MODÉLISATION DES PROCESSUS ALÉATOIRES *ISIMA*

Exercices

Jean-Philippe Gayon 2021–2022

Partie I : Chaînes de Markov à temps discret

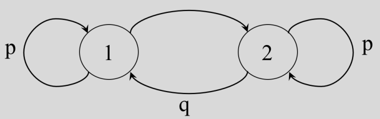
1 Téléphone arabe

Une histoire se transmet par bouche à oreille. Il existe deux versions de cette histoire : "Kevin a été à la plage" et "Kevin n'a pas été à la plage". La bonne version est la première. La probabilité de restituer correctement l'histoire que l'on vient d'entendre est de p. La probabilité de modifier l'histoire en l'autre version est de $q = 1 - p$. On supposera que $p \in]0, 1[$.

Remarque. *On peut transposer ce problème dans le domaine de l'informatique avec la transmission d'un bit de serveur ou serveur.*

Q1. Modéliser ce phénomène par une chaîne de Markov à temps discret dont vous donnerez le graphe et la matrice de transition.

Réponse Q1.
Notons 1 la bonne version et 2 la mauvaise version. Soit X_i représentant la version de l'histoire après la i-ème transmission. Nous avons $X_0 = 1$.



$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

Q2. Pour $p = 0.9$, donner les probabilités d'état après 1, 2 et 3 transmissions de l'histoire.

Réponse Q2.

$$\pi(0) = (1, 0)$$
$$\pi(1) = (0.9, 0.1)$$
$$\pi(2) = (0.82, 0.18)$$
$$\pi(3) = (0.756, 0.244)$$

Q3. Plus généralement, montrer que la probabilité que l'histoire soit la bonne après n transmissions vaut

$$\frac{1}{2}[1 + (1 - 2q)^n]$$

Réponse Q3.
Montrons le par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 0$: $P(X_0 = 1) = 1$.
Supposons la propriété vraie pour un entier n quelconque. Nous avons alors

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 2q)^n]$$

$$P(X_n = 2) = 1 - P(X_n = 1) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2q)^n]$$

Puis par le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 1) &= (1 - q)P(X_n = 1) + qP(X_n = 2) \\
&= \frac{1}{2}(1 - q)\left[1 + (1 - 2q)^n\right] + \frac{1}{2}q\left[1 - (1 - 2q)^n\right] \\
&= \frac{1}{2}[1 + (1 - q)(1 - 2q)^n - q(1 - 2q)^n] \\
&= \frac{1}{2}[1 + (1 - 2q)(1 - 2q)^n] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + (1 - 2q)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

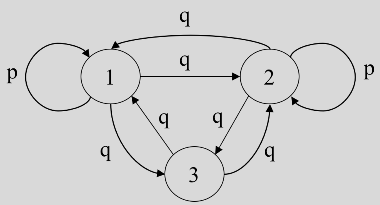
On conclut que la propriété est vraie pour $n + 1$, et donc pour tout entier positif.

Q4. Que se passe-t-il quand le nombre de transmissions tend vers l'infini ?

Réponse Q4.
Comme $(1-2q) \in]-1,1[$, nous avons $(1-2q)^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il suit que $P(X_n = 1)$ tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini. Les deux versions de l'histoire deviennent donc équiprobables quand n tend vers l'infini.

Q5. On reprend le même problème mais cette fois-ci avec trois versions de l'histoire. La probabilité de restituer l'histoire telle quelle est de p et les autres histoires sont restituées avec équiprobabilité. Reprendre les questions 1 et 2.

Réponse Q5.
Notons 1 la bonne version et $2,3$ les mauvaises versions. Soit X_i représentant la version de l'histoire après la i-ème transmission. Nous avons $X_0 = 1$.
Notons $q = (1-p)/2$.



$$P = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$

$$\pi(0) = (1, 0, 0)$$
$$\pi(1) = (0.9, 0.05, 0.05)$$
$$\pi(2) = (0.815, 0.0925, 0.0925)$$
$$\pi(3) = (0.74275, 0.128625, 0.128625)$$

Q6. Intuitivement, que se passe-t-il quand le nombre de transmissions tend vers l'infini ?

Réponse Q6.
Le problème étant symétrique, $\pi(n)$ devrait tendre, quand n tend vers l'infini, vers $(1/3, 1/3, 1/3)$.

2 Temps de séjour dans un état

Soit une CMTD avec pour matrice de transition $P = (p_{ij})$. Le temps de séjour T_j dans l'état j, représente le nombre de pas de temps passés dans l'état j. Par exemple, si une séquence d'états est $1,1,1,2,3,3,4$, le temps de séjour vaut 3 dans l'état 1, 1 dans l'état 2 et 2 dans l'état 3.

Q1. Pour $p_{jj} \in]0,1[$, donner la distribution du temps de séjour T_j dans l'état j.

Réponse Q1.
Soit une épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès $(1-p_{jj})$. Le temps de séjour vaut k si nous avons $k-1$ échecs consécutifs suivi d'un succès. Donc T_j suit une loi géométrique de paramètre p_{jj}, c'est-à-dire pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(T_j = k) = (1-p_{jj})p_{jj}^{k-1}$$

Q2. Exprimer l'espèrance de T_j en fonction de p_{jj}. Vérifier que les résultats sont cohérents quand p_{jj} tend vers 0 ou 1.

Réponse Q2.
Nous avons

$$E(T_j) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(T_j = k) = \frac{1}{1-p_{jj}}$$

qui tend vers 1 quand p_{jj} tend vers 0, et vers l'infini quand p_{jj} tend vers 1.
Lorsque $p_{jj} = 0$, la probabilté de rester dans l'état j est nulle et on reste exactement une étape dans l'état j.
Si $p_{jj} = 1$, la probabilité de sortir de l'état j est nulle et on y reste indéfiniment. On dira que l'état j est absorbant.

3 Marche aléatoire unidimensionnelle symétrique

A chaque seconde, une puce fait un pas à gauche ou à un pas à droite, avec une probabilité égale. La puce décrit ce que l'on appelle une *marche aléatoire unidimensionnelle symétrique*. Unidimensionnelle car la puce se déplace sur une ligne droite et symétrique car la probabilité d'aller à gauche ou à droite est égale. Nous allons établir dans cet exercice quelques propriétés élémentaires de ces marches aléatoires.
D'un point de vue plus théorique, on peut définir une marche aléatoire comme suit. Soit $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées telles que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 0.5$.
On définit alors $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Le processus $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ est appelé une marche aléatoire unidimensionnelle et symétrique sur $\mathbb{Z}$.

Q1. Pourquoi peut-on dire que cette marche aléatoire est une chaîne de Markov à temps discret ?

Réponse Q1.
Car l'évolution du système à l'instant n dépend exclusivement de l'état à l'instant n et pas des états aux instants précédents. La marche aléatoire est donc sans mémoire.

Q2. Soit $p_{ij} = P(Y_{n+1} = j|Y_n = i)$ la probabilité de transition de i à j. Donner p_{ij}, pour tout i et pour tout j et dessiner le graphe de la chaîne de Markov.

Réponse Q2.
$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 0.5$ et $p_{ij} = 0$ si $|j - i| \neq 1$

Q3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X_i et Y_n .

Réponse Q3.
Pour la variable aléatoire X_i, nous avons :

$$\begin{aligned} E(X_i) &= -1 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = \\ E(X_i^2) &= (-1)^2 \times 0.5 + 1^2 \times 0.5 = 1 \\ Var(X_i) &= E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 1 \\ \sigma(X_i) &= \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{n} \end{aligned}$$

Pour la variable aléatoire Y_n, nous avons

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 0$$

Les X_i étant indépendants, la variance de la somme est égale à la somme des variances :

$$\begin{aligned} Var(Y_n) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \\ \sigma(Y_n) &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

Q4. En utilisant le théorème centrale limite, donner une approximation de la loi de Y_n.

Réponse Q4.
Les X_i étant i.i.d. (identiquement et indépendamment distribués), le théorème centrale limite nous dit que la v.a. définie par

$$\frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite. On peut donc approcher Y_n, pour n suffisamment grand, par une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{n})$.

Q5. En déduire une approximation de la probabilité d'être à plus de 100 pas de la position initiale après 1000 pas.

Réponse Q5.

$$\begin{aligned} P(|Y_{1000}| \geq 100) &= 2P(Y_{1000} \geq 100) \simeq 2(P(Y_{1000}/\sqrt{1000} \geq 3.162) \\ &= 2P(Z \geq 3.162) = 2(1 - P(Z \leq 3.162)) \simeq 0.001565 \\ P(|Y_{1000}| \leq 10) &\simeq 0.248 \end{aligned}$$

Q6. Après n pas, le nombre de pas effectués vers la droite $(+1)$ est noté D_n et le nombre de pas effectués vers la gauche (-1) est notée G_n. Donner la loi de D_n et G_n.

Réponse Q6.
Les variables aléatoires D_n et G_n représentent le nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli de paramètre $1/2$. Elles sont donc distribuées suivant des lois binômiales $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Donc, pour $k = 0, 1, \cdots, n$,

$$P(D_n = k) = P(G_n = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

Q7. En déduire la loi de Y_n.

Réponse Q7.
Notons que $Y_n = D_n - G_n$ et que $D_n + G_n = n$. Il vient alors

$$Y_n = 2D_n - n$$

La variable aléatoire Y_n prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![-n, n]\!]$. Pour k dans cet ensemble, nous avons :

$$P(Y_n = k) = P(2D_n - n = k) = P\left(D_n = \frac{k+n}{2}\right)$$

Cette probabilité est nulle si k et n n'ont pas la même parité. Lorsque k et n ont la même parité, nous obtenons :

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}}\frac{1}{2^n}$$

4 Matrices stochastiques

Q1. Montrer que si A et B sont stochastiques, alors AB est stochastique.

Réponse Q1.
Notons a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} les coefficients des matrices A, B et C. Les matrices A et B étant stochastiques, les sommes des coefficients de chaque ligne valent 1 :

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1$$

Il suit

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \right) && (2)\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} && (3)\\
&= 1 && (4)
\end{aligned}$$

et on conclut que AB est stochastique.

Q2. Montrer que si P est stochastique, alors P^n est stochastique.

Réponse Q2.
Immédiat par récurrence en utilisant la question précédente.

Q3. Soit P une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre.

Réponse Q3.
On vérifie aisément que le vecteur $(1, \cdots, 1)^T$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Q4. Soit P une matrice stochastique. Montrer que ses valeurs propres sont inférieures ou égales à 1 en module.

Réponse Q4.
Soit λ une valeur propre associée à une matrice stochastique P et $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé à λ, de i-ème composante x_i non nulle. Alors $P\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entraîne $P^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$

Supposons que $|\lambda| > 1$, alors $|(P^k\mathbf{x})_i| = |(\lambda^k\mathbf{x})_i| = |\lambda^k||x_i| \to \infty$ lorsque $k \to \infty$.
Par ailleurs, nous avons $|(P^k\mathbf{x})_i|$ qui est borné quand k tend vers l'infini :

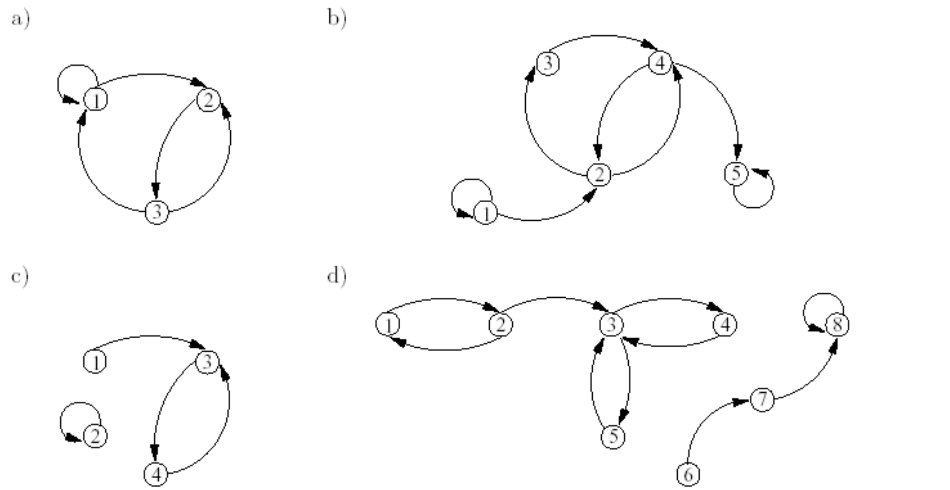
$$|(P^k\mathbf{x})_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(k)} x_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad (5)$$

Nous tombons sur une contradiction et l'hypothèse de départ ($|\lambda| > 1$) est donc fausse.
Conclusion : toute valeur propre est inférieure ou égale en module.

Q5. Quelle est le rayon spectral d'une matrice stochastique ?

Réponse Q5.
Le rayon spectral d'une matrice est sa plus grande valeur propre en module. On déduit des deux questions précédentes que le rayon spectral d'une matrice stochastique vaut 1.

5 Classification des états



Q1. Classer les états des chaînes de Markov associées aux graphes ci-dessus (états absorbants, transitoires, récurrents, périodiques).

Réponse Q1.

a) Tous les états sont récurrents non nuls, apériodiques.

b) 5 est absorbant (et récurrent), les autres états sont transitoires. Pas d'état périodique.

c) 1 est transitoire, 2 est absorbant (et récurrent). 3 et 4 sont récurrents et 2-périodiques.

d) — États transitoires : 1, 2, 6, 7
— États récurrents : les états non transitoires
— États périodiques : 1,2, 3, 4, 5 sont 2-périodiques. En effet, on ne peut revenir dans ces états qu'après un nombre d'étapes multiple de 2>1.
— États apériodiques : les états non périodiques
— États absorbants : 8

Q2. Parmi ces chaînes, lesquelles sont irréductibles ? Lesquelles sont apériodiques ?

Réponse Q2.
La chaîne de Markov a) est irréductible tandis que les autres sont réductibles. Toutes les chaînes sont apériodiques.

6 C'est ton destin ! (d'après Baynat [2000])

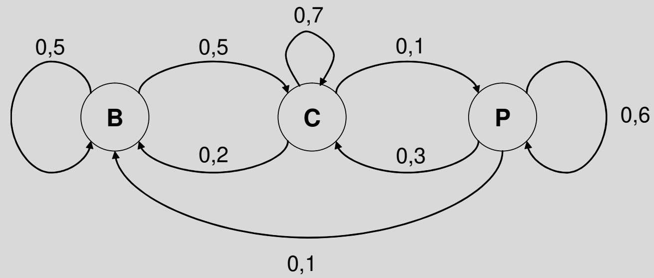
D'éminents sociologues rangent les individus de notre société en 3 classes sociales : Bourgeoisie, B, Classe moyenne, C et Prolétariat, P. On s'intéressera dans ce modèle simpliste à la classe sociale qu'atteint un individu à la fin de sa vie. On supposera que celle-ci dépend uniquement de la classe sociale de son père. Si le père appartient à B son fils appartiendra aux classes B et C avec des probabilités respectives de 0.5 et 0.5. Si le père appartient à C, son fils appartiendra aux classes B, C et P avec des probabilités respectives de 0.2, 0.7 et 0.1. Si le père appartient à P, son fils appartiendra aux classes B, C et P avec des probabilités respectives de 0.1, 0.3 et 0.6.

Q1. Modéliser ce comportement sociologique par une chaîne de Markov.

Réponse Q1.
$\{X_n\}_{n=0,1,\cdots}$: classe sociale de la n^{ieme} génération. L'espace d'état $E = B, C, P$ est discret tout comme l'espace des temps. De plus, le processus $\{X_n\}$ est sans mémoire et on peut conclure que $\{X_n\}$ est bien une CMTD.

Q2. Donner son graphe et sa matrice de transition.

Réponse Q2.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} B & \;\; C & \;\; P \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Q3. Donner la nature de chacun des états. La chaîne est-elle irréductible ? Périodique ?

Réponse Q3.
Tous les états sont récurrents, la chaîne est donc irréductible. Par ailleurs, la chaîne est apériodique.

Q4. Quelles sont à long terme les proportions de chacune des classes ?

Réponse Q4.

$$\begin{cases} \pi = \pi \mathbf{P} \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.5\pi_B + 0.2\pi_C + 0.1\pi_P = \pi_B \\ 0.5\pi_B + 0.7\pi_C + 0.3\pi_P = \pi_C \\ 0.1\pi_C + 0.6\pi_P = \pi_P \\ \pi_B + \pi_C + \pi_P = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_B = \dfrac{9}{34} \simeq 0.265 \\ \pi_c = \dfrac{20}{34} \simeq 0.588 \\ \pi_P = \dfrac{5}{34} \simeq 0.147 \end{cases}$$

Q5. Quelle est la probabilité stationnaire d'être dans une classe sociale différente de celle de son grand-père paternel ?

Réponse Q5.
Soit P_0 la probabilité d'être dans une classe sociale différente de celle de son grand-père

paternel.

$$\begin{aligned}P_0 &= P[X_{n+2} \neq B|X_n = B]\pi_B + P[X_{n+2} \neq C|X_n = C]\pi_C + P[X_{n+2} \neq P|X_n = P]\pi_P \\ &= (1 - p_{BB}^{(2)})\pi_B + (1 - p_{CC}^{(2)})\pi_C + (1 - p_{PP}^{(2)})\pi_P\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}p_{BB}^{(2)} &= p_{BB}p_{BB} + p_{CB}p_{BC} + p_{BP}p_{PB} = 0.35 \\ p_{CC}^{(2)} &= 0.62 \\ p_{BB}^{(2)} &= 0.39\end{aligned}$$

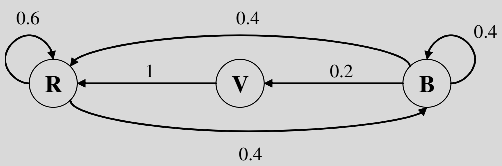
Au final, $P_0 = 33/68 = 0.485$

7 Proportion de couleurs

On considère 3 urnes : une rouge, une verte et une bleue. L'urne rouge contient 3 boule rouges et 2 boules bleues. L'urne verte contient 3 boules rouges. L'urne bleue contient 1 boules verte, 2 boules rouges et 2 boules bleues. Une première boule est tirée au hasard dans l'urne rouge et remise dans cette urne. A chaque étape ultérieure, une boule est tirée au hasard dans l'urne de même couleur que la boule précédemment choisie et est replacée dans son urne. Ainsi si la première boule tirée est bleue, la deuxième boule est tirée au hasard dans l'urne bleue.

Q1. Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit une boule rouge ?

Réponse Q1.
Considérons le processus stochastique $\{X_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ où X_n représente l'urne sélectionnée à la n-ième étape. X_n peut prendre les valeurs R, V, B (rouge, vert, bleu) et $X_0 = R$. $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov à temps discret dont le graphe est représenté ci-dessous.



Sa matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

La probabilité que la troisième boule tirée soit une boule rouge est égale à $\pi_R(3)$ que l'on calcule en utilisant $\pi(3) = \pi(0)P^3$. On en déduit que $\pi_R(3) = 69/125 = 0.552$.

Une autre manière, plus intuitive d'obtenir ce résultat, est de lister les possibilités d'arriver dans l'urne rouge en 3 étapes :
- RRRR avec une probabilité : 0,6*0,6*0,6
- RRBR avec une probabilité : 0,6*0,4*0,4
- RBRR avec une probabilité : 0,4*0,4*0,6
- RBBR avec une probabilité : 0,4*0,4*0,4
- RBVR avec une probabilité : 0,4*0,4*1

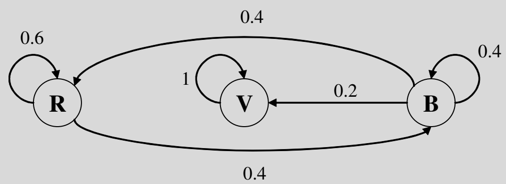
En sommant ces probabilités, on obtient le même résultat, à savoir une probabilité de 0,552.

Q2. Sur le long terme, quelle est la proportion de boules rouges tirées ? De boules vertes ? De boules bleues ?

Réponse Q2.
$\{X_n\}$ est une CMTD irréductible et apériodique. Le vecteur des probabilités stationnaires $\pi = (\pi_R, \pi_V, \pi_B)$ vérifie donc $\pi = \pi P$. Avec la condition de normalisation $\pi_R + \pi_V + \pi_B$, on en déduit que $\pi = (5/9, 2/27, 10/27) = (0.556, 0.0741, 0.370)$.

Q3. On reprend le problème initial en changeant une hypothèse. Désormais, l'urne verte contient 3 boules vertes uniquement. Quel est le temps moyen avant absorption par l'urne verte ?

Réponse Q3.
Avec cette nouvelle hypothèse, le graphe devient :



Soit e_R, e_V, e_B les temps moyens avant absorption par l'urne verte en partant respectivement des états R, V, B. On a alors :

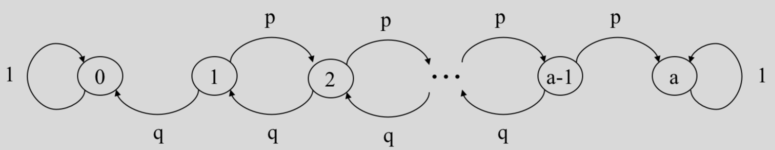
$$\begin{cases} e_R = 1 + 0,6e_R + 0,4e_B \\ e_B = 1 + 0.4e_R + 0.4e_B + 0.2e_V \\ e_V = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,4e_R - 0,4e_B = 1 \\ -0,4e_R + 0,6e_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_B = 10 \\ e_R = 30/4 = 12,5 \end{cases} \tag{7}$$

8 Roulette française versus roulette américaine

Vous sentant en veine, vous achetez i jetons et vous vous dirigez vers la table de roulette la plus proche. Votre stratégie est simple : vous misez un jeton à chaque jeu et ne sélectionnez que les chances simples (pair/impair, rouge/noir, manque/passe). La probabilité de gagner est à chaque fois de p. Vous décidez de vous arrêter si vous arrivez à a jetons (ou si vous êtes ruiné et qu'il ne vous en reste aucun). On définit X_n comme votre nombre de jetons après n jeux.

Q1. Montrer que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Dessiner son graphe représentatif. Donner sa matrice de transition ainsi que la nature de chacun des états. La chaîne est-elle irréductible ?

Réponse Q1.



$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ q & 0 & p & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

La chaîne n'est pas irréductible car on ne peut pas aller de l'état 0 aux autres états.

Q2. Quelle est la probabilité a_{i0} d'être ruiné (plus d'argent) en partant de l'état i ?

Réponse Q2.
La probabilité d'être ruiné en partant de l'état i est la probabilité a_{i0} d'être absorbé par l'état 0.

$$\begin{cases} a_{i0} = pa_{i+1;0} + qa_{i-1;0} & 1 \leq i \leq a-1 \\ a_{00} = 1 \\ a_{a0} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Equation caractéristique de la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$px^2 - x + q = 0$$

Les racines de cette équations sont $x_1 = q/p = \rho$ et $x_2 = 1$. Nous savons alors que a_{i0} est de la forme suivante :

$$a_{i0} = Ax_1^i + Bx_2^i$$

Les conditions aux limites (en $i = 0$ et $i = a$) donnent :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\rho^a + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{\rho^a}{1-\rho^a} \\ B = \dfrac{1}{1-\rho^a} \end{cases} \tag{9}$$

On en déduit le résultat final :

$$a_{i0} = \frac{\rho^a - \rho^i}{\rho^a - 1}$$

Q3. En déduire l'espérance de gain $E[G]$.

Réponse Q3.
$E[G] = a(1 - a_{i0}) - i$

Q4. Calculer e_i le temps moyen du jeu en partant de i (vous pouvez également établir une relation de récurrence sur e_i).

Réponse Q4.

$$\begin{cases} e_i = 1 + pe_{i+1} + qe_{i-1} & 1 \leq i \leq a-1 \\ e_0 = 0 \\ e_a = 0 \end{cases} \tag{10}$$

On a affaire à une récurrence linéaire d'ordre 2 avec second membre dont la solution est la somme de la solution homogène + une solution particulière de l'équation générale. La solution particulière est de la forme γi. On en déduit que $\gamma = 1/(q-p)$. D'où :

$$e_i = \frac{i}{q-p} + C + D\rho^i$$

En utilisant les conditions limites, on obtient :

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ \dfrac{a}{q-p} + C + D\rho^a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -C \\ C = \dfrac{a}{q-p}\dfrac{1}{\rho^a - 1} \end{cases} \tag{11}$$

Finalement :

$$e_i = \frac{i}{q-p} - \frac{a}{q-p}\frac{\rho^i - 1}{\rho^a - 1}$$

Q5. Application numérique : calculer e_i, a_{i0} et $E[G]$ pour la roulette française ($p = 18/37$) et pour la roulette américaine ($p = 18/38$) en prenant $i = 100$ et $a = 200$.

Réponse Q5.
Pour $i = 100$ et $a = 200$, on obtient les résultats suivants :

Roulette	e_i	a_{i0}	$E[G]$
française	3667	0.99553	−99.1
américaine	1900	0.99997	−99.99

Partie II : Chaînes de Markov à temps continu

9 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi essentielle dans la théorie des chaînes de Markov à temps continu. Soit X une variable aléatoire distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ, et de densité $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

Q1. Calculer :
- la fonction de répartition de X, notée F,
- l'espérance de X, notée $E[X]$,
- la variance de X, notée $Var[X]$
- l'écart-type de X, noté $\sigma[X]$,
- le coefficient de variation de X défini par $cv[X] = \dfrac{\sigma[X]}{E[X]}$.

Réponse Q1.

- Pour $t < 0$, $F(t) = 0$. Pour $t \geq 0$:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda t}$$

-

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty t f(t) dt = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} du \\ &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \\ &= 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- Rappelons la définition de la variance :

$$Var[X] = \int_0^\infty (t - E[X])^2 f(t) dt$$

  Plutôt que de calculer directement l'intégrale précédente, on peut utiliser la propriété suivante :
$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Calculons d'abord $E[X^2]$:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^\infty t^2 f(t)dt = \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t} du \\ &= \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-\lambda t} \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} = \frac{2}{\lambda}E[X] = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

—

$$\sigma[X] = \sqrt{Var[X]} = \frac{1}{\lambda}$$

—

$$cv = 1$$

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de taux respectifs λ_1 et λ_2. Notons $Y = \min\{X_1, X_2\}$.

Q2. Montrer que Y est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Réponse Q2.

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= P[(X_1 > y) \cap (X_2 > y)] \\ &= P(X_1 > y)P(X_2 > y) \\ &= \exp(-\lambda_1 y)\exp(-\lambda_2 y) \\ &= \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)y] \end{aligned}$$

D'où $P(Y \leq y) = 1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)y]$ et Y suit une loi exponentielle de taux $\lambda_1 + \lambda_2$.

Q3. Montrer que $P[X_1 < X_2] = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Réponse Q3.

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2] &= \int_{x_1=0}^\infty \left[\int_{x_2=x_1}^\infty f_1(x_1)f_2(x_2)dx_2\right] dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^\infty \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x_1)\left[\int_{x_2=x_1}^\infty \lambda_2 \exp(-\lambda_2 x_2)dx_2\right] dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^\infty \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x_1)\exp(-\lambda_2 x_1)dx_1 = \int_{x_1=0}^\infty \lambda_1 \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)x_1]dx_1 \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Nous allons généraliser les résultats précédents. Considérons n variables aléatoires exponentielles indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ de taux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Q4. Montrer que $\min(X_1, \cdots, X_n)$ est distribué suivant une loi exponentielle de taux $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Réponse Q4.
Montrons ce résultat par récurrence. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour $n \geq 2$. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de taux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Par hypothèse de récurrence, nous avons alors $T_n = \min(X_1, \cdots, X_n)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Puis, en réutilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons aussi $\min\{T_n, X_{n+1}\} = \min(X_1, \cdots, X_n, X_{n+1})$ qui suit une loi exponentielle de taux $(\sum_{i=1}^n \lambda_i) + \lambda_{n+1}$.

Q5. Montrer que $P(X_1 = \min(X_1, \cdots, X_n)) = \dfrac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$

Réponse Q5.
Nous avons

$$P(X_1 = \min(X_1, \cdots, X_n) = P(X_1 < \min(X_2, \cdots, X_n))$$

D'après la question précédente, nous avons $\min(X_2, \cdots, X_n)$ qui suit une loi exponentielle de taux $\lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. La question 3 nous donne alors

$$P(X_1 < \min(X_2, \cdots, X_n)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}$$

CQFD.

10 Temps de séjour et lois sans mémoire

Rappelons que le temps de séjour dans un état a :

- une distribution géométrique pour une CMTD homogène
- une distribution exponentielle pour une CMTC homogène

Nous allons montrer dans cet exercice que ces lois sont sans mémoire, à savoir que le temps passé dans un état ne donne pas d'information sur la distribution du temps qu'il reste à passer dans cet état.

On dit que T est une variable aléatoire sans mémoire si elle vérifie :

$$\forall t, \forall x, P[T \leq t + x | T > t] = P[T \leq x]$$

Autrement dit, la fonction de répartition sachant que $T > t$ est tout simplement la fonction de répartition : $F_{T|T>t} = F_T$.

Q1. Montrer qu'une variable aléatoire exponentielle est sans mémoire.

Réponse Q1.
Soit T une variable aléatoire exponentielle de taux λ.

$$\begin{aligned} P[T > t + x | T > t] &= \frac{P[(T > t + x) \cap (T > t)]}{P[T > t]} \\ &= \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda x} \\ &= P(T > x) \end{aligned}$$

Il suit que $P[T \leq t + x | T > t] = P(T \leq x)$ et T est une loi sans mémoire/

Q2. Réciproquement, montrer que toute variable aléatoire continue sans mémoire suit une distribution exponentielle.

Réponse Q2.
Considérons une v.a. T sans mémoire de fonction de répartition F.

$$\begin{aligned} P[T > t + x | T > t] &= \frac{P[(T > t + x) \cap (T \geq t)]}{P[(T > t)]} \\ &= \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]} \end{aligned}$$

En utilisant la propriété sans mémoire de T, on obtient :

$$P[T > x] = \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]}$$

En posant $G(x) = P[T > x]$, on a alors :

$$\forall t, \forall x, G(t + x) = G(t) \times G(x)$$

On reconnaît l'équation fonctionnelle d'une loi exponentielle et G est forcément de la forme $G(x) = \exp(-\lambda t)$. D'où :

$$F(x) = P[T \leq x] = 1 - P[T > x] = 1 - \exp(-\lambda x)$$

On note par ailleurs que λ est forcément strictement positif, afin que $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Q3. Montrer qu'une variable géométrique est sans mémoire. Remarque : on peut montrer que la seule loi discrète sans mémoire est la loi géométrique.

Réponse Q3.
Soit T une v.a. suivant une loi géométrique de paramètre p ($q = 1 - p$). Nous avons pour $t = 1, 2, \cdots$, $P(T = t) = q^{k-1}p$, $P(T \leq t) = 1 - q^k$ et $P(T > t) = q^k$. Il suit que

$$\begin{aligned} P[T > t + x | T > t] &= \frac{P[(T > t + x) \cap (T > t)]}{P[T > t]} \\ &= \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]} \\ &= \frac{q^{t+x}}{q^t} \\ &= q^x \\ &= P(T > x) \end{aligned}$$

CQFD.

11 Taux de panne

Soit un appareil de durée de fonctionnement T dont on connaît la fonction de répartition F et la densité f. On appelle alors *taux de panne* la fonction

$$\tau(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Nous allons montrer que $\tau(t)$ peut s'interpréter comme suit :

$$\tau(t)dt \simeq \text{probabilité qu'une panne se produise entre les instants } t \text{ et } t+dt$$
$$\text{sachant que l'appareil fonctionne à l'instant } t$$

Autrement dit, plus le taux de panne $\tau(t)$ est grand, plus un appareil fonctionnant a l'instant t a de chances de tomber en panne dans les instants suivant t.

Q1. Démontrer la relation suivante :

$$P(t < T \leq t + dt) = f(t)dt + o(dt)$$

Cette relation implique que, pour un dt petit, la probabilité que T soit comprise entre t et $t + dt$ est approximativement égale à $f(t)dt$.

Réponse Q1.
Nous savons que f est la dérivée de F et nous pouvons appliquer la formule de Taylor :

$$F(t + dt) = F(t) + f(t)dt + o(dt)$$

En notant que $F(t + dt) - F(t) = P(t < T \leq t + dt)$, il vient :

$$P(t < T \leq t + dt) = f(t)dt + o(dt)$$

Q2. Démontrer la relation suivante :

$$P(T \leq t + dt|T > t) = \tau(t)dt + o(dt)$$

Cette relation implique que la probabilité qu'une panne se produise entre les instants t et $t + dt$, sachant que l'appareil fonctionne à l'instant t, est environ égale à $\tau(t)dt$.

Réponse Q2.

$$\begin{aligned} P(T \leq t + dt|T > t) &= \frac{P(T \leq t + dt \cap T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(t < T \leq t + dt)}{P(T > t)} \\ &= \frac{f(t)dt + o(dt)}{1 - F(t)} \\ &= \tau(t)dt + o(dt) \end{aligned}$$

Notez que nous avons bien $\dfrac{o(dt)}{1 - F(t)} = o(dt)$ car $1 - F(t)$ est une constante, pour t fixé.

Q3. Dans le cas où T suit une loi exponentielle de paramètre λ, déterminer le taux de panne τ. Expliquer pourquoi on utilise la loi exponentielle pour modéliser des phénomènes "sans mémoire" ?

Réponse Q3.
Un rapide calcul montre que $\tau(t) = \lambda$ pour tout t positif :

$$\tau(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t)} = \lambda$$

Ainsi le taux de panne est indépendant de l'instant considéré. Autrement dit, la probabilité que l'appareil tombe en panne dans les instants à venir, sachant que l'appareil n'est pas encore en panne, est indépendante du temps. C'est pourquoi on dit que la loi exponentielle est sans mémoire.

Q4. Supposons maintenant que T suit une loi uniforme sur sur $[0, 1]$. Intuitivement, le taux de panne est-il décroissant, constant ou croissant ? Montrer le par le calcul.

Réponse Q4.
Intuitivement, la panne a de plus en plus de chances de se produire car on sait qu'elle aura de toute façon lieu au plus tard à $t = 1$. Montrons le rigoureusement.

$$\tau(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{1}{1 - t}$$

Q5. Proposer des situations réelles modélisant des taux de panne croissants ou décroissants, ou ni l'un ni l'autre.

Réponse Q5.

— Soit T la durée de vie d'une lampe. A priori, le taux de panne est croissant : plus la lampe est vieille, plus elle a de chances de tomber en panne.

— Si l'on considère un nouveau produit (moteur de voiture par exemple), on peut imaginer que le taux de panne soit décroissant dans une premier temps (phase de rodage) puis croissant dans un deuxième temps (phase d'usure).

12 Loi de Poisson

Rappelons qu'une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λ si, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Q1. Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson suit aussi une loi de Poisson.

Réponse Q1.
Soit $N = N_1 + N_2$ où N_i suit une loi de Poisson de paramètres λ_i . En utilisant l'indépendance de N_1 et N_2 ainsi que la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P[N=n] = P[N_1+N_2=n] &= \sum_{k=1}^{n} P[N_1=k]P[N_2=n-k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}[\lambda_1+\lambda_2]^n \end{aligned}$$

Ainsi, $N_1 + N_2$ est bien un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

13 Processus de Poisson

Un processus de Poisson de paramètre λ est un processus stochastique à temps continu $N(t)$ tel que :
- $N(0) = 0$
- $N(t)$ est incrémenté de $+1$ après un temps T distribué suivant une loi exponentielle de paramètre λ

La loi exponentielle étant sans mémoire, $N(t)$ est une chaîne de Markov à temps continu.

Attention à ne pas confondre un processus de Poisson (= processus stochastique) avec une loi de Poisson (= variable aléatoire).

Q1. Donner le graphe de $N(t)$.

Réponse Q1.

$$0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \xrightarrow{\lambda} 3 \xrightarrow{\lambda} \cdots$$

Q2. Pour un processus de Poisson, écrire les équations en régime transitoire pour les probabilités d'état. Préciser les conditions initiales.

Réponse Q2.
Les conditions initiales s'écrivent $\pi_0(0) = 1$ et $\pi_i(0) = 0$ pour $i \geq 1$. Les probabilités en regimes transitoire doivent par ailleurs satisfaire le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \pi_0'(t) = -\lambda\pi_0(t) \\ \pi_i'(t) = -\lambda\pi_i(t) + \lambda\pi_{i-1}(t) \end{cases}$$

Q3. Vérifier que les probabilités d'état de $N(t)$ valent

$$\pi_i(t) = P[N(t)=i] = \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

Réponse Q3.
Les conditions initiales sont vérifiées : $P[N(0)=0] = 1$ et $P[N(0)=i] = 0$ pour $i \geq 1$.

En dérivant la formule proposée par rapport à t, nous obtenons pour $i = 0$:

$$\pi_0'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda\pi_0(t)$$

Pour $i \geq 1$, nous obtenons

$$\pi_i'(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda t} - \lambda\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} = \lambda\pi_{i-1}(t) - \lambda\pi_i(t)$$

Les probabilités d'état proposées vérifient donc bien le système d'équations différentielles en régime transitoire ainsi que les conditions initiales.

Q4. Etudier la limite de $P[N(t)=k]$ quand t tend vers l'infini.

Réponse Q4.
$P[N(t)=k]$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Ceci est logique car tous les états sont transitoires.

Q5. Quelle est la distribution de $N(t)$?

Réponse Q5.
$N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt.

Q6. Soit deux processus de Poisson indépendants $N_1(t)$ et $N_2(t)$ de taux respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que leur superposition $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Réponse Q6.
$N_i(t)$ est distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda_i t$. La somme de lois de Poisson étant une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, nous avons $N(t)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)t$. On en déduit que $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

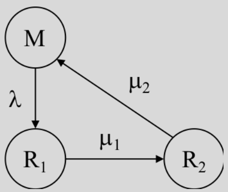
14 Fiabilité d'un atelier [Baynat, 2000]

Un atelier comporte deux machines identiques, chacune a une fiabilité exponentielle de taux λ (ce qui signifie que le temps entre deux pannes consécutives est supposé distribué selon une loi exponentielle de taux λ) et fonctionne en permanence quand elle n'est pas en panne. Lorsqu'une panne survient, la réparation requiert l'intervention de deux réparateurs R_1 et R_2 successivement (toujours dans l'ordre R_1 puis R_2). L'atelier ne dispose que d'un seul réparateur R_1 et d'un seul réparateur R_2. Ainsi, si une machine en panne est en cours de réparation avec R_1 et que l'autre tombe en panne, elle devra attendre que R_1 se libère (même chose pour R_2). Les durées aléatoires des réparations de R_1 et R_2 suivent des lois exponentielles de taux respectifs μ_1 et μ_2.

Q1. Pour simplifier, commençons par le cas avec une seule machine. Montrer que le système peut être décrit par une chaîne de Markov (à temps continu) à 3 états. Donner le graphe associé.

Réponse Q1.

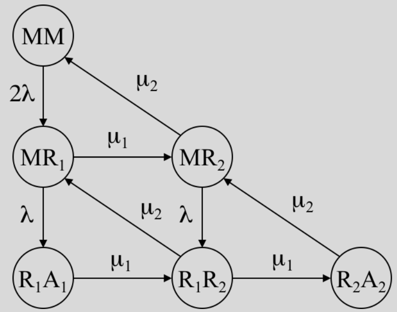
— M : machine en marche
— R_1 : machine en réparation 1
— R_2 : machine en réparation 2



Q2. Montrer que le système avec 2 machines peut être décrit par une chaîne de Markov à 6 états. Donner le graphe associé.

Réponse Q2.

— M : machine en marche
— R_1 : machine en réparation 1
— R_2 : machine en réparation 2
— A_1 : machine en attente de réparation 1
— A_2 : machine en attente de réparation 2



Q3. Écrire les équations d'état en régime stationnaire dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Réponse Q3.
Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned}
2\lambda\pi(MM) &= \mu\pi(MR_2)\\
(\lambda+\mu)\pi(MR_1) &= 2\lambda\pi(MM) = +\mu\pi(R_1R_2)\\
(\lambda+\mu)\pi(MR_2) &= \mu\pi(MR_1) + \mu\pi(R_2A_2)\\
\mu\pi(R_1A_1) &= \lambda\pi(MR_1)\\
2\mu\pi(R_1R_2) &= \mu\pi(R_1A_1) + \lambda\pi(MR_2)\\
\mu\pi(R_2A_2) &= \mu\pi(R_1R_2)
\end{aligned}$$

Q4. Calculer les probabilités d'état stationnaires.

Réponse Q4.
En utilisant le système précédant et la condition de normalisation $\sum_i \pi_i = 1$, on obtient

en posant $\rho = \lambda/\mu$:

$$\pi(MM) = \frac{1}{1 + 4\rho + 6\rho^2}$$
$$\pi(R_1R_2) = \pi(R_2A_2) = \pi(R_1A_1) = 2\rho^2\pi(MM)$$
$$\pi(MR_1) = \pi(MR_2) = 2\rho\pi(MM)$$

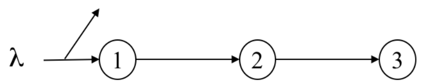
Q5. On suppose qu'en moyenne une machine tombe en panne toutes les 4 heures et qu'il faut en moyenne 1 heure à chaque réparateur pour chacune des deux phases de la réparation. Quelle est la disponibilité de l'atelier, c'est-à-dire la proportion de temps pendant lequel au moins une machine fonctionne ?

Réponse Q5.
On a $1/\lambda = 4$ heure et $1/\mu = 1$ heure, d'où $\rho = 1/4$. La disponibilité D de l'atelier vaut :

$$\begin{aligned} D &= \pi(MM) + \pi(MR_1) + \pi(MR_2) \\ &= \frac{1+4\rho}{1+4\rho+6\rho^2} \\ &= \frac{16}{19} \simeq 84\% \end{aligned}$$

15 Commutation de paquets [Baynat, 2000]

On considère un réseau de transmission à commutation de paquets constitué de 3 nœuds et de 2 liaisons.

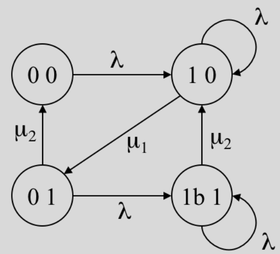


Le processus d'arrivée des paquets au nœud 1 est supposé poissonien de taux λ. Tous les paquets empruntent les liaisons 1-2 et 2-3. Lorsque le nœud 3 reçoit un paquet, il le traite instantanément. Tous les nœuds ont une capacité limitée à un seul paquet. Cette capacité limitée implique deux choses :
- Lorsqu'un paquet arrive au nœud 1 alors que celui-ci contient déjà un paquet, le paquet est alors perdu.
- Lorsqu'il y a un paquet dans le nœud 1 et un paquet dans le nœud 2, le nœud 1 ne pourra commencer à émettre son paquet que lorsque le nœud 2 sera vide. On suppose que le nœud 1 est informé en temps réel de la disponibilité du nœud 2.

Le temps d'émission du nœud i est supposé exponentiel de taux μ_i, $i = 1, 2$. Le temps de propagation sur chaque liaison est supposé négligeable. Tant qu'un paquet est en émission, il occupe une place dans le nœud.

Q1. Modéliser le comportement de ce réseau par une CMTC en indiquant avec précision la signification de chaque état.

Réponse Q1.
Considérons les états suivants :
- (0,0) : aucun paquet dans le réseau
- (1,0) : 1 paquet en cours d'émission au noeud 1
- (0,1) : 1 paquet en cours d'émission au noeud 2
- (1b,1) : 1 paquet en attente d'émission au noeud 1 et 1 paquet en cours d'émission au noeud 2



Q2. Calculer les probabilités stationnaires après avoir justifié leur existence.

Réponse Q2.
La chaîne de Markov est irréductible et apériodique. Les probabilités stationnaires vérifient donc les équations d'équilibre suivant :

$$\begin{aligned} \mu_2\pi(0,1) &= \lambda\pi(0,0) \\ \lambda\pi(0,0) + \mu_2\pi(1b,1) &= \mu_1\pi(1,0) \\ \lambda\pi(0,1) &= \mu_2\pi(1b,1) \\ \mu_1\pi(1,0) &= (\lambda+\mu_2)\pi(0,1) \end{aligned}$$

En posant $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ et $\rho_2 = \lambda/\mu_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi(1,0) &= \rho_1(\rho_2+1)\pi(0,0) \\ \pi(0,1) &= \rho_2\pi(0,0) \\ \pi(1b,1) &= \rho_2^2\pi(0,0) \end{aligned}$$

En utilisant la condition de normalisation $\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(0,1) + \pi(1b,1) = 1$, on peut calcule $\pi(0,0)$:

$$\pi(0,0) = \frac{1}{1+\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2}$$

Q3. Quelle est la probabilité de rejet d'un paquet à l'entrée du système ?

Réponse Q3.
La probabilité P_r de rejet d'un paquet est

$$P_r = \pi(1,0) + \pi(1b,1) = \frac{\rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2}{1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2}.$$

Q4. Donner le temps moyen mis par un paquet accepté pour traverser le réseau.

Réponse Q4.
Le temps moyen R est donné par :

$$R = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + P_b\frac{1}{\mu_2}$$

avec P_b la probabilité qu'un paquet attende au noeud 1 sachant qu'il a été accepté. Soit A l'événement "attendre au noeud 1" et B l'événement "être accepté". On a alors :

$$P_b = P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$
$$= \frac{\pi(0,1)}{\pi(0,0) + \pi(0,1)} = \frac{\rho_2}{1 + \rho_2}$$

Partie III : Files d'attente

16 Commutateur téléphonique (d'après Baynat [2000])

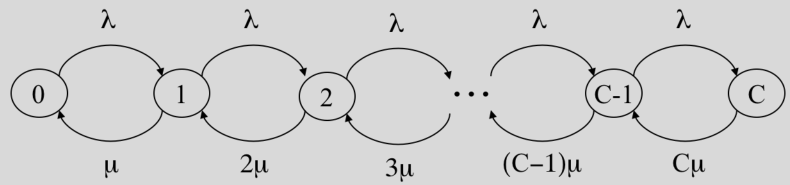
On considère un système de type commutateur téléphonique, capable de traiter simultanément C appels. Un nouvel appel qui arrive alors que C appels sont déjà en cours de traitement est perdu. On suppose que le processus d'arrivée des appels est poissonien de taux λ et que le temps de traitement d'un appel est distribué suivant une loi exponentielle de taux μ.

Q1. Modéliser ce système par une file d'attente et donner sa notation de Kendall.

Réponse Q1.
On peut modéliser ce système par une file $M/M/C/C$.

Q2. Représenter la CMTC associée au système.

Réponse Q2.
Le nombre de clients $N(t)$ dans le système à l'instant t est une CMTC car tous les temps considérés suivent des lois exponentielles.



Lorsqu'il y a i clients dans le système, il y a i serveurs occupés. Notons T_i le temps de service pour le i-ème serveur. Le temps au bout duquel l'un des i clients en service est servi est $\min(T_1, \cdots, T_i)$ qui est distribué suivant une loi exponentielle de taux $i\mu$, d'où le taux de $i\mu$ de l'état i vers l'état $i-1$.

Q3. Calculer les probabilités stationnaires et donner la condition de stabilité.

Réponse Q3.
Les équations d'équilibre (de frontière) sont pour $0 \leq i \leq C-1$:

$$\lambda p(i) = (i+1)\mu p(i+1)$$

Il vient alors pour $n \leq C$, en notant $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$:

$$p(n) = p(0) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = p(0)\frac{\rho^n}{n!}$$

La condition de normalisation donne alors :

$$\sum_{i=0}^{C} p(i) = 1 \Leftrightarrow p(0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{C} \frac{\rho^i}{i!}}$$

Finalement :

$$p(n) = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{C} \frac{\rho^i}{i!}}$$

Il n'y a pas de condition de stabilité dans la mesure où le nombre de clients ne peut pas dépasser C.

Q4. Donner l'expression du débit des appels qui ont abouti, du nombre moyen d'appel en cours de traitement et du temps moyen de réponse.

Réponse Q4.
Le débit vaut

$$X = \lambda(1 - p(C))$$

Le nombre moyen d'appels en cours de traitement vaut

$$Q = \sum_{n=1}^{C} np(n) = \frac{\sum_{n=1}^{C} \frac{\rho^n}{(n-1)!}}{\sum_{i=0}^{C} \frac{\rho^i}{i!}}$$

Le temps moyen de traitement (parmi les appels ayant abouti) est, en appliquant la loi de Little :

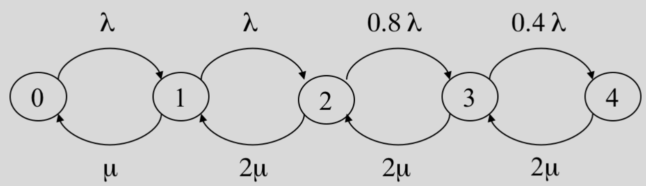
$$R = \frac{Q}{X}$$

17 Pompe à essence (d'après Baynat [2000])

On cherche à modéliser le comportement d'une station d'essence comportant 2 pompes identiques et une seule file d'attente. Les automobilistes se présentent à cette station suivant un processus de Poisson de taux λ. Certains automobilistes décident en arrivant à la station de ne pas s'arrêter car ils jugent l'attente trop longue. Soit $q(n)$ la probabilité de s'arrêter lorsqu'il y a déjà n voitures présentes à la station (en attente ou en service) : $q(0) = 1, q(1) = 1, q(2) = 0.8, q(3) = 0.4, q(4) = 0$. Le temps nécessaire pour servir l'essence à un automobiliste est une variable aléatoire distribuée suivant un loi exponentielle de taux μ.

Q1. Montrer que ce système peut être représenté par une CMTC et donner son graphe.

Réponse Q1.
Le nombre de clients $N(t)$ dans le système à l'instant t est une CMTC car tous les temps considérés suivent des lois exponentielles.



Q2. Déterminer les probabilités stationnaires $p(n)$ d'avoir n automobilistes dans la station, lorsque $\lambda = \mu = 1$.

Réponse Q2.
En écrivant l'équilibre des flux entre les états $\leq i$ et ceux $\geq i$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda p(0) &= \mu p(1) \\ \lambda p(1) &= 2\mu p(2) \\ 0.8\lambda p(2) &= 2\mu p(3) \\ 0.4\lambda p(3) &= 2\mu p(4) \end{aligned}$$

Il suit alors, en prenant $\lambda = \mu = 1$,

$$\begin{aligned} p(0) &= p(1) \\ p(1) &= 2p(2) \\ 0.8p(2) &= 2p(3) \\ 0.4p(3) &= 2p(4) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} p(1) &= p(0) \\ p(2) &= 0.5p(0) \\ p(3) &= 0.2p(0) \\ p(4) &= 0.04p(0) \end{aligned}$$

Puis en utilisant la condition de normalisation :

$$\sum_{i=0}^{4} p(i) = 1 \Rightarrow 2.74p(0) = 1 \Rightarrow p(0) = 1/2.74 = 50/137$$

On peut alors conclure : $p(0) = p(1) = \frac{50}{137}, p(2) = \frac{25}{137}, p(3) = \frac{10}{137}, p(4) = \frac{2}{137}$

Q3. Calculer la proportion de clients qui décident de ne pas s'arrêter, lorsque $\lambda = \mu = 1$.

Réponse Q3.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Nb moyen qui renoncent par unité de tps}}{\text{Nb moyen qui arrivent par unité de tps}} &= \frac{0.2\lambda p(2) + 0.6\lambda p(3) + \lambda p(4)}{\lambda} \\ &= 0.2p(2) + 0.6p(3) + p(4) \\ &= \frac{13}{137} \end{aligned}$$

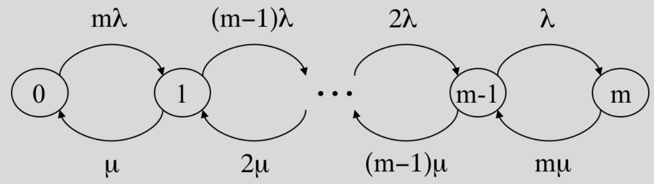
Environ 10 % des automobilistes renoncent à s'arrêter.

18 Système à population finie (d'après Baynat [2000])

On considère un système dont le nombre de clients potentiels est m. Chacun de ces clients, lorsqu'il n'est pas dans le système, est susceptible d'y entrer après un temps exponentiel de taux λ, indépendamment du comportement des autres clients. Le service d'un client est supposé distribué suivant une loi exponentielle de taux μ. Le système a une capacité illimitée et un nombre de serveurs illimité.

Q1. Représenter la CMTC associée au système.

Réponse Q1.
Soit $N(t)$ le nombre de clients présents dans le système (en attente ou en service) à l'instant t. Cette CMTC a pour graphe :



Q2. Calculer les probabilités stationnaires et donner la condition de stabilité.

Réponse Q2.
Les équations au frontière donnent pour $0 \leq i \leq m-1$:

$$(m-i)\lambda p(i) = (i+1)\mu p(i+1)$$

Puis, en posant $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$p(n) = p(0) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(m-i)\rho}{i+1} = p(0)\rho^n \frac{m!}{n!(m-n)!} = p(0) C_m^n \rho^n$$

La condition de normalisation avec la formule du binôme de Newton nous donne alors :

$$\sum_{n=0}^{m} p(n) = 1 \Rightarrow p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} C_m^n \rho^n} = \frac{1}{(1+\rho)^m}$$

Q3. Calculer le nombre moyen de clients dans le système.

Réponse Q3.
Le nombre moyen de clients est alors

$$Q = \sum_{n=1}^{m} np(n) = \frac{\sum_{n=1}^{m} \frac{m!}{(n-1)!(m-n)!}\rho^n}{(1+\rho)^m}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{m!}{(n-1)!(m-n)!}\rho^n = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{m!}{i!(m-i-1)!}\rho^{i+1}$$
$$= m\rho \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{i!(m-i-1)!}\rho^i$$
$$= m\rho \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i \rho^i$$
$$= m\rho(1+\rho)^{m-1}$$

Finalement

$$Q = \frac{m\rho}{1+\rho} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}m$$

Une autre méthode pour aboutir au même résultat, utilisant la formule du binôme de Newton :

$$Q = \sum_{n=0}^{m} np(n) = \sum_{n=0}^{m} np(0)C_m^n\rho^n = p(0)\rho\sum_{n=0}^{m} nC_m^n\rho^{n-1}$$
$$= p(0)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sum_{n=0}^{m} C_m^n\rho^n\right) = p(0)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}[(\rho+1)^m]$$
$$= p(0)\rho m(\rho+1)^{m-1} = \frac{1}{(1+\rho)^m}\rho m(\rho+1)^{m-1} = \frac{m\rho}{1+\rho}$$

19 Commutateur à priorités (d'après Baynat [2000])

On considère un commutateur téléphonique capable de gérer C appels simultanément (figure 1). Trois types d'appels arrivent au commutateur. On supposera que les appels de type r arrivent selon un processus de Poisson de taux λ_r, $r = 1, 2, 3$. Lorsqu'un appel arrive alors qu'il y a moins de C appels dans le commutateur, l'appel est traité sans attente. On supposera que la durée d'un appel est indépendante du type d'appel et est décrite par une variable exponentielle de taux μ. Lorsqu'un appel ne peut être immédiatement satisfait, ce dernier est, suivant le type de l'appel, soit mis en attente dans un buffer FIFO de capacité limitée, soit rejeté. Le buffer est en effet divisé en trois zones distinctes de tailles respectives k_r, $r = 1, 2, 3$, chacune ne pouvant accueillir que des appels de type inférieur ou égal à r.

Q1. Représenter la CMTC associée au système.

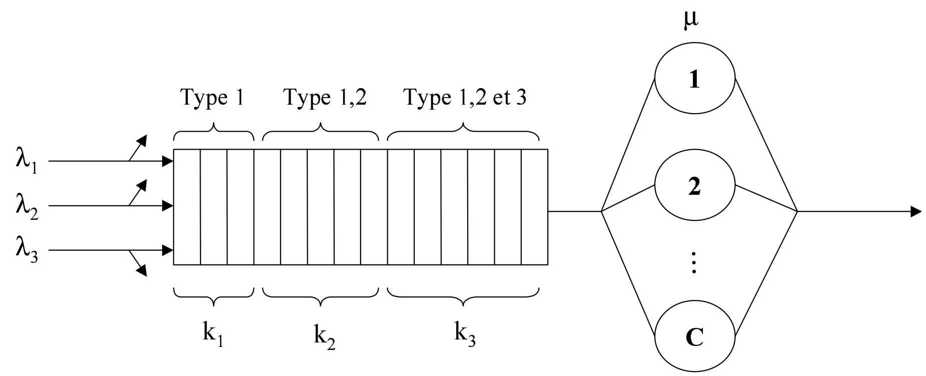


Figure 1 – Exercice 19

Q2. Expliquer pourquoi il n'y a pas de problème de stabilité. Pour simplifier les calculs, on posera dans la suite du problème : $C = 2$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$ et $\mu = 1/2$.

Q3. Calculer les probabilités stationnaires de la file.

Q4. Quel est la proportion d'appels de type r rejetés, $r = 1, 2, 3$?

Q5. En déduire le nombre moyen d'appels satisfaits par unité de temps pour chacun des trois types et tous types confondus.

20 Station d'usinage

Une station d'usinage reçoit des pièces à la cadence moyenne d'une toute les 30 secondes. Les pièces en attente s'empilent devant la machine, la dernière arrivée se plaçant au-dessus des autres. L'usinage d'une pièce a une durée moyenne de 25 s.

On suppose dans un premier temps que les pièces arrivent selon un processus de Poisson et que les temps d'usinage sont indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle.

Q1. Donner la notation de Kendall de la file d'attente modélisant la station d'usinage.

Réponse Q1.
$M/M/1/\infty/\infty/LIFO$

Q2. Vérifier la stabilité de la file.

Réponse Q2.
$\lambda = 1/30$, $\mu = 1/25$, $\rho = \lambda/\mu = 5/6 < 1$. La file est donc stable.

Q3. Calculer le temps moyen d'attente d'une pièce devant la station.

Réponse Q3.

$$R_A = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = 125s$$

Q4. Une étude plus précise du processus d'usinage a montré qu'il se compose d'une première phase d'une durée constante de 5 secondes et d'une seconde phase dont la durée est distribuée uniformément entre 10 et 30 secondes. Quel est alors le temps moyen d'attente d'une pièce devant la station ?

Réponse Q4.
Le temps de service est $T_S = T_1 + T_2$ où $T_1 = 5$ et $T_2 \sim \mathcal{U}(10, 30)$. Calculons d'abord l'espérance de T_S.

$$E(T_S) = E(T_1) + E(T_2) = 5 + 20 = 25$$

Maintenant, calculons la variance de T_S.

$$Var(T_S) = Var(T_1) + Var(T_2) = 0 + E(T_2^2) - E(T_2)^2$$

Or :

$$E(T_2^2) = \int_{10}^{30} \frac{x^2}{20} dx = \frac{1}{20} \times \frac{30^3 - 10^3}{3} = 1300/3 \tag{12}$$

Ainsi $Var(T_2) = 1300/3 - 20^2 = 100/3$ et $cv^2(T_S) = Var(T_S)/E(T_S)^2 = 4/75$
En utilisant la formule PK pour une file $M/G/1$, on obtient :

$$R_A = 65.8s$$

Q5. Comment peut-on expliquer la différence de temps d'attente entre les 2 modèles ?

Réponse Q5.
La variance du temps de service est beaucoup plus importante pour la file $M/M/1$ ($Var(T_S) = 625$) que pour pour la file $M/G/1$ ($Var(T_S) = 33.33$) et les performances s'en trouvent dégradées.