ANALYSE NUMÉRIQUE *1ère année de l'ISIMA, semestre 2*

Jean-Philippe Gayon et Viet Hung Nguyen 2021–2022

Partie I : Analyse spectrale

1 Diagonalisation

Soit les matrices
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11&-5&5\\-5&3&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}$$

Notations pour une matrice carrée A :
- — $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$: polynôme caractéristique de A
- — $\mathrm{Sp}(A)$: spectre de A (ensemble des valeurs propres de A)
- — $\rho(A)$: rayon spectral de A (plus grand module des valeurs propres)
- — $\mathrm{SEP}(A,\lambda)=Ker(A-\lambda I)$: sous-espace vectoriel associé à la valeur propre λ

Q1. Pour chacune de ces matrices, répondre aux questions suivantes :
- — Donner son polynôme caractéristique.
- — Donner son spectre et son rayon spectral.
- — Pour chaque valeur propre, donner la multiplicité algébrique.
- — Pour chaque valeur proper, donner le sous-espace propre associé et sa dimension (appelée multiplicité géométrique)
- — La matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Réponse Q1.

Matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)$$
$$\mathrm{Sp}(A)=\{1,2\},\rho(A)=2$$

La multiplicité algébrique des 2 valeurs propres est de 1.

Cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 1.

$$AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1+x_2=x_1\\2x_2=x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow x_2=0$$
$$\mathrm{SEP}(A,1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},x_1\in\mathbb{R}\right\},$$

La multiplicité géométrique de la valeur propre 1 vaut $\dim(\mathrm{SEP}(A,1))=1$. Soit $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Cherchons maintenant l'espace propre associé à la valeur propre 2.

$$AX=2X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1+x_2=2x_1\\2x_2=2x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow x_1=x_2$$
$$\mathrm{SEP}(A,2)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},x_1\in\mathbb{R}\right\},\dim(\mathrm{SEP}(A,2))=1$$

La multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est de 1 et $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique pour chaque valeur propre. Donc A est diagonalisable. Notons que nous aurions pu conclure plus tôt sur la diagonalisabilité en utilisant le fait qu'il y 2 valeurs propres distinctes (pour une matrice carrée de taille 2).
Par ailleurs $\mathcal{B}'=(v_1,v_2)$ est une base constituée uniquement de vecteurs propres.

Soit l'endomorphisme f tel que $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ avec $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$. Notons $D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice représentative de f dans la base de vecteurs propres $\mathcal{B}'$. Nous avons

$$D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Soit $P=(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ vers la base $\mathcal{B}'=(v_1,v_2)$.

Il nous reste à inverser P. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

$$PX=Y\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1+x_2=y_1\\x_2=y_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_2\end{array}\right.\Leftrightarrow X=P^{-1}Y\text{ avec }P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

La diagonalisation suit :

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

En notant que cette matrice est la transposée de la précédente, on obtient immédiatement (voir complément à la fin de la correction) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice $\quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2, \mathrm{Sp}(A) = \{1\}, \rho(A) = 1$$

La multiplicité algébrique est 2 pour la valeur propre 1.

Cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 1.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$\mathrm{SEP}(A,1) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\}, \dim(\mathrm{SEP}(A,1)) = 1$$

La dimension du sous-espace propre (ou multiplicité géométrique) est inférieure à la multiplicité algébrique. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nous avons $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ et deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$$

En résolvant $AX = \lambda_1 X$ et $AX = \lambda_2 X$, nous obtenons deux vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ formant une base de l'espace vectoriel. La matrice est donc diagonalisable :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

A n'est pas inversible (déterminant nul) mais est pourtant diagonalisable :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Diagonalisable car 3 valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

Remarque : A est symétrique et on peut la diagonaliser en utilisant une matrice de passage orthogonale Ω

$$A = \Omega D \Omega^{-1}$$

Pour construire la matrice orthogonale Ω, il suffit de normaliser les colonnes de P en divisant chaque colonne par sa norme euclidienne :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une matrice orthogonale étant sa transposée, nous avons immédiatement :

$$\Omega^{-1} = \Omega^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & -\lambda \\ 5 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 0 \\ -10 & 6-\lambda & 0 \\ 5 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 \\ -10 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda[(11-\lambda)(6-\lambda)-50] = -\lambda[\lambda^2 - 17\lambda + 16)$$
$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-16)$$

A est diagonalisable car 3 valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 3 :

$$Sp(A) = \{0, 1, 16\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation de la transposée d'une matrice diagonalisée

Q2. Soit P une matrice carrée inversible. Montrer que $\left(P^\top\right)^{-1} = (P^{-1})^\top$.

Réponse Q2.
P est inversible, ce qui implique que $PP^{-1} = I$ et $P^{-1}P = I$. En prenant la transposée :

$$(PP^{-1})^\top = I \Leftrightarrow (P^{-1})^\top P^\top = I$$
$$(P^{-1}P)^\top = I \Leftrightarrow P^\top (P^{-1})^\top = I$$

On conclut que $(P^\top)^{-1} = (P^{-1})^\top$.

Q3. Soit A diagonalisable sous la forme $A = PDP^{-1}$. Montrer que A^T est diagonalisable.

Réponse Q3.
En transposant $A = PDP^{-1}$ et en utilisant la propriété que $D^T = D$, il vient :

$$A^T = (P^{-1})^T D P^T$$

En utilisant la propriété que la transposée de l'inverse d'une matrice est égale à l'inverse de la transposée d'une matrice :

$$A^T = (P^T)^{-1} D P^T$$

Nous avons donc diagonaliser A^T sous la forme

$$A^T = QDQ^{-1}$$

où $Q = (P^{-1})^T$ et $Q^{-1} = P^T$.

2 Applications de la diagonalisation

Q1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice A^k.

Réponse Q1.
Nous avons diagonalisé A dans un exercice précédent A sous la forme

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suit

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Q2. Soit la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... définie par :

$$u_0 = u_1 = 1,$$
$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

En posant $X_k = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix}$, déterminer la matrice A telle que $X_k = AX_{k-1}$.

Q3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q4. En déduire une expression de u_k en fonction de k.

Réponse Q4.
Nous avons alors, d'après l'exercice 1, en posant $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-\sqrt{5}}{2}$:

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Il suit :

$$X_k = A^k X_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} (1-\lambda_2)\lambda_1^{k+1} + (\lambda_1 - 1)\lambda_2^{k+1} \\ (1-\lambda_2)\lambda_1^k + (\lambda_1 - 1)\lambda_2^k \end{pmatrix}$$

Q5. Montrer que $F_k = \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ tend vers le nombre d'or $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ quand k tend vers l'infini.

Réponse Q5.

$$F_k = \frac{(1-\lambda_2)\lambda_1^{k+1} + (\lambda_1 - 1)\lambda_2^{k+1}}{(1-\lambda_2)\lambda_1^{k} + (\lambda_1 - 1)\lambda_2^{k}}$$

En utilisant le fait que $\lambda_1 > 1$ et $-1 < \lambda_2 < 0$, il vient $\lim_{k\to\infty} F_k = \lambda_1$.

Q6. Soit les suites récurrentes linéaires simultanées suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 0, w_0 = 1 \\ u_{n+1} = 11u_n - 5v_n + 5w_n \\ v_{n+1} = -5u_n + 3v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 5u_n - 3v_n + 3w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n, pour $n \geq 0$.

Réponse Q6.
En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, nous avons $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
En utilisant la diagonalisation de A précédemment calculée, il vient

$$X_n = A^n X_0 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{16^n - 1}{3} \\ v_n = -\dfrac{16^n + 2}{6} \\ w_n = \dfrac{16^n + 2}{6} \end{cases}$$

Q7. Résoudre le système différentiel suivant (variable t, inconnues $x(t), y(t), z(t)$ à valeurs réelles)

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ z'(t) = y(t) \end{cases} \tag{1}$$

Réponse Q7.
Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Nous avons $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
En utilisant la diagonalisabilité de A précédemment établie, nous avons

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t)$$

puis en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$:

$$Y'(t) = DY(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = \sqrt{2}v(t) \\ w'(t) = -\sqrt{2}w(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = a \\ v(t) = be^{\sqrt{2}t} \\ w(t) = ce^{-\sqrt{2}t} \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Enfin, en utilisant $X(t) = PY(t)$, nous obtenons

$$\begin{cases} x(t) = a + be^{\sqrt{2}t} + ce^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) = \sqrt{2}be^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}ce^{-\sqrt{2}t} \\ z(t) = -a + be^{\sqrt{2}t} + ce^{-\sqrt{2}t} \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3 Interprétation géométrique des éléments propres

Q1. Pour les matrices suivantes, donner les valeurs propres réelles et espaces propres associés. Etudier la diagonalisabilité.

— H : représentation matricielle d'une homothétie de rapport a dans $\mathbb{R}^n$
— P : matrice de projection orthogonale d'ordre n

$$P = P^T = P^2$$

— R : rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Réponse Q1.

Homothétie Soit la représentation matricielle H d'une homothétie de rapport $a \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons $Hx = ax$. Ainsi tout $x \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre associé à la valeur propre a :

$$\mathrm{SEP}(H,a) = \mathbb{R}^n$$

Ainsi, H est diagonalisable.

Projection orthogonale Si on a bien compris l'interprétation géométrique, on a immédiatement que :

— $Im(P)$ est l'espace propre associé à la valeur propre 1 (puisque $Px = x$ pour $x \in Im(p)$)

— $Im(P)^{\perp} = Ker(P)$ est l'espace propre associé à la valeur propre 0 (puisque $Px = 0$ pour $x \in Ker(P)$)

— Comme $Im(P) + Ker(P) = \mathbb{R}^n$ pour une projection orthogonale, il vient immédiatement que P est diagonalisable

Sans intuition géométrique, on peut aussi faire le raisonnement suivant, qui permet de faire quelques révisions. Soit λ une valeur propre de P et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ. Nous avons alors $Px = \lambda x$, puis $P^2 x = \lambda^2 x$. Comme $P^2 = P$, il suit $\lambda x = \lambda^2 x$ qui équivaut à $\lambda(1-\lambda)x = 0$. Les valeurs propres possibles sont donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ (car $x \neq 0$).

Valeur propre 1 : Soit x un vecteur propre associé à la (possible) valeur propre $\lambda = 1$. Nous avons alors $Px = x$. Ainsi $x \in Im(P)$. Réciproquement, soit $x \in Im(P)$ alors il existe y tel que $x = Py$ puis $Px = P^2 y = Py = x$. Donc x est vecteur propre associé à la valeur propre 1. Conclusion : $Im(P)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Remarque : il faut que P soit non nulle, autrement 1 n'est pas valeur propre car $Im(P)$ se réduit à l'élément nul.

Valeur propre 0 : Le sous-espace associé à la valeur propre 0 est $Ker(P)$, le noyau de P. Montrons que les sous-espaces propres $Ker(P)$ et $Im(P)$ sont orthogonaux. Soit $x_1 \in Ker(P)$ ($Px_1 = 0$) et $x_2 \in Im(P)$ (il existe y tel que $x_2 = Py$). Il vient alors

$$x_1^T x_2 = x_1^T P y = (P^T x_1)^T y = (P x_1)^T y = 0$$

et x_1 est orthogonal à x_2.

Remarque : il faut que P soit différent de la matrice identité, autrement 0 n'est pas valeur propre car $Ker(P)$ se réduit alors à l'élément nul.

Diagonalisabilité : P est donc diagonalisable car la somme des sous-espaces propres est $\mathbb{R}^n$

Rotation dans $\mathbb{R}^2$ Le polynôme caractéristique de R : $\chi_R(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1.$

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Le discriminant de $\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0$ est $\Delta = -4\sin^2\theta$. Nous pouvons distinguer trois cas de figure :

— $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: 1 est la seule valeur propre et $R = I$ de sous-espace propre $\mathbb{R}^2$. La rotation R est donc diagonalisable.

— $\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$: -1 est la seule valeur propre et $R = -I$ de sous-espace propre $\mathbb{R}^2$. La rotation R est donc diagonalisable.

— Sinon, il n'y a pas de valeur propre réelle et R n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$

4 Population clermontoise

Chaque année, une proportion a de clermontois quitte Clermont-Ferrand pour s'installer dans le Puy-de-Dôme (hors Clermont-Ferrand), une proportion b de non clermontois du Puy-de-Dôme s'installe à Clermont-Ferrand ($0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$). On pose x_0 le nombre de Clermontois, et y_0 le nombre de non clermontois (du Puy-de-Dôme), en cette année. Au bout de k années, ces nombres vaudront x_k et y_k. On suppose qu'il n'y a pas de flux migratoire du Puy de Dôme vers l'extérieur, et vice versa.

Q1. Calculer x_k et y_k en fonction de a, b, x_0 et y_0.

Réponse Q1.
L'année k, le nombre de clermontois est la somme de ceux qui ne sont pas partie l'année précédente (soit $(1-a)x_{k-1}$) et des non clermontois qui sont arrivés (soit by_{k-1}). Le nombre de non clermontois est la somme des clermontois qui sont partis (ax_{k-1}) et des non clermontois qui sont restés ($(1-b)y_{k-1}$). On a donc la suite vectorielle

$$x_k = (1-a)x_{k-1} + by_{k-1}, \qquad (2)$$

$$y_k = ax_{k-1} + (1-b)y_{k-1}. \qquad (3)$$

En posant $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$, nous avons $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Q2. A quelle condition sur a et b existe-t-il une limite pour x_k et y_k lorsque $k \to +\infty$? Que vaut cette limite ?

Réponse Q2.
Pour répondre à la question il faut faire une décomposition spectrale de A. Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - (1-a-b)\lambda + 1 - a - b$$

qui a pour discriminant $\Delta = (a+b-1)^2$. Les racines sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-a-b$. La matrice des vecteurs propres est

$$P = \begin{pmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{pmatrix}$$

On a

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

La limite de la suite existe si $|1-a-b| < 1$, i.e., $0 \leq a+b < 2$.
Quand $k \to +\infty$, $\Lambda^k \to \mathrm{diag}(1,0)$. On a donc

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = \frac{b}{a+b}(x_0+y_0), \qquad \lim_{k\to+\infty} y_k = \frac{a}{a+b}(x_0+y_0).$$

5 Interprétation géométrique

Soit a et b deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$, avec $||a|| = ||b|| = 1$, et

$$A = aa^\top + bb^\top.$$

Q1. Donner une interprétation géométrique de la matrice $aa^\top$.

Réponse Q1.
$aa^\top$ est la projection orthogonale sur la droite portée par a (cf chapitre 4 du polycopié du 1er semestre).

Q2. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de $aa^\top$.

Réponse Q2.
Soit $x \in Vect\{a\}$, alors la projection orthogonale de x sur a est x. Donc $aa^\top x = x$ et 1 est valeur propre de sous espace propre $Vect\{a\}$.

Soit $x \in Vect\{a\}^\perp$, alors la projection orthogonale de x sur a est le vecteur nul. Donc $aa^\top x = 0$ et 0 est valeur propre de sous-espace propre $\mathrm{SEP}(A,0) = Vect\{a\}^\perp$.

Au final, $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}$, $\mathrm{SEP}(A,1) = Vect\{a\}$ et $\mathrm{SEP}(A,0) = Vect\{a\}^\perp$.

La somme des sous-espaces propres étant égale à $\mathbb{R}^n$, la matrice aa^T est diagonalisable.

Q3. Montrer que A est symétrique. En déduire que A est diagonalisable.

Réponse Q3.
$aa^\top$ et $bb^\top$ sont des matrices symétriques réelles. A est donc symétrique réelle et un théorème nous dit alors que A est diagonalisable.

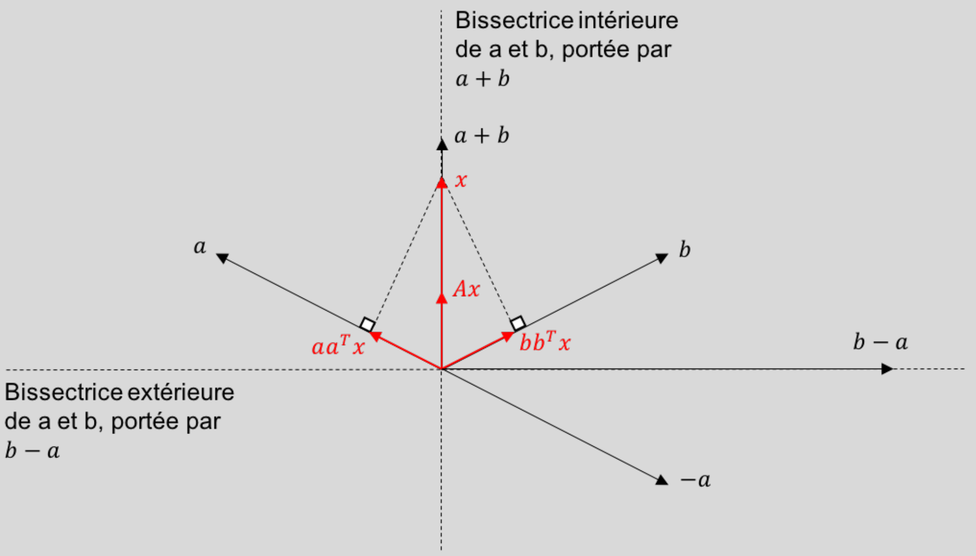
Q4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A

Réponse Q4.
La matrice A projette sur $= Vect\{a,b\}$, le sous-espace vectoriel engendré par a et b. Soit $x \in Vect\{a,b\}^\perp$:

$$Ax = 0$$

Ainsi 0 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est $Vect\{a,b\}^\perp$. Sa multiplicité géométrique vaut donc $n-2$.

Il nous reste deux valeurs propres à trouver. Les vecteurs propres associés sont nécessairement dans $Vect\{a,b\}$. Un petit dessin permet de comprendre immédiatement que $(a+b)$ (bissectrice intérieure) et $(b-a)$ (bissectrice extérieure) sont vecteurs propres.



Nous avons, en utilisant le fait que l'on peut commuter un scalaire et une matrice ($\alpha A =$

$A\alpha$) :

$$\begin{aligned}
A(a+b) &= (aa^\top + bb^\top)(a+b) && (4)\\
&= a\underbrace{(a^\top a)}_{=1} + a\underbrace{(a^\top b)}_{\text{Scalaire}} + b\underbrace{(b^\top a)}_{\text{Scalaire}} + b\underbrace{(b^\top b)}_{=1} && (5)\\
&= a + (a^\top b)a + (b^\top a)b + b && (6)\\
&= (1 + a^\top b)a + (1 + \underbrace{b^\top a}_{=a^\top b})b && (7)\\
&= (1 + a^\top b)(a+b) && (8)
\end{aligned}$$

On en déduit que $(1 + a^\top b)$ est la valeur propre associée au vecteur propre $(a + b)$. De même

$$A(a-b) = (aa^\top + bb^\top)(a-b) = (1 - a^\top b)(a-b)$$

et $(1 - a^\top b)$ est la valeur propre associée au vecteur propre $(a + b)$.

En conclusion :

- $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1 + a^\top b, 1 - a^\top b\}$
- $\mathrm{SEP}(A, 0) = Vect\{a, b\}^\perp$
- $\mathrm{SEP}(A, 1 + a^\top b) = Vect\{a + b\}$
- $\mathrm{SEP}(A, 1 - a^\top b) = Vect\{a - b\}$

6 Méthode de la puissance itérée

On cherche à appliquer la méthode de la puissance itérée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec le vecteur initial

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q1.
Trouver et justifier une formule pour $A^n X_0$ qui dépend uniquement de n.

Réponse Q1.

On a

$$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = A^2X_0 = AX_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ces essais nous suggèrent que $X_n = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n \\ 5^n \\ 2^n \end{pmatrix}$. On va cette formule montrer par récurrence.

Cas de base $n = 0$, $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5^0 \\ 5^0 \\ 2^0 \end{pmatrix}$. C'est donc vérifié pour le cas $n = 0$.

Induction. Supposons que pour une valeur quelconque $n \geq 1$, c'est verifié pour $n - 1$, i.e. $X_{n-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 5^{n-1} \\ 5^{n-1} \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$. On va montrer que c'est vérifié pour n. On a

$$X_n = A^nX_0 = AX_{n-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \times 5^{n-1} \\ 5^{n-1} \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n \\ 5^n \\ 2^n \end{pmatrix}$$

. CQFD.

<u>Méthode plus systématique :</u> On diagonalise la matrice et on obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n \\ 5^n \\ 2^n \end{pmatrix}$$

Q2. Vérifier que la méthode de la puissance itérée converge bien vers un vecteur propre v_1 de A associé à λ_1, la valeur propre de plus grand module de A.

Réponse Q2.

Le vecteur v_1 obtenu par la méthode de la puissance itérée est égal à $\lim_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\|X_n\|}$. On peut utiliser n'importe quelle norme vectorielle pour calculer cette limite. En occurrence, ce sera plus commode d'utiliser la norme infinie $\|X_n\|_\infty$. On a donc

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\|X_n\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{2\times 5^n}{2\times 5^n} \\ \dfrac{5^n}{2\times 5^n} \\ \dfrac{2^n}{2\times 5^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $\lambda_1 = \dfrac{x_1^t A x_1}{x_1^t x_1} = 5$.

Ces résultats sont cohérents avec la diagonalisation obtenue à la question précédente.

Q3.
Déterminer la vitesse de convergence de la méthode.propre de plus grand module ? Confirmer cette valeur suggérée.

Réponse Q3.

La vitesse de convergence est celle de la suite $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}^n$ qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Cette vitesse de convergence est dite <u>linéaire</u>.

7 Méthode de déflation

Supposons calculée la plus grande valeur propre λ_n d'une matrice symétrique réelle A et le vecteur propre associé v_n.

Q1. Quelle est la matrice P de projection orthogonale sur $v_n^\perp$.

Réponse Q1.
Supposons que v_n soit normé, ce qui est le cas si il a été obtenu par la méthode des puissances itérées.
Nous savons que $v_n v_n^T$ est la matrice de projection orthogonale sur la droite portée par v_n.
La matrice de projection sur $v_n^\perp$ vérifie donc

$$P + v_n v_n^T = I$$

où I est la matrice identité. Nous avons alors

$$P = I - v_n v_n^T$$

Q2. Montrer que PA a les mêmes vecteurs propres que A et les mêmes valeurs propres que A, à l'exception de λ_n.

Réponse Q2.
Il vient ensuite

$$PAv_n = P_n(\lambda_n v_n) = \lambda_n(v_n - v_n v_n^T v_n) = 0$$

car $v_n^T v_n = 1$, v_n étant normé.
Ainsi v_n est vecteur propre de PA associé à la valeur propre 0.
Soit maintenant un vecteur propre x de A associé à une valeur propre $\mu \neq \lambda_n$. Comme A est symétrique, les espaces propres sont orthogonaux et donc $x \in v_n^\perp$. Il vient alors

$$PAx = \mu Px = \mu(I - v_n v_n^T)x = \mu x - \mu v_n \underbrace{(v_n^T x)}_{=0 \text{ car } v_n \perp x} = \mu x$$

et x est vecteur propre de PA associé à la valeur propre μ.

Q3. En déduire une méthode de calcul des valeurs propres de A.

Réponse Q3.
Une méthode pour calculer les valeurs propres de A consisterait à utiliser la méthode de la puissance itérée pour calculer la plus grande valeur propre puis d'effectuer le changement de matrice $A \leftarrow PA$ et de recommencer.

8 Application de la méthode de déflation

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$. On applique la méthode de la puissance itérée à A, en utilisant la norme infinie : $x_{n+1} = \dfrac{Ax_n}{\|Ax_n\|_\infty}$. On rappelle que la norme infinie d'un vecteur x est définie par $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

Q1. Soit

$$v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, x_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|_\infty}$$

Montrer que la suite x_n vérifie $x_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|_\infty}$ avec $v_n = \begin{pmatrix} -2^n + 3(-1)^n \\ 2^n + 3(-1)^n \end{pmatrix}$.

Réponse Q1.

Nous allons montrons par récurrence la propriété de l'énoncé. La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse : $x_0 = \dfrac{v_0}{\|v_0\|_\infty}$.

Supposons la propriété vraie pour $n \geq 0$. Alors, d'après la définition de la méthode de la puissance itérée (cf notes de cours), nous avons

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|_\infty} = \frac{\dfrac{Av_n}{\|v_n\|_\infty}}{\left\|\dfrac{Av_n}{\|v_n\|_\infty}\right\|} = \frac{\dfrac{Av_n}{\|v_n\|_\infty}}{\dfrac{1}{\|v_n\|_\infty}\|Av_n\|_\infty} = \frac{Av_n}{\|Av_n\|_\infty}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
Av_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n + 3(-1)^n \\ 2^n + 3(-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2^n + 3(-1)^n) - \frac{3}{2}(2^n + 3(-1)^n) \\ -\frac{3}{2}(-2^n + 3(-1)^n) + \frac{1}{2}(2^n + 3(-1)^n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \times 2^n + (-1) \times 3(-1)^n \\ 2 \times 2^n + (-1) \times 3(-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3(-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} + 3(-1)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= v_{n+1}
\end{aligned}$$

On déduit des deux relations précédentes que

$$x_{n+1} = \frac{Av_n}{\|Av_n\|_\infty} = \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|_\infty}$$

La propriété est donc vraie pour $(n+1)$ puis, par récurrence, pour tout $n \geq 0$.

<u>Méthode plus systématique :</u> On diagonalise la matrice et on obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$A^n v_0 = PD^nP^{-1}v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 3(-1)^n \\ 2^n + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Q2.
En déduire un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module.

Réponse Q2.
Nous avons

$$v_n = 2^n \begin{pmatrix} -1 + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \\ 1 + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\frac{v_n}{2^n} = \begin{pmatrix} -1 + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \\ 1 + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\left\|\frac{v_n}{2^n}\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{10}$$

$$x_n = \frac{\dfrac{v_n}{2^n}}{\left\|\dfrac{v_n}{2^n}\right\|_\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre en module, que nous noterons λ_1.

Q3. Discuter la vitesse de convergence de la méthode de la puissance itérée sur cet exemple.

Réponse Q3.
D'après les équations (9), (10), (11), la vitesse de convergence de x_n est étroitement liée à celle de $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Cherchons le nombre minimum d'itérations n_ϵ nécessaire pour que $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ soit à ϵ de 0.

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 0\right| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow -n\log 2 < \log\epsilon \\
&\Leftrightarrow n > \frac{-\log\epsilon}{\log 2} \simeq -3.32\log\epsilon
\end{aligned}$$

Le nombre d'itérations étant un entier, nous avons donc

$$n_\epsilon = \left\lceil \frac{-\log\epsilon}{\log 2} \right\rceil$$

où $\lceil a \rceil$ désigne la partie entière supérieure de a.

Précision souhaitée ϵ	Nombre d'itérations nécessaire n_ϵ
10^{-1}	4
10^{-2}	7
10^{-3}	10
10^{-4}	14
10^{-5}	17
10^{-6}	20
10^{-7}	24

On gagne donc (au moins) un chiffre significatif toutes les 4 itérations.

Remarque : on dit que la convergence est linéaire car on gagne un chiffre significatif toutes les k itérations, avec k une constante (ici $k = 4$).

Q4. En utilisant le quotient de Rayleigh, déduire de la question précédente la valeur propre de plus grand module, notée λ_1.

Réponse Q4.
La valeur propre de plus grand module vaut

$$\lambda_1 = \rho_A(v_1) = \frac{v_1^T A v_1}{v_1^T v_1} = 2.$$

On peut vérifier par ailleurs que $Av_1 = 2v_1$.

Q5. En utilisant la méthode de la déflation, construire une matrice B de valeurs propres 0 et λ_2, où λ_2 désigne la deuxième valeur propre de A.

Réponse Q5.
La matrice A étant symétrique, on peut appliquer la méthode de déflation (cf notes de cours sur l'ENT). Soit

$$B = A - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^\top}{v_1^\top v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B a théoriquement pour valeurs propres 0 et λ_2.

Q6. On ré-applique la méthode de la puissance itérée à B, en utilisant la norme infinie et en prenant comme vecteur initial $x_0 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de composantes c et d strictement positives. Montrer que la suite x_k oscille rapidement entre deux vecteurs propres opposés.

Réponse Q6.
Nous avons

$$Bx_0 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} c+d \\ c+d \end{pmatrix} = \frac{c+d}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\|Bx_0\| = \frac{c+d}{2}$$

Il suit

$$x_1 = \frac{Bx_0}{\|Bx_0\|_\infty} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Puis en réitérant :

$$x_2 = \frac{Bx_1}{\|Bx_1\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{Bx_2}{\|Bx_2\|_\infty} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $x_3 = x_1$. La suite x_n va donc osciller entre les vecteurs propres $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ à partir de $n = 1$.

Q7. En déduire la 2ème valeur propre en utilisant le quotient de Rayleigh.

Réponse Q7.
Notons $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La 2ème valeur propre vaut alors

$$\lambda_2 = \rho_B(v_2) = \frac{v_2^T B v_2}{v_2^T v_2} = -1.$$

On peut vérifier par ailleurs que $Bv_2 = -v_2$.

Partie II : Optimisation non linéaire

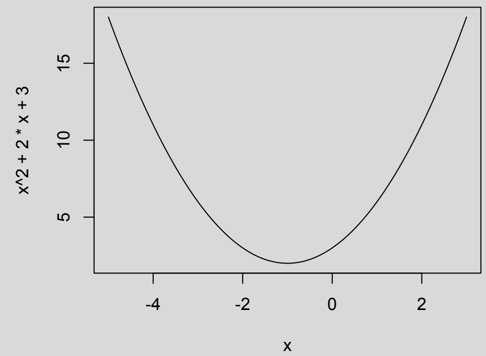
9 Optimisation à une variable

Q1. Pour les fonctions suivantes, déterminer :
— les points stationnaires, si il en existe
— les minimums locaux, si il en existe
— les minimums globaux, si il en existe
— Préciser la valeur du minimum global, si il en existe.
— si la fonction est convexe, concave, ni convexe,ni concave.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ f(x) &= \cos(x) \\ f(x) &= \ln(x) - x \text{ pour } x > 0 \\ f(x) &= x + \cos(x) \\ f(x) &= e^x - 2x \\ f(x) &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{aligned}$$

Réponse Q1.

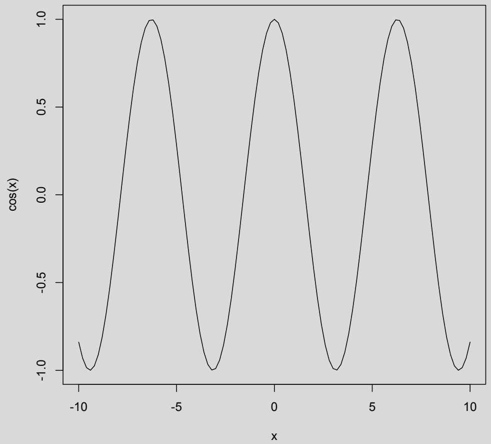
$\boxed{f(x) = x^2 + 2x + 3}$



— $f'(x) = 2x + 2$ et $f''(x) = 2$.
— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc $x^* = -1$ est l'unique point stationnaire.

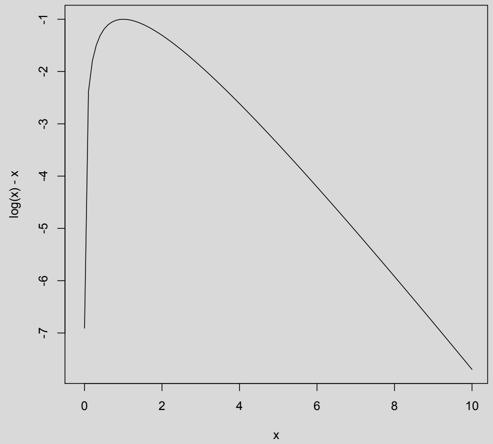
- $f''(x^*) = 2$. Les conditions suffisantes d'optimalité locale sont satisfaites : $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$. Donc x^* est un minimum local.
- $f'' \geq 0$ donc f est convexe et tout point stationnaire est un minimum global. Le minimum global est donc atteint en $x^* = -1$ et vaut $f(x^*) = 2$
- Remarque 1 : on aurait pu aussi trouver directement le minimum global en réécrivant $f(x) = (x+1)^2 + 2$ qui est minimum pour $x = -1$.
- Remarque 2 : on aurait pu tout de suite noter que f était convexe comme somme des fonctions convexes x^2 et $2x + 3$.

$\boxed{f(x) = \cos(x)}$



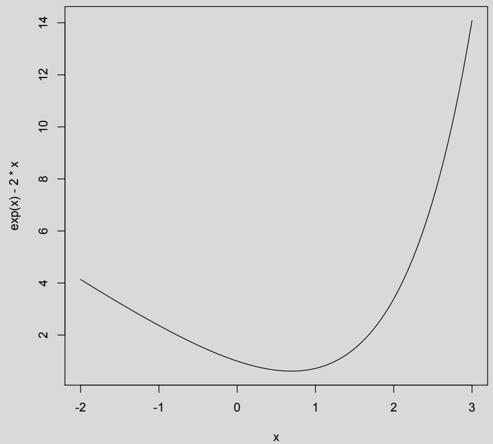
- $f'(x) = -\sin(x)$ et $f''(x) = -\cos(x)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ avec k entier. Donc les points stationnaires valent $x_k = k\pi$ avec k entier.
- $f''(x_{2k}) = -\cos(0) = -1$ et $f''(x_{2k+1}) = -\cos(\pi) = 1$. Les conditions suffisantes d'optimalité locales sont satisfaites : les x_{2k} sont des maximums locaux et les x_{2k+1} sont des minimums locaux.
- Nous savons que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, les x_{2k} sont donc des maximums globaux et les x_{2k+1} des minimums globaux.
- f n'est ni convexe, ni concave car sa dérivé seconde prend des valeurs strictement négatives et strictement positives.

$\boxed{f(x) = \ln(x) - x \text{ pour } x > 0}$



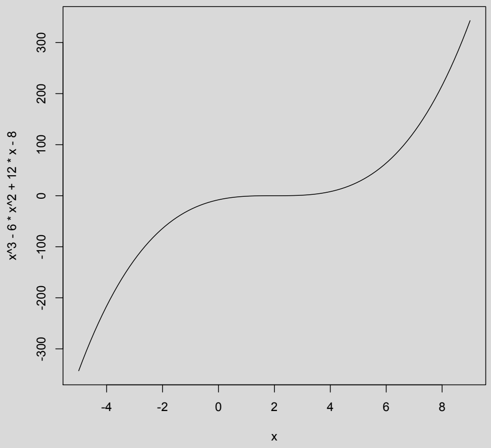
- $f'(x) = 1/x - 1$ et $f''(x) = -1/x^2$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. L'unique point stationnaire vaut donc $x^* = 1$.
- $f''(x^*) = -1 < 0$ donc x^* n'est pas un minimum local mais un maximum local.
- Il n'y a pas de minimum global car f n'a pas de borne inférieure : $\lim_{x \to 0^+} = \lim_{x \to -\infty} = -\infty$.
- f est strictement concave pour $x > 0$ car $f''(x) < 0$ pour $x > 0$.
- f atteint donc un maximum global en son unique point stationnaire x^*.

$\boxed{f(x) = e^x - 2x}$



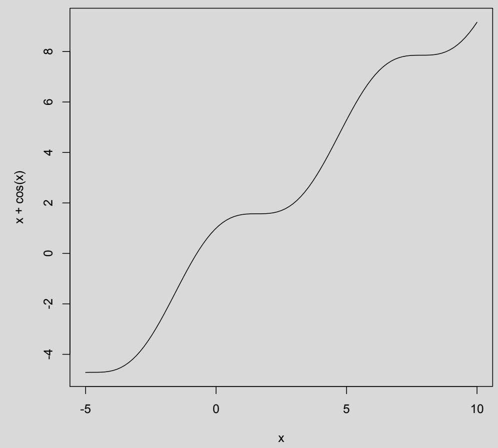
— $f'(x) = e^x - 2$ et $f''(x) = e^x$.
— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. Donc $x^* = \ln(2)$ est l'unique point stationnaire.
— $f''(x^*) = 2$. Les conditions suffisantes d'optimalité locale sont satisfaites : $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$. Donc x^* est un minimum local.
— $f'' > 0$ donc f est strictement convexe et tout point stationnaire est un minimum global. Le minimum global est donc atteint en $x^* = \ln(2) \simeq 0.693$ et vaut $f(x^*) = 2 - 2\ln(2) \simeq 0.613$
— Remarque : on aurait pu tout de suite noter que f était strictement convexe comme somme d'une fonction strictement convexe e^x et d'une fonction convexe $-2x$.

$\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$



— $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$ et $f''(x) = 6x - 12$.
— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Donc $x^* = 2$ est l'unique point stationnaire.
— $f''(x^*) = 0$. On ne peut pas conclure si x^* est ou n'est pas un minimum local avec les conditions d'optimalité du cours.
— La dérivée de f est strictement positive, sauf en x^*. La fonction f est donc strictement croissante et n'a pas de minimum local.
— f n'a pas de borne inférieure ($\lim_{x\to-\infty} = -\infty$) et donc n'a pas de minimum global.
— $f''(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$. Donc f n'est ni concave, ni convexe.
— Remarque : on aurait pu remarque que $f(x) = (x-2)^3$.

$\boxed{f(x) = x + \cos(x)}$



— $f'(x) = 1 - \sin(x)$ et $f''(x) = -\cos(x)$.
— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Les points stationnaires sont donc $x_k = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
— $f''(x_k) = -\cos(x_k) = 0$. Les conditions nécessaires d'optimalité locale sont satisfaites ($f'(x_k) = 0$ et $f''(x_k) \geq 0$) mais pas les conditions suffisantes ($f'(x_k) = 0$ et $f''(x_k) > 0$). On ne peut donc pas conclure si x_k est un minimum local ou non avec les théorèmes du cours.
— f n'est ni concave, ni convexe
— On peut noter que $f'(x) > 0$ pour $x \neq x_k$. La fonction f est donc strictement croissante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il n'y a donc pas de minimum local.
— Il n'y a pas de minimum global car f n'est pas bornée : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

10 Minimum d'un polynôme du second degré

Considérons le polynôme du second degré $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$. Le coefficient $\frac{1}{2}$ est utilisé pour simplifier les résultats.

Q1. Déterminer les points stationnaires de f.

Réponse Q1.
La dérivée de f vaut $f'(x) = ax + b$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax = -b$$

Nous allons devoir distinguer 3 cas de figures :

— Si $a \neq 0$, alors il y a un unique point stationnaire $x^* = -\dfrac{b}{a}$.
— Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors il n'y a pas de point stationnaire.
— Si $a = 0$ et $b = 0$, tout $x \in \mathbb{R}$ est un point stationnaire et $f(x) = c$.

Q2. Déterminer les minimums locaux de f.

Réponse Q2.
La dérivée seconde vaut $f''(x) = a$.

Les minimums locaux sont nécessairement des points stationnaires. Ils doivent par ailleurs vérifier la condition du second ordre $f''(x) \geq 0$. Si $a < 0$, $f''(x) < 0$ et il n'y a donc pas de minimum local.

Si $a > 0$, les points stationnaires sont des minimums locaux car les conditions suffisantes d'optimalité locales sont satisfaites ($f'(x) = 0$ et $f''(x) > 0$).

Reste à étudier le cas où $a = 0$. On ne peut pas conclure avec les conditions d'optimalité vues en cours. En revanche, on note que f se réduit alors à $f(x) = bx + c$. Si $b \neq 0$, il n'y a pas de minimum local car f n'est pas bornée. Si $b = 0$, alors $f(x) = c$ et tout $x \in \mathbb{R}$ est un minimum local.

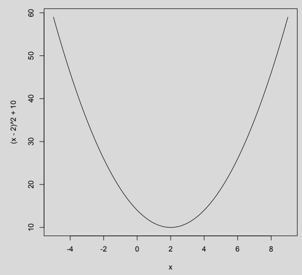
Récapitulons les résultats :
— $a < 0$: pas de minimum local
— $a > 0$: un unique minimum local est atteint en $x^* = -\dfrac{b}{a}$ et valant $f(x^*) = c - \dfrac{b^2}{2a}$
— $a = b = 0$: tout $x \in \mathbb{R}$ est un minimum local
— $a = 0, b \neq 0$: pas de minimum local

Q3. Déterminer les minimums globaux de f et illustrer graphiquement chaque cas de figure.

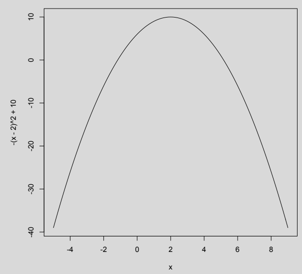
Réponse Q3.
Lorsque $a \geq 0$, nous avons $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour une fonction convexe, tout minimum local est un minimum global. Les minimums locaux décrits à la question précédente sont donc aussi les minimums globaux.

Lorsque $a < 0$, il n'y a pas de minimum local et donc pas de minimum global.

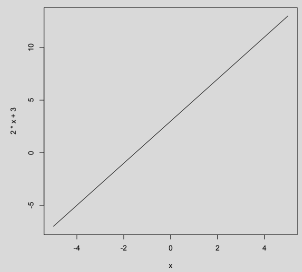
$\boxed{a > 0}$ Un unique minimum global atteint en $x^* = -\dfrac{b}{a}$ et valant $f(x^*) = c - \dfrac{b^2}{2a}$. La fonction f est strictement convexe. Représentons par exemple $f(x) = (x-2)^2 + 3$:



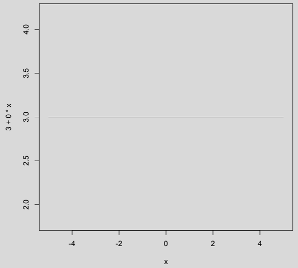
$\boxed{a < 0}$ Pas de minimum global mais un maximum global atteint en $x^* = -\dfrac{b}{a}$. La fonction f est strictement concave. Représentons par exemple $f(x) = -(x-2)^2 + 3$:



$\boxed{a = 0, b \neq 0}$ Pas de minimum, ni de maximum global. La fonction f est affine et strictement monotone. Représentons par exemple $f(x) = 2x + 3$:



$\boxed{a = b = 0}$ Tout $x \in \mathbb{R}$ est un minimum global . La fonction f est constante. Représentons par exemple $f(x) = 3$:



11 Différentiation

Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)^\top$.

Q1. Soit la fonction $f(x) = \|x\|^2$ (norme euclidienne au carré) . Exprimer simplement le gradient $\nabla f(x)$ et la hessienne $\nabla^2 f(x)$.

Réponse Q1.
Nous avons $f(x) = ||x||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ puis

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \cdots \\ 2x_n \end{pmatrix} = 2x.$$

et

$$\nabla^2 f(x) = \nabla[\nabla f(x)] = \begin{pmatrix} \nabla(2x_1) & \cdots & \nabla(2x_n) \end{pmatrix} = 2I$$

où I désigne la matrice identité d'ordre n.

Q2. Démontrer que $\nabla(Ax) = A^\top$ où A est une matrice $(p \times n)$.

Réponse Q2.
Soit

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_p(x) \end{pmatrix}$$

Puis

$$\nabla(Ax) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x) & \cdots & \nabla F_p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^\top$$

Q3. Soit $f\ :\ \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable et A une matrice $p \times n$ de rang n. Soit

$$q(x) = f(Ax).$$

En utilisant la règle de chaînage, démontrer les résultats suivants :

$$\nabla q(x) = A^T \nabla f(Ax)$$
$$\nabla^2 q(x) = A^T \nabla^2 f(Ax) A$$

Réponse Q3.
Nous avons $q(x) = f[g(x)]$ avec $g(x) = Ax$ et $\nabla g(x) = A^T$. Il vient alors, par la règle de chaînage :

$$\nabla q(x) = \nabla g(x) \nabla f(g(x)) = A^T \nabla f(Ax)$$

Puis $\nabla q(x) = h[u(x)]$ avec $h(x) = A^T x$, $\nabla h(x) = Ax$ et $u(x) = \nabla f(Ax)$.
Calculons maintenant le gradient de u en utilisons à nouveau la règle de chaînage. Nous avons $u(x) = \phi_1[\phi_2(x)]$ avec $\phi_1(x) = \nabla f(x)$, $\nabla\phi_1(x) = \nabla^2 f(x)$, $\phi_2(x) = Ax$ et $\nabla\phi_2(x) = A^\top$. Il suit

$$\nabla u(x) = \nabla\phi_2(x)\nabla\phi_1[\phi_2(x)] = A^T \nabla^2 f(Ax)$$

Finalement

$$\nabla^2 q(x) = \nabla u(x) \nabla h(u(x)) = A^T \nabla^2 f(Ax) A$$

12 Conditions d'optimalité

Q1. Soit $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$. Déterminer les points stationnaires, les minimums locaux et les minimums globaux de f.

Réponse Q1.
Calculons le gradient de f :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) + 2(x_1 - 1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow x = (1, 1)^T$$

Le point $x^* = (1,1)^T$ est donc le seul point stationnaire.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -400x_2 + 1200x_1^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\nabla^2 f(x^*) = \nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$$

On a alors $\mathrm{Trace}(\nabla^2 f(x^*)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1000 > 0$ et $\det(\nabla^2 f(x^*)) = \lambda_1 \lambda_2 = 400 > 0$, ce qui implique que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives. La hessienne est donc définie positive en x^* et x^* est un minimum local.
On remarque par ailleurs que $f(x_1, x_2) \geq 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(1,1) = 0$, on peut conclure que x^* est un minimum global.

Q2. Montrer que la fonction $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$ a deux minimums globaux et un point stationnaire qui n'est ni un minimum local, ni un maximum local.

Q3. Trouver tous les minimums locaux et les maximums locaux de $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2$.

Q4. Soit un parallélépipède rectangle de volume 1. Montrer que le cube est le parallélépipède de surface minimum. Vous formulerez le problème comme un problème d'optimisation à 3 variables avec une contrainte, puis transformerez ce problème en un problème d'optimisation à 2 variables, sans contrainte.

Réponse Q4.
Soit x, y, z les longueurs (strictement positives) des côtés du parallélépipède. La surface du cube vaut $2(xy + xz + yz)$ et son volume xyz.
Le problème de minimiser la surface pour un volume d'une unité s'écrit donc :

$$\begin{cases} \min & xy + xz + yz \\ s.c. & xyz = 1 \\ & x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

On exprime z en fonction de x et y grâce à la relation $xyz = 1$, on peut se ramener à un problème sans contrainte avec deux variables :

$$\begin{cases} \min & f(x,y) = xy + xz + \dfrac{1}{xy} \\ s.c. & x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

Calculons le gradient et le Hessien de f :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - \dfrac{1}{x^2} \\ x - \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x,y) = 0$ implique $x^3 = y^3 = 1$. Les variables étant strictement positives, le seul point stationnaire est donc $(1,1)$.

La hessienne n'est pas définie positive pour tout (x,y). En effet, $det(\nabla f(x,y)) = \dfrac{4}{(xy)^3} - 1$ est strictement négatif pour x et y suffisamment grands. La fonction f n'est donc pas convexe.
On vérifie en revanche facilement que la hessiene est définie positif en $(1,1)$:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et $(1,1)$ est la seul miniminum local sur le domaine de réalisabilité.
Hors-programme : Comme il y un seul point stationnaire, $(1,1)$ est aussi un mimimum global. Le cube est donc le parallélépipède de surface minimum.

13 Moindres carrés

On considère le problème des moindres carrés consistant à minimiser la fonction

$$f(x) = ||Ax - b||^2$$

où A est une matrice $p \times n$ de rang n. On considère la norme euclidienne.

Q1. Montrer en utilisant la règle de chainage que $\nabla f(x) = 2A^\top(Ax - b)$ et $\nabla^2 f(x) = 2A^\top A$.

Réponse Q1.
Nous avons $f = g \circ h$ avec $h(x) = Ax - b$ et $g(x) = ||x||^2$. De plus, $\nabla h(x) = A^\top$ et que $\nabla g(x) = 2x$. En utilisant la règle de chaînage, il vient

$$\nabla f(x) = \nabla h(x) \nabla g[h(x)] = 2A^\top(Ax - b)$$

puis

$$\nabla^2 f(x) = 2A^\top A$$

Q2. En déduire le minimum global de f lorsque la matrice A est de rang n. On rappelle que $rang(A^\top A) = rang(AA^\top) = rang(A)$.

Réponse Q2.
La hessienne est une matrice symétrique semi-définie positive car

$$x^\top \nabla^2 f(x) x = x^\top \nabla^2 2A^\top A x = (Ax)^\top Ax = \|Ax\|^2 \geq 0.$$

La fonction f est donc convexe et les points stationnaires sont des minimums locaux et globaux.

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b$$

et on retrouve les équations normales (cf cours d'analyse numérique du 1er semestre). $A^T A$ est une matrice $n \times n$ de même rang que A (cf exercice du 1er semestre). Elle est donc inversible si $rang(A) = n$. Nous avons alors :

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$

14 Méthode du gradient

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2.$$

Q1. Montrer par récurrence que la méthode de la plus forte pente, avec $d_k = -\nabla f(x_k)$, appliquée à f en partant de $(0,0)$ génère une suite vectorielle $\{x_k\}$ de terme général

$$x_k = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3^k} - 2 \\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k - 1 \end{pmatrix}$$

Réponse Q1.
Nous avons

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4 \\ 4x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Puis $d_0 = -\nabla f(0) = (-4,-4)^T$ puis

$$\theta(t) = f(x_0 + td_0) = f(-4t, -4t) = 16(3t^2 - 2t)$$

$\theta'(t) = 0$ donne $t_0 = \dfrac{1}{3}$ puis

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)^T$$

Nous avons donc montrer la propriété pour $k = 1$.

Supposons la propriété vraie pour $k \geq 1$. Pour simplifier les notations, posons $a = \dfrac{1}{3^k}, b = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^k$, ce qui donne comme hypothèse de récurrence :

$$x_k = \begin{pmatrix} 2(a-1) \\ b-1 \end{pmatrix}$$

Posons

$$\theta(t) = f(x_k + td_k) = \cdots$$

En utilisant la règle de chainage, nous avons

$$\theta'(t) = d_k^T \nabla f(x_k + td_k)$$

Nous avons par ailleurs :

$$d_k = -4 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$x_k + td_k = \begin{pmatrix} 2(a-1) - 4at \\ (b-1) - 4bt \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_k + td_k) = \begin{pmatrix} 4a(1-2t) \\ 4b(1-4t) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\theta'(t) = -16[a^2(1-2t) + b^2(1-4t)$$

En notant que $a^2 = b^2$, il suit :

$$\theta'(t) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{1}{3}$$

puis

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k = \begin{pmatrix} 2(a-1) - \frac{4}{3}a \\ \\ b - 1 - \frac{4}{3}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a - 2 \\ \\ -\frac{b}{3} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3^{k+1}} - 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \end{pmatrix}$$

CQFD.

Q2. En déduire le minimum de f.

Réponse Q2.
La suite x_k converge vers $x^* = (-2, -1)^\top$. Le minimum est donc atteint en x^* et a pour valeur $f(x^*) = -4$

15 Non convergence de la méthode du gradient

Soit la fonction f définie par :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2.$$

Q1. Déterminer le minimum de f

Réponse Q1.
On note $x = (x_1, x_2)^T$, de sorte que $f(x) = x^T Ax - a^T x$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

On a alors $\nabla f = 2Ax - a$ et $\nabla^2 f = 2A$.
A est diagonale de spectre $Sp(A) = \{1, 4\} \subset \mathbb{R}_+^*$. A est donc définie positive et f est (strictement) convexe. Elle admet un unique minimum global x^*, solution de $2Ax = a$ soit

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q2. Donner les courbes de niveau de f.

Réponse Q2.

Les courbes de niveau de f dont des ellipses, centrées en x^*, dont les axes sont parallèles à la base canonique. L'ellipse est aplatie d'un facteur $1/2$ sur l'axe parallèle à l'axe des ordonnées.

Q3. Montrer que la méthode de la plus forte pente appliquée à f, en partant de $(0, 0)$ ne peut converger en un nombre fini d'itérations.

Réponse Q3.
Notons x_k le point obtenu à la k-ième itération de la méthode du gradient et $\hat{X}$ la solution optimale. Deux petits lemmes nous seront utiles (démonstration intuitive à l'aide d'une figure avec les courbes de niveau) :

Lemme 1. *Si x_k n'appartient pas à l'un des axes de l'ellipse, alors x_{k+1} n'appartient pas à l'un des axes de l'ellipse.*

Lemme 2. *Soit $k > 0$. Alors $x_k = \hat{X}$ si et seulement si x_{k-1} appartient à l'un des axes de l'ellipse.*

Nous avons $x_0 = (0, 0)$ qui n'appartient pas à l'un des axes de l'ellipse. Il suit, d'après le lemme 1, que $x_1, x_2, \cdots$ n'appartiennent pas à l'un des axes des abscisses. Nous avons donc pour tout $k \geq 0$, x_k qui n'appartient pas à l'un des axes de l'ellipse et $x_{k+1} \neq \hat{X}$ d'après le lemme 2. On conclut que le l'algorithme ne peut converger en un nombre fini d'itérations.

16 Gradient versus gradient conjugué

Soit la fonction quadratique définie dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 10x_1 - 8x_2.$$

Q1. Montrer que f est une fonction convexe et déterminer son minimum global.

Réponse Q1.
Nous avons

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 + 8x_2 - 10 \\ 10x_2 + 8x_1 - 8 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

La hessienne est symétrique réelle et est donc diagonalisable. Soit $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Nous avons $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 20 > 0$ et $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 34 > 0$. D'où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. La hessienne est donc définie positive et donc strictement convexe. Elle admet donc un unique minimum local et global x^*, solution de $\nabla f(x^*) = 0$.

$$\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La valeur de la fonction objectif en x^* est $f(x^*) = -5$.

Q2. Représenter les courbes de niveau de f.

Réponse Q2.

Le calcul des vecteurs propres et valeurs propres donne :

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{avec } q_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \quad \text{avec } q_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc $\dfrac{\text{Longeur axe 1}}{\text{Longueur axe 2}} = 3$ et l'ellipse est donc aplatie d'un facteur 1/3 suivant l'axe q_2.

Q3. A partir du point initial $(-4, 4)$, appliquer 2 itérations des méthodes du gradient et du gradient conjugué. Comparer les résultats obtenus.

Réponse Q3.
Mettons tout d'abord f sous la forme adéquate, afin de pouvoir implémenter l'algorithme du gradient conjugué donné dans le polycopié :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - a^T x \tag{12}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Méthode du gradient

Nous prendrons $d_k = -\nabla f(x_k)$ Dans le cas d'une fonction quadratique mise sous la forme (12), le pas optimal est, d'après les notes de cours :

$$t_k = \frac{d_k^T d_k}{d_k^T A d_k}$$

- Initialisation : $x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(x_0) = 40$
- Itération 0 :
  - Direction de déplacement : $d_0 = -\nabla f(x_0) = (18, 0)^T$
  - Pas de déplacement :
    $$t_0 = \frac{d_0^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{1}{10}$$
  - Mise à jour :
    $$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ 4 \end{pmatrix}$$
    $$f(x_1) = 119/5 = 23.8$$
- Itération 1 :
  - Direction de déplacement : $d_1 = -\nabla f(x_1) = (0, -72/5)^T$
  - Pas de déplacement :
    $$t_1 = \frac{d_1^T d_1}{d_1^T A d_1} = \frac{1}{10}$$
  - Mise à jour :
    $$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = (-11/5, 64/25)^T$$
    $$f(x_2) = 13.432$$

Un petit code python donne les valeurs de la fonction objectif pour les 30 premières itérations :

```
[[40.]]
[[23.8]]
[[13.432]]
[[6.79648]]
[[2.5497472]]
[[-0.16816179]]
[[-1.90762355]]
[[-3.02087907]]
[[-3.7333626]]
[[-4.18935207]]
[[-4.48118532]]
[[-4.66795861]]
[[-4.78749351]]
[[-4.86399585]]
[[-4.91295734]]
[[-4.9442927]]
[[-4.96434733]]
[[-4.97718229]]
[[-4.98539667]]
[[-4.99065387]]
[[-4.99401847]]
[[-4.99617182]]
[[-4.99754997]]
[[-4.99843198]]
[[-4.99899647]]
```

```
[[-4.99935774]]
[[-4.99958895]]
[[-4.99973693]]
[[-4.99983164]]
[[-4.99989225]]
```

Méthode du gradient conjugué

En théorie, la méthode du gradient conjugué converge en n itérations pour une fonction quadratique strictement convexe à n variables. Vérifions le sur cet exemple où $n = 2$.

Mettons tout d'abord f sous la forme adéquate, afin de pouvoir implémenter l'algorithme du gradient conjugué donné dans le polycopié :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - a^T x$$

avec $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Les calculs sont un peu lourds et donnent :

— Initialisation : $x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$,$f(x_0) = 40$, $g_0 = \nabla f(x_0) = -18 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_0 = -g_0 = 18 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

— Itération 0 :

 — Pas de déplacement :

$$t_0 = -\frac{g_0^T d_0}{d_0^T Ad_0} = \frac{1}{10}$$

 — Mise à jour :

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1) = 23.8$$

 (remarque : jusqu'ici, la méthode est identique à la méthode du gradient)

 — Nouvelle direction du gradient conjugué :

$$\beta_0 = \frac{g_1^T Ad_0}{d_0^T Ad_0} = \frac{16}{25}$$

$$g_1 = \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{72}{5} \end{pmatrix}$$

$$d_1 = -g_1 + \beta_0 d_0 = \begin{pmatrix} \frac{288}{25} \\ -\frac{72}{5} \end{pmatrix}$$

— Itération 1 :

 — Pas de déplacement :

$$t_1 = -\frac{g_1^T d_1}{d_1^T Ad_1} = \frac{5}{18}$$

 — Mise à jour :

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_2) = -5$$

 — La suite n'est pas utile, l'algorithme ayant convergé vers la solution optimale au bout de deux itérations.