

## Torseurs

Gilles LEBORGNE

25 avril 2014

### Table des matières

<b>Partie I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>2</b>
1.1	Torseur dans le plan $\mathbb{R}^2$	2
1.2	Plongement dans $\mathbb{R}^3$ et éléments de réduction	3
1.3	“Petit problème” pour la résultante	3
1.4	Origine du “petit” problème	5
<b>Partie II</b>	<b>Rappels</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Rappel : produit vectoriel</b>	<b>6</b>
2.1	Application $n$ -linéaire	6
2.2	Produit vectoriel	6
2.3	Déterminant et produit vectoriel	7
2.4	Produit vectoriel $\wedge$ dans une b.o.n. directe ou indirecte	8
<b>3</b>	<b>Produit matriciel <math>\tilde{\wedge}</math></b>	<b>8</b>
3.1	Définition du produit matriciel $\tilde{\wedge}$	8
3.2	Produit matriciel $\tilde{\wedge}$ dans une b.o.n. directe ou indirecte	9
3.3	Danger de l’abus de notation $\tilde{\wedge} =^{\text{noté}} \wedge$ pour les matrices	9
<b>4</b>	<b>Rappels : endomorphismes et représentations matricielles</b>	<b>10</b>
4.1	Définition d’un endomorphisme	10
4.2	Représentation matricielle d’un endomorphisme	10
4.3	Cas particulier d’une b.o.n.	11
4.4	Endomorphisme transposé	11
4.5	Endomorphismes symétriques et antisymétriques	11
4.6	Noyau, image	12
4.7	Matrice d’un endomorphisme antisymétrique dans une b.o.n.	12
4.8	Formules de changement de base	12
<b>5</b>	<b>Pseudo-vecteur (la matrice colonne) associé à un endomorphisme antisymétrique dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>13</b>
5.1	Endomorphisme antisymétrique et matrice colonne associée par $\tilde{\wedge}$	13
5.2	Pseudo-vecteur (la matrice colonne)	14
5.3	Pseudo-vecteur (matrice) versus vecteur	14
<b>Partie III</b>	<b>Champs de vecteurs et torseurs</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Champ de vecteurs</b>	<b>16</b>
6.1	Définition	16
6.2	Champ de vecteurs affines	16

<b>7</b>	<b>Torseurs</b>	<b>17</b>
7.1	Définition . . . . .	17
7.2	Éléments de réduction . . . . .	17
7.3	Axe central d'un torseur . . . . .	17
7.4	Couple . . . . .	18
7.5	Glisseur . . . . .	18

## Première partie

# Introduction

## 1 Présentation

On note  $\overline{\mathbb{R}^n}$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  produit cartésien de  $\mathbb{R}$  par lui-même  $n$ -fois.

On note  $(\vec{E}_i)_{i=1,\dots,n} \stackrel{\text{noté}}{=} (\vec{E}_i)$  la base canonique de  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , où donc  $\vec{E}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{E}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\vec{E}_n = (0, \dots, 0, 1)$  : on utilise  $n-1$  fois l'élément neutre de l'addition 0, et 1 fois l'élément neutre de la multiplication 1.

On note  $\mathbb{R}^n$  l'espace affine d'espace vectoriel associé  $\overline{\mathbb{R}^n}$  et  $O$  un point de  $\mathbb{R}^n$  (origine).

### 1.1 Torseur dans le plan $\mathbb{R}^2$

**Définition 1.1** Dans  $\mathbb{R}^2$ , un torseur est une application :

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}^2} \\ B \rightarrow \mathcal{M}(B) = (B, \vec{M}(B)), \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\vec{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}^2}$  est une application affine antisymétrique : il existe  $A \in \mathbb{R}^2$  (un point) t.q. pour tout  $B \in \mathbb{R}^2$  :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + L \cdot \overrightarrow{AB}, \quad (1.2)$$

où  $L : \overline{\mathbb{R}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^2}$  est un endomorphisme antisymétrique. Autrement dit  $L$  est une application linéaire de rotation d'un quart de tour composée avec une homothétie.  $\vec{M}(B)$  est appelé "moment en  $B$ ".

**Interprétation géométrique :** la matrice  $[L]_E$  représentant  $L$  dans la base canonique  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  de  $\overline{\mathbb{R}^2}$  est :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

avec  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$  la matrice de rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique et  $\alpha$  le rapport d'homothétie. En particulier  $\vec{M}(B) - \vec{M}(A)$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et a pour longueur  $|\alpha|$  fois la longueur de  $\overrightarrow{AB}$ .

**Interprétation en degrés de liberté :** un torseur  $\mathcal{M}$  associe à un point  $B$  le couple :

$$\mathcal{M}(B) = (\text{point } B \text{ d'application}, \text{ vecteur } \vec{M}(B)), \quad (1.4)$$

et est donc, dans  $\mathbb{R}^2$ , déterminé à l'aide de  $2 + 2 = 4$  degrés de libertés (ddl) : 2 ddl de position de  $B$  et 2 ddl composantes du vecteur  $\vec{M}(B)$ .

**Exemple 1.2** Pour un mouvement de solide,  $\alpha = \pm 1$  (deux points du solide restent à distance fixée). Par exemple, si  $B$  la position du centre de gravité, le moment en ce point est  $\vec{M}(B)$ . ■

**Exemple 1.3** Pour le moment des forces,  $\alpha$  est un coefficient amplificateur. ■

Notation simplificatrice abusive :

$$\mathcal{M}(B) = (B, \vec{M}(B)) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{M}(B). \quad (1.5)$$

Mais on ne devra pas oublier de penser au point d'application  $B$ , cf. (1.4), et donc ne pas oublier les 2 ddl de position (on a 4 ddl en tout).

## 1.2 Plongement dans $\mathbb{R}^3$ et éléments de réduction

Une rotation plane se décrit par plongement dans  $\mathbb{R}^3$  comme une rotation autour de l'axe des  $z$  : Soit  $L$  l'endomorphisme de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  représenté dans la base canonique  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  par la matrice :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Soit un point  $A \in \mathbb{R}^3$ , soit  $\vec{M}(A) = \begin{pmatrix} \vec{M}(A)_1 \\ \vec{M}(A)_2 \\ \vec{M}(A)_3 \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ . Alors (1.2) devient :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + L.\vec{AB}, \quad (1.7)$$

soit :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AB}, \quad (1.8)$$

où on a posé :

$$\vec{R} = \alpha \vec{E}_3. \quad (1.9)$$

**Définition 1.4** Le vecteur  $\vec{R}$  est appelé la résultante du torseur  $\vec{M}$ . Les éléments de réduction d'un torseur sont la résultante  $\vec{R}$  et, pour un point  $A$  donné, la valeur  $\vec{M}(A)$  dite "moment en  $A$ ".

Quitte à changer de base orthonormée (b.o.n.), tout torseur se met sous la forme (1.7).

En revanche, seul un changement de b.o.n. *directe* permet d'en déduire (1.8) : c'est le "petit problème" adressé au § suivant.

## 1.3 "Petit problème" pour la résultante

Le "petit problème" qui se pose est résumé ainsi :

1. on peut toujours choisir une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$  telle que la matrice  $[L]_e$  du torseur dans la base  $(\vec{e}_i)$  s'écrive sous la forme (1.8) :

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

2. Si on pose  $\vec{R} = \alpha \vec{e}_3$ , alors

2.1 si  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. *directe* alors on a  $L.\vec{AB} = +\vec{R} \wedge \vec{AB}$ , c-à-d le vecteur  $L.\vec{AB}$  est représenté par le produit vectoriel  $+\vec{R} \wedge \vec{AB}$ ,

2.2 si  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. *indirecte* alors on a  $L.\vec{AB} = -\vec{R} \wedge \vec{AB}$ , c-à-d le vecteur  $L.\vec{AB}$  est représenté par le produit vectoriel  $-\vec{R} \wedge \vec{AB}$ .

Autrement dit, la représentation de  $L.\vec{v}$  par l'intermédiaire du produit vectoriel  $(?) \wedge \vec{v}$  est possible, mais cette représentation dépend de l'orientation de la base : on a  $(?) = +\vec{R}$  pour une b.o.n. directe et  $(?) = -\vec{R}$  pour une b.o.n. indirecte.

Ce n'est pas très surprenant en ce sens que  $\vec{R}$  a été défini à partir d'une base, la base qui représente  $L$  par la matrice  $[L]_e$ , cf. (1.10) ; on a alors posé  $\vec{R} = \alpha \vec{e}_3$ . Cette définition de  $\vec{R}$  n'est donc pas intrinsèque : elle dépend du choix de la base.

L'exercice suivant, et la réponse donnée, résument les calculs.

**Exercice 1.5** Un torseur général dans  $\mathbb{R}^3$  est une application affine associée à un endomorphisme antisymétrique  $L$  non nul (application linéaire de rotation autour d'un axe).

1- Montrer que la matrice  $[L]_E$  de  $L$  dans la base canonique  $(\vec{E}_i)$  est de type :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

2- Montrer que :

$$\vec{R}_E = a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2 + c\vec{E}_3 \quad (1.12)$$

donne :

$$L.\vec{v} = +\vec{R}_E \wedge \vec{v}, \quad \forall \vec{v}. \quad (1.13)$$

Ainsi  $L$  est une rotation autour de l'axe  $\text{Vect}\{\vec{R}_E\}$  de  $+\frac{\pi}{2}$  dans le sens trigonométrique autour de  $\vec{R}_E$ .

3- On considère la b.o.n *indirecte*  $(\vec{e}_1 = -\vec{E}_1, \vec{e}_2 = \vec{E}_2, \vec{e}_3 = \vec{E}_3)$ . Montrer que la matrice  $[L]_e$  de  $L$  dans cette base est :

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

avec  $\alpha = a, \beta = -b, \gamma = -c$ .

4- Montrer que :

$$\vec{R}_e = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 \quad \forall \vec{v}, \quad (1.15)$$

donne :

$$L.\vec{v} = -\vec{R}_e \wedge \vec{v}, \quad \forall \vec{v}. \quad (1.16)$$

Ainsi  $L$  est une rotation autour de l'axe  $\text{Vect}\{\vec{R}_e\}$  de  $-\frac{\pi}{2}$  dans le sens trigonométrique autour de  $\vec{R}_e$ .

5- Vérifier que  $\vec{R}_E \neq \vec{R}_e$  (avec  $\vec{R}_e = -\vec{R}_E$ ). Conclure que la définition des vecteurs  $\vec{R}_E$  et  $\vec{R}_e$  de représentation de  $L$  n'est pas intrinsèque (il dépend du choix de la base).

6- Résumer dans le cas  $a = b = 0$  et  $c = 1$  (cas de rotation autour de "l'axe des  $z$ " qui permet de se ramener à une rotation dans  $\mathbb{R}^2$ ).

**Réponse.** 1-  $L$  étant antisymétrique, sa matrice dans la base canonique vérifie  $[L]_E^T = -[L]_E$ . Donc  $L_{ji} = -L_{ij}$  pour tout  $i, j$ , et en particulier  $L_{ii} = 0$  pour tout  $i$ . Donc  $[L]_E$  est du type (1.11) avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (on s'est servi implicitement du produit scalaire euclidien, voir (4.9)).

2- La règle du produit matriciel donne  $[L.\vec{v}]_E = [L]_E.[\vec{v}]_E$  (voir (4.5)). Soit  $\vec{v} = v_1\vec{E}_1 + v_2\vec{E}_2 + v_3\vec{E}_3$ , et donc  $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  est la matrice représentant  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{E}_i)$ . Donc  $[L.\vec{v}]_E = [L]_E.[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} -cv_2 + bv_3 \\ cv_1 - av_3 \\ -bv_1 + av_3 \end{pmatrix}$ .

Et la définition du produit vectoriel (voir (2.4)) donne :

$$\begin{aligned} \vec{R}_E \wedge \vec{v} &= (a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2 + c\vec{E}_3) \wedge (v_1\vec{E}_1 + v_2\vec{E}_2 + v_3\vec{E}_3) \\ &= av_2\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 + av_3\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_3 + bv_1\vec{E}_2 \wedge \vec{E}_1 + bv_3\vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 + cv_1\vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1 + cv_2\vec{E}_3 \wedge \vec{E}_2 \\ &= av_2\vec{E}_3 - av_3\vec{E}_2 - bv_1\vec{E}_3 + bv_3\vec{E}_1 + cv_1\vec{E}_2 - cv_2\vec{E}_1 \\ &= (bv_3 - cv_2)\vec{E}_1 + (cv_1 - av_3)\vec{E}_2 + (av_2 - bv_1)\vec{E}_3. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Donc on a  $[\vec{R}_E \wedge \vec{v}]_E = [L.\vec{v}]_E$ , donc  $\vec{R}_E \wedge \vec{v} = L.\vec{v}$  (deux vecteurs qui ont les mêmes composantes dans une base sont égaux).

3- La matrice  $P$  de passage de la base  $(\vec{E}_i)$  à la base  $(\vec{e}_i)$  stocke dans sa  $j$ -ème colonne les composantes de  $\vec{e}_j$  dans la base  $(\vec{E}_i)$  :  $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La formule de changement de base des endomorphismes (voir (4.23))

donne  $[L]_e = P^{-1}.[L]_E.P$ , d'où (1.14) (rappel : multiplier par  $P$  à droite change le signe de la 1ère colonne, et multiplier par  $P$  à gauche change le signe de la 1ère ligne).

$$4- \text{ Soit } \vec{v} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3. \text{ Donc } [L.\vec{v}]_e = [L]_e.[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} -\gamma w_2 + \beta w_3 \\ \gamma w_1 - \alpha w_3 \\ -\beta w_1 + \alpha w_2 \end{pmatrix}.$$

Et la définition du produit vectoriel donne

$$\begin{aligned} \vec{R}_e \wedge \vec{v} &= (\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3) \wedge (w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3) = (-\alpha\vec{E}_1 + \beta\vec{E}_2 + \gamma\vec{E}_3) \wedge (-w_1\vec{E}_1 + w_2\vec{E}_2 + w_3\vec{E}_3) \\ &= -\alpha w_2\vec{E}_3 + \alpha w_3\vec{E}_2 + \beta w_1\vec{E}_3 + \beta w_3\vec{E}_1 - \gamma w_1\vec{E}_2 - \gamma w_2\vec{E}_1 \\ &= (\beta w_3 - \gamma w_2)(-\vec{e}_1) + (\alpha w_3 - \gamma w_1)(\vec{e}_2) + (\beta w_1 - \alpha w_2)(\vec{e}_3). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Donc on a  $[L.\vec{v}]_e = [-\vec{R}_e \wedge \vec{v}]_e$ , et donc  $L.\vec{v} = -\vec{R}_e \wedge \vec{v}$ .

5-  $\vec{R}_e = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = a(-\vec{E}_1) - b\vec{E}_2 - c\vec{E}_3 = -\vec{R}_E$ , et comme  $L \neq 0$  on a  $\vec{R}_e \neq \vec{R}_E$ .

6- Cas  $a = b = 0 = \alpha = \beta$  et  $c = 1 = -\gamma$ . D'où  $L$  réduit au plan  $\text{Vect}\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\} = \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  a pour matrice  $[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Et on a  $\vec{R}_E = +\vec{E}_3$ ,  $\vec{R}_e = -\vec{e}_3 = -\vec{E}_3$ . ■

## 1.4 Origine du “petit” problème

Le “petit problème” vient de la définition du vecteur  $\vec{R}_e$  qui dépend de la base dans laquelle  $L$  a été représentée (par sa matrice  $[L]_e$ ).

**Au niveau des calculs :** sans le dire, on a utilisé 2 produits “vectoriels” différents.

1. Le premier est le “vrai” produit vectoriel  $\wedge$  entre deux vecteurs, rappeler au § 2 : défini par :

$$\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 = \vec{E}_3, \quad \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 = \vec{E}_1, \quad \vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1 = \vec{E}_2. \quad (1.19)$$

2. Le second est un “faux” produit vectoriel  $\widetilde{\wedge}$ , cf. (3.1) :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \widetilde{\wedge} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

C'est un “pseudo produit vectoriel” entre deux matrices colonnes.

C'est le “pseudo produit vectoriel” qui donne  $[L]_e \cdot [\vec{v}]_e = [\vec{R}]_e \widetilde{\wedge} [\vec{v}]_e$  (calcul entre matrices et non entre vecteurs), et qui fait qu'à partir de (1.14) on a posé (1.15), comme à partir de (1.11) on avait posé (1.12).

Le “pseudo produit vectoriel” n'est pas un calcul entre deux vecteurs (mais entre deux matrices) : ce n'est pas un calcul intrinsèque (il dépend de la représentation dans une base).

Les vecteurs

- $\vec{R}_e$ , cf.(1.15), défini à partir de (1.14), et
- $\vec{R}_E$ , cf.(1.12), défini à partir de (1.11),

sont appelés les “pseudo-vecteurs” de représentation de  $L$  dans la base choisie.

Pour que tout soit clair, la prochaine partie précise les définitions et propriétés dont on a besoin pour faire les calculs..

## Deuxième partie

# Rappels

## 2 Rappel : produit vectoriel

### 2.1 Application $n$ -linéaire

**Définition 2.1** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Une application  $b : E^n \rightarrow F$  est  $n$ -linéaire ssi elle est linéaire par rapport à chaque vecteur :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \overline{\mathbb{R}^n}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad b(\dots, \vec{u} + \lambda \vec{v}, \dots) = b(\dots, \vec{u}, \dots) + \lambda b(\dots, \vec{v}, \dots), \quad (2.1)$$

Quand  $F = \mathbb{R}$ , l'application  $n$ -linéaire  $b$  est appelée forme  $n$ -linéaire.  
Pour  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ) on dit bilinéaire (resp. trilinéaire).

**Définition 2.2** Soit  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Une application  $n$ -linéaire  $b : E^n \rightarrow F$  est alternée ssi :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad b(\dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}, \dots) = -b(\dots, \vec{v}, \dots, \vec{u}, \dots). \quad (2.2)$$

**Exercice 2.3** Montrer que (2.2) équivaut à :

$$\forall \vec{v} \in \overline{\mathbb{R}^n}, \quad b(\dots, \vec{v}, \dots, \vec{v}, \dots) = 0. \quad (2.3)$$

**Réponse.** Ecrivons la démonstration pour bilinéaire pour alléger les notations.

Si (2.2) alors (2.3) est immédiat.

Si (2.3) alors  $0 = b(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = b(\vec{u}, \vec{u}) + b(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, \vec{u}) + b(\vec{v}, \vec{v}) = 0 + b(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, \vec{u}) + 0$ , d'où (2.2). ■

### 2.2 Produit vectoriel

On note  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  la base canonique de  $\overline{\mathbb{R}^3}$ .

**Définition 2.4** Le produit vectoriel est l'application bilinéaire alternée définie par :

$$\wedge : \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbb{R}^3} \times \overline{\mathbb{R}^3} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^3} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \wedge(\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array} \right\} \quad \text{t.q.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 = \vec{E}_3, \\ \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 = \vec{E}_1, \\ \vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1 = \vec{E}_2. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

On note  $\vec{E}_4 = \vec{E}_1$  et  $\vec{E}_5 = \vec{E}_2$ . Ainsi  $\wedge$  est définie génériquement par :

$$\vec{E}_i \wedge \vec{E}_{i+1} = \vec{E}_{i+2} \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

**Exercice 2.5** Vérifier que les trois conditions (2.5) déterminent complètement  $\wedge$ .

**Réponse.**  $\wedge$  est bilinéaire et donc entièrement déterminée par la données des  $\wedge(\vec{E}_i, \vec{E}_j)$  pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ , soit 9 valeurs à définir. Comme  $\wedge$  est alternée,  $\wedge(\vec{E}_i, \vec{E}_i) = 0$  pour tout  $i = 1, 2, 3$ . Reste 6 valeurs à définir. Comme  $\wedge$  est alternée  $\wedge(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = -\wedge(\vec{E}_j, \vec{E}_i)$  pour tout  $1 \leq i < j \leq 3$ . Reste 3 valeurs à définir : données par (2.5). ■

Donc pour  $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{E}_i$  et  $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{E}_i$ ,  $\wedge$  étant bilinéaire et alternée :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \vec{E}_i \wedge \vec{E}_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (u_i v_j - u_j v_i) \vec{E}_i \wedge \vec{E}_j \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{E}_1 \wedge \vec{E}_3 \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{E}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{E}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{E}_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Remarque 2.6** On calcule  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans la base canonique avec l'écriture formelle :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{E}_1 & u_1 & v_1 \\ \vec{E}_2 & u_2 & v_2 \\ \vec{E}_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où on développe formellement le déterminant suivant la première colonne, ce qui donne (2.6).  $\blacksquare$

Donc, notant  $[\vec{u}]_E, [\vec{v}]_E$  et  $[\vec{u} \wedge \vec{v}]_E$  les matrices colonnes stockant les composantes dans la base  $(\vec{E}_i)$  :

$$[\vec{u}]_E = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{donnent} \quad [\vec{u} \wedge \vec{v}]_E = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

### 2.3 Déterminant et produit vectoriel

**Définition 2.7** Le produit scalaire euclidien dans  $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$  est la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$  définie par :

$$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n} : \begin{cases} \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v})_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \quad \text{t.q.} \quad (\vec{E}_i, \vec{E}_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \quad \text{pour tout } i, j = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ , et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ).

**Définition 2.8** Le déterminant dans  $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$  est la forme  $n$ -linéaire alternée définie par :

$$\det(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n) = 1. \quad (2.10)$$

**Définition 2.9** Le "volume algébrique" (positif ou négatif) d'un parallélépipède de côté  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  est le réel  $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ . (Et le volume du parallélépipède est  $|\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)|$ .)

**Exercice 2.10** Montrer que  $\det(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n) = 1$  détermine entièrement  $\det$ .

**Réponse.** 1-  $\det$  étant multilinéaire,  $\det$  est déterminée si on connaît tous les  $\det(\vec{E}_{i_1}, \dots, \vec{E}_{i_n})$  pour tous les  $i_1, \dots, i_n$ .

2-  $\det$  étant alternée,  $\det(\vec{E}_{i_1}, \dots, \vec{E}_{i_n})$  est non nul ssi les indices  $i_j$  sont distincts 2 à 2 pour  $j = 1, \dots, n$ . Et dans ce cas, par permutations de deux indices, on a  $\det(\vec{E}_{i_1}, \dots, \vec{E}_{i_n}) = \pm \det(\vec{E}_{i_1}, \dots, \vec{E}_{i_n})$  pour tout  $i_1, \dots, i_n \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ , ce qui détermine tous les réels  $\det(\vec{E}_{i_1}, \dots, \vec{E}_{i_n})$ .  $\blacksquare$

**Proposition 2.11 (Définition alternative du produit vectoriel.)**

On munit  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  de son produit scalaire euclidien  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^3}$ . Alors, pour  $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ ,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est l'unique vecteur de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  t.q. :

$$\forall \vec{w} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w})_{\mathbb{R}^3} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \quad (2.11)$$

**Preuve.** Le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  donné en (2.6) vérifie immédiatement (2.11).

On a  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{E}_1) = \sum_{ij} u_i v_j \det(\vec{E}_i, \vec{E}_j, \vec{E}_1) = u_2 v_3 - u_3 v_2$ . Donc  $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{E}_1)_{\mathbb{R}^3} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{E}_1)$  donne  $(\vec{u} \wedge \vec{v})_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$ . Idem pour les autres composantes. D'où l'unicité.  $\blacksquare$

**Proposition 2.12** Si  $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ , alors  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  est l'aire du parallélogramme de côtés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$  et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$ .

**Preuve.** Supposons  $\vec{u}$  non colinéaire à  $\vec{v}$ , sinon c'est immédiat car  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

(2.11) donne  $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w})_{\mathbb{R}^3} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  si  $\vec{w} = \vec{u}$  ou  $\vec{v}$  (car  $\det$  est alternée), donc  $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

Puis soit  $\vec{w} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|_{\mathbb{R}^3}}$ . Alors  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|_{\mathbb{R}^3} = (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w})_{\mathbb{R}^3} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{volume limité par } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ . Comme  $\vec{w} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$  et  $\vec{w}$  est unitaire, on a  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|_{\mathbb{R}^3} = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$  l'aire du parallépipède de côté  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et de hauteur  $\vec{w} \perp \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$  de norme 1, donc c'est l'aire parallélogramme de côtés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  $\blacksquare$

**Remarque 2.13** L'existence et l'unicité du vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  t.q. (2.11) peuvent également être déduites du théorème de représentation de Riesz : c'est le vecteur qui représente la forme linéaire  $\vec{w} \rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  à l'aide produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^3}$ . Cette approche permet de généraliser la notion de produit vectoriel à  $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$  pour  $n \geq 4$ .  $\blacksquare$

## 2.4 Produit vectoriel $\wedge$ dans une b.o.n. directe ou indirecte

**Définition 2.14** Une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$  de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  est directe ssi  $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = +1$ , et elle est indirecte ssi  $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = -1$ .

**Exercice 2.15** Montrer qu'une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$  de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  est directe ssi  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ , et qu'elle est indirecte ssi  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_3$ .

**Réponse.** (2.11) donne  $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{\mathbb{R}^3}$ .

Puis la proposition 2.12 donne  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \perp \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , donc  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \in \text{Vect}\{\vec{e}_3\}$  (car  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n.), avec  $\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\| = 1$  (aire du carré de côté  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ ), donc  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_3$ , où, avec (2.12), signe  $+$  si b.o.n. directe et signe  $-$  si b.o.n. indirecte.  $\blacksquare$

**Exemple 2.16** Soit  $\vec{e}_1 = -\vec{E}_1$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{E}_2$  et  $\vec{e}_3 = \vec{E}_3$ .

Donc  $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \det(-\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = -\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = -1$  et  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. indirecte. Et  $\wedge(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \wedge(-\vec{E}_1, \vec{E}_2) = -\wedge(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  car  $\wedge$  est bilinéaire, donc  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -(\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2) = -\vec{E}_3 = -\vec{e}_3$ , cas particulier de (2.13)<sub>2</sub>.  $\blacksquare$

Pour une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  on notera  $\vec{e}_4 = \vec{e}_1$  et  $\vec{e}_5 = \vec{e}_2$ .

**Proposition 2.17** Soit  $(\vec{e}_i)$  une b.o.n.. On a :

$$\begin{aligned} (\vec{e}_i) \text{ est directe} &\iff \det(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}, \vec{e}_{i+2}) = +1 \quad \forall i = 1, 2, 3, \\ (\vec{e}_i) \text{ est indirecte} &\iff \det(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}, \vec{e}_{i+2}) = -1 \quad \forall i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} (\vec{e}_i) \text{ est directe} &\iff \vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1} = +\vec{e}_{i+2} \quad \forall i = 1, 2, 3, \\ (\vec{e}_i) \text{ est indirecte} &\iff \vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1} = -\vec{e}_{i+2} \quad \forall i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

D'où pour  $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i$  et  $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$  :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= + \left( (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 \right) \quad \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ &= - \left( (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 \right) \quad \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donc si  $[\vec{u} \wedge \vec{v}]_e$  est la matrice colonne des composantes de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans la base  $(\vec{e}_i)$  :

$$\begin{aligned} [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e &= + \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e &= - \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Preuve.** On a :  $(\vec{e}_i)$  est directe ssi  $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = +1$ . Et  $\det$  étant alternée  $\det(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}, \vec{e}_{i+2}) = -\det(\vec{e}_{i+1}, \vec{e}_i, \vec{e}_{i+2}) = \det(\vec{e}_{i+1}, \vec{e}_{i+2}, \vec{e}_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ , donc  $= \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . D'où (2.12). D'où (2.14) avec l'exercice 2.15.

Et  $\wedge$  étant bilinéaire et alternée :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} u_i v_j \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ , d'où (2.14). D'où (2.15).  $\blacksquare$

## 3 Produit matriciel $\tilde{\wedge}$

### 3.1 Définition du produit matriciel $\tilde{\wedge}$

Pour deux matrices colonnes  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , on définit leur pseudo produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tilde{\wedge} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Et on note souvent abusivement (mais pas dans ce polycopié) :

$$\tilde{\wedge} \stackrel{\text{noté}}{=} \wedge. \quad (3.2)$$

Éviter cet abus de notation permettra de comprendre facilement que “la résultante d’un torseur est un pseudo-vecteur”.

### 3.2 Produit matriciel $\tilde{\wedge}$ dans une b.o.n. directe ou indirecte

**Corollaire 3.1** Avec la notation  $\tilde{\wedge}$ , cf. (3.1), si  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n., alors pour  $i = 1, 2, 3$  :

$$\begin{aligned} [\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1}]_e &= +[\vec{e}_i]_e \tilde{\wedge} [\vec{e}_{i+1}]_e & (= +[\vec{e}_{i+2}]_e) & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ [\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1}]_e &= -[\vec{e}_i]_e \tilde{\wedge} [\vec{e}_{i+1}]_e & (= -[\vec{e}_{i+2}]_e) & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

D’où pour  $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i$  et  $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$ , avec donc  $[\vec{u}]_e = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned} [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e &= +[\vec{u}]_e \tilde{\wedge} [\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e &= -[\vec{u}]_e \tilde{\wedge} [\vec{v}]_e = - \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Preuve.** (2.14) et (3.1) donnent (3.4). D’où en particulier (3.3).  $\blacksquare$

**Exercice 3.2** Démontrer directement (3.3).

**Réponse.** On a  $[\vec{e}_1]_e \tilde{\wedge} [\vec{e}_2]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\wedge} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [\vec{e}_3]_e$ . Et  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_3$ , cf. (2.13), donne  $[\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2]_e = \pm [\vec{e}_3]_e$ . Idem par permutation circulaire sur les indices. D’où (3.3).  $\blacksquare$

**Exercice 3.3** Montrer que, si  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. de  $\mathbb{R}^3$ , si  $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$ ,  $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i$ , alors :

$$\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \vec{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \vec{e}_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} +\vec{u} \wedge \vec{v}, & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ -\vec{u} \wedge \vec{v}, & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte,} \end{cases} \quad (3.5)$$

où le déterminant formel est, par convention, développé par rapport à la 1ère colonne.

**Réponse.** Cas particulier  $\vec{u} = \vec{e}_1$  et  $\vec{v} = \vec{e}_2$  : par convention de calcul (développement par rapport à la 1ère colonne) on a  $\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 0 \\ \vec{e}_2 & 0 & 1 \\ \vec{e}_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +\vec{e}_3$ , et  $\vec{e}_3 = \pm \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ , cf (2.13). Cas général : exercice.  $\blacksquare$

### 3.3 Danger de l’abus de notation $\tilde{\wedge} \stackrel{\text{noté}}{=} \wedge$ pour les matrices

(3.4) montre qu’il ne faut pas confondre le calcul avec  $\tilde{\wedge}$  (entre deux matrices) et le calcul avec  $\wedge$  (entre deux vecteurs).

Le “bon calcul” (intrinsèque) est le calcul vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . Une fois ce calcul fait, on peut représenter le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans la base  $(\vec{e}_i)$  souhaitée, orthonormale ou non, directe ou non, et ainsi obtenir les composantes de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans cette base.

Le calcul “problématique” est le calcul  $[\vec{u}]_e \tilde{\wedge} [\vec{v}]_e$  qui est un calcul matriciel, et qui ne représente  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans la base  $(\vec{e}_i)$  que si  $(\vec{e}_i)$  est orthonormée et  $(\vec{e}_i)$  est directe, cf. (3.4).

**Remarque 3.4** Le choix d’une base directe n’est pas systématique. Un observateur peut par exemple choisir soit l’axe des  $z$  orienté vers le haut, alors qu’un autre observateur peut choisir soit l’axe des  $z$  orienté vers le bas : l’un prend  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  qui est directe, et l’autre prend  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, -\vec{E}_3)$  qui est indirecte.

Quand ils s’échangeront leurs résultats, il faudra en tenir compte, c-à-d ne pas confondre le calcul matriciel avec  $\tilde{\wedge}$  et le calcul vectoriel avec  $\wedge$ .  $\blacksquare$

Ce problème est crucial pour les torseurs : pour  $L$  endomorphisme antisymétrique, et pour  $(\vec{e}_i)$  une b.o.n. donnée, on définit le vecteur  $\vec{R}_e$  (dite résultante du torseur) à l'aide de ses composantes sur la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$  à l'aide du pseudo produit vectoriel  $\tilde{\wedge}$  (voir (5.3)) :

$$\vec{R}_e \text{ est défini t.q. } [L].[\vec{v}]_e = [\vec{R}_e]_e \tilde{\wedge} [\vec{v}]_e. \quad (3.6)$$

(Donc les composantes du vecteur  $\vec{R}_e$  dans la base  $(\vec{e}_i)$  sont stockées dans la matrice colonne  $[\vec{R}_e]_e$ .)

Donc on aura, pour tout  $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  :

$$L.\vec{v} = \begin{cases} +\vec{R}_e \wedge \vec{v}, & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ -\vec{R}_e \wedge \vec{v}, & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{cases} \quad (3.7)$$

## 4 Rappels : endomorphismes et représentations matricielles

### 4.1 Définition d'un endomorphisme

**Définition 4.1** Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux espaces vectoriels réels. Une application linéaire  $L : V_1 \rightarrow V_2$  est une application qui vérifie :

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad L(\vec{v} + \lambda \vec{w}) = L(\vec{v}) + \lambda L(\vec{w}) \in V_2. \quad (4.1)$$

Et on note (pour les applications linéaires) :

$$L(\vec{v}) \stackrel{\text{noté}}{=} L.\vec{v}. \quad (4.2)$$

On note  $\mathcal{L}(V_1; V_2)$  l'ensemble des applications linéaires de  $V_1$  dans  $V_2$ .

**Définition 4.2** Si  $V_1 = V_2 \stackrel{\text{noté}}{=} V$ , on note  $\mathcal{L}(V; V) \stackrel{\text{noté}}{=} \mathcal{L}(V)$ , et un élément de  $\mathcal{L}(V)$  est appelé endomorphisme de  $V$ .

### 4.2 Représentation matricielle d'un endomorphisme

Soit  $V$  espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n} \stackrel{\text{noté}}{=} (\vec{e}_i)$  une base de  $V$ . Soit  $L \in \mathcal{L}(V)$  (un endomorphisme).

Pour  $j = 1, \dots, n$ , on note  $(L_{ij})_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$  les composantes de  $L.\vec{e}_j$  dans la base  $(\vec{e}_i)$  :

$$L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij} \vec{e}_i, \quad [L.\vec{e}_j]_e = \begin{pmatrix} L_{1j} \\ \vdots \\ L_{nj} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$[L.\vec{e}_j]_e$  étant la matrice colonne stockant les composantes du vecteur  $L.\vec{e}_j$  dans la base  $(\vec{e}_i)$ . Et on note  $[L]_e = [L_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$  "la matrice de  $L$  dans la base  $(\vec{e}_i)$ " :

$$[L]_e = [L_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{noté}}{=} [L_{ij}] = \begin{pmatrix} [L.\vec{e}_1]_e & \dots & [L.\vec{e}_n]_e \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Pour  $\vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j$ , notons  $[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  la matrice colonne stockant les composantes de  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{e}_i)$ . Par linéarité de  $L$  on a :

$$L.\vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j L.\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^n L_{ij} v_j \vec{e}_i, \quad \text{donc} \quad [L.\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n L_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n L_{nj} v_j \end{pmatrix} = [L]_e . [\vec{v}]_e, \quad (4.5)$$

la dernière égalité définissant le produit matriciel entre une matrice  $n \times n$  et une matrice  $n \times 1$ .

### 4.3 Cas particulier d'une b.o.n.

On suppose  $V$  muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  (forme bilinéaire symétrique définie positive).

**Définition 4.3** Relativement au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$ , une base orthonormée (une b.o.n.)  $(\vec{e}_i)$  dans  $V$  est une base vérifiant :

$$\forall i, j = 1, \dots, n, \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j)_V = \delta_{ij}. \quad (4.6)$$

**Exercice 4.4** Vérifier que pour une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ , quand  $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$  et  $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i$ , on a :

$$(\vec{u}, \vec{v})_V = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (4.7)$$

**Réponse.**  $(\cdot, \cdot)_V$  bilinéaire donne  $(\vec{u}, \vec{v})_V = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j)_V = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ . ■

**Proposition 4.5** Quand  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. de  $V$ , on a, pour tout  $i, j = 1, \dots, n$  :

$$L_{ij} = (L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_V \quad (\text{cas d'une b.o.n.}). \quad (4.8)$$

**Preuve.** Par bilinéarité de  $(\cdot, \cdot)_V$  on a  $(L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_V = (\sum_{k=1}^n L_{kj} \vec{e}_k, \vec{e}_i)_V = \sum_{k=1}^n L_{kj} (\vec{e}_k, \vec{e}_i)_V = \sum_{k=1}^n L_{kj} \delta_{ki} = L_{ij}$  pour tout  $i, j$ , puisque  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n., cf. (4.6). ■

### 4.4 Endomorphisme transposé

**Définition 4.6** Soit un endomorphisme  $L \in \mathcal{L}(V)$ . L'endomorphisme transposé  $L^T \in \mathcal{L}(V)$  relativement au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  est l'endomorphisme vérifiant :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad (L^T.\vec{v}, \vec{u})_V = (\vec{v}, L.\vec{u})_V. \quad (4.9)$$

Il est immédiat que l'opération de transposition est linéaire, soit  $(L + \lambda M)^T = L^T + \lambda M^T$  pour tout  $L, M \in \mathcal{L}(V)$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et que :

$$(L^T)^T = L. \quad (4.10)$$

**Proposition 4.7** Quand  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. de  $V$ , on a :

$$[L^T]_e = [L]_e^T \quad (\text{cas d'une b.o.n.}), \quad (4.11)$$

*c-à-d la matrice de la transposée est la transposée de la matrice (dans une b.o.n.).*

**Preuve.** Notons  $[L^T]_e = [(L^T)_{ij}]$  la matrice de  $L^T$  dans la base  $(\vec{e}_i)$ ; avec (4.8) on a, pour tout  $i, j = 1, \dots, n$  :

$$(L^T)_{ij} = (L^T.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_V = (\vec{e}_j, L.\vec{e}_i)_V = (L.\vec{e}_i, \vec{e}_j)_V = L_{ji}, \quad (4.12)$$

puisque  $(\vec{e}_i)$  est une b.o.n. ■

### 4.5 Endomorphismes symétriques et antisymétriques

**Définition 4.8** Un endomorphisme  $L \in \mathcal{L}(V)$  est symétrique (relativement au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$ ) ssi :

$$L^T = L, \quad \text{soit,} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad (L^T.\vec{v}, \vec{u})_V = (L.\vec{v}, \vec{u})_V. \quad (4.13)$$

**Définition 4.9** Un endomorphisme  $L \in \mathcal{L}(V)$  est antisymétrique (relativement au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$ ) ssi :

$$L^T = -L, \quad \text{soit,} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad (L^T.\vec{v}, \vec{u})_V = -(L.\vec{v}, \vec{u})_V. \quad (4.14)$$

**Exercice 4.10** Montrer : si  $L$  est antisymétrique, si  $n$  est impair, il existe toujours un vecteur non nul  $\vec{v} \neq \vec{0}$  tel que  $L.\vec{v} = \vec{0}$ , qui est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 0. (Dans  $\mathbb{R}^3$  un tel vecteur donnera une "résultante" d'un torseur.)

**Réponse.** Soit  $(\vec{e}_i)$  une b.o.n. de  $V$  et  $[L]_e = [L_{ij}]$  la matrice représentant  $L$  dans cette base, cf. (4.3).

On a  $\det([L]_e) = \det([L]_e^T)$  (propriété des déterminants), avec  $[L]_e^T = [L^T]_e$  (représentation dans une b.o.n.) et  $L^T = -L$  (antisymétrie), et donc  $\det([L]_e) = \det(-[L]_e) = (-1)^n \det([L]_e)$  (un déterminant est une forme multilinéaire alternée). Donc si  $n$  est impair, on a  $\det([L]_e) = 0$ , donc  $[L]_e$  n'est pas inversible, donc non injective. Donc il existe  $\vec{v} \neq \vec{0}$  t.q.  $L.\vec{v} = \vec{0}$  (et donc 0 est valeur propre). ■

## 4.6 Noyau, image

**Proposition 4.11** Soit  $L$  un endomorphisme de  $V$ . Alors :

$$(\text{Ker}L)^\perp = \text{Im}(L^T), \quad \text{et donc} \quad V = \text{Ker}L \oplus^\perp \text{Im}L^T. \quad (4.15)$$

Donc : si  $L$  est un endomorphisme symétrique ou antisymétrique de  $V$  alors  $(\text{Ker}L)^\perp = \text{Im}L$  :

$$L^T = \pm L \quad \implies \quad (\text{Ker}L)^\perp = \text{Im}L, \quad \text{et donc} \quad V = \text{Ker}L \oplus^\perp \text{Im}L. \quad (4.16)$$

**Preuve.** On a  $\vec{v} \in \text{Ker}L \Leftrightarrow L.\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (L.\vec{v}, \vec{w})_V = 0$  pour tout  $\vec{w} \in V \Leftrightarrow (\vec{v}, L^T.\vec{w})_V = 0$  pour tout  $\vec{w} \in V \Leftrightarrow \vec{v} \perp L^T.\vec{w}$  pour tout  $\vec{w} \in V \Leftrightarrow \vec{v} \in (\text{Im}L^T)^\perp$ . Donc  $\text{Ker}L = (\text{Im}L^T)^\perp$ .

Et pour toute application linéaire  $L$  on a  $\text{Im}(L) = \text{Im}(-L)$  car  $\text{Im}(L)$  est un espace vectoriel. ■

**Exercice 4.12** Soit l'endomorphisme  $L$  de  $E$  de matrice  $[L]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  dans une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ . Vérifier que  $\text{Ker}L \neq (\text{Im}L)^\perp$ . (Ici  $L$  n'est ni symétrique ni antisymétrique.)

**Réponse.**  $L.\vec{x} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0$ . Donc  $\text{Ker}L = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ .

$\text{Im}L = \{\vec{y} = L.\vec{x} = x_1\vec{c}_1 + x_2\vec{c}_2 : \vec{x} \in \mathbb{R}^2\}$  est l'espace engendré par les "vecteurs colonnes" de la matrice  $[L]_e$ , donc  $\text{Im}L = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ . Et  $(\text{Im}L)^\perp = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \neq \text{Ker}L$ . ■

**Exercice 4.13** Soit l'endomorphisme  $L$  de  $E$  de matrice  $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  dans une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ .

Vérifier que  $\text{Ker}L = (\text{Im}L)^\perp$ , et donc que la réciproque de (4.16) est fautive. (Ici  $L$  n'est ni symétrique ni antisymétrique.)

**Réponse.** Ici  $\text{Ker}L = \text{Vect}\{\vec{e}_1\}$  et  $\text{Im}L = \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , car :

\*  $L.\vec{e}_1 = \vec{0}$  (la première colonne de  $[L]_e$  est nulle),

\*  $L.\vec{v} = v_1L.\vec{e}_1 + v_2L.\vec{e}_2 + v_3L.\vec{e}_3 = \vec{0} + v_2L.\vec{e}_2 + v_3L.\vec{e}_3$  est combinaison linéaire des deux derniers "vecteurs colonnes" (indépendants) de  $[L]_e$  donc  $\text{Im}L = \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . ■

**Remarque 4.14** Si  $L$  est bijectif alors  $\text{Ker}L = \text{Vect}\{\vec{0}\}$  et  $\text{Im}L = V$ , donc  $(\text{Ker}L)^\perp = \text{Im}L$ , bien que  $L$  ne soit pas nécessairement symétrique ou antisymétrique : la réciproque de (4.16) est trivialement fautive dans ce cas. ■

## 4.7 Matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une b.o.n.

**Proposition 4.15** Si  $[L]_e = [L_{ij}]$  est la matrice d'un endomorphisme antisymétrique  $L$  dans une b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ , alors la matrice  $[L]_e$  est antisymétrique (en particulier les termes diagonaux de la matrice sont nuls) :

$$L^T = -L \quad \implies \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad L_{ii} = 0, \quad L_{ij} = -L_{ji} \quad (\text{dans une b.o.n.}). \quad (4.17)$$

**Preuve.** (4.11) donne  $L_{ij} = (L^T)_{ji}$  (dans une b.o.n.) avec  $L^T = -L$ , donc  $L_{ij} = -L_{ji}$ . ■

## 4.8 Formules de changement de base

Soit  $(\vec{a}_i)$  et  $(\vec{b}_i)$  deux bases de  $V$ . Soit  $P$  la matrice de changement de base de la base  $(\vec{a}_i)$  vers la base  $(\vec{b}_i)$ , c-à-d  $P$  la matrice qui stocke dans sa  $j$ -ème colonne les composantes du vecteur  $\vec{b}_j$  dans la

base  $(\vec{a}_i)$ . Donc pour  $j = 1, \dots, n$  on a posé :

$$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \vec{a}_i, \quad (4.18)$$

avec donc :

$$[\vec{b}_j]_a = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix} = P \cdot [\vec{a}_j]_a = \text{colonne } j \text{ de } P, \quad (4.19)$$

puisque  $[\vec{a}_1]_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, [\vec{a}_n]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Pour  $\vec{v} \in V$  on note  $v_i$  (resp.  $w_i$ ) ses composantes dans la base  $(\vec{a}_i)$  (resp. dans la base  $(\vec{b}_i)$ ) :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n w_i \vec{b}_i, \quad \text{donc avec } [\vec{v}]_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Pour  $L \in \mathcal{L}(V)$  on note  $A_{ij}$  (resp.  $B_{ij}$ ) ses composantes dans la base  $(\vec{a}_i)$  (resp. dans la base  $(\vec{b}_i)$ ), cf. (4.3) :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad L \cdot \vec{a}_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \vec{a}_i, \quad L \cdot \vec{b}_j = \sum_{i=1}^n B_{ij} \vec{b}_i, \quad (4.21)$$

donc avec :

$$[L]_a = [A_{ij}] \stackrel{\text{noté}}{=} A, \quad [L]_b = [B_{ij}] \stackrel{\text{noté}}{=} B. \quad (4.22)$$

**Proposition 4.16** Les formules de changement de base pour les vecteurs  $\vec{v}$  et les endomorphismes  $L$  sont les formules :

$$[\vec{v}]_b = P^{-1} \cdot [\vec{v}]_a \quad \text{et} \quad [L]_b = P^{-1} \cdot [L]_a \cdot P \quad (\text{soit } B = P^{-1} \cdot A \cdot P). \quad (4.23)$$

**Preuve.** Vérifions (4.23)<sub>1</sub> sous la forme  $[\vec{v}]_a = P \cdot [\vec{v}]_b$ .

$\vec{v} = \sum_j w_j \vec{b}_j$  donne  $\vec{v} = \sum_j w_j (\sum_i P_{ij} \vec{a}_i) = \sum_i (\sum_j P_{ij} w_j) \vec{a}_i$ , avec  $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{a}_i$ , donc  $v_i = \sum_j P_{ij} w_j$  comme annoncé.

Vérifions (4.23)<sub>2</sub> sous la forme  $P \cdot B = A \cdot P$ . On a  $L \cdot \vec{b}_j = \sum_i B_{ij} \vec{b}_i$  (par définition de  $B$ ) pour tout  $j$ .

D'une part  $L \cdot \vec{b}_j = L \cdot (\sum_k P_{kj} \vec{a}_k) = \sum_k P_{kj} (L \cdot \vec{a}_k) = \sum_k P_{kj} (\sum_\ell A_{\ell k} \vec{a}_\ell) = \sum_\ell (\sum_k A_{\ell k} P_{kj}) \vec{a}_\ell = \sum_\ell (A \cdot P)_{\ell j} \vec{a}_\ell$ .

D'autre part  $\sum_i B_{ij} \vec{b}_i = \sum_i B_{ij} (\sum_\ell P_{\ell i} \vec{a}_\ell) = \sum_\ell (\sum_i P_{\ell i} B_{ij}) \vec{a}_\ell = \sum_\ell (P \cdot B)_{\ell j} \vec{a}_\ell$ .

Donc  $L \cdot \vec{b}_j = \sum_i B_{ij} \vec{b}_i$  vrai pour tout  $j$ , donne  $(A \cdot P)_{\ell j} = (P \cdot B)_{\ell j}$  pour tout  $\ell$  et  $j$ .  $\blacksquare$

## 5 Pseudo-vecteur (la matrice colonne) associé à un endomorphisme antisymétrique dans $\mathbb{R}^3$

### 5.1 Endomorphisme antisymétrique et matrice colonne associée par $\tilde{\wedge}$

Soit  $L \in \mathcal{L}(\overrightarrow{\mathbb{R}^3})$  un endomorphisme antisymétrique.

Soit  $(\vec{e}_i)$  une b.o.n de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ . Soit  $[L]_e$  la matrice de  $L$  dans la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ . Avec (4.17) il vient : il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  t.q. :

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

On note  $[\vec{R}_e]_e$  la matrice colonne donnée dans la base  $(\vec{e}_i)$  par :

$$[\vec{R}_e]_e = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

**Proposition 5.1** Avec  $\tilde{\wedge}$  défini par (3.1), on a, pour tout  $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  :

$$[L]_e \cdot [\vec{v}]_e = [\vec{R}_e]_e \tilde{\wedge} [\vec{v}]_e. \quad (5.3)$$

En particulier :

$$[L]_e \cdot [\vec{R}_e]_e = 0. \quad (5.4)$$

**Preuve.** C'est immédiat (la matrice colonne  $[\vec{R}_e]_e$  a été définie pour avoir (5.3)).  $\blacksquare$

## 5.2 Pseudo-vecteur (la matrice colonne)

**Définition 5.2** La matrice  $[\vec{R}_e]_e$  est appelée le pseudo-vecteur associé à  $L$  relativement à la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ .

## 5.3 Pseudo-vecteur (matrice) versus vecteur

**Proposition 5.3** Soit  $(\vec{e}_i)$  une b.o.n. de  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ . Soit  $L \in \mathcal{L}(\overrightarrow{\mathbb{R}^3})$  un endomorphisme antisymétrique de matrice  $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ , cf. (5.1). Soit  $\vec{R}_e \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  le vecteur donné dans la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$  par :

$$\vec{R}_e = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3, \quad \text{avec donc} \quad [\vec{R}_e]_e = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$[\vec{R}_e]_e$  étant la matrice colonne stockant les composantes de  $\vec{R}_e$  dans la base  $(\vec{e}_i)$ , cf. (5.2). Pour tout  $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  on a :

$$L \cdot \vec{v} = \begin{cases} + \vec{R}_e \wedge \vec{v}, & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ - \vec{R}_e \wedge \vec{v}, & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{cases} \quad (5.6)$$

**Preuve.** Il s'agit de vérifier que  $[L \cdot \vec{v}]_e = \pm [\vec{R}_e \wedge \vec{v}]_e$  : on a (5.3) et on a  $[\vec{R}_e]_e \tilde{\wedge} [\vec{v}]_e = \pm [\vec{R}_e \wedge \vec{v}]_e$ , cf. (3.4) page 9.  $\blacksquare$

Ainsi  $\vec{R}_e$  ne représente  $L$  à l'aide du produit vectoriel par la formule  $L \cdot \vec{v} = \vec{R}_e \wedge \vec{v}$  uniquement quand la b.o.n. est directe.

Et suivant l'orientation de la base  $(\vec{e}_i)$  c'est soit  $\vec{R}_e$  soit  $-\vec{R}_e$  qui, au travers du produit vectoriel, représente  $L$  dans la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ , cf. (5.6).

**Remarque 5.4** Le pseudo-vecteur (la matrice)  $[\vec{R}_e]_e$  ne fait que stocker les réels  $\alpha, \beta, \gamma$  donnés dans (5.1). Ici on est dans le cas particulier de  $\mathbb{R}^3$  où un endomorphisme antisymétrique est représenté par 3 réels, et 3 réels font penser à un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  (dans  $\mathbb{R}^2$  une matrice antisymétrique est représentée par 1 seul réel, dans  $\mathbb{R}^4$  une matrice antisymétrique est représentée par 6 réels... : le cas de  $\mathbb{R}^3$  est très particulier).

Ainsi dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $[\vec{R}_e]_e$  a le goût d'un vecteur (il est décrit par trois réels), mais ce n'est pas un vecteur représentant intrinsèquement  $L$  (indépendant de la base).

Ici l'endomorphisme  $L$  représente une rotation, et le vecteur  $\vec{R}_e$  donné en (5.5) est un vecteur directeur de "l'axe de rotation", vecteur dont le sens dépend de l'orientation de la base quand on veut s'en servir pour représenter  $L$  avec le produit vectoriel, cf. (5.6).  $\blacksquare$

**Exercice 5.5** Soit  $L$  endomorphisme de matrice dans la base canonique  $[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

comme en (1.6). Soit la b.o.n. indirecte  $(\vec{e}_1 = -\vec{E}_1, \vec{e}_2 = \vec{E}_2, \vec{e}_3 = \vec{E}_3)$ . Vérifier (5.6) pour  $\vec{v} = \vec{e}_1$ .

**Réponse.** La base  $(\vec{E}_i)$  est directe.

$$11- \text{ Avec (4.5), } [L \cdot \vec{v}]_E = [L]_E \cdot [\vec{v}]_E = [L]_E \cdot [\vec{e}_1]_E = -[L]_E \cdot [\vec{E}_1]_E = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -[\vec{E}_2]_E.$$

12- Notant  $\vec{R}_E$  le vecteur associé à  $[L]_E$ , on a  $\vec{R}_E = \vec{E}_3$  et  $[\vec{R}_E]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , d'où  $\vec{R}_E \wedge \vec{v} = \vec{E}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{E}_3 \wedge (-\vec{E}_1) = -\vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$ , cf. définition 2.4 du produit vectoriel page 6. Donc  $[\vec{R}_E \wedge \vec{v}]_E = [L.\vec{v}]_E$ .

La base  $(\vec{e}_i)$  est indirecte.

La matrice de passage est  $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , avec trivialement  $P^{-1} = P$ .

On a  $[L]_e = P^{-1} \cdot [L]_E \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , cf. (4.23), donc  $\vec{R}_e = -\vec{e}_3$  et  $[\vec{R}_e]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

21- Avec (4.5),  $[L.\vec{v}]_e = [L]_e.[\vec{v}]_e = [L]_e.[\vec{e}_1]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -[\vec{e}_2]_e$ .

22-  $\vec{R}_e \wedge \vec{v} = (-\vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$  (b.o.n. indirecte), d'où  $[\vec{R}_e \wedge \vec{v}]_e = +[\vec{e}_2]_e$ . ▀

**Exercice 5.6** Montrer, pour  $L$  endomorphisme antisymétrique dans  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  :  $L \neq 0 \Leftrightarrow \vec{R}_e \neq \vec{0}$ , et :

$$\text{Ker}L = \text{Vect}\{\vec{R}_e\}. \quad (5.7)$$

**Réponse.** On a :  $\vec{v} \in \text{Ker}L \Leftrightarrow L.\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \pm[\vec{R}_e \wedge \vec{v}]_e = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_e \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{R}_e$  (car  $L \neq 0$ ). ▀

**Exercice 5.7** Montrer, dans  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ , que pour un endomorphisme  $L$  antisymétrique non nul, on peut trouver une b.o.n. directe  $(\vec{e}_i)$  dans laquelle la matrice de  $L$  est de la forme :

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad (5.8)$$

ce qui permet de se ramener à une rotation dans le plan  $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , comme en (1.3), cf. (1.6).

**Réponse.** Supposons  $L \neq 0$  (trivial sinon).  $L$  étant antisymétrique, sa matrice dans la base canonique est de la forme  $[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $\vec{R}_E = a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2 + c\vec{E}_3$ , avec donc  $[\vec{R}_E]_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Ici  $L.\vec{v} = \vec{R}_E \wedge \vec{v}$  pour tout  $\vec{v}$  (la base canonique est directe), cf. (5.6).

On prend  $\vec{e}_3 = \frac{\vec{R}_E}{\|\vec{R}_E\|}$ , donc on a  $\text{Vect}\{\vec{e}_3\} = \text{Ker}L = (\text{Im}L)^\perp$ , cf. (4.16). Et on prend  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  b.o.n. dans  $\text{Im}L = (\text{Ker}L)^\perp$  telle que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  soit directe.

Vérifions que cette b.o.n. convient avec  $\alpha = \|\vec{R}_E\|$ , et donc  $\vec{R}_E = \alpha\vec{e}_3$ . Notons  $[L]_e = [M_{ij}]$  la matrice de  $L$  dans la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$ .

Avec (4.8) on a  $M_{i3} = (L.\vec{e}_3, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^3} = 0$  pour tout  $i$  puisque  $L.\vec{e}_3 = 0$ , et donc la matrice  $[L]_e$  de  $L$  dans la b.o.n.  $(\vec{e}_i)$  a sa 3-ième colonne nulle. Puis  $M_{3j} = (L.\vec{e}_j, \vec{e}_3)_{\mathbb{R}^3} = 0$  pour  $j = 1, 2$  puisque  $\text{Im}L \perp \text{Ker}L$ , cf. (4.16), et donc  $[L]_e$  a sa 3-ième ligne nulle. Puis  $[L]_e$  est antisymétrique car  $L$  est antisymétrique, cf. (4.17), donc  $[L]_e$  est de la forme (5.8). Comme  $\vec{R}_E = \alpha\vec{e}_3$ , comme  $(\vec{e}_i)$  est directe, avec (5.6) on a  $L.\vec{e}_2 = \vec{R}_E \wedge \vec{e}_2 = \alpha\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\alpha\vec{e}_1$ , et donc  $M_{12} = (L.\vec{e}_2, \vec{e}_1)_{\mathbb{R}^3} = -\alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1)_{\mathbb{R}^3} = -\alpha$ . ▀

## Troisième partie

# Champs de vecteurs et toseurs

## 6 Champ de vecteurs

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine d'espace vectoriel associé  $E$ . On se donne une origine  $O \in \mathcal{E}$ .

### 6.1 Définition

**Définition 6.1** Un champ de vecteurs sur l'espace affine  $\mathcal{E}$  est une application :

$$\mathcal{V} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times E \\ P \rightarrow \mathcal{V}(P) = (P, \vec{v}(P)), \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\vec{v} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow E \\ P \rightarrow \vec{v}(P) \end{cases}$  est une fonction  $C^\infty$ . Ainsi un champ de vecteurs associe à un point le couple :

$$\mathcal{V}(P) = (\text{point } P \text{ d'application}, \text{ vecteur } \vec{v}(P)). \quad (6.2)$$

**Remarque 6.2** Cas  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ .

Un vecteur  $\vec{v}(P)$  peut être dessiné “n'importe où sur un dessin” et correspond à 3 degrés de liberté (les composantes de  $\vec{v}(P)$ ).

Alors qu'un champ de vecteurs  $\mathcal{V}$ , cf. (6.1), correspond à  $2 \times 3 = 6$  degrés de liberté : 3 de position (coordonnées de  $P$ ) et 3 vectoriels (composantes de  $\vec{v}(P)$ ). Ainsi dans  $\mathbb{R}^3$ , un toseur aura 6 degrés de liberté.

Et on dessine alors le vecteur  $\vec{v}(P)$  au point d'application  $P$ . ▀

**Notation abusive.** On note abusivement : quand  $\mathcal{V}(P) = (P, \vec{v}(P))$  :

$$\mathcal{V}(P) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{v}(P), \quad (6.3)$$

où on ne doit néanmoins pas oublier que le point d'application  $P$  est sous-entendu : en particulier cette notation abusive ne doit pas faire oublier que  $\mathcal{V}$  correspond à 6 degrés de liberté dans  $\mathbb{R}^3$ , voir remarque précédente.

**Exemple 6.3** Le “moment des forces” est un champ de vecteurs  $\mathcal{M} : P \rightarrow \mathcal{M}(P) = (P, \vec{M}(P))$ . ▀

**Exemple 6.4** Le champ des “vitesses eulériennes” est un champ de vecteurs  $\mathcal{V} : P \rightarrow (P, \vec{v}(P))$ . ▀

### 6.2 Champ de vecteurs affines

**Définition 6.5** Un champ de vecteurs  $\mathcal{V} : P \rightarrow \mathcal{V}(P) = (P, \vec{v}(P))$  est affine ssi  $\vec{v} : \mathcal{E} \rightarrow E$  est affine, c-à-d ssi il existe un point  $A \in \mathcal{E}$  et un endomorphisme  $L \in \mathcal{L}(E)$  tels que :

$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad \vec{v}(B) = \vec{v}(A) + L \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (6.4)$$

**Proposition 6.6** Si  $\vec{v}$  est affine on a également :

$$\forall A', B \in \mathcal{E}, \quad \vec{v}(B) = \vec{v}(A') + L \cdot \overrightarrow{A'B}. \quad (6.5)$$

(Propriété de changement d'origine.)

**Preuve.** (6.4) donne  $\vec{v}(A') = \vec{v}(A) + L \cdot \overrightarrow{AA'}$ , donc  $\vec{v}(A) = \vec{v}(A') + L \cdot \overrightarrow{A'A}$ . Donc (6.4) donne  $\vec{v}(B) = \vec{v}(A') + L \cdot \overrightarrow{A'B} + L \cdot \overrightarrow{A'A}$ , donc (6.5). ▀

## 7 Torseurs

### 7.1 Définition

On se place dans le cas  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ .

**Définition 7.1** Un torseur est un champ de vecteurs affine  $\mathcal{M} : P \rightarrow \mathcal{M}(P) = (P, \vec{M}(P))$  “antisymétrique”, au sens où  $L$  est antisymétrique dans (6.4) : pour  $A \in \mathbb{R}^3$  on a :

$$\forall B \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + L \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{avec} \quad L^T = -L. \quad (7.1)$$

Donc un torseur vérifie : une fois une b.o.n. directe  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  fixée dans  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  euclidien, avec  $\vec{R}_e$  donné par (5.5), on a :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R}_e \wedge \overrightarrow{AB} \quad (\text{b.o.n. directe}). \quad (7.2)$$

C’est en particulier le cas si on utilise la base canonique. Dans la suite on note :

$$\vec{R}_e \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{R} \quad (\text{la b.o.n. est supposée directe}). \quad (7.3)$$

### 7.2 Eléments de réduction

**Définition 7.2** Le vecteur  $\vec{R}$  vérifiant (7.2) est appelé la résultante du torseur relativement à la b.o.n. directe  $(\vec{e}_i)$ .

**Définition 7.3**  $\vec{M}(B)$  donné en (7.2) est appelé le moment du torseur  $\mathcal{M}$  en  $B$ .

**Définition 7.4** Pour  $A \in \mathbb{R}^3$  fixé, les éléments de réduction du torseur  $\mathcal{M}$  sont la résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{M}(A)$  (cas d’une b.o.n. directe).

Et on a la propriété usuelle des fonctions affines : si  $\mathcal{M} : P \rightarrow (P, \vec{M}(P))$  est un torseur, alors, pour tout  $B, A, A' \in \mathcal{E}$  :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{M}(A') + \vec{R} \wedge \overrightarrow{A'B}, \quad (7.4)$$

cf. (6.5). Donc si  $A'$  est un autre point,  $\vec{R}$  et  $\vec{M}(A')$  sont aussi des éléments de réduction.

**Exercice 7.5** “L’auto-moment” d’un torseur est le réel  $(\vec{R}, \vec{M}(A))_{\mathbb{R}^3}$ , produit scalaire de ses éléments de réduction. Montrer que l’auto-moment d’un torseur est constant.

**Réponse.**  $(\vec{R}, \vec{M}(B))_{\mathbb{R}^3} = (\vec{R}, \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB})_{\mathbb{R}^3}$  avec  $\vec{R} \perp \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$  donc  $(\vec{R}, \vec{M}(B))_{\mathbb{R}^3} = (\vec{R}, \vec{M}(A))_{\mathbb{R}^3} + 0$ . ■

### 7.3 Axe central d’un torseur

**Définition 7.6** Soit un torseur  $\mathcal{M}$  de résultante  $\vec{R} \neq \vec{0}$  dans une b.o.n. directe. L’axe central  $\mathcal{D}$  du torseur  $\mathcal{M}$  est la droite affine :

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \vec{M}(D) \parallel \vec{R}\}. \quad (7.5)$$

**Proposition 7.7** Si  $\vec{R} \neq \vec{0}$ , alors  $\mathcal{D}$  est bien une droite affine, de vecteur directeur  $\vec{R}$  : si  $D \in \mathcal{D}$  alors :

$$\mathcal{D} = D + \text{Vect}\{\vec{R}\}. \quad (7.6)$$

**Preuve.** On prend les notations données en (7.1).

Avec (4.16) on a  $\overrightarrow{\mathbb{R}^3} = \text{Ker}L \oplus^\perp \text{Im}L$  (car  $L^T = -L$ ), avec  $\text{Ker}L = \text{Vect}\{\vec{R}\}$  cf. (5.7). Donc, avec  $\vec{R}$  défini par (7.4) (dans une b.o.n. directe), il existe  $(\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$  t.q. :

$$\vec{M}(A) = \lambda \vec{R} + L \cdot \vec{u} = \lambda \vec{R} + \vec{R} \wedge \vec{u} \quad (\in \text{Ker}L \oplus^\perp \text{Im}L). \quad (7.7)$$

Soit alors  $D$  le point défini par :

$$\overrightarrow{AD} = -\vec{u}. \quad (7.8)$$

Donc avec (7.2) et (7.7) :

$$M(D) = M(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AD} = (\lambda \vec{R} + \vec{R} \wedge \vec{u}) + \vec{R} \wedge (-\vec{u}) = \lambda \vec{R}. \quad (7.9)$$

Donc, avec (7.5), le point  $D$  appartient à  $\mathcal{D}$  (qui n’est donc pas vide).

Soit  $D'$  un autre point dans  $\mathcal{D}$  : donc il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  t.q.  $\vec{M}(D') = \mu \vec{R}$ .  
Comme  $M(D') - M(D) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{DD'}$ , on a :

$$(\mu - \lambda) \vec{R} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{DD'}. \quad (7.10)$$

Donc le membre de droite est perpendiculaire au membre de gauche, donc nécessairement ils sont nuls : donc  $\mu = \lambda$  (car  $\vec{R} \neq \vec{0}$  par hypothèse) et  $\overrightarrow{DD'} \parallel \vec{R}$  (car  $\vec{R} \neq \vec{0}$  par hypothèse).

Donc  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  t.q.  $\overrightarrow{DD'} = \alpha \vec{R}$ . Donc  $\overrightarrow{DD'} \in \text{Vect}\{\vec{R}\}$ , soit  $D' \in D + \text{Vect}\{\vec{R}\}$ . Donc  $\mathcal{D} \subset D + \text{Vect}\{\vec{R}\}$ .

Réciproquement, montrons que  $D + \text{Vect}\{\vec{R}\} \subset \mathcal{D}$ . Soit  $D' \in \vec{x}_D + \text{Vect}\{\vec{R}\}$ , c-à-d  $D' = D + \alpha \vec{R}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ , c-à-d  $\overrightarrow{DD'} = \alpha \vec{R}$ . Alors :

$$M(D') = M(D) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{DD'} = \lambda \vec{R} + \vec{R} \wedge (\alpha \vec{R}) = \lambda \vec{R},$$

donc  $D' \in \mathcal{D}$ . Donc  $\mathcal{D} \supset D + \text{Vect}\{\vec{R}\}$ .

Donc  $\mathcal{D} = D + \text{Vect}\{\vec{R}\}$  = la droite affine passant par le point  $D$  et de vecteur directeur  $\vec{R}$ .  $\blacksquare$

**Corollaire 7.8** Si  $\vec{R} \neq \vec{0}$  :

Le moment est constant le long de  $\mathcal{D}$  : pour tout  $D, D' \in \mathcal{D}$  on a  $\vec{M}(D') = \vec{M}(D)$ .

Le moment est minimum (en norme) pour les points de l'axe.

**Preuve.** Si  $D$  et  $D'$  sont deux points de l'axe  $\mathcal{D}$ , alors  $\overrightarrow{DD'} \parallel \vec{R}$ , cf. (7.6), et donc :

$$\mathcal{M}(D') = \mathcal{M}(D) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{DD'} = \mathcal{M}(D).$$

Puis soit  $B \in \mathbb{R}^3$  et soit  $D \in \mathcal{D}$ . Alors :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(D) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{DB} \in \text{Vect}\{\vec{R}\} \oplus^\perp \text{Vect}\{\vec{R}\}^\perp,$$

Donc par Pythagore  $\|\vec{M}(B)\|^2 = \|\vec{M}(D)\|^2 + \|\vec{R} \wedge \overrightarrow{DB}\|^2 \geq \|\vec{M}(D)\|^2$ , et le moment est minimal (en norme) pour les points de l'axe  $\mathcal{D}$ .  $\blacksquare$

## 7.4 Couple

**Définition 7.9** Un couple est un torseur constant non nul, c-à-d un torseur t.q.  $L = 0$  dans (7.1).

Ou encore : c'est un torseur de résultante nulle.

Donc un couple est un torseur  $\mathcal{M} : P \rightarrow (P, \vec{M}(P))$  t.q. :

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{M}(B) = \vec{M}(A). \quad (7.11)$$

## 7.5 Glisseur

**Définition 7.10** Si  $\mathcal{M}$  est un torseur non nul qui n'est pas un couple, s'il existe  $A \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\vec{M}(A) = \vec{0}$ , alors  $\mathcal{M}$  est appelé un glisseur, et l'axe du glisseur est la droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{R}$ .

Donc pour un glisseur, les points d'annulation du moment existent et ils définissent l'axe du torseur.