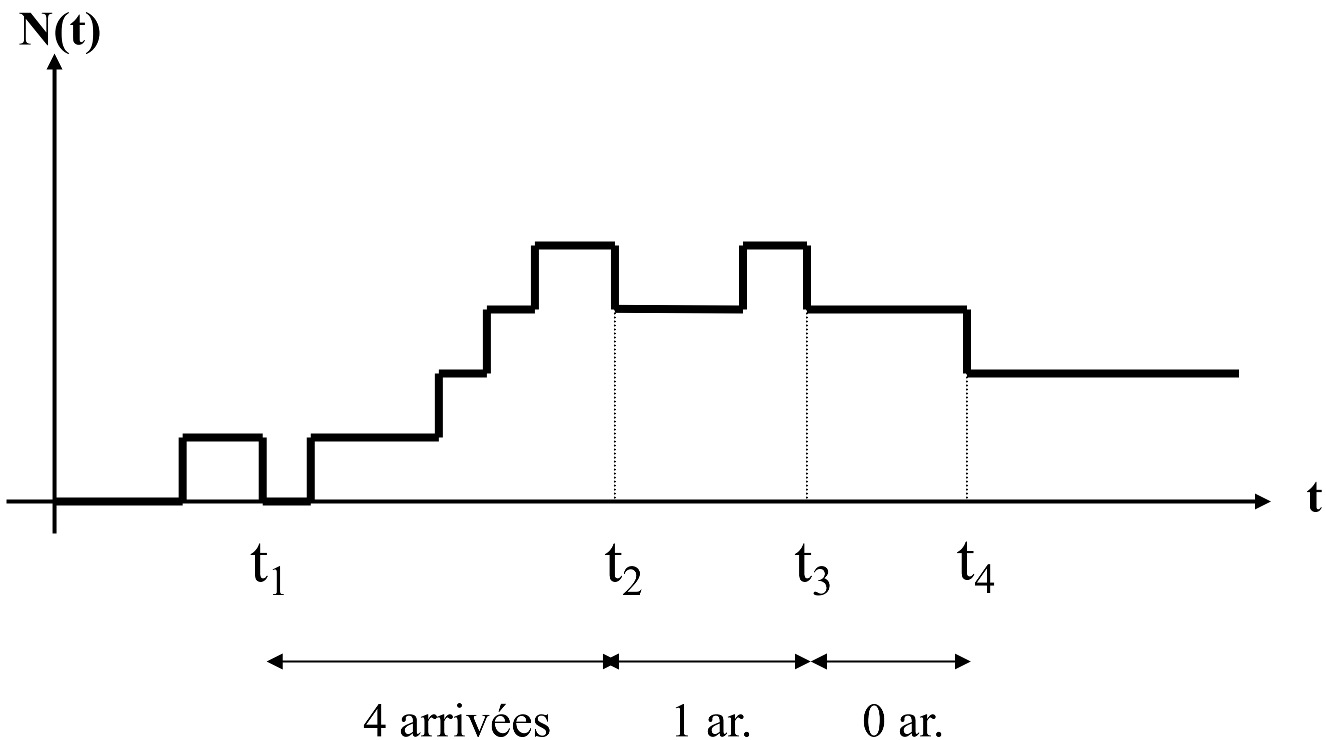
- Lire chapitre 6.6 (file M/G/1)
  - Vous pouvez admettre les résultats concernant les paramètres de performance résumés en section 6.6.5
- Exercice 20

Conclusion

- Introduction à la théorie des files d’attente
- Pour aller plus loin
  - Théorie des files d’attente - Des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit (Bruno Baynat, 2000)
- Pour aller encore plus loin
  - Fundamentals of Queuing theory (Gross and Harris, 2018)
  - Résumé des résultats existants sur l’ENT

Chaîne de Markov incluse (hors programme)

- Soit le processus stochastique $\{X_k\}_{k\geq 1}$ représentant le nombre de clients juste après le départ du $k^{\text{ième}}$ client, à l'instant t_k



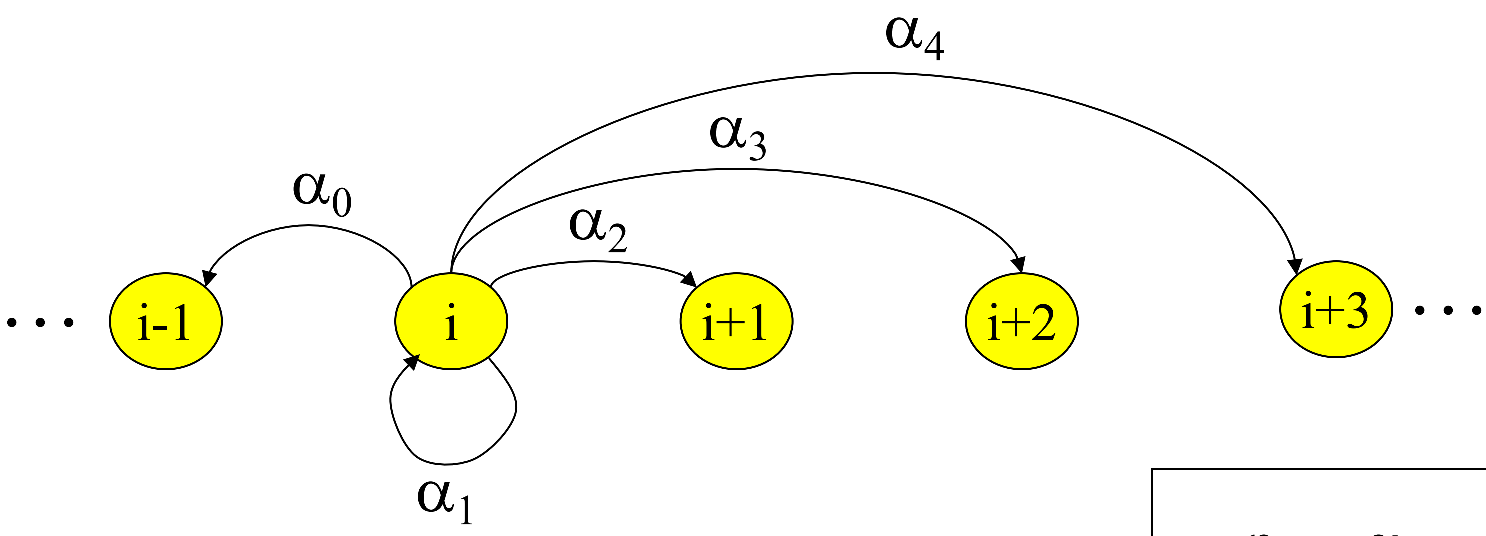
$$\boxed{\{X_k\}_{k\geq 1} = \{N(t_k)\}_{k\geq 1} \text{ est une CMTD}}$$

Probabilité qu'il arrive i clients (hors programme)

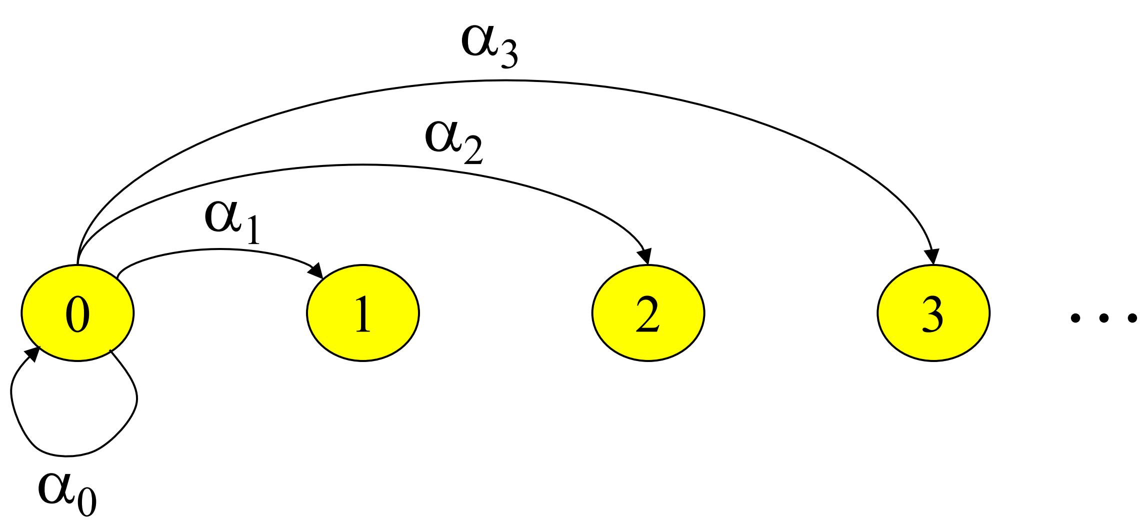
- Soit T_S le temps de service
- Soit α_i la probabilité qu'il arrive i clients pendant T_s
- $\alpha_i = \int P$ [il arrive i clients pendant T_S | $t \leq T_s < t+dt$] *P [$t \leq T_S < t+dt$]dt
- Soit f_S la densité de probabilité de T_S, on a alors:

$$\alpha_i = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} f_S(t)\,dt$$

Probabilités de transition (hors programme)



$$p_{ij} = \alpha_{j-i+1} \text{ pour } i \neq 0$$



$$p_{0j} = \alpha_j$$

Probabilités stationnaires (hors programme)

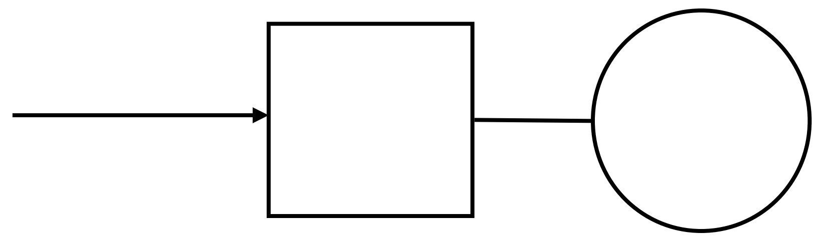
- $\{X_k\}_{k\geq 1}$ est une CMTD irréductible et apériodique. Le vecteur des probabilités stationnaires **p**=(p(0),p(1),…) vérifie donc :

$$
\begin{cases}
p(0) = p(0)\alpha_0 + p(1)\alpha_0 \\
p(1) = p(0)\alpha_1 + p(1)\alpha_1 + p(2)\alpha_0 \\
\quad\vdots \\
p(k) = p(0)\alpha_k + \sum_{j=1}^{k+1} p(j)\alpha_{k-j+1} \\
\quad\vdots
\end{cases}
$$

La file G/M/1

Temps de service exponentiel de paramètre μ

Temps inter-arrivées T



- Moyenne et écart-type de T supposés connus

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{E[T]} \\ c_a = \dfrac{\sigma[T]}{E[T]} \end{cases}$$

Paramètres de performance de la file G/M/1 (hors programme)

- Soit σ la solution ∈]0,1[de $\sigma = f^*(\mu - \mu\sigma)$
- où f^* est la transformée de Laplace de f_T, densité de probabilité de la loi d'inter-arrivées

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} f_T(t)\exp(-st)dt$$

$$\begin{cases} X = \lambda \\ U = \rho \\ R = \dfrac{1}{\mu(1-\sigma)} \\ Q = \dfrac{\rho}{1-\sigma} \end{cases}$$

Exemple : retrouver la file M/M/1

Files d'attente plus complexes

- Pas ou peu de résultats analytiques pour la plupart des files d'attente
  - G/M/1, M/G/1, G/M/m, G/G/1, G/G/m correspondent à des processus stochastiques complexes

→ Approximations par des combinaison de lois exponentielles

→ Approximations (borne inf / borne sup)

→ Techniques numériques

→ Simulation

Approximation pour la file G/C/C

$$Q_a(G/G/C) \approx \left(\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \right) Q_a(M/M/C)$$

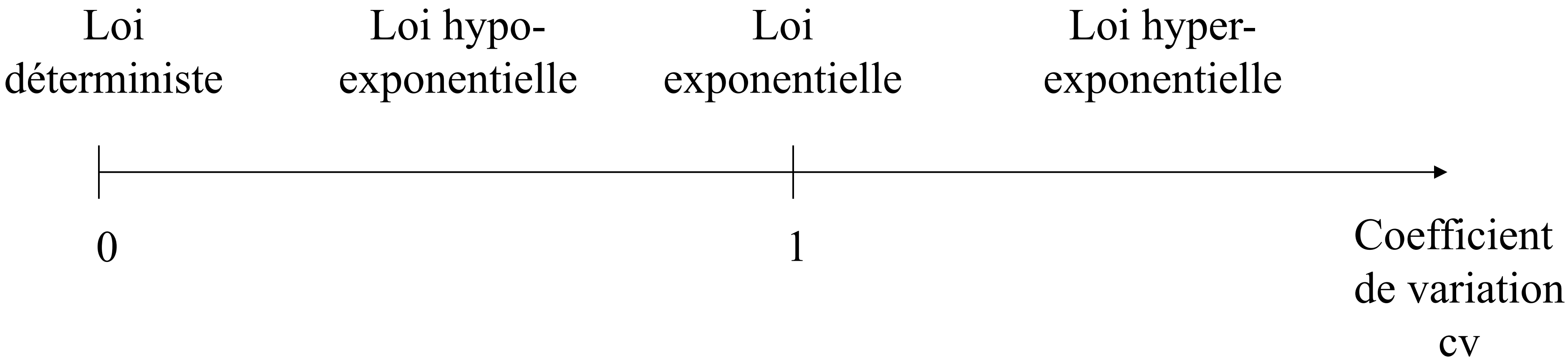
- c_a = coefficient de variation du processus d'arrivée
- c_s = coefficient de variation du processus de service

Approximations par des combinaisons de lois exponentielles

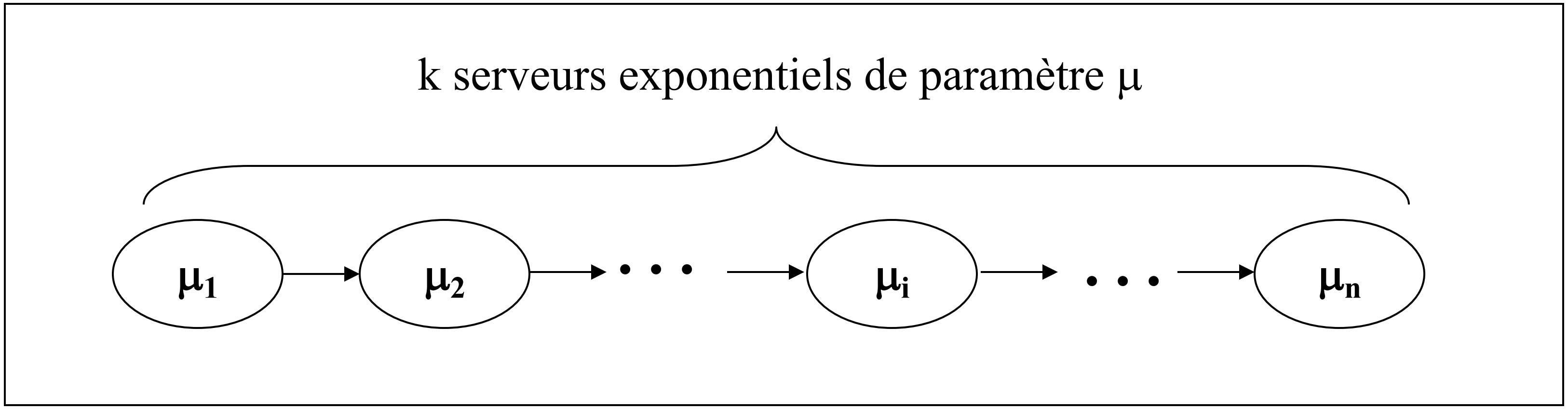
- Loi exponentielle sans mémoire $\rightarrow$ CMTC
- Coefficient de variation d'une loi exponentielle = 1

Généralisation des lois exponentielles

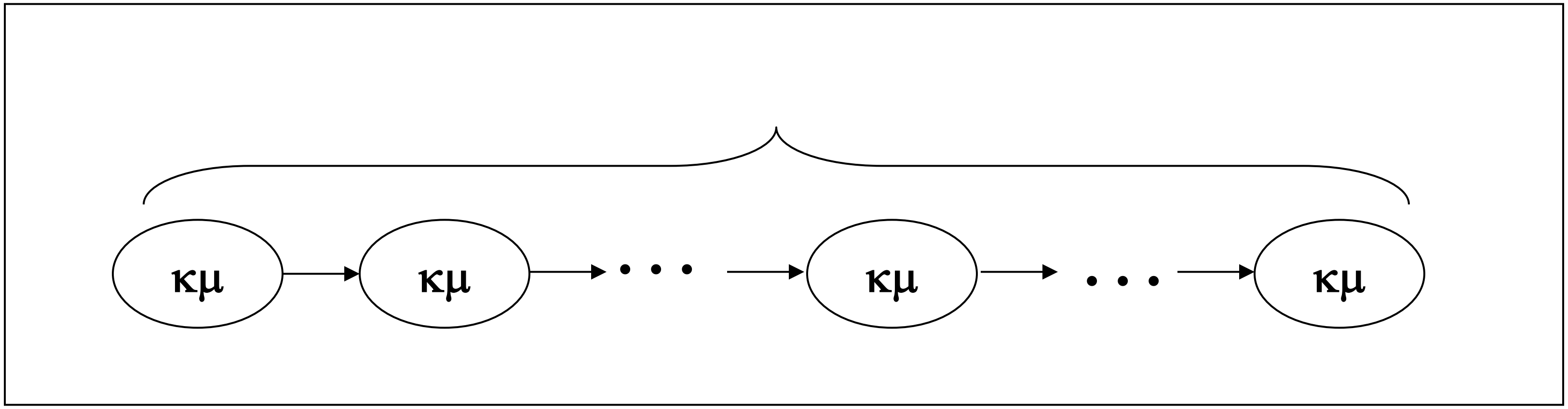
- Les lois exponentielles ne permettent de modéliser que des coefficients de variation cv = 1



Lois hypo-exponentielles = Σ de lois exponentielles

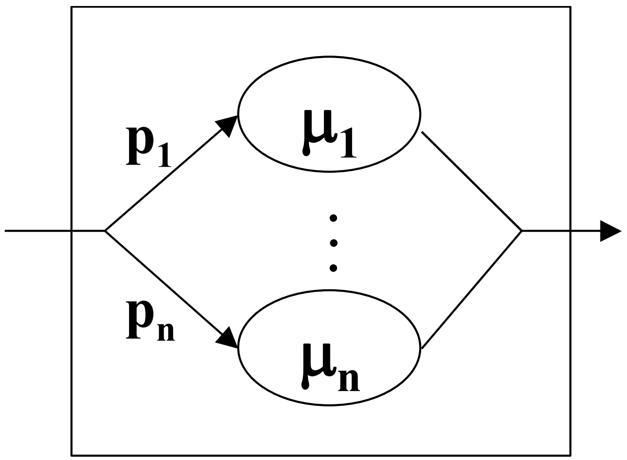


Loi hypo-exponentielle avec k serveurs exponentiels de paramètre $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$

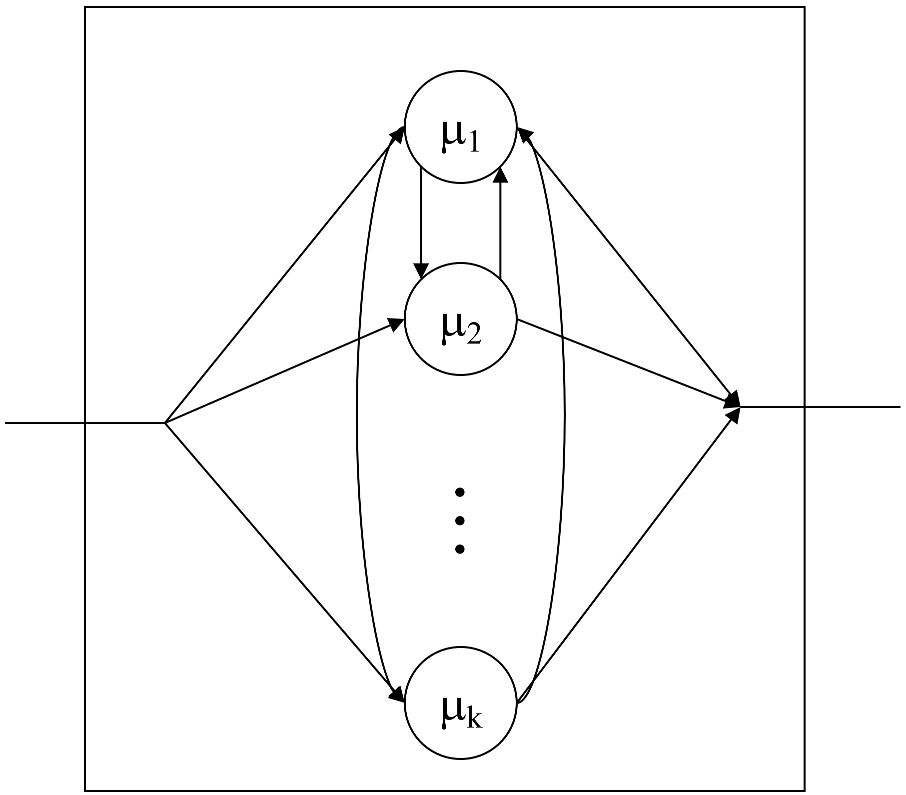


Loi Erlang-k de paramètre μ

Lois hyper-exponentielles



Lois de type Phase ou loi PH-k

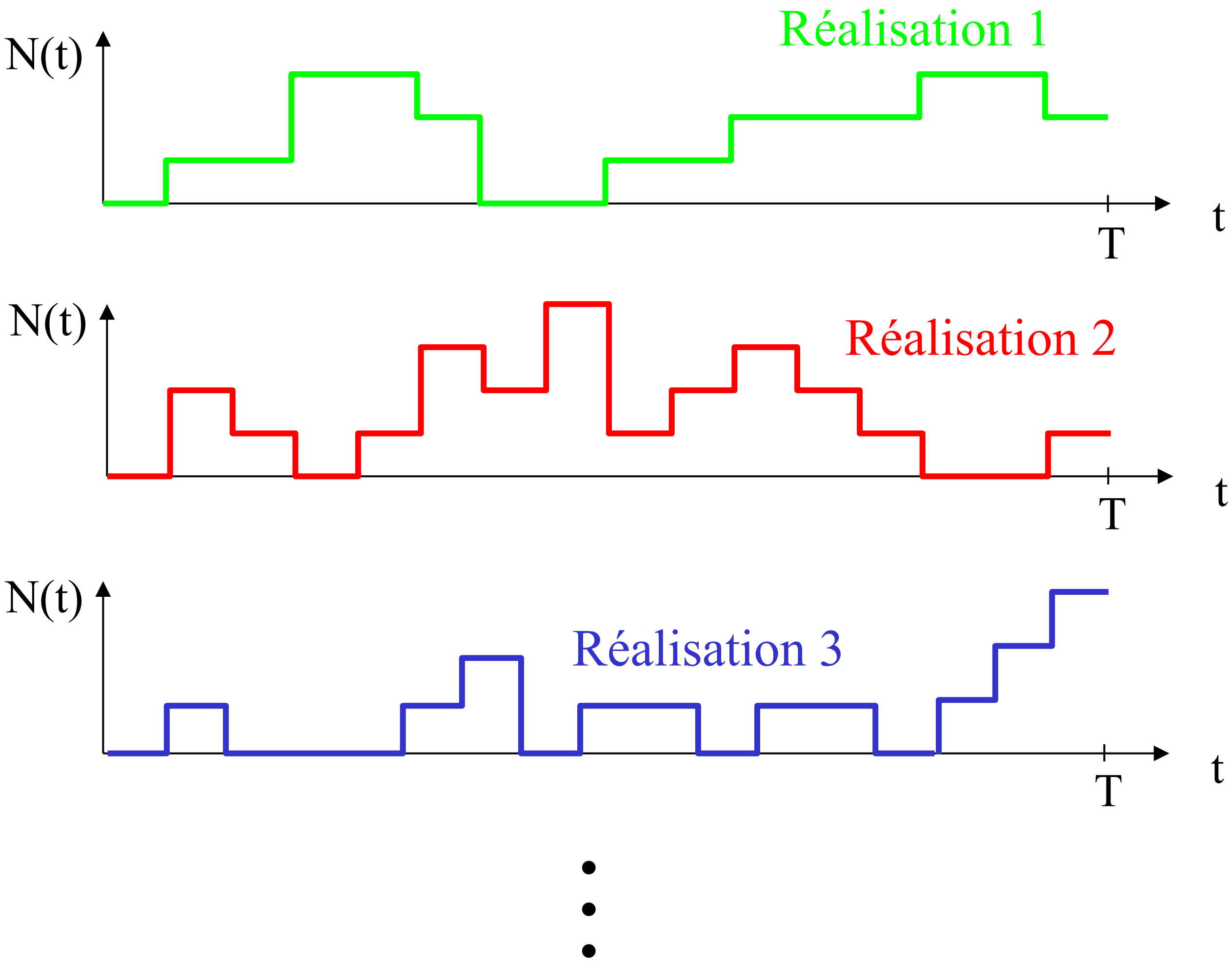


Ergodicité

- Définition intuitive :
  - Un système est **ergodique** si les performances stationnaires du système sont égales aux performances de n'importe quelle réalisation particulière du système, observée sur une période suffisamment longue
- Définition mathématique pour une CMTD
  - Soit X_n une CMTD ergodique, de distribution stationnaire π et f une fonction réelle définie sur E, l'espace d'état de la CMTD. Alors :

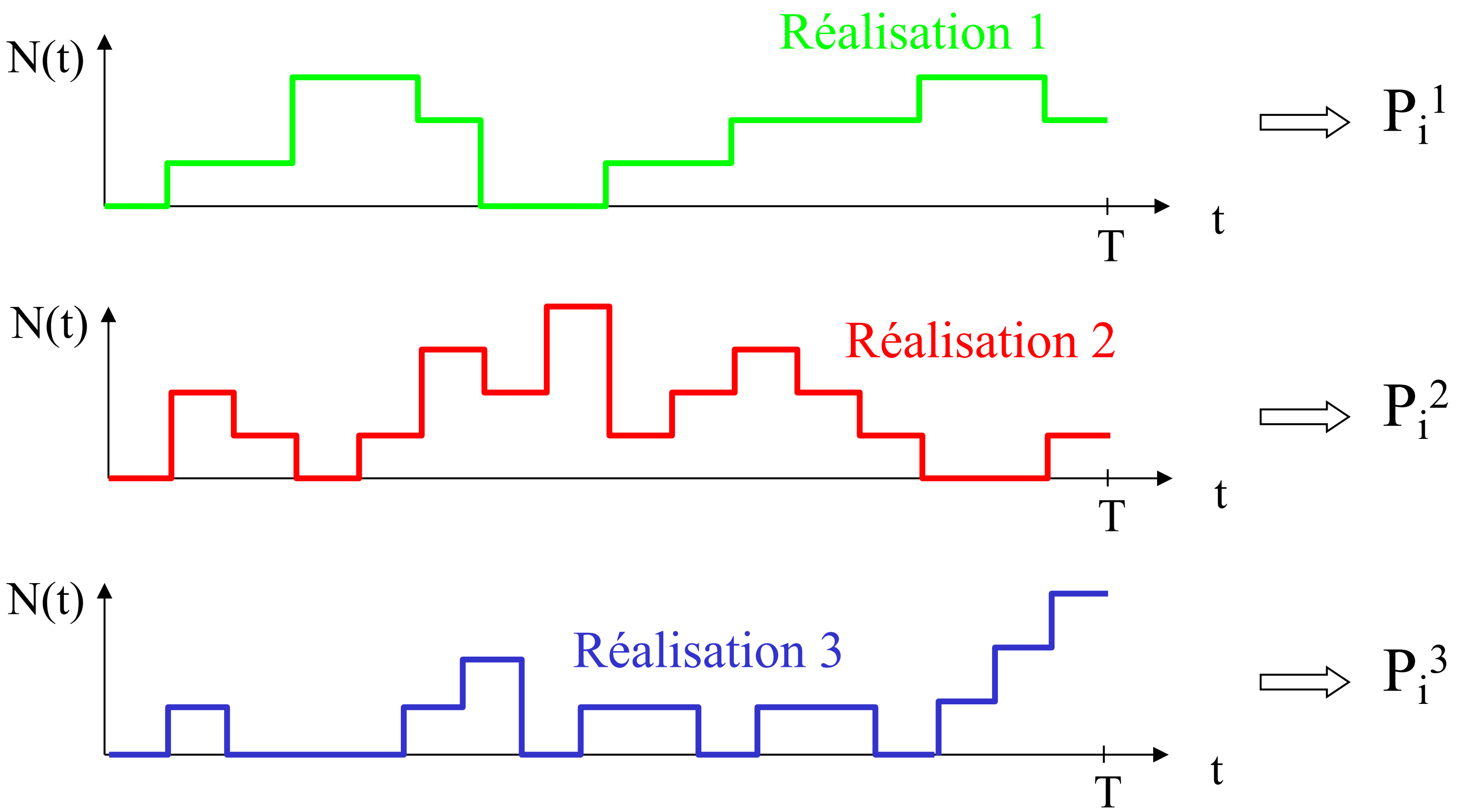
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_{i\in E} f(i)\pi_i$$

Une infinité de réalisations possibles pour un processus stochastique



Proportion de temps passé dans chaque état

- P_i : proportion de temps passé dans l'état i entre 0 et l'infini



Système ergodique

- Pour un système ergodique, P_i^j ne dépend pas de la réalisation j considérée :

$$P_i^1 = P_i^2 = P_i^3 = \ldots = P_i$$

- L'étude d'une réalisation est suffisante pour étudier le système dans son ensemble
- De plus, P_i est égal à la probabilité stationnaire d'être dans l'état *i*

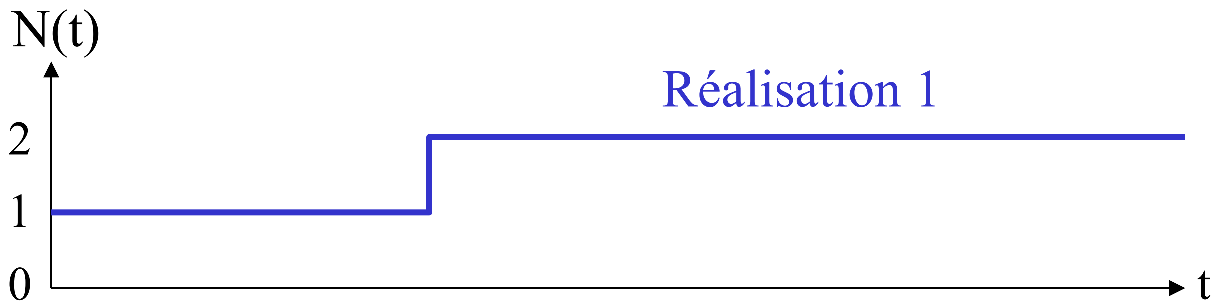
$$P_i = \lim_{t\to\infty} P\left[N(t)\right]$$

Exemples de systèmes ergodiques

- CMTD irréductible et apériodique
- CMTC irréductible et apériodique

Exemple de système non ergodique

- Soit une CMTD avec les états 0 et 2 absorbants



$\Rightarrow P_2 = 1$

$\Rightarrow P_2 = 0$

$\Rightarrow$ La proportion de temps passé dans l'état i dépend de la réalisation

Relation entre simulation et analyse pour un système ergodique

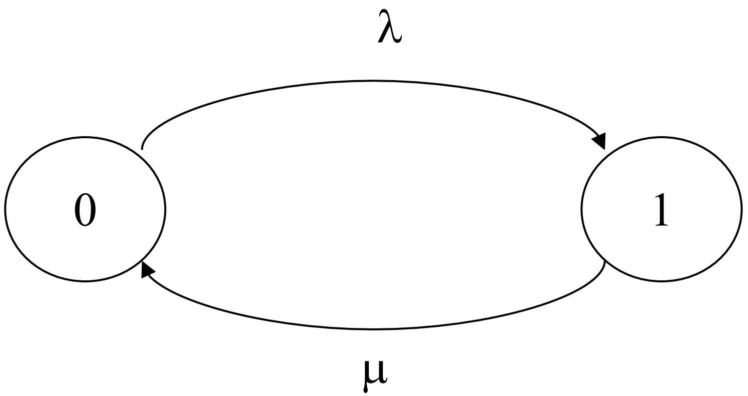
- Simulation :
  - Il suffit d'étudier les paramètres de performance d'une réalisation sur une période suffisamment longue pour obtenir les performances stationnaires
- Analyse :
  - Il suffit d'étudier les performances stationnaires (plus facile) pour obtenir les performances de n'importe quelle réalisation sur une période suffisament longue

Limite de cette approche

- Si le régime transitoire est long relativement à la période de fonctionnement considéré, alors l'étude des performances stationnaires est insuffisante
- La vitesse de convergence vers le régime stationnaire est exponentielle

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\pi}(t)Q$$

Exemple : File M/M/1/1

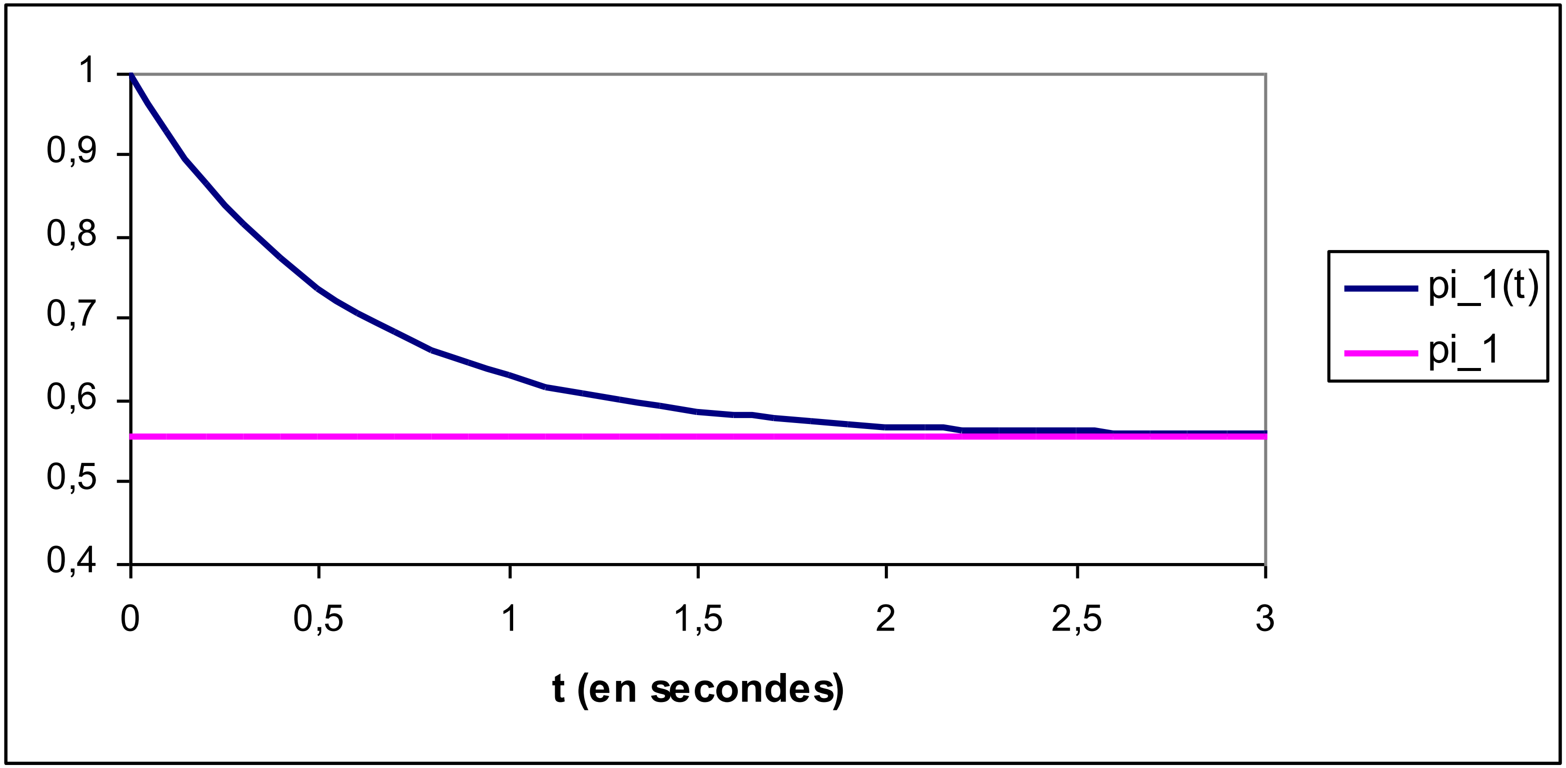


Si N(0) = 0, alors

$$\begin{cases} \pi_1(t) = \dfrac{1+\rho\exp\left[-(\lambda+\mu)t\right]}{1+\rho} \\ \pi_2(t) = \dfrac{\rho-\rho\exp\left[-(\lambda+\mu)t\right]}{1+\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{1+\rho} \\ \pi_2 = \dfrac{\rho}{1+\rho} \end{cases}$$

$\lambda = 0{,}8\ s^{-1}$, $\mu = 1\ s^{-1}$



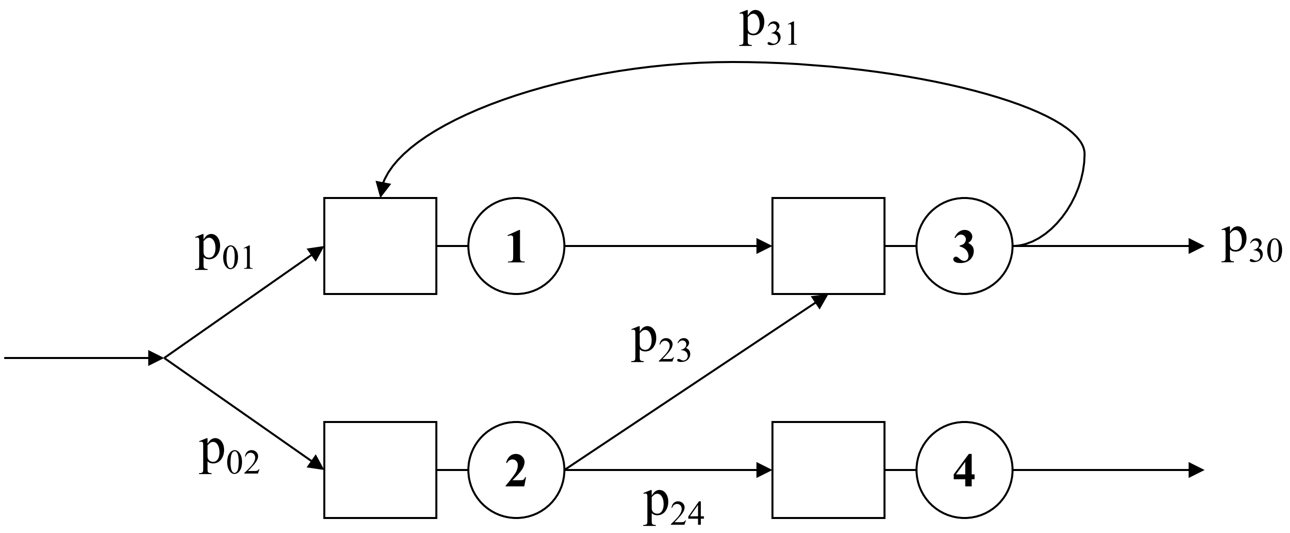
- Si l'intervalle de temps considéré est de 1 seconde, l'analyse en régime stationnaire n'est pas correcte

Réseaux de files d’attente (hors programme)

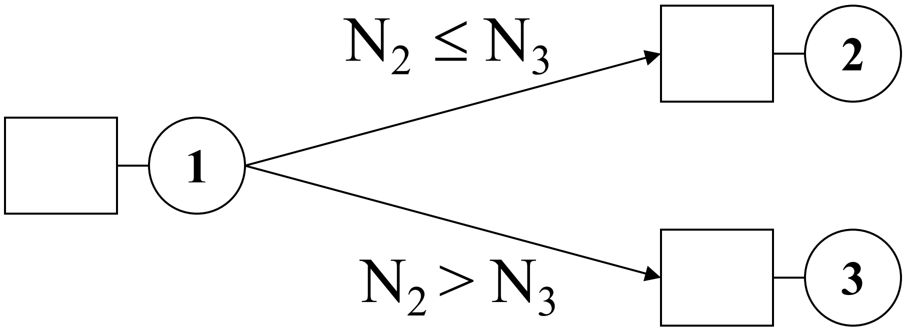
Définition d'un réseau de files d'attente

- Plusieurs files d'attente reliées entre elles
- Les clients, une fois leur service terminé dans une station, se déplacent vers une autre station ou quittent le système selon des **règles de routage**
  - Probabiliste
  - Déterministe

Un exemple de routages probabiliste

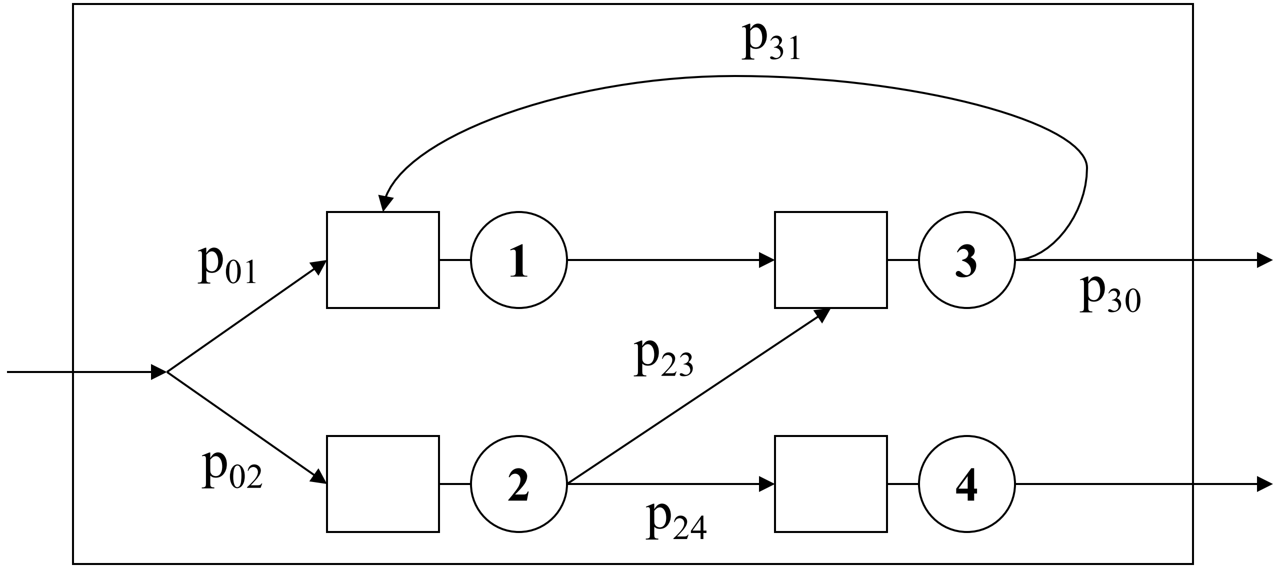


Un exemple de routage déterministe

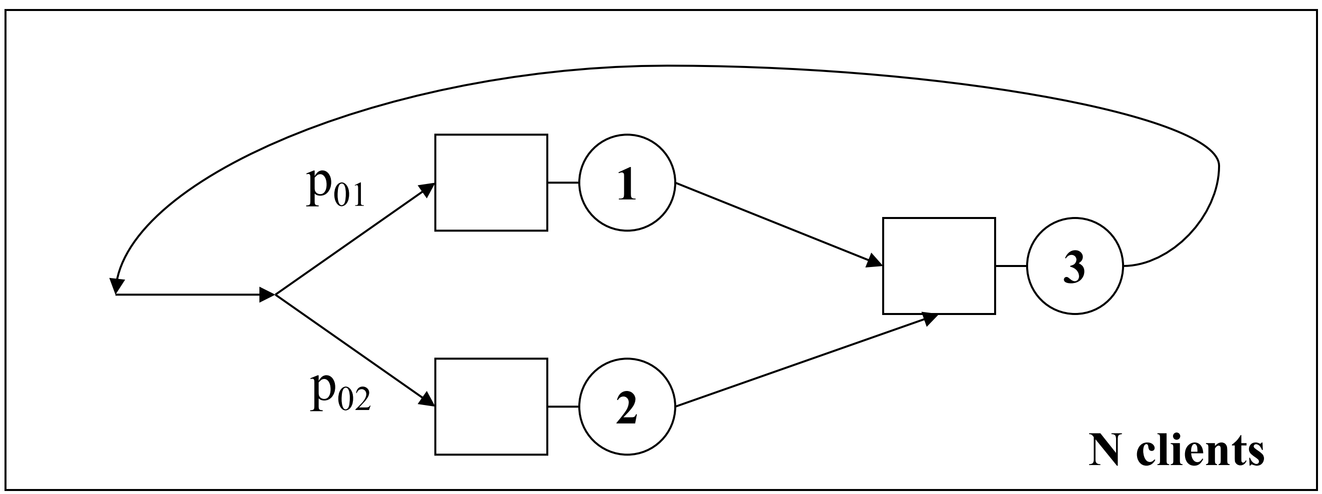


Routage vers la file la plus courte

Réseaux fermés et réseaux ouverts

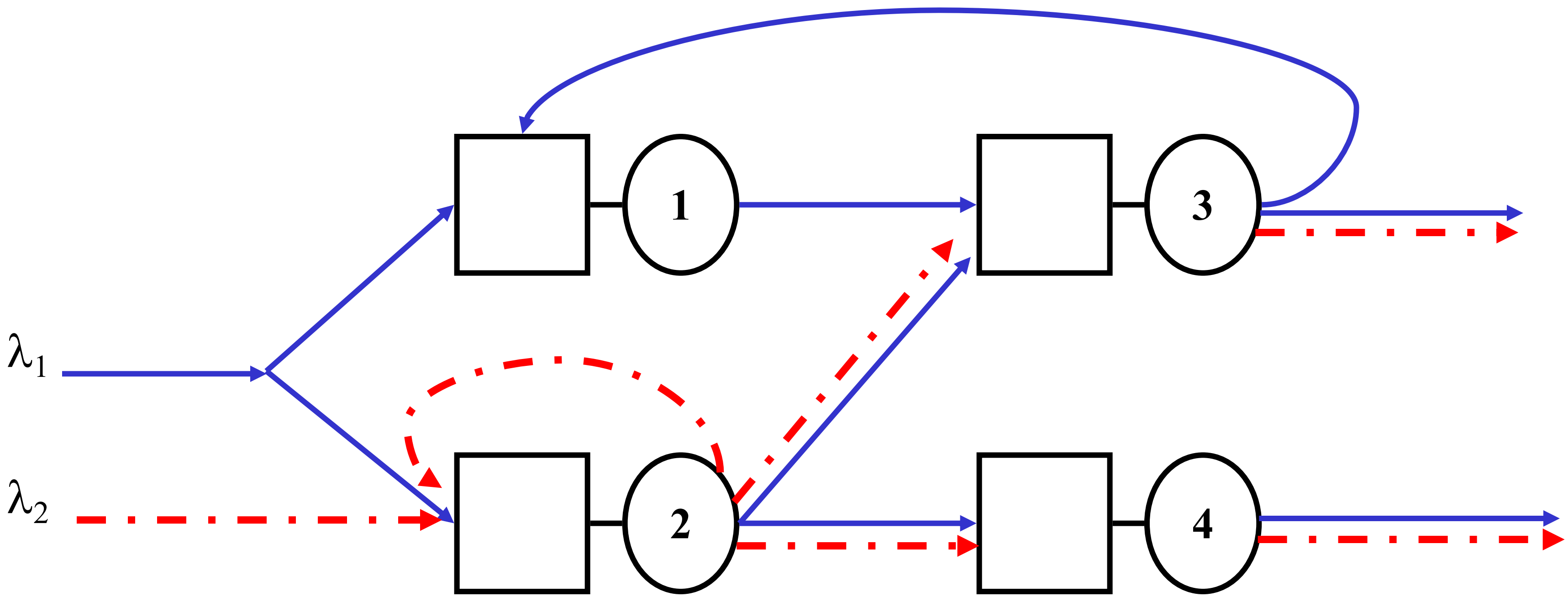


Réseau ouvert

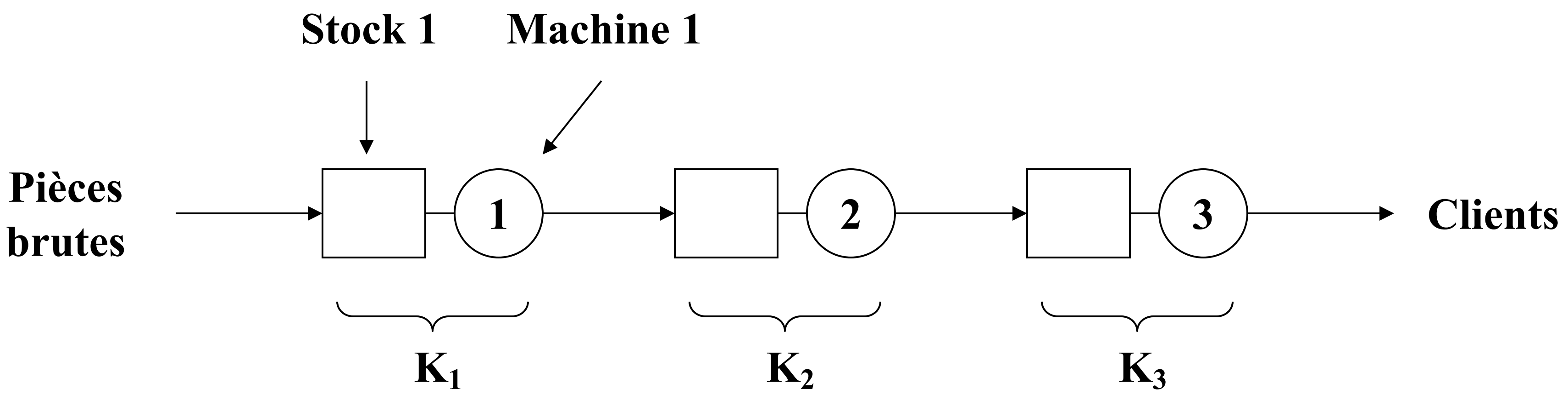


Réseau fermé

Réseaux multi-classes



Exemple illustratif: une ligne de production



Réseaux de Jackson ouverts

- Un réseau de Jackson ouvert (1957) est caractérisé par :
  - Une seule classe de clients
  - Un processus d’arrivée poissonien
  - Un seul serveur à chaque station
  - Un temps de service exponentiel à chaque station
  - Une capacité de stockage illimitée à toutes les stations
  - Une discipline de service FIFO pour toutes les files
  - Des routages probabilistes

Probabilités de routage

- p_{ij} : probabilité qu'un client terminant son service à la station i se rende à la station j
- p_{0i} : probabilité qu'un client qui rentre dans le système se rende à la station i
- p_{i0} désigne la probabilité qu'un client terminant son service à la station i sorte du système
- On pose $p_{00}=0$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1, \quad i = 0,1,\ldots,M$$

avec M le nombre de stations

Taux de visite de la station *i*

- e_i : taux de visite de la station i (= nombre moyen de passages à la station i)

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} e_j p_{ji}, \quad i = 0,\ldots,M$$

Débit moyen de la station *i*

- λ : taux moyen d'arrivée des clients dans le système
- λ_i : taux moyen d'arrivée des clients à la station i

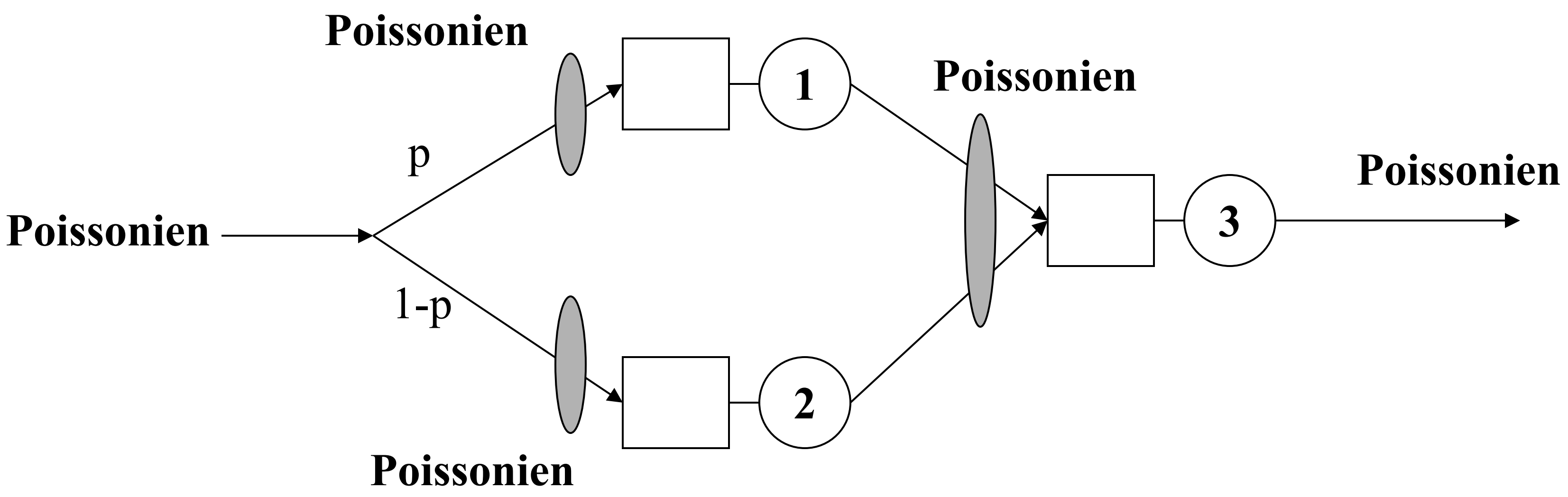
$$\lambda_i = \lambda e_i$$

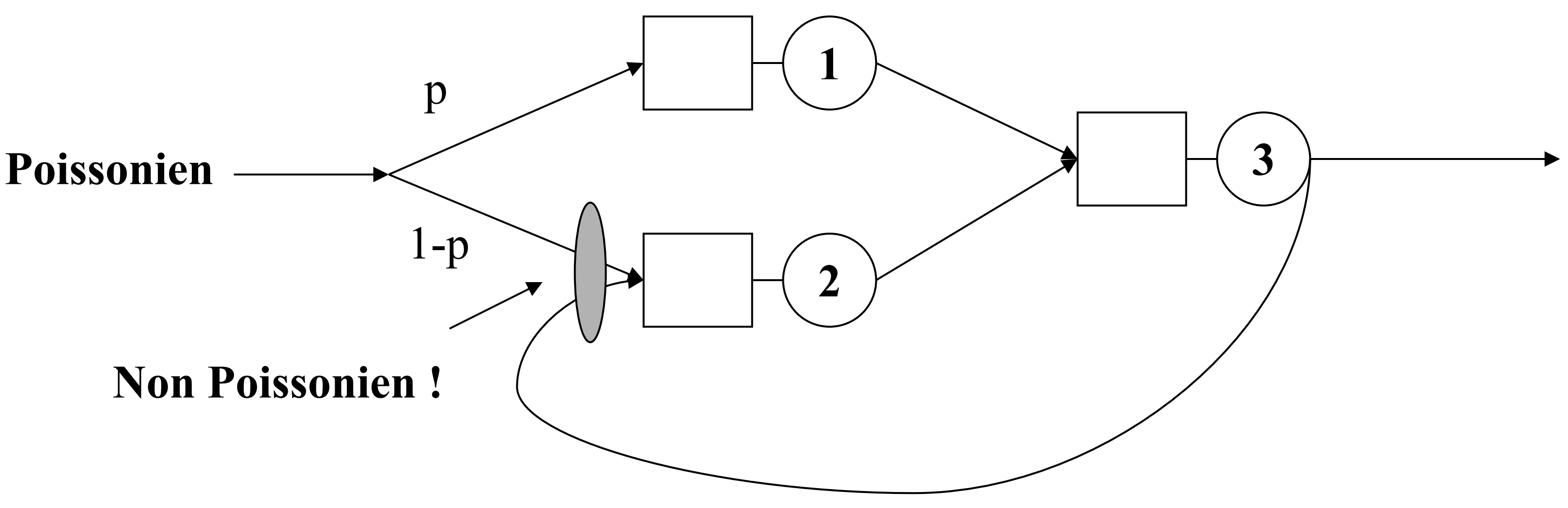
Conditions de stabilité du système

- Toutes les stations doivent être stables :

$$\lambda_i < \mu_i \quad i = 1, \ldots, M$$

Arrivées poissoniennes ?



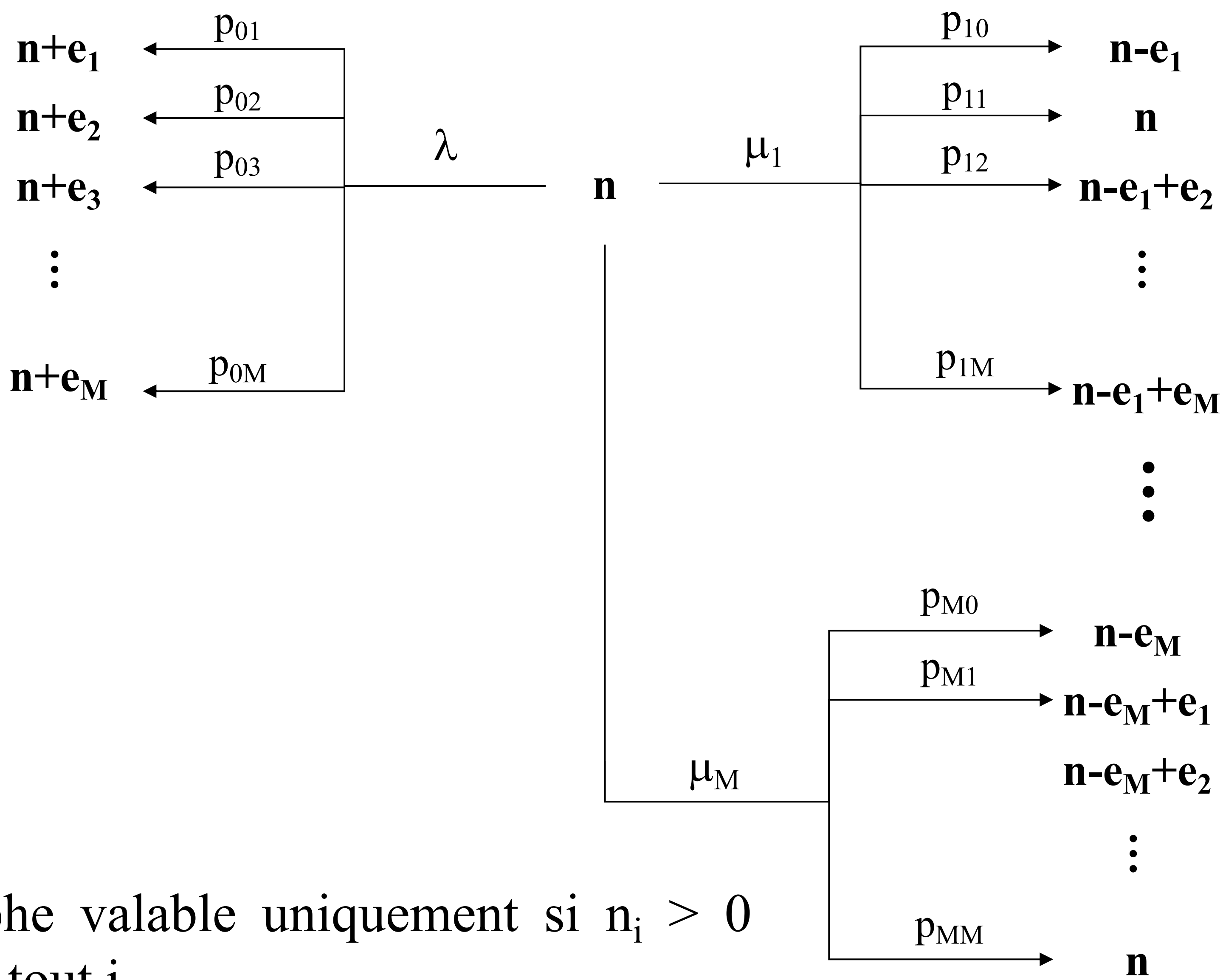


Description d'état d'un réseau de Jackson

- $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_M(t))$ où $n_i(t)$ est le nombre de clients présents dans la station i au temps t
- $\{\mathbf{n}(t)\}_{t\geq 0}$ est une CMTC
- **p(n) :** la probabilité stationnaire d'être dans l'état **n**
- Notation: $\mathbf{e_i}=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

i^ème^ position

Transitions de sortie d’un réseau de Jackson



- Graphe valable uniquement si $n_i > 0$ pour tout i

Équations d'équilibre du réseau

$$\overbrace{p(\mathbf{n})\left[\lambda + \sum_{\substack{i=1\\ n_i>0}}^{M}\sum_{j=0}^{M}\mu_i p_{ij}\right]}^{\text{Flux sortant de } \mathbf{n}} = \overbrace{\sum_{\substack{i=1\\ n_i>0}}^{M} p(\mathbf{n}-\mathbf{e_i})\lambda p_{0i}}^{\text{Flux entrant en } \mathbf{n}}$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ n_i>0}}^{M}\sum_{j=1}^{M} p(\mathbf{n}-\mathbf{e_i}+\mathbf{e_j})\mu_j p_{ji}$$

$$+\sum_{j=1}^{M} p(\mathbf{n}+\mathbf{e_j})\mu_j p_{j0}$$

Probabilités stationnaires

- Propriété: Dans un réseau de Jackson, les probabilités stationnaires sont données par la formule

$$\boxed{p(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^{M} p_i(n_i)}$$

avec $p_i(n_i)$ la probabilité stationnaire d'une file M/M/1 ayant un taux d'arrivée λ_i et un taux de service μ_i

$$p_i(n_i) = (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

Paramètres de performance

- Les paramètres de performance de chaque station se déduisent de la décomposition en files M/M/1 :

$$\begin{cases} X_i = \lambda_i \\ Q_i = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i} \\ R_i = \dfrac{Q_i}{X_i} = \dfrac{1}{\mu_i - \lambda_i} \end{cases}$$

- Les paramètres de performance du réseau s'en déduisent:

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Q = \sum_{i=1}^{M} Q_i \\ R = \sum_{i=1}^{M} e_i R_i = \dfrac{Q}{X} \end{cases}$$

Extension au cas de stations multiserveurs

- C_i : le nombre de serveurs de la station i
- Condition de stabilité :

$$\lambda_i < C_i \mu_i \quad i = 1, \ldots, M$$

- Probabilités stationnaires valent :

$$p(n) = \prod_{i=1}^{M} p_i(n_i)$$

avec $p_i(n_i)$ la probabilité stationnaire d'une file M/M/C ayant un taux d'arrivée λ_i, un taux de service μ_i et comportant C_i serveurs

Autres résultats

- Réseaux de Jackson fermés
- Réseaux multiclasses