

Mécanique : tenseurs 3ème partie – calcul sur les surfaces

Gilles LEBORGNE

12 janvier 2010

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Motivation : calcul classique problématique | 3 |
| 1 | Surfaces et systèmes de coordonnées | 4 |
| 1.1 | Définition | 4 |
| 1.2 | Vecteur tangent | 5 |
| 1.3 | Base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ du système et espace tangent | 6 |
| 1.4 | Courbes et vecteurs tangents | 7 |
| 1.5 | Dérivée d'une fonction sur S | 8 |
| 1.6 | Base duale $(dq^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ du système | 8 |
| 1.7 | Base biduale : notation $\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x})$ | 10 |
| 2 | Symboles de Christoffel | 12 |
| 2.1 | Symboles de Christoffel dans \mathbb{R}^n | 12 |
| 2.2 | Connexion sur $C^\infty(S; \mathbb{R}) = T_0^0(S)$ | 13 |
| 2.3 | Connexion sur $TS = T_1^0(S)$: première approche | 14 |
| 2.4 | Symboles de Christoffel sur S | 15 |
| 2.5 | Notation v_j^i de dérivation covariante dans la j -ème direction | 15 |
| 2.6 | Divergence | 16 |
| 2.7 | Connexion sur $T_1^0(S)$: première approche | 17 |
| 2.8 | Symboles de Christoffel pour la base duale | 17 |
| 2.9 | * Formules de changement de base pour les symboles de Christoffel | 18 |
| 3 | Métrique et système de coordonnées | 19 |
| 3.1 | Définition | 19 |
| 3.2 | Connexion sur les métriques : première approche | 21 |
| 3.3 | Connexion sur les métriques dans une base | 21 |
| 3.4 | "Métrique tuée" : métrique de Killing | 22 |
| 3.5 | Métrique de Killing et symboles de Christoffel | 23 |
| 4 | Volume | 24 |
| 4.1 | Volume algébrique | 24 |
| 4.2 | Volume algébrique dans la base du système et jacobien | 24 |
| 4.3 | Volume algébrique dans la base du système et métrique | 25 |
| 4.4 | Volume algébrique et pull-back | 26 |
| 4.5 | Volume positif | 27 |
| 5 | Normale à une surface | 27 |
| 5.1 | Forme normale | 27 |
| 5.2 | Forme normale unitaire | 28 |
| 5.3 | Vecteur normal unitaire | 29 |
| 6 | Aire | 30 |
| 6.1 | Élément d'aire | 30 |
| 6.2 | Système de coordonnées Φ dans \mathbb{R}^n associé à $\vec{\varphi}$ sur S | 31 |
| 6.3 | Aire | 31 |
| 6.4 | Symboles de Christoffel γ_{ij}^n pour Φ | 32 |
| 7 | Transport parallèle dans \mathbb{R}^n | 33 |
| 7.0 | Transport parallèle dans \mathbb{R}^n d'une fonction le long d'une courbe | 33 |
| 7.1 | Transport parallèle dans \mathbb{R}^n d'un champ de vecteurs le long d'une courbe | 33 |
| 7.2 | Géodésique dans \mathbb{R}^n : une droite | 34 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 8 | Transport parallèle sur une surface dans \mathbb{R}^n | 35 |
| 8.1 | Transport parallèle sur une surface d'un champ de vecteurs le long d'une courbe | 35 |
| 8.1.1 | Définition | 35 |
| 8.1.2 | Dans un système de coordonnées | 36 |
| 8.1.3 | Exemples sur le cercle | 36 |
| 8.1.4 | Exemples sur la sphère de \mathbb{R}^3 | 37 |
| 8.1.5 | Remarque | 38 |
| 8.2 | Géodésique sur une surface | 38 |
| 8.2.1 | Définition | 38 |
| 8.2.2 | Equation | 42 |
| 8.3 | Shifter | 45 |
| 9 | Formes fondamentales et courbure | 45 |
| 9.1 | Première forme fondamentale $g \in T_2^0(S)$ (métrique) | 45 |
| 9.2 | Deuxième forme fondamentale $k \in T_2^0(S)$: tenseur des courbures | 46 |
| 9.2.1 | Rappel : première définition de la courbure (positive), approche élémentaire | 46 |
| 9.2.2 | Courbure (algébrique) : choix de la définition de la courbure | 47 |
| 9.2.3 | Deuxième forme fondamentale $k \in T_2^0(S)$: tenseur des courbures | 48 |
| 9.2.4 | Interprétation : courbure $k(\vec{v}, \vec{v})$ | 49 |
| 9.3 | Le tenseur $K \in T_1^1(S)$ des courbures associé | 51 |
| 9.3.1 | L'endomorphisme $K_{\vec{x}}$ associé à $k_{\vec{x}}$ | 51 |
| 9.3.2 | Courbures principales, courbure moyenne, courbure gaussienne | 51 |
| 9.4 | Géodésique et deuxième forme fondamentale | 52 |
| 10 | Tenseurs des déformations | 52 |
| 10.1 | Rappel | 52 |
| 10.1.1 | Transposée d'une forme bilinéaire | 52 |
| 10.1.2 | Différentielles premières et secondes | 53 |
| 10.1.3 | ... et dérivées partielles premières et secondes | 53 |
| 10.1.4 | Cas particulier | 54 |
| 10.1.5 | Application à un mouvement $\vec{\psi}$ | 55 |
| 10.2 | En espace : jacobienne et transposée | 55 |
| 10.2.1 | Rappel : transposée d'une application linéaire | 55 |
| 10.2.2 | Jacobienne et transposée | 56 |
| 10.2.3 | $F(t, \vec{X})$ dans une base de \mathbb{R}^n | 57 |
| 10.2.4 | $F(t, \vec{X})$ avec la base du système $\vec{\varphi}_0$ | 57 |
| 10.2.5 | $F^T(t, \vec{X})$ avec la base du système $\vec{\varphi}_0$ | 58 |
| 10.2.6 | Remarque : $F(t, \vec{X})$ dans des bases de $(TS_0)_{\vec{x}}$ et $(TS_t)_{\vec{x}}$ complétées | 58 |
| 10.2.7 | Tenseurs des déformations C et C^b | 59 |
| 10.2.8 | Tenseurs des déformations C et C^b dans une base de $(TS_0)_{\vec{x}}$ | 60 |
| 10.3 | En temps : tenseurs des taux de déformation lagrangien D et D^b sous l'hypothèse métrique euclidienne | 60 |
| 10.3.1 | $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X})$ | 60 |
| 10.3.2 | $\frac{\partial(F^T)}{\partial t}(t, \vec{X})$ et métrique euclidienne | 61 |
| 10.3.3 | $\frac{\partial C}{\partial t}(t, \vec{X})$ et métrique euclidienne | 61 |
| 10.3.4 | $\frac{\partial C^b}{\partial t}(t, \vec{X})$ et métrique euclidienne | 62 |
| 10.3.5 | Tenseurs des taux de déformation lagrangien D et D^b et métrique euclidienne | 62 |
| 10.4 | Vitesse eulérienne $\vec{v}(t, \vec{x})$, et $d\vec{v}(t, \vec{x})$ | 62 |
| 10.4.1 | Définition | 62 |
| 10.4.2 | \vec{v}^b et $d\vec{v}^b$ et métrique euclidienne | 63 |
| 10.4.3 | $d\vec{v}$ et $d\vec{v}^T$ | 63 |
| 10.5 | $\vec{v}_{ }$ et divergence | 64 |
| 10.5.1 | Divergence pour les volumes ou pour les surfaces qui glissent sur elles-mêmes | 64 |
| 10.5.2 | Définition de $\vec{v}_{ }$ sur les surfaces | 64 |
| 10.5.3 | Connexion $\nabla \vec{v}_{ }$ sur $(TS_t)_{\vec{x}}$, et tenseur des courbures | 65 |
| 10.5.4 | Divergence $\text{div}_{ } \vec{v}_{ }$ | 65 |
| 10.5.5 | D_t^b comme pull-back | 65 |

| | |
|---|-----------|
| 11 Conservation de la masse | 67 |
| 11.1 Principe (ou loi) de conservation de la masse pour un volume | 67 |
| 11.1.1 Principe | 67 |
| 11.1.2 Conservation de la masse et divergence | 68 |
| 11.2 Conservation de la masse pour les surfaces | 68 |
| 11.2.1 Gradients de déformations | 68 |
| 11.2.2 Métrique euclidienne et aire | 69 |
| 11.2.3 Aire et tenseur des déformations | 69 |
| 11.2.4 Conservation de la masse pour les surfaces | 70 |
| 12 Transport de la normale à une surface | 71 |
| 12.1 Transport d'une surface par le mouvement | 71 |
| 12.2 Généralisation aux coques | 71 |
| 12.3 Transport des vecteurs de base tangents et de la normale | 72 |
| 12.4 Relation entre les éléments d'aire | 73 |
| A Rappels : déterminants | 73 |
| A.1 Forme multilinéaire alternée | 73 |
| A.2 Forme m -linéaire alternée et déterminant \det_B | 74 |
| A.3 Déterminant $\det_B(L)$ d'un endomorphisme | 75 |
| A.4 Déterminant $\det(L)$ (volume algébrique) dans \mathbb{R}^m | 75 |
| A.5 Déterminant \det d'une matrice | 75 |
| A.6 Calculs par récurrence des déterminants de matrices : mineurs et cofacteurs | 76 |
| A.7 $\det(A) = \det(A^T)$ | 76 |
| A.8 $\det([L].[M]) = \det([L]) \det([M])$ | 76 |
| A.9 Cofacteurs et inverse d'une matrice | 77 |
| A.10 Déterminant \det et produit scalaire euclidien | 77 |
| A.11 Déterminant \det_B et produit scalaire | 77 |
| A.12 Dérivée d'un déterminant | 79 |
| B Annexe : Langage de géométrie différentielle : quelques notions | 79 |
| B.1 Définitions : variétés, cartes, atlas | 80 |
| B.2 Orientation d'une surface | 81 |
| B.3 Différentiation sur une variété | 82 |
| B.4 Fibré tangent à une variété | 82 |
| B.5 Connexion | 83 |
| B.6 p -forme différentielle | 84 |
| B.7 Volume | 84 |
| B.8 Aire d'une surface orientable | 85 |
| B.9 Produit intérieur | 85 |
| B.10 Différentielle extérieure | 86 |
| B.11 Théorème de Stokes | 88 |
| C Connexion sur une variété de \mathbb{R}^n | 88 |
| C.1 Connexion et dérivée covariante pour les champs de vecteurs sur TS | 88 |
| C.2 Symboles de Christoffel pour une connexion | 89 |
| C.3 La dérivation ∇ associée | 91 |
| C.4 Divergence $\operatorname{div} \vec{w}$ d'un champ de vecteurs \vec{w} sur TS | 92 |
| C.5 Métrique et connexion riemannienne | 92 |
| C.6 Connexion sur les formes et sur les tenseurs | 93 |
| C.7 Dérivée ∇T d'un champ de tenseurs T sur TS | 95 |
| C.8 Divergence $\operatorname{div} T$ d'un champ de tenseurs T sur TS | 95 |
| C.9 Transport parallèle d'un champ de vecteurs | 96 |
| Références bibliographiques | 96 |

0 Motivation : calcul classique problématique

On se donne une surface $S \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $\rho : \vec{x} \in S \rightarrow \rho(\vec{x}) \in \mathbb{R}$. Par exemple ρ est une densité surfacique de masse sur une sphère S , qui peut être considérée comme une fonction définie sur \mathbb{R}^n , non nulle pour $\vec{x} \in S$ et nulle pour $\vec{x} \notin S$.

On cherche à définir les variations de ρ sur la surface S . Ici on ne peut pas se servir de la dérivation classique dans une direction fixée \vec{v} : par exemple sur la sphère, pour $\vec{x} \in S$, la quantité

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{x} + h\vec{v}) - \rho(\vec{x})}{h} \quad (0.1)$$

ne peut pas servir à définir les variations “ $= d\rho(\vec{x}) \cdot \vec{v}$ ” de ρ dans la direction \vec{v} d’un vecteur tangent : le point $\vec{x} + h\vec{v}$ n’est alors jamais sur la sphère pour $h \neq 0$, et $\rho(\vec{x} + h\vec{v}) = 0$ pour $h \neq 0$, et la limite est $+\infty$ quand $\rho(\vec{x}) \neq 0$.

D’autre part, quand on manipule des champs de vecteurs tangents à une surface (ou à une variété), on ne peut pas les comparer avec le calcul classique (ils n’appartiennent pas, en deux points distincts, au même plan tangent), à moins de plonger la surface (ou la variété) dans un espace plus grand la contenant : par exemple en considérant la sphère (variété de dimension 2) dans l’espace plus grand qu’est \mathbb{R}^3 ; et même dans ce cas, le vecteur différence obtenu n’a pas de bonnes propriétés (cas du “vecteur déplacement” en mécanique, qui n’est pas un “vecteur objectif” : sa mesure dépend de l’observateur, i.e. il ne satisfait pas aux règles de changement de base). De plus un tel plongement n’est pas forcément souhaitable dans toutes les situations, comme par exemple dans notre “espace-temps” en relativité générale, qui est une variété à quatre dimensions qu’on ne veut pas nécessairement plonger dans un espace vectoriel de dimension plus grande. Il s’agit donc d’introduire des outils permettant de calculer sur ces variétés. Ces outils permettront également de mieux comprendre les calculs classiques sur les surfaces.

1 Surfaces et systèmes de coordonnées

1.1 Définition

Soient deux entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^m . On se donne une fonction :

$$\vec{\varphi} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{q} \mapsto \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}) = \vec{\varphi}(\vec{q}). \end{cases} \quad (1.1)$$

On note :

$$S = \vec{\varphi}(U) = \text{Im}\vec{\varphi}. \quad (1.2)$$

Définition 1.1 Si $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ est un difféomorphisme (i.e. C^∞ et inversible et d’inverse C^∞) alors $\vec{\varphi}$ est appelé “un système de coordonnées sur S ”.

Et \vec{q} représentera les paramètres, U étant l’espace des paramètres, et \vec{x} représentera les positions dans l’espace, Ω étant l’espace “géométrique”.

Si $m = 1$ alors $\vec{\varphi}$ est appelée une courbe (régulière).

Si $m = n - 1$ alors $\vec{\varphi}$ est appelée une hypersurface (paramétrée) ou simplement surface (paramétrée) dans \mathbb{R}^3 .

Définition 1.2 $S = \text{Im}\vec{\varphi}$ est également appelée surface (géométrique).

Et dans le cas $m = 1$, S est appelée une courbe (géométrique).

Définition 1.3 Soit $\vec{\varphi}$ une surface (paramétrée) d’image $S = \text{Im}\vec{\varphi}$ (surface géométrique), et soit $\vec{x} \in S$. Une courbe sur S en \vec{x} est une courbe $\vec{c} : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \vec{c}(t) \in S$ telle que $\vec{c}(0) = \vec{x}$.

Soit $(\vec{E}_j)_{j=1, \dots, m}$ la base canonique de \mathbb{R}^m et soit $(\vec{b}_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de \mathbb{R}^n . Ainsi :

$$\vec{\varphi} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{q} = \sum_{i=1}^m q^i \vec{E}_i = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^m \end{pmatrix}_{|(\vec{E})} \mapsto \vec{x} = \sum_{j=1}^n x^j \vec{b}_j = \sum_{j=1}^n \varphi^j(\vec{q}) \vec{b}_j = \begin{pmatrix} \varphi^1(q^1, \dots, q^m) \\ \vdots \\ \varphi^n(q^1, \dots, q^m) \end{pmatrix}_{|(\vec{b})} \end{cases} \quad (1.3)$$

Et on note $x^i = \varphi^i(\vec{q}) = x^i(\vec{q})$. Ainsi :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}) = \vec{\varphi}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \varphi^1(q^1, \dots, q^m) \\ \vdots \\ \varphi^n(q^1, \dots, q^m) \end{pmatrix}_{|(\vec{b})} = \begin{pmatrix} x^1(q^1, \dots, q^m) \\ \vdots \\ x^n(q^1, \dots, q^m) \end{pmatrix}_{|(\vec{b})} \quad (1.4)$$

Exemple 1.4 Coordonnées polaires : $m = n = 2$. Soit P un point de l'espace $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$. On munit \mathbb{R}^2 d'un repère cartésien, et P est alors repéré à l'aide du vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où (x_1, x_2) sont les coordonnées cartésiennes du point (positions géométriques). On pose $U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ l'espace des paramètres, on note $\vec{q} = (q_1, q_2) = (r, \theta)$, et on définit $\vec{\varphi}$ sur U par :

$$\vec{\varphi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \vec{x}. \quad (1.5)$$

Pour avoir un difféomorphisme, on restreint U par exemple à $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$, avec donc $S = \vec{\varphi}(U) = \text{noté } \Omega$ ouvert de l'espace \mathbb{R}^2 privé du demi-axe des $x \leq 0$. ■

Exemple 1.5 Coordonnées polaires sur le cercle S de rayon R : $m = 1$ et $n = 2$.

$$\vec{\varphi}(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \vec{x}, \quad (1.6)$$

avec par exemple $\theta \in]-\pi, \pi[= U$ (pour avoir un ouvert). ■

Exemple 1.6 Coordonnées sphériques : $m = n = 3$ (voir polycopié précédent).

$$\vec{\varphi}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \vec{x}, \quad (1.7)$$

r étant la distance au centre (le rayon), θ la longitude et φ la latitude. ■

Exemple 1.7 Coordonnées sphériques sur la sphère de rayon R : $m = 2$ et $n = 3$.

$$\vec{\varphi}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \vec{x}, \quad (1.8)$$

θ étant la longitude et φ la latitude. ■

On dispose alors, au voisinage d'un point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$ fixé, des courbes de coordonnées en \vec{x} données par, pour $i = 1, \dots, n$:

$$\vec{c}_{\vec{x}}^{(i)}(t) = \vec{\varphi}(q^1, \dots, q^{i-1}, q^i + t, q^{i+1}, \dots, q^n),$$

courbes tracées dans Ω . Ces courbes vérifient :

$$\vec{c}_{\vec{x}}^{(i)}(0) = \vec{x}.$$

1.2 Vecteur tangent

Soit $\vec{\varphi}$ une surface. Soit $\vec{x} \in S = \text{Im} \vec{\varphi}$. Soit \vec{c} une courbe régulière sur S en \vec{x} .

Définition 1.8 La limite :

$$\vec{c}'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{c}(t) - \vec{c}(0)}{t} \text{ noté } \vec{v}(\vec{x}) \quad (1.9)$$

est appelé un vecteur tangent à la courbe en \vec{x} .

Si on considère l'ensemble des courbes sur S en \vec{x} on obtient :

Définition 1.9 L'ensemble des vecteurs tangents en \vec{x} est noté $\vec{V}_{\vec{x}}$, et l'ensemble :

$$TS_{\vec{x}} = \{\vec{x}\} \times \vec{V}_{\vec{x}} \quad (1.10)$$

est appelé l'espace tangent (tangent space) en \vec{x} .

Et on note :

$$TS = \bigcup_{\vec{x} \in S} TS_{\vec{x}}. \quad (1.11)$$

Définition 1.10 Un élément de TS est appelé un champ de vecteurs.

Définition 1.11 Les règles d'addition et de multiplication par un scalaire dans $TS_{\vec{x}}$ sont celles de $\vec{V}_{\vec{x}}$: avec des notations génériques :

$$(\vec{x}, \vec{v}_{\vec{x}}) + (\vec{x}, \vec{w}_{\vec{x}}) = (\vec{x}, \vec{v}_{\vec{x}} + \vec{w}_{\vec{x}}), \quad \lambda(\vec{x}, \vec{v}_{\vec{x}}) = (\vec{x}, \lambda\vec{v}_{\vec{x}}), \quad (1.12)$$

i.e. dans $TS_{\vec{x}}$ les calculs sont usuels pour la partie vectoriel. D'où la notation abusive :

$$TS_{\vec{x}} \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{V}_{\vec{x}}, \quad (1.13)$$

au lieu de (1.10). Et on note abusivement $\vec{v}_{\vec{x}}$ au lieu (\vec{x}, \vec{v}) un élément de $TS_{\vec{x}}$.

Et on note \vec{v} un élément de TS (un champ de vecteurs).

1.3 Base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ du système et espace tangent

Au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}) \in S$, pour $i = 1, \dots, m$ on définit les vecteurs :

$$\vec{e}_j(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_j = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^j}(\vec{q}). \quad (1.14)$$

ou si on préfère par $\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{d\vec{c}_i^{(i)}}{dt}(t=0)$, vecteur tangent à la i -ème courbe de coordonnée au point \vec{x} .

Proposition 1.12 La famille $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ est une famille libre dans \mathbb{R}^n , et on a :

$$TS_{\vec{x}} = \{\vec{x}\} \times \text{Vect}\{\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_m(\vec{x})\}. \quad (1.15)$$

Preuve. $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ est un difféomorphisme C^∞ , donc, notant $E = d\vec{\varphi}(\mathbb{R}^m)$, son application linéaire tangente $d\vec{\varphi}(\vec{q}) : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ est un difféomorphisme C^∞ , donc inversible donc injective, donc les vecteurs $d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_j$ sont indépendants (sinon les $\vec{E}_j = (d\vec{\varphi}(\vec{q}))^{-1} \cdot (d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_j)$ seraient liés).

Puis pour une courbe \vec{x} sur S en \vec{x} , on a $\vec{c}(t) = \vec{\varphi}(q_1(t), \dots, q_m(t)) = \vec{\varphi}(\vec{q}(t))$, d'où $\vec{c}'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}(t)) q^{i'}(t)$ d'où $\vec{c}'(0) = \sum_{i=1}^m q^{i'}(0) \vec{e}_i(\vec{x})$ est combinaison linéaire de $\vec{e}_i(\vec{x})$. ■

Exercice 1.13 Montrer que pour $i = 1, \dots, m$, le vecteur $\vec{e}_i(\vec{x})$ est tangent à la i -ème courbe de coordonnée au point \vec{x} .

Réponse. Par définition $\vec{c}_i^{(i)}(t) = \vec{\varphi}(\vec{q} + t\vec{E}_i)$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, d'où $\vec{c}_i^{(i)'}(t) = d\vec{\varphi}(\vec{q} + t\vec{E}_i) \cdot \vec{E}_i$, d'où $\vec{c}_i^{(i)'}(0) = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i = \vec{e}_i(\vec{x})$. ■

Si on dispose d'une base $(\vec{b}_i)_{i=1,\dots,n}$ de \mathbb{R}^n , toujours avec la base canonique $(\vec{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ de \mathbb{R}^m , on note :

$$[d\vec{\varphi}(\vec{q})]_{E,b} = \begin{pmatrix} (d\varphi^1(\vec{x}) \cdot \vec{E}_1)|_b \\ \vdots \\ (d\varphi^1(\vec{x}) \cdot \vec{E}_m)|_b \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j}(\vec{q}) \right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^j}(\vec{q}) \right] = \left((\vec{e}_1(\vec{x}))|_b \dots (\vec{e}_n(\vec{x}))|_b \right)$$

la matrice rectangle $n \times m$ de $d\vec{\varphi}(\vec{q})$, dite matrice jacobienne de $\vec{\varphi}$, relativement aux bases choisies.

Exemple 1.14 Coordonnées polaires (1.5). Avec (1.5), la première courbe de coordonnées (r varie, θ fixé) est un "rayon", la deuxième courbe de coordonnées (r fixé, θ varie) est un cercle. Et :

$$\vec{e}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_{|\vec{E}}, \quad \vec{e}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}_{|\vec{E}} \quad (1.16)$$

sont les vecteurs au point \vec{x} tangents aux lignes de coordonnées. La matrice de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes est la matrice $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$.

N.B. : $\|\vec{e}_1(\vec{x})\| = 1$ et $\|\vec{e}_2(\vec{x})\| = r$; et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) forme une base orthogonale non normée. ■

Exemple 1.15 Coordonnées polaires restreintes au cercle S de rayon R (1.6).

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{\varphi}'(\theta) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{|\vec{E}} \quad (1.17)$$

est le vecteur de base du système. Avec les notations de (1.16) on a $\vec{f}_1 = \vec{e}_2$. \blacksquare

Exemple 1.16 Le système de coordonnées sphérique dans \mathbb{R}^3 , cf. (1.7).

Les vecteurs de base du système de coordonnées sont données par :

$$\vec{e}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Ces vecteurs sont orthogonaux 2 à 2 mais non normés :

$$\|\vec{e}_1(\vec{x})\| = 1, \quad \|\vec{e}_2(\vec{x})\| = r \cos \varphi, \quad \|\vec{e}_3(\vec{x})\| = r.$$

Ils forment les colonnes de la matrice de passage des coordonnées paramétriques sphériques \vec{q} aux coordonnées euclidiennes \vec{x} :

$$P = [d\vec{\varphi}(\vec{q})] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

\blacksquare

1.4 Courbes et vecteurs tangents

On se donne une surface régulière $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'image S dans \mathbb{R}^n .

Proposition 1.17 Pour tout vecteur $\vec{v} \in TS_{\vec{x}}$ il existe une courbe \vec{c} sur S en \vec{x} telle que $\vec{c}'(0) = \vec{v}$.

Et mieux : il existe un paramétrage $\vec{\psi}$ de S tel que \vec{v} soit le premier vecteur de base de $\vec{\psi}$ en \vec{x} , i.e. $\vec{v} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u^1}(\vec{q}) = \text{noté } \vec{\psi}_{,1}(\vec{q})$ quand $\vec{\psi} : \vec{u} = (u^1, \dots, u^m) \rightarrow \vec{x} = \vec{\psi}(\vec{u})$.

Preuve. Pour simplifier les écritures, plaçons-nous dans \mathbb{R}^3 et S surface (variété de dimension 2). Soit $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage régulier de la surface S . Soit $\vec{v} \in TS_{\vec{x}}$ où $\vec{x} = \vec{\varphi}(u_0, v_0) \in S$. On va chercher une courbe sur S correspondant à une première courbe de coordonnées. On cherche un nouveau paramétrage régulier $\vec{\psi} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de S , i.e. tel que $\vec{\psi}(V) = S = \vec{\varphi}(U)$, avec $\vec{x} = \vec{\psi}(a_0, b_0)$, pour lequel on veut que $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial a}(a_0, b_0) = \vec{v}$.

Choisissons $L : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow L(a, b) = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ l'application linéaire (de changement de base de V vers U), telle que $\vec{\psi} = \vec{\varphi} \circ L$, i.e. telle que $\vec{\psi}(a, b) = \vec{\varphi}(u, v)$ quand $(u, v) = L(a, b)$, localement au voisinage de (a_0, b_0) . On veut donc :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial a}(a, b) = d\vec{\varphi}(u, v) \cdot \frac{\partial L}{\partial a}(a, b) = \alpha \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) + \beta \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v) = \alpha \vec{e}_1(u, v) + \beta \vec{e}_2(u, v),$$

où on a noté $\frac{\partial L}{\partial a}(a, b) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (vecteur constant $= dL(a, b) \cdot \vec{E}_1$ donné par la première colonne de L , car L étant linéaire la matrice de L est celle de sa différentielle). On impose donc à la première colonne de $[L]$ de contenir les composantes de \vec{v} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) du système $\vec{\varphi}$. On prend comme deuxième colonne de $[L]$ une colonne indépendante à la première. On détermine ainsi $\vec{\psi}$.

Conclusion : on a ainsi obtenue une courbe $\vec{c}_{b_0} : a \rightarrow \vec{\psi}(a, b_0)$ sur S qui convient : on a $\vec{c}_{b_0}(a_0) = \vec{x}$ et $\vec{c}_{b_0}'(a_0) = \vec{v}$. \blacksquare

Proposition 1.18 Si $\vec{v} : S \rightarrow TS$ est C^∞ (un champ de vecteurs sur S) alors il existe une courbe \vec{c} sur S t.q. :

$$\frac{d\vec{c}}{dt}(t) = \vec{v}(\vec{c}(t)), \quad \vec{c}(0) = \vec{x}, \quad (1.20)$$

et cette courbe est appelée courbe intégrale de \vec{v} , encore donnée par $\vec{c}(t) = \vec{x} + \int_0^t \vec{v}(\vec{c}(\tau)) d\tau$.

Preuve. L'équation (1.20) est une équation différentielle du premier ordre avec condition initiale : on applique le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Ou encore, on procède comme pour la démonstration précédente avec cette fois $\vec{v}(\vec{x})$ qui sera le premier vecteur de base du nouveau paramétrage $\vec{\psi}$ de la surface, voir photocopié précédent. ■

Exemple 1.19 Etant donné un système de coordonnées $\vec{\varphi} : \vec{q} \mapsto \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, la i -ème ligne de coordonnées est donnée par $\vec{x}(t) = \vec{c}_i(t) = \vec{\varphi}(q_1, \dots, t, \dots, q_m)$ au voisinage de $t = q_i$. Par dérivation, on obtient $\frac{\partial \vec{c}_i}{\partial t}(t) = \partial_i \vec{\varphi}(q_1, \dots, t, \dots, q_m) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{e}_i(\vec{x}(t)) = \vec{e}_i(\vec{c}_i(t))$. Et donc la i -ème ligne de coordonnées donne le flot de \vec{e}_i i -ème vecteur de base du système. ■

1.5 Dérivée d'une fonction sur S

Dans le paragraphe 0, ce qu'on voulait en fait, c'est considérer la dérivée le long d'une courbe dans S : si $\vec{c} : t \in]a, b[\mapsto \vec{x} \in S$ est une courbe régulière en $\vec{x} = \vec{c}(t)$ tracée dans S , on s'intéresse à la fonction $(\rho \circ \vec{c}) : t \in]a, b[\mapsto (\rho \circ \vec{c})(t) = \rho(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ (densité linéique), et on veut connaître les variations de ρ le long de la courbe, i.e. on veut connaître :

$$d(\rho \circ \vec{c})(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{c}(t)) - \rho(\vec{c}(0))}{t}. \quad (1.21)$$

dérivée de ρ en \vec{x} le long de la courbe \vec{c} .

Et si ρ est définie sur S , on veut connaître ses variations dans S , i.e. le long de toutes les courbes dessinables sur S .

Définition 1.20 Une fonction $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable en $\vec{x} \in S$ ssi il existe une forme linéaire $\ell_{\vec{x}} : TS_{\vec{x}} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour toute courbe \vec{c} sur S en \vec{x} (donc avec $\vec{c}(0) = \vec{x}$), on a :

$$\rho(\vec{c}(t)) - \rho(\vec{x}) = t \ell_{\vec{x}}.\vec{c}'(0) + o(t). \quad (1.22)$$

On note alors $\ell_{\vec{x}} = d\rho(\vec{x}) : TS_{\vec{x}} \rightarrow \mathbb{R}$ (forme linéaire restriction de ℓ à $TS_{\vec{x}}$). Et on dit que ρ est C^1 quand $d\rho$ dépend continûment de \vec{x} .

Quand ρ est différentiable en \vec{x} sur S on a donc :

$$d(\rho \circ \vec{c})(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{c}(t)) - \rho(\vec{c}(0))}{t} = d\rho(\vec{x}).\vec{c}'(0).$$

Et si on prend toutes les courbes en \vec{x} , on peut obtenir les dérivées dans toute direction tangente à S , cf. proposition 1.17, i.e. dans toute direction du plan tangent $TS_{\vec{x}}$ à S en \vec{x} :

$$d\rho(\vec{x}).\vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{c}(t)) - \rho(\vec{c}(0))}{h}, \quad (1.23)$$

et le vecteur $d\rho(\vec{x}).\vec{v}$ ne dépend pas de la courbe \vec{c} choisie telle que $\vec{c}'(0) = \vec{v}$.

1.6 Base duale $(dq^i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ du système

Notations. On a $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ bijective C^∞ , et on a $\vec{\varphi}^{-1} : S \rightarrow U$ bijective C^∞ et on note :

$$\vec{\varphi}^{-1} : \begin{cases} S \rightarrow U \\ \vec{x} \mapsto \vec{q} = \vec{\varphi}^{-1}(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{q}(\vec{x}), \end{cases} \quad (1.24)$$

de même qu'on avait noté $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}) = \vec{x}(\vec{q})$. En particulier en utilisant la base canonique (\vec{E}_i) de \mathbb{R}^m , on note :

$$\vec{q} = \vec{\varphi}^{-1}(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{q}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m q^i(\vec{x}) \vec{E}_i = \begin{pmatrix} q^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ q^m(\vec{x}) \end{pmatrix}_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} (\vec{\varphi}^{-1})^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ (\vec{\varphi}^{-1})^m(\vec{x}) \end{pmatrix}_{|\vec{E}}. \quad (1.25)$$

Disposant de la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ du système de coordonnées, base de $TS_{\vec{x}}$ espace tangent à S en \vec{x} , on en déduit la base duale $(e^i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, base des formes linéaires $e^i(\vec{x}) \in (TS_{\vec{x}})^*$ définies par, pour tout $i, j = 1, \dots, m$:

$$e^i(\vec{x})(\vec{e}_j(\vec{x})) = \delta_j^i, \quad e^i(\vec{x})(\vec{e}_j(\vec{x})) \stackrel{\text{noté}}{=} = e^i(\vec{x}).\vec{e}_j(\vec{x}).$$

(Les $e^i \in T_1^0(S)$ sont des formes différentielles.)

Proposition 1.21 On a, pour tout $i = 1, \dots, m$:

$$e^i(\vec{x}) = dq^i(\vec{x}), \quad (1.26)$$

et $(dq^i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ est la base duale de la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ dans le plan tangent $TS_{\vec{x}}$

Preuve. On a $(\vec{\varphi}^{-1} \circ \vec{\varphi})(\vec{q}) = \vec{q}$, donc $d\vec{\varphi}^{-1}(\vec{x}) \cdot (d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_j) = \vec{E}_j$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, soit $d\vec{q}(\vec{x}) \cdot \vec{e}_j(\vec{x}) = \vec{E}_j$, soit $dq^i(\vec{x}) \cdot \vec{e}_j(\vec{x}) = \delta_j^i$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$. Et une forme linéaire, ici $e^i : TS_{\vec{x}} \rightarrow \mathbb{R}$, est entièrement déterminée par ses images sur les vecteurs de base, d'où $dq^i = e^i$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$. ■

Remarque 1.22 Quand $n = m$ et $\vec{\varphi} = I$, on a $\vec{q} = \vec{x}$ et on note $(e^i) = (dq^i) = (dx^i)$ la base duale de la base canonique. ■

Quand $n = m$, $\vec{\varphi}(\vec{q})$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^n , et on peut choisir comme base de \mathbb{R}^n la base canonique $(\vec{E}_i)_{i=1, \dots, n}$ de base duale (dx^i) . Soit alors $P = P(\vec{q}) = [d\vec{\varphi}(\vec{q})]$ de matrice inverse

$$Q = Q(\vec{x}) = P^{-1}(\vec{x}) = [d\vec{\varphi}(\vec{q})]^{-1} = [d\vec{\varphi}^{-1}(\vec{x})] \quad (1.27)$$

quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$.

Proposition 1.23 Les composantes des $dq^i(\vec{x})$ dans la base $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$ (duale de la base canonique) sont écrites dans la ligne i de Q :

$$dq^i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n Q_j^i(\vec{x}) dx^j. \quad (1.28)$$

Preuve. La colonne j de P contient les composantes de $\vec{e}_j(\vec{x})$ dans la base $(\vec{b}_i)_{i=1, \dots, n}$, et par définition de l'inverse $P^{-1} = Q$, on a : (ligne i de Q) \times (colonne j de P) = δ_j^i . ■

Exemple 1.24 Cas $m = n = 2$. Pour le système de coordonnées polaires, cf (1.5), où donc on utilise la base canonique de $\mathbb{R}^2 \supset S$ de base duale $(dq^1(\vec{x})=dx^1, dq^2(\vec{x})=dx^2)$ en \vec{x} (base indépendante de \vec{x}).

On a $r = r(\vec{x})$, $\theta = \theta(\vec{x})$, on pose $P = [d\vec{\varphi}(\vec{q})]$ de matrice inverse $Q = [d\vec{\varphi}^{-1}(\vec{x})]$ au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

et la base duale est donnée par (lignes de Q), toujours quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$[dr(\vec{x})] = (\cos \theta \quad \sin \theta), \quad [d\theta(\vec{x})] = \left(-\frac{\sin \theta}{r} \quad \frac{\cos \theta}{r}\right), \quad (1.30)$$

expression matricielle relative à la base duale (dx, dy) de la base canonique, i.e. :

$$\begin{cases} dr(\vec{x}) = e^1(\vec{x}) = \cos \theta dx + \sin \theta dy \stackrel{\text{noté}}{=} dr(\vec{x}), \\ d\theta(\vec{x}) = e^2(\vec{x}) = -\frac{\sin \theta}{r} dx + \frac{\cos \theta}{r} dy \stackrel{\text{noté}}{=} d\theta(\vec{x}). \end{cases} \quad (1.31)$$

■

Exemple 1.25 Coordonnées polaires sur le cercle S de rayon R : $m = 1$ et $n = 2$, cf. (1.6).

On a $\theta : \vec{x} \in S \rightarrow \theta = \theta(\vec{x}) \in U$, et la base duale en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\theta)$ est $(d\theta(\vec{x}))$ constituée du seul élément $d\theta(\vec{x})$ défini par $d\theta(\vec{x}) \cdot \vec{f}_1(\vec{x}) = 1$.

Si on souhaite exprimer $d\theta(\vec{x})$ sur la base implicite (dx^1, dx^2) de $\mathbb{R}^2 \supset S$ (duale de la base canonique), alors on retrouve (1.31)₂. En effet, ce choix implicite exprime $\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{e}_2(\vec{x})$ sur la base canonique, donné par (1.16)₂, et on vérifie que $d\theta(\vec{x}) \cdot \vec{e}_2(\vec{x}) = \left(-\frac{\sin \theta}{R} \quad \frac{\cos \theta}{R}\right) \cdot \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = 1$. ■

Exemple 1.26 Le système de coordonnées sphérique dans \mathbb{R}^3 , cf. (1.7), (1.18) et (1.19).

Les vecteurs de base étant orthogonaux, les lignes de la matrice inverse $Q = P^{-1}$ sont données par les colonnes de P divisées par le carré des normes des vecteurs :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \theta}{r \cos \varphi} & \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi} & 0 \\ -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Et la base duale $(dr=e^1, d\theta=e^2, d\varphi=e^3)$ en \vec{x} est exprimée dans la base $(dx^i)_{i=1,2,3}$ en lisant les lignes de Q :

$$\begin{cases} dr = \cos \theta \cos \varphi dx + \sin \theta \cos \varphi dy + \sin \varphi dz, \\ d\theta = -\frac{\sin \theta}{r \cos \varphi} dx + \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi} dy, \\ d\varphi = -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} dx - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r} dy + \frac{\cos \varphi}{r} dz. \end{cases}$$

■

1.7 Base biduale : notation $\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x})$

On peut alors dériver toute fonction $f : \vec{x} \in S \subset \mathbb{R}^m \rightarrow f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ dans la direction des vecteurs de base du système de coordonnées, c'est à dire calculer $df(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x})$ pour $i = 1, \dots, m$ à l'aide de la dérivation de fonctions composées : ayant $f(\vec{x}) = (f \circ \vec{\varphi})(\vec{q})$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, on obtient :

$$\frac{\partial(f \circ \vec{\varphi})}{\partial q^i}(\vec{q}) = df(\vec{\varphi}(\vec{q})) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}) = df(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x}) \quad (= \frac{d(f \circ c_{\vec{x}}^{(i)})}{dt}(t=0)). \quad (1.33)$$

Notation. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial q^i}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial(f \circ \vec{\varphi})}{\partial q^i}(\vec{q}), \quad \text{donc} = df(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x}), \quad (1.34)$$

appelée dérivée de f en \vec{x} le long de la i -ème ligne de coordonnée (le long du i -ème vecteur de base du système de coordonnées).

Définition 1.27 Quand $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction :

$$\vec{\varphi}^* f \stackrel{\text{déf}}{=} f \circ \vec{\varphi}, \quad (1.35)$$

où donc :

$$\vec{\varphi}^* f : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{q} \mapsto (\vec{\varphi}^* f)(\vec{q}) \stackrel{\text{déf}}{=} f(\vec{x}) \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}), \end{cases} \quad (1.36)$$

est appelée le "pull-back de f par $\vec{\varphi}$ ".

C'est la fonction qui ramène la fonction f dans U au sens où elle permet de faire des calculs sur f définie en \vec{x} à l'aide des paramètres \vec{q} caractérisant \vec{x} .

Donc par définition de $\frac{\partial f}{\partial q^i}$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial q^i}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial(\vec{\varphi}^* f)}{\partial q^i}(\vec{q}).$$

Exemple 1.28 $f(x, y) = g(r, \theta)$ où on a noté $g = \vec{\varphi}^* f$. Et par définition $\frac{\partial f}{\partial r}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$.

Donc avec le système $\vec{\varphi}$ des coordonnées polaires, $(x, y) = \vec{\varphi}(r, \theta)$, et donc $(r, \theta) = \vec{\varphi}^{-1}(x, y)$. Si $f(x, y) = r^2 \theta$ alors $\frac{\partial f}{\partial r}(x, y) = 2r\theta$ ("évident") (avec la définition : $f(x, y) = (\vec{\varphi}^* f)(r, \theta) = r^2 \theta$ donne $\frac{\partial f}{\partial r}(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial(\vec{\varphi}^* f)}{\partial r}(r, \theta) = 2r\theta$). ■

Comme $df(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est linéaire, $df(\vec{x})$ est déterminée dès qu'on connaît ses valeurs sur une base; en particulier dès qu'on connaît les $df(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x})$ pour tout i , i.e. dès qu'on connaît les $\frac{\partial f}{\partial q^i}(\vec{x})$; et avec (1.33) on dispose ainsi de la formule :

$$df(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i}(\vec{x}) dq^i(\vec{x}), \quad (1.37)$$

donc au sens $df(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\vec{\varphi}^* f)}{\partial q^i}(\vec{q}) dq^i(\vec{x})$: on a bien $df(\vec{x}) \cdot \vec{e}_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\vec{\varphi}^* f)}{\partial q^i}(\vec{q}) \delta_j^i = \frac{\partial(\vec{\varphi}^* f)}{\partial q^j}(\vec{q})$.

Définition 1.29 Soit :

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x}) : \begin{cases} \mathbb{R}^{m^*} \rightarrow \mathbb{R} \\ \ell \mapsto \frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x}).\ell = \ell.\vec{e}_i(\vec{x}) \end{cases}$$

appelé opérateur de dérivation dans la i -ème direction. Et $(\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ est appelée base biduale de $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$. Et on note :

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x}).df(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{\partial f}{\partial q^i}(\vec{x}). \quad (1.38)$$

Proposition 1.30 $(\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ est la base duale de $(dq^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$. En particulier on retrouve :

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i. \quad (1.39)$$

Preuve. $\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{x}).dq^j(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} dq^j(\vec{x}).\vec{e}_i(\vec{x}) = \delta_i^j$, et c'est bien la base duale. Egalement $\frac{\partial q^i}{\partial q^j}$ a les deux sens :

- 1- $\frac{\partial q^i}{\partial q^j}(\vec{q}) = 0$ car les q^j sont des variables deux à deux indépendantes,
- 2- $\frac{\partial q^j}{\partial q^i}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \vec{\varphi}^* q^j}{\partial q^i}(\vec{q}) = \frac{\partial q^j \circ \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}) = \frac{\partial (\vec{\varphi}^{-1})^j \circ \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q})$ avec $(\partial(\vec{\varphi}^{-1})^j \circ \vec{\varphi}) : \vec{q} \rightarrow ((\vec{\varphi}^{-1})^j \circ \vec{\varphi})(\vec{q}) = q^j$, donc $\frac{\partial q^j}{\partial q^i}(\vec{x}) = \delta_i^j$, les variables q^j étant deux à deux indépendantes. \blacksquare

Remarque 1.31 Le calcul (1.33) de $df(\vec{x}).\vec{e}_i(\vec{x})$ n'a pas utilisé la définition classique de la dérivation dans une direction, à savoir $df(\vec{x}).\vec{e}_i(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i(\vec{x})) - f(\vec{x})}{h}$: ce calcul n'a de sens que dans \mathbb{R}^n , et n'a pas de sens sur une surface, voir paragraphe 0 (le point $\vec{x} + h\vec{e}_i(\vec{x})$ n'est pas sur la surface en général, à moins que la surface soit plane par exemple).

Le calcul (1.33) utilise $df(\vec{x}).\vec{e}_j(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial q^j}(\vec{x}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(f \circ \vec{\varphi})(\vec{q} + k\vec{E}_j) - (f \circ \vec{\varphi})(\vec{q})}{k}$, où ne sont utilisés que les points $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{q} + k\vec{E}_j)$ de la surface S , et donc on dérive le long de la j -ème courbe de coordonnées. \blacksquare

Et résultat similaire pour $\vec{f} : \vec{x} \in S \rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$ fonction à valeurs vectorielles.

En particulier, pour chaque $j = 1, \dots, m$, on dispose des fonctions :

$$\vec{e}_j : \vec{x} \in S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \vec{e}_j(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n.$$

Et, pour chaque $\vec{x} \in \Omega$, on obtient l'endomorphisme $d\vec{e}_j(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ entièrement défini par ses valeurs sur les vecteurs $\vec{e}_i(\vec{x})$ de base, et on a (à l'aide de $\vec{e}_j(\vec{x}) = \vec{e}_j(\vec{\varphi}(\vec{q}))$ qu'on dérive) :

$$d\vec{e}_j(\vec{x}).\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial(\vec{e}_j \circ \vec{\varphi})}{\partial q^i}(\vec{q}) \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^i}(\vec{x}).$$

(Dérivée de \vec{e}_j en \vec{x} le long de la i -ème ligne de coordonnées.) D'où :

$$d\vec{e}_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^i}(\vec{x}) \otimes dq^i(\vec{x}). \quad (1.40)$$

En effet on a alors $d\vec{e}_j(\vec{x}).\vec{e}_k(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^i}(\vec{x})(dq^i(\vec{x}).\vec{e}_k(\vec{x})) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^i}(\vec{x})\delta_k^i = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^k}(\vec{x})$ pour tout $k = 1, \dots, m$. Et si $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i(\vec{x})\vec{e}_i(\vec{x})$, on obtient :

$$d\vec{e}_j(\vec{x}).\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i(\vec{x}) \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^i}(\vec{x}),$$

Exemple 1.32 Coordonnées polaires. Avec (1.16), avec la notation (1.34) :

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial r}(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \theta}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\vec{e}_2(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial r}(\vec{x}), \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \theta}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} = -r\vec{e}_1(\vec{x}). \quad (1.41)$$

Et on a bien sûr $\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \theta}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial r}(\vec{x})$ puisque $= \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r \partial \theta}(\vec{q})$ et $\vec{\varphi} \in C^2$ (quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$). Et avec :

$$d\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial r} \otimes dr + \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \theta} \otimes d\theta, \quad d\vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial r} \otimes dr + \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \theta} \otimes d\theta,$$

on obtient :

$$d\vec{e}_1 = \frac{1}{r}\vec{e}_2 \otimes d\theta, \quad d\vec{e}_2 = -r\vec{e}_1 \otimes d\theta + \frac{1}{r}\vec{e}_2 \otimes dr. \quad (1.42)$$

Les représentations matricielles sont donc $[d\vec{e}_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}_{|(\vec{e})}$ et $[d\vec{e}_2] = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}_{|(\vec{e})}$. ■

Exercice 1.33 Pour $(\vec{e}_1(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x}))$ base du système de coordonnées polaires, calculer $d\vec{e}_1(\vec{x})$ et $d\vec{e}_2(\vec{x})$ dans la base cartésienne.

Réponse. On passe aux coordonnées euclidiennes soit par changement de base (le faire), soit par calcul direct : avec $\vec{e}_1(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r}$, on a $d\vec{e}_1 = \frac{1}{r}d\vec{x} + \vec{x} \otimes d\frac{1}{r}$; avec $d\vec{x} = I = \vec{E}_1 \otimes dx + \vec{E}_2 \otimes dy$ et $d\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}dr = -\frac{1}{r^2}(\cos\theta dx + \sin\theta dy)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1(\vec{x}) &= \frac{1}{r}(\vec{E}_1 \otimes dx + \vec{E}_2 \otimes dy) - \frac{1}{r^2}(x\vec{E}_1 + y\vec{E}_2) \otimes (\cos\theta dx + \sin\theta dy) \\ &= \frac{1}{r}((1 - \cos^2\theta)\vec{E}_1 \otimes dx - \cos\theta \sin\theta \vec{E}_1 \otimes dy - \cos\theta \sin\theta \vec{E}_2 \otimes dx + (1 - \sin^2\theta)\vec{E}_2 \otimes dy) \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta \sin\theta \\ -\cos\theta \sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}_{|(\vec{E})}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

et avec $\vec{e}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$, application linéaire en \vec{x} , on obtient $d\vec{e}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\vec{x}$, soit :

$$d\vec{e}_2(\vec{x}) = -\vec{E}_1 \otimes dy + \vec{E}_2 \otimes dx = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{|(\vec{E})}. \quad (1.44)$$

On vérifie : $d\vec{e}_2(\vec{x}) \cdot \vec{E}_1 = \vec{E}_2$ et $d\vec{e}_2(\vec{x}) \cdot \vec{E}_2 = -\vec{E}_1$, i.e. $d\vec{e}_2(\vec{x})$ est la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

(Pour le calcul direct : matrice de passage $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{pmatrix}$ dont la première colonne donne $\vec{e}_1(\vec{x})$ et la seconde $\vec{e}_2(\vec{x})$ dans la base euclidienne en \vec{x} quand $(r, \theta) = \vec{\varphi}^{-1}(\vec{x})$. La matrice inverse est $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$ dont la 1ère ligne contient $e^1 = dr$ et la seconde ligne $e^2 = d\theta$. On a donc

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 \otimes d\theta &= (-r \sin\theta \vec{E}_1 + r \cos\theta \vec{E}_2) \otimes (-\frac{\sin\theta}{r} dx + \frac{\cos\theta}{r} dy), \\ \vec{e}_1 \otimes d\theta &= (\cos\theta \vec{E}_1 + \sin\theta \vec{E}_2) \otimes (-\frac{\sin\theta}{r} dx + \frac{\cos\theta}{r} dy), \\ \vec{e}_2 \otimes dr &= (-r \sin\theta \vec{E}_1 + r \cos\theta \vec{E}_2) \otimes (\cos\theta dx + \sin\theta dy), \end{aligned}$$

d'où (1.42) donne (1.43) et (1.44). ■

2 Symboles de Christoffel

2.1 Symboles de Christoffel dans \mathbb{R}^n

On traite ici d'abord le cas $m = n$. Dans ce cas il est usuel de noter $S = \Omega$ (ouvert de \mathbb{R}^n).

Soit $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ le système de coordonnées, avec $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1, \dots, n}$ la base du système de coordonnées $\vec{\varphi}$ au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. Le champ de vecteurs $\vec{e}_i \in T_0^1(\Omega)$ est différentiable de différentielle $d\vec{e}_i \in T_1^1(\Omega)$, et $d\vec{e}_i(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^n pour $\vec{x} \in \Omega$. Et le vecteur $d\vec{e}_j(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} (d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ a un sens pour tout i, j .

Définition 2.1 Pour $\vec{x} \in \Omega$, on note $\Gamma_{ij}^k(\vec{x})$ les composantes du vecteur $(d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)(\vec{x})$ sur la base $(\vec{e}_k(\vec{x}))_{k=1, \dots, n}$:

$$d\vec{e}_j(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x}) = \sum_k \Gamma_{ij}^k(\vec{x}) \vec{e}_k(\vec{x}). \quad (2.1)$$

Les Γ_{ij}^k sont donc des fonctions définies sur Ω par :

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \cdot (d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) \quad (= dq^k \cdot (d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)). \quad (2.2)$$

Les Γ_{ij}^k sont appelés les symboles de Christoffel du système de coordonnées, et les $\Gamma_{ij}^k(\vec{x})$ sont appelés les symboles de Christoffel en \vec{x} du système de coordonnées.

Proposition 2.2 Pour un système de coordonnées, on a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$.

Preuve. On a $d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^i \partial q^j}(\vec{q}) = \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^j \partial q^i}(\vec{q}) = d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, car $\vec{\varphi}$ est C^∞ donc C^2 (théorème de Schwarz donnant $\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^j \partial q^i}$ dans ce cas). ■

Exemple 2.3 Si on choisit un système de coordonnées cartésien, les vecteurs \vec{e}_j obtenus sont des vecteurs constants, les $d\vec{e}_j$ sont donc nuls, et dans ce cas les Γ_{ij}^k sont tous nuls. ■

Exercice 2.4 Pour le système de coordonnées polaires, à savoir, avec $\vec{q} = (r, \theta)$, $\vec{\varphi}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$, on note $\Gamma_{11}^1(\vec{x}) = \Gamma_{rr}^r(\vec{x})$, et de même pour les autres valeurs en exposant ou indice, notant r au lieu de 1, et θ au lieu de 2. Montrer que, en omettant (\vec{x}) pour alléger les notations :

$$\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{r\theta}^r = 0, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (2.3)$$

c'est à dire que :

$$d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 0, \quad d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{r} \vec{e}_2 = d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1, \quad d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -r \vec{e}_1. \quad (2.4)$$

Réponse. Voir (1.41). ■

Exercice 2.5 Pour le système de coordonnées sphériques (1.7), montrer que les symboles non nuls sont donnés par :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r \cos^2 \varphi, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\varphi = \sin \varphi \cos \varphi, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\theta = \Gamma_{\varphi\theta}^\theta = -\tan \varphi. \quad (2.6)$$

Soit d'une part :

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\ d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{r} \vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 &= d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{r} \vec{e}_3, \end{aligned}$$

et d'autre part pour les vecteurs \vec{e}_2 et \vec{e}_3 tangents à la sphère :

$$\begin{aligned} d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 &= -r \cos^2 \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 &= d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = -\tan \varphi \vec{e}_2, \\ d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 &= -r \vec{e}_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Réponse. Calcul direct, voir polycopié précédent. ■

Proposition 2.6 Si pour i fixé on a $\Gamma_{ii}^k = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$, alors la i -ème ligne de coordonnées au voisinage de \vec{x} est le segment de droite $\vec{c}_x^{(i)}(t) = \vec{x} + t\vec{e}_i(\vec{x})$, pour t dans un voisinage de 0.

Preuve. La i -ème ligne de coordonnées est donnée par $\vec{c}_x^{(i)}(t) = \vec{\varphi}(\vec{q} + t\vec{E}_i)$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. On a $\vec{c}_x^{(i)'}(t) = d\vec{\varphi}(\vec{q} + t\vec{E}_i) \cdot \vec{E}_i = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q} + t\vec{E}_i) = \vec{e}_i(\vec{c}_x^{(i)}(t))$ (i.e. \vec{e}_i est le champ de vecteurs tangent à la ligne), donc $\vec{c}_x^{(i)''}(t) = d\vec{e}_i(\vec{c}_x^{(i)}(t)) \cdot \vec{c}_x^{(i)'}(t) = d\vec{e}_i(\vec{c}_x^{(i)}(t)) \cdot \vec{e}_i(\vec{c}_x^{(i)}(t))$.

Ici par hypothèse on a $\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial (q^i)^2}(\vec{q}) = d\vec{e}_i(\vec{y}) \cdot \vec{e}_i(\vec{y}) = \vec{0}$ pour tout \vec{y} quand $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. Et donc $\vec{c}_x^{(i)''}(t) = 0$ pour tout t pour la i -ème ligne de coordonnées, D'où par double intégration $\vec{c}_x^{(i)}$ est la droite $\vec{c}_x^{(i)}(t) = \vec{x} + t\vec{c}_x^{(i)'}(0) = \vec{x} + t\vec{e}_i(\vec{x})$. ■

2.2 Connexion sur $C^\infty(S; \mathbb{R}) = T_0^0(S)$

Si $f \in C^\infty(S; \mathbb{R}) = T_0^0(S)$ et $\vec{v} \in TS = T_0^1(S)$, on note :

$$\nabla_{\vec{v}} f \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} df \cdot \vec{v} \stackrel{\text{not\u00e9}}{=} \nabla f \cdot \vec{v} \in T_0^0(S), \quad (2.8)$$

où on rappelle que pour $\vec{x} \in S$:

$$df(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{c}(t)) - f(\vec{c}(0))}{t},$$

quand $\vec{x} = \vec{c}(0)$ et $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(0)$, i.e. \vec{v} est le vecteur tangent à une courbe \vec{c} t.q. $\vec{c}(0) = \vec{x}$.

2.3 Connexion sur $TS = T_0^1(S)$: première approche

On reprend $U \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $m < n$, et $S = \varphi(U)$ (variété de dimension m dans \mathbb{R}^n).

Problème rencontré : reprenons par exemple les coordonnées polaires sur le cercle S et (1.41) : on a $\vec{e}_2(\vec{x}) \in TS_{\vec{x}}$ vecteur tangent au cercle, et on a :

$$d\vec{e}_2(\vec{x}).\vec{e}_2(\vec{x}) = -r\vec{e}_1(\vec{x}) \notin TS_{\vec{x}},$$

bien que seul $\vec{e}_2(\vec{x})$ de l'espace tangent intervienne : sa dérivation le long de lui-même est un vecteur qui n'est pas dans l'espace tangent $TS_{\vec{x}}$ au cercle. On obtient d'ailleurs les forces d'inertie centrifuges déduite de l'accélération $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = d\vec{e}_2(\vec{x}).\vec{e}_2(\vec{x})$ (dérivée seconde) quand on reste sur le cercle.

Et la partie de $d\vec{e}_2(\vec{x}).\vec{e}_2(\vec{x})$ perpendiculaire au cercle, au sens du produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^2 n'intervient pas dans la description "le long du cercle", autrement dit, les forces d'inertie perpendiculaires au cercle n'ont pas d'influence sur le mouvement sur le cercle.

On convient donc de ne considérer que les projections perpendiculaires : soit :

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}} : \mathbb{R}^n \rightarrow TS_{\vec{x}}, \quad (2.9)$$

l'opérateur de projection orthogonal sur l'espace tangent $TS_{\vec{x}}$ au sens du produit scalaire euclidien : pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}.\vec{v} \in TS_{\vec{x}}, \quad \text{défini t.q.} \quad (\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}.\vec{v}, \vec{w})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{v}, \vec{w})_{\mathbb{R}^n} \quad \forall \vec{w} \in TS_{\vec{x}}. \quad (2.10)$$

(Ou si on préfère $(\vec{v} - \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}.\vec{v}, \vec{w})_{\mathbb{R}^n} = 0$ pour tout $\vec{w} \in TS_{\vec{x}}$, i.e. $\vec{v} - \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}.\vec{v} \perp TS_{\vec{x}}$.)

Définition 2.7 On note :

$$\nabla : \begin{cases} TS \rightarrow T_1^1(S) \\ \vec{w} \mapsto \nabla \vec{w}, \quad \nabla \vec{w}.\vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Proj}_{TS}.(d\vec{w}.\vec{v}) \stackrel{\text{noté}}{=} \nabla_{\vec{v}}\vec{w}, \end{cases} \quad (2.11)$$

dite dérivation covariante de \vec{w} le long de \vec{v} sur l'espace tangent. Le sens de (2.11) est : pour tout $\vec{x} \in S$:

$$(\nabla_{\vec{v}}\vec{w})(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}.(d\vec{w}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})). \quad (2.12)$$

Définition 2.8 La connexion riemannienne sur TS est l'opérateur :

$$\nabla : \begin{cases} TS \times TS \rightarrow TS \\ (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \nabla(\vec{v}, \vec{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_{\vec{v}}\vec{w}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Définition 2.9 Quand $f \in C^\infty(S; \mathbb{R})$ et $\vec{w} \in TS$, on pose (formule de Leibniz de dérivation d'un produit), pour tout $\vec{v} \in TS$:

$$\nabla(f\vec{w}).\vec{v} = (\nabla f.\vec{v})\vec{w} + f(\nabla \vec{w}).\vec{v} \in TS, \quad (2.14)$$

et on note :

$$\nabla(f\vec{w}) = \nabla f.\vec{w} + f\nabla \vec{w} \in T_1^1(S). \quad (2.15)$$

Exemple 2.10 Quand $n = m$, on a $\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}} = I$ et :

$$(\nabla_{\vec{v}}\vec{w})(\vec{x}) = d\vec{w}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x}) = (\nabla \vec{w}.\vec{v})(\vec{x})$$

la dérivée covariante usuelle de \vec{w} dans la direction \vec{v} . ■

Exemple 2.11 La connexion sur le cercle est définie sur les champs de vecteurs $\vec{w} \in TS$ de la forme $\vec{w}(\vec{x}) = \beta(\vec{x})\vec{e}_2(\vec{x})$. Et $d\vec{w}(\vec{x})$ est défini sur l'espace tangent au cercle par sa valeur sur le vecteur de base $\vec{e}_2(\vec{x})$. On a :

$$d\vec{w}(\vec{x}).\vec{e}_2(\vec{x}) = (d\beta(\vec{x}).\vec{e}_2(\vec{x}))\vec{e}_2(\vec{x}) + \beta(\vec{x})(d\vec{e}_2(\vec{x}).\vec{e}_2(\vec{x})) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta}(\vec{x})\vec{e}_2(\vec{x}) - \beta(\vec{x})r\vec{e}_1(\vec{x}),$$

D'où :

$$(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{w})(\vec{x}) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta}(\vec{x})\vec{e}_2(\vec{x}). \quad \blacksquare$$

2.4 Symboles de Christoffel sur S

Définition 2.12 Pour $\vec{x} \in S$, pour $i, j = 1, \dots, m$, on note $\Gamma_{ij}^k(\vec{x})$ les composantes de $(\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j)(\vec{x}) = \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)(\vec{x})$ sur la base $(\vec{e}_k(\vec{x}))_{k=1, \dots, m}$:

$$(\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j)(\vec{x}) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(\vec{x}) \vec{e}_k(\vec{x}), \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad (2.16)$$

Les Γ_{ij}^k sont donc des fonctions définies sur Ω par :

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \cdot \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j \quad (= dq^k \cdot \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j). \quad (2.17)$$

Les Γ_{ij}^k sont appelés les symboles de Christoffel du système de coordonnées, et les $\Gamma_{ij}^k(\vec{x})$ sont appelés les symboles de Christoffel en \vec{x} du système de coordonnées.

Proposition 2.13 Pour un système de coordonnées, on a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tout $i, j, k = 1, \dots, m$.

Preuve. On a $d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^i \partial q^j}(\vec{q}) = \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^j \partial q^i}(\vec{q}) = d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, car $\vec{\varphi}$ est C^∞ donc C^2 (théorème de Schwarz donnant $\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial q^j \partial q^i}$ dans ce cas). D'où $\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i(\vec{x})) = \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j(\vec{x}))$. \blacksquare

Exemple 2.14 Sur le cercle, pour la connexion riemannienne, Γ_{22}^2 est l'unique symbole de Christoffel, et $\Gamma_{22}^2 = 0$, voir (2.4). \blacksquare

Exemple 2.15 Sur la sphère, pour la connexion riemannienne, voir (2.7) :

$$\Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^3 = \sin \varphi \cos \varphi, \quad \Gamma_{23}^2 = -\tan \varphi, \quad \Gamma_{23}^3 = 0, \quad \Gamma_{33}^2 = 0, \quad \Gamma_{33}^3 = 0. \quad (2.18)$$

\blacksquare

2.5 Notation $w_{|j}^i$ de dérivation covariante dans la j -ème direction

Proposition 2.16 et notation. Soit un champ de vecteurs \vec{w} sur S et un système de coordonnées $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. On note $w^i(\vec{x})$ les composantes de $\vec{w}(\vec{x})$ sur la base du système en \vec{x} :

$$\vec{w}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m w^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x}).$$

On a, pour $j = 1, \dots, m$:

$$\nabla_{\vec{e}_j} \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{i,k=1}^m \Gamma_{jk}^i w^k \right) \vec{e}_i \quad \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_i w_{|j}^i \vec{e}_i, \quad (2.19)$$

c'est à dire $w_{|j}^i = dq^i \cdot \nabla_{\vec{e}_j} \vec{w}$ est donné par :

$$w_{|j}^i = \frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i w^k. \quad (2.20)$$

C'est la i -ème composante de la dérivée covariante de \vec{w} le long de la j -ème ligne de coordonnées.

Preuve. De $\vec{w} = \sum_i w^i \vec{e}_i$ on déduit $d\vec{w} \cdot \vec{e}_j = \sum_i (dw^i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_i + \sum_k w^k (d\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j)$, et $dw^i \cdot \vec{e}_j(\vec{x}) = \frac{\partial w^i}{\partial q^j}(\vec{x})$ et (2.16). \blacksquare

Exemple 2.17 Quand $n = m$, dans le système de coordonnées cartésien, posant :

$$\vec{w} = \sum_i w^i \vec{E}_i, \quad (2.21)$$

on a $d\vec{w} = \sum_i dw^i \vec{E}_i$, au sens $d\vec{w} \cdot \vec{E}_j = \sum_i (dw^i \cdot \vec{E}_j) \vec{E}_i$:

$$w_{|j}^i = \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \stackrel{\text{noté}}{=} w_{,j}^i.$$

Et la différentielle $d\vec{w}(\vec{x})$ a pour matrice $[d\vec{w}]_{|\vec{E}} = \left[\frac{\partial w^i}{\partial x^j} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = [w_{,j}^i]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$. \blacksquare

Proposition 2.18 Si on dispose de deux champs de vecteurs \vec{w}, \vec{v} sur S et du système de coordonnées $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, on a en \vec{x} , pour les composantes dans cette base :

$$(\nabla_{\vec{v}}\vec{w})^i = \sum_{j=1}^m w_{|j}^i v^j \quad \text{i.e.} \quad = \sum_j \frac{\partial w^i}{\partial q^j} v^j + \sum_{j,k=1}^m \Gamma_{jk}^i w^k v^j, \quad (2.22)$$

où on a posé $\vec{w} = \sum_{i=1}^m w^i \vec{e}_i$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^m v^i \vec{e}_i$ et $\nabla_{\vec{v}}\vec{w} = \sum_{i=1}^m (\nabla_{\vec{v}}\vec{w})^i \vec{e}_i$.

Preuve. On a $\nabla_{\vec{v}}\vec{w} = \sum_j v^j \nabla_{\vec{e}_j}\vec{w}$, d'où le résultat avec (2.19). \blacksquare

Définition 2.19 La dérivée de Lie dans \mathbb{R}^n est l'opérateur défini par :

$$L_{\vec{v}}\vec{w} = d\vec{w} \cdot \vec{v} - d\vec{v} \cdot \vec{w} \stackrel{\text{noté}}{=} [\vec{v}, \vec{w}], \quad (2.23)$$

et la dérivée de Lie sur S est l'opérateur défini par :

$$L_{\vec{v}}\vec{w} = \nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{w}}\vec{v} \stackrel{\text{noté}}{=} [\vec{v}, \vec{w}]. \quad (2.24)$$

Corollaire 2.20 Pour les composantes de la dérivation de Lie $L_{\vec{v}}\vec{w}$, les symboles de Christoffel disparaissent : pour $\vec{w}, \vec{v} \in TS$ et $i = 1, \dots, m$:

$$[\vec{v}, \vec{w}]^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial w^i}{\partial q^j} v^j - \sum_{j=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial q^j} w^j \quad (= \sum_{j=1}^m w_{|j}^i v^j - \sum_{j=1}^m v_{|j}^i w^j),$$

quand $[\vec{v}, \vec{w}]^i$ est la i -ème composante de $[\vec{v}, \vec{w}]$ sur la base du système de coordonnées, i.e quand $[\vec{v}, \vec{w}] = \sum_{i=1}^m [\vec{v}, \vec{w}]^i \vec{e}_i$. En d'autres termes, les composantes de $[\vec{v}, \vec{w}]$ dans la base du système de coordonnées ne dépendent pas des symboles de Christoffel.

Preuve. Pour un système de coordonnées, on a $\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i = 0$ pour tout i, j, k . \blacksquare

2.6 Divergence

Rappel dans \mathbb{R}^n :

Définition 2.21 La divergence d'un champ de vecteurs $w \in T\mathbb{R}^n$ est la trace de sa différentielle :

$$\text{div}\vec{w} = \text{Tr}(d\vec{w}). \quad (2.25)$$

(Comme $\vec{w} \in T_0^1(\mathbb{R}^n)$, on a $d\vec{w} \in T_1^1(\mathbb{R}^n)$ est la trace est bien définie.)

Sur la surface S , l'opérateur ∇ joue le rôle de d (dérivation) : pour $\vec{w} \in TS = T_0^1(S)$, on a $\nabla\vec{w} \in T_1^1(S)$, et :

Définition 2.22 La divergence d'un champ de vecteurs $\vec{w} \in TS$ est la trace de sa différentielle :

$$\text{div}\vec{w} = \text{Tr}(\nabla\vec{w}). \quad (2.26)$$

Exemple 2.23 Cas $n = m$ dans le système de coordonnées cartésien, posant :

$$\vec{w} = \sum_i w^i \vec{E}_i, \quad (2.27)$$

on a $d\vec{w} = \sum_i dw^i \vec{E}_i$, au sens $d\vec{w} \cdot \vec{E}_j = \sum_i (dw^i \cdot \vec{E}_j) \vec{E}_i$, de matrice $[d\vec{w}] = [(\frac{\partial w^i}{\partial x^j})]_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$. Ainsi :

$$\text{div}\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_{,i}^i \quad (= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w^i}{\partial x^i}). \quad (2.28)$$

\blacksquare

Exemple 2.24 Cas $n \geq m$. Dans le système de coordonnées $\vec{\varphi}$, posant :

$$\vec{w}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m w^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x}), \quad (2.29)$$

on a :

$$\text{div}\vec{w} = \sum_{i=1}^m w_{|i}^i \quad (= \sum_{i=1}^m \frac{\partial w^i}{\partial q^i} + \sum_{i,k=1}^m \Gamma_{ik}^i w^k). \quad (2.30)$$

\blacksquare

2.7 Connexion sur $T_1^0(S)$: première approche

Dans \mathbb{R}^n (cas $m = n$), soit $\alpha \in T_1^0(\Omega)$ une forme différentielle, donc avec $\alpha(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$ (forme linéaire). On a pour tout champ de vecteurs $\vec{v} \in T\Omega$, la fonction :

$$\alpha.\vec{v} : \vec{x} \in \Omega \rightarrow (\alpha.\vec{v})(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})$$

est $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) = T_0^0(\Omega)$ de dérivée $d(\alpha.\vec{v}) \in T_1^0(\Omega)$ définie par, pour tout champ de vecteurs $\vec{w} \in T\Omega$:

$$d(\alpha.\vec{v}).\vec{w} = (d\alpha.\vec{w}).\vec{v} + \alpha.(d\vec{v}.\vec{w}) \stackrel{\text{noté}}{=} (d\alpha.\vec{v} + \alpha.d\vec{v}).\vec{w}$$

(formule de Leibniz). Et ainsi la différentielle $d\alpha$ est donnée par :

$$(d\alpha.\vec{w}).\vec{v} = d(\alpha.\vec{v}).\vec{w} - \alpha.(d\vec{v}.\vec{w}) \stackrel{\text{noté}}{=} d\alpha(\vec{w}, \vec{v}), \quad (2.31)$$

la dernière notation grâce à l'isomorphisme canonique entre $L(TS_{\vec{x}}; L(TS_{\vec{x}}; \mathbb{R})) = L(TS_{\vec{x}}; TS_{\vec{x}}^*)$ et $L(TS_{\vec{x}}, TS_{\vec{x}}; \mathbb{R}) = L^2(TS_{\vec{x}}; \mathbb{R})$ qui permet d'écrire $d\alpha(\vec{x}) \in L^2(TS_{\vec{x}}; \mathbb{R})$, et donc $d\alpha \in T_2^0(\Omega)$.

Pour les connexions sur S (cas $m \leq n$), soit $\alpha \in T_1^0(S)$ une forme différentielle et $\vec{v} \in TS$ un champ de vecteurs. Alors $\alpha.\vec{v}$ est une fonction, sa différentielle $d\vec{v}.\vec{w}$ est remplacée par $\nabla\vec{v}.\vec{w} = \nabla_{\vec{w}}\vec{v} = \text{Proj}_{TS}(d\vec{v}.\vec{w})$, et on va également remplacer $d\alpha.\vec{w}$ par $\nabla_{\vec{w}}\alpha = \nabla\alpha.\vec{w}$:

Définition 2.25 La dérivée covariante d'une forme différentielle $\alpha \in T_1^0(S)$ sur S dans la direction du champ de vecteurs $\vec{w} \in TS$ est la forme différentielle $\nabla\alpha.\vec{w} = \nabla_{\vec{w}}\alpha \in T_1^0(S)$ définie par, pour tout $\vec{v} \in TS$:

$$\nabla(\alpha.\vec{v}).\vec{w} = (\nabla\alpha.\vec{w}).\vec{v} + \alpha.(\nabla\vec{v}.\vec{w}), \quad (2.32)$$

soit :

$$\begin{aligned} (\nabla\alpha.\vec{w}).\vec{v} &\stackrel{\text{déf}}{=} \nabla(\alpha.\vec{v}).\vec{w} - \alpha.(\nabla\vec{v}.\vec{w}) \\ &\stackrel{\text{noté}}{=} (\nabla_{\vec{w}}\alpha).\vec{v} \stackrel{\text{noté}}{=} \nabla\alpha(\vec{w}, \vec{v}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Et le tenseur $\nabla\alpha \in T_2^0(S)$ ainsi défini est appelé dérivation de α sur S .

Et quand $S = \Omega$ est un ouvert de \mathbb{R}^n (cas $m = n$), on note $\nabla = d$.

En particulier, si $f \in C^\infty(S; \mathbb{R})$ et $\alpha \in T_1^0(S)$, alors $f\alpha \in T_1^0(S)$ et :

$$\nabla_{\vec{w}}(f\alpha) = (\nabla_{\vec{w}}f)\alpha + f(\nabla_{\vec{w}}\alpha), \quad (2.34)$$

au sens $\nabla_{\vec{w}}(f\alpha).\vec{v} = (df.\vec{w})(\alpha.\vec{v}) + f(\nabla_{\vec{w}}\alpha.\vec{v})$, et :

$$\nabla(f\alpha) = (\nabla f)\alpha + f(\nabla\alpha). \quad (2.35)$$

Notations. Si $f \in C^\infty$, alors $\alpha = df \in T_1^0(S)$ et :

$$\nabla(df) \stackrel{\text{noté}}{=} \nabla^2 f \stackrel{\text{noté}}{=} d^2 f|_{TS} \stackrel{\text{noté}}{=} d^2 f \quad (2.36)$$

est ainsi défini sur toute variété $S \subset \mathbb{R}^n$.

2.8 Symboles de Christoffel pour la base duale

Proposition 2.26 Pour $(e^i(\vec{x})) = (dq^i(\vec{x}))$ la base duale de la base $(\vec{e}_i(\vec{x})) = (\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}))$ d'un système de coordonnées $\vec{\varphi} : \vec{q} \in U \rightarrow \vec{x} \in S$, on a :

$$\nabla_{\vec{e}_i} e^j = - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ik}^j e^k, \quad (2.37)$$

(on vérifie la cohérence de la position relative des indices) où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel du système $\vec{\varphi}$, cf. (2.16)).

Preuve. Cas $m = n$: on a $e^j.\vec{e}_i = \delta_i^j$, d'où $e^j.\vec{e}_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constante, et donc $\nabla(e^j.\vec{e}_i) = 0 = \nabla e^j.\vec{e}_i + e^j.\nabla\vec{e}_i$, et donc dans \mathbb{R}^n :

$$(\nabla e^j.\vec{e}_k).\vec{e}_i + e^j.(\nabla\vec{e}_i.\vec{e}_k) = 0 = (\nabla e^j.\vec{e}_i).\vec{e}_k + \Gamma_{ik}^j,$$

d'où (2.37). ▀

Exemple 2.27 Pour le système de coordonnées polaires on a donc :

$$\begin{aligned}
 de^1 \cdot \vec{e}_1 &= 0 & (= -\Gamma_{rr}^r e^1 - \Gamma_{r\theta}^r e^2), \\
 de^1 \cdot \vec{e}_2 &= r e^2 = r d\theta & (= -\Gamma_{\theta r}^r e^1 - \Gamma_{\theta\theta}^r e^2), \\
 de^2 \cdot \vec{e}_1 &= -\frac{1}{r} e^2 - \frac{1}{r} d\theta & (= -\Gamma_{rr}^\theta e^1 - \Gamma_{r\theta}^\theta e^2), \\
 de^2 \cdot \vec{e}_2 &= -\frac{1}{r} e^1 = -\frac{1}{r} dr & (= -\Gamma_{\theta r}^\theta e^1 - \Gamma_{\theta\theta}^\theta e^2).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

▀

Exemple 2.28 Sur le cercle de \mathbb{R}^2 et la base polaire réduite à \vec{e}_2 , on a donc :

$$\nabla_{\vec{e}_2} e^2 = 0, \tag{2.39}$$

car $\nabla_{\vec{e}_2} e^2 = 0$.

▀

Exemple 2.29 Sur la sphère $S(0; \mathbb{R})$ de \mathbb{R}^3 , on a $\nabla_{\vec{e}_2} e^2 = -\Gamma_{22}^2 e^2 - \Gamma_{23}^2 e^3$, $\nabla_{\vec{e}_2} e^3 = -\Gamma_{22}^3 e^2 - \Gamma_{23}^3 e^3$, $\nabla_{\vec{e}_3} e^3 = -\Gamma_{32}^3 e^2 - \Gamma_{33}^3 e^3$, donc avec (2.18) :

$$\nabla_{\vec{e}_2} e^2 = \tan \varphi e^3, \quad \nabla_{\vec{e}_2} e^3 = -\sin \varphi \cos \varphi e^2 = \nabla_{\vec{e}_3} e^2, \quad \nabla_{\vec{e}_3} e^3 = 0. \tag{2.40}$$

▀

2.9 * Formules de changement de base pour les symboles de Christoffel

Le champ de vecteurs $d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$ n'est pas objectif, c'est à dire il dépend de l'observateur : en particulier le vecteur $d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$ ne satisfait pas aux formules de changement de base (à cause de la présence des symboles de Christoffel).

Et si $\vec{e}_i(\vec{x})$ et $\vec{e}_j(\vec{x})$ sont tangents à la surface, le vecteur $d\vec{e}_j(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i(\vec{x})$ ne l'est pas en général cf. (2.7).

La dérivée de Lie corrige ces deux problèmes. Voir polycopié précédent, ce paragraphe, et les suivants.

On dispose ici de deux représentations paramétriques de S , i.e. on dispose de deux systèmes de coordonnées $\vec{\varphi}_1 : U_1 \rightarrow S$ et $\vec{\varphi}_2 : U_2 \rightarrow S$ (avec U_1, U_2 ouverts de \mathbb{R}^m espaces des paramètres).

Un point $\vec{x} \in S$ s'écrit donc des deux manières $\vec{x} = \vec{\varphi}_1(\vec{q}_1) = \vec{\varphi}_2(\vec{q}_2)$.

Notons $(\vec{e}_{i;\alpha}(\vec{x}) = (d\vec{\varphi}_\alpha(\vec{q}_\alpha) \cdot \vec{E}_i)_{i=1,\dots,m})$ la base du système de coordonnées $\vec{\varphi}_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$, toujours avec $(\vec{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ la base canonique de \mathbb{R}^m et $\vec{x} = \vec{\varphi}_\alpha(\vec{q}_\alpha)$.

Exercice 2.30 Soit $\vec{\chi} : \vec{q}_2 \in U_2 \rightarrow \vec{\chi}(\vec{q}_2) = \vec{q}_1 \in U_1$ le difféomorphisme de changement de paramètres, avec donc $\vec{\varphi}_2 = \vec{\varphi}_1 \circ \vec{\chi}$. N.B. : on note souvent $\vec{\chi} = \vec{q}_1$ c'est à dire :

$$\vec{\chi}(\vec{q}_2) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{q}_1(\vec{q}_2).$$

Soit $P(\vec{x})$ la matrice de changement de base de $(\vec{e}_{i;1}(\vec{x}))$ vers $(\vec{e}_{i;2}(\vec{x}))$ (pour chaque \vec{x} donné), i.e. :

$$\vec{e}_{j;2}(\vec{x}) = \sum_i P_j^i(\vec{x}) \vec{e}_{i;1}(\vec{x}),$$

c'est à dire la colonne j de $P(\vec{x})$ donne les composantes de $\vec{e}_{j;2}(\vec{x})$ dans la base $(\vec{e}_{i;1}(\vec{x}))$.

Avec $\vec{\chi}(\vec{q}_1) = \sum_i \chi^i(\vec{q}_1) \vec{E}_i$, montrer que :

$$P_j^i(\vec{x}) = \frac{\partial \chi^i}{\partial q_2^j}(\vec{q}_2) \quad (\text{noté } \frac{\partial q_1^i}{\partial q_2^j}(\vec{q}_2)), \tag{2.41}$$

c'est à dire $P(\vec{x}) = [d\vec{\chi}(\vec{q}_2)]$ est la matrice de l'application linéaire $d\vec{\chi}(\vec{q}_2)$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n (au point $\vec{x} = \vec{\varphi}_2(\vec{q}_2)$).

On appliquera les résultats au cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, $\vec{\varphi}_1 = I$ les coordonnées cartésiennes et $\vec{\varphi}_2$ les coordonnées polaires.

Réponse. C'est un résultat générique pour un changement de variables. Ici on a $d\vec{\chi}(\vec{q}_2) \cdot \vec{E}_j = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial q_2^j}(\vec{q}_2) = \sum_i \frac{\partial \chi^i}{\partial q_2^j}(\vec{q}_2) \vec{E}_i$, et $\vec{e}_{i;\alpha}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{\varphi}_\alpha(\vec{q}_\alpha) \cdot \vec{E}_i = \frac{\partial \vec{\varphi}_\alpha}{\partial q_\alpha^i}(\vec{q}_\alpha)$.

Comme $\vec{\varphi}_2 = \vec{\varphi}_1 \circ \vec{\chi}$, on a $d\vec{\varphi}_2(\vec{q}_2) = d\vec{\varphi}_1(\vec{q}_1) \circ d\vec{\chi}(\vec{q}_2)$, et donc :

$$\vec{e}_{j;2}(\vec{x}) = d\vec{\varphi}_2(\vec{q}_2) \cdot \vec{E}_j = d\vec{\varphi}_1(\vec{q}_1) \cdot (d\vec{\chi}(\vec{q}_2) \cdot \vec{E}_j) = \sum_i \frac{\partial \chi^i}{\partial q^j}(\vec{q}_2) d\vec{\varphi}_1(\vec{q}_1) \cdot \vec{E}_i = \sum_i \frac{\partial \chi^i}{\partial q^j}(\vec{q}_2) \vec{e}_{i;1}(\vec{x}).$$

On a donc bien $P_j^i(\vec{x}) = \frac{\partial \chi^i}{\partial q^j}(\vec{q}_2)$.

Si $\vec{\varphi}_1 = I$ (coordonnées cartésiennes) et $\vec{\varphi}_2$ les coordonnées polaires, on a $\vec{q}_1 = \vec{x}$ et $\vec{q}_2 = (r, \theta)$ avec $\vec{\chi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} x = \chi^1(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = \chi^2(r, \theta) = r \sin \theta \end{pmatrix}$. Et $P = [d\vec{\chi}(r, \theta)] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires (c'est à dire de la base canonique vers la base polaire). ■

Exercice 2.31 Suite. Montrer que, pour tout i, j :

$$d\vec{e}_{j;2} \cdot \vec{e}_{i;2} = \sum_{\ell m} P_j^\ell P_i^m d\vec{e}_{\ell;1} \cdot \vec{e}_{m;1} + \sum_k \frac{\partial^2 \chi^k}{\partial q_2^i \partial q_2^j} \vec{e}_{k;1}. \quad (2.42)$$

(On peut remplacer $\frac{\partial^2 \chi^k}{\partial q_2^i \partial q_2^j}$ par $\frac{\partial P_j^k}{\partial q_2^i}$ ou par $\frac{\partial P_i^k}{\partial q_2^j}$, correspondant au hessien de χ^k , mais on perd alors la visualisation de la symétrie en i, j .)

Ici les notations sont abusives au sens où toutes les quantités sont prises en \vec{x} sauf $\frac{\partial^2 \chi^k}{\partial q_2^i \partial q_2^j}$ qui prend ses valeurs en $\vec{q}_2 = \vec{\varphi}_2^{-1}(\vec{x})$. (2.42) s'écrit également :

$$\sum_k \Gamma_{ij;2}^k \vec{e}_{k;2} = \sum_\alpha \left(\sum_{\ell m} P_j^\ell P_i^m \Gamma_{\ell m;1}^\alpha + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial q_2^i \partial q_2^j} \right) \vec{e}_{\alpha;1}, \quad (2.43)$$

et donne, avec $\vec{e}_{\alpha;1} = \sum_k Q_\alpha^k \vec{e}_{k;2}$ où $Q = P^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij;2}^k &= \sum_\alpha \left(\sum_{\ell m} P_j^\ell P_i^m \Gamma_{\ell m;1}^\alpha + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial q_2^i \partial q_2^j} \right) Q_\alpha^k \\ &= \sum_\alpha \left(\sum_{\ell m} \frac{\partial q_1^\ell}{\partial q_2^i} \frac{\partial q_1^m}{\partial q_2^j} \Gamma_{\ell m;1}^\alpha + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial q_2^i \partial q_2^j} \right) \frac{\partial q_2^k}{\partial q_1^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

On appliquera les résultats au cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, $\vec{\varphi}_1 = I$ les coordonnées cartésiennes et $\vec{\varphi}_2$ les coordonnées polaires.

Réponse. On a $\vec{e}_{j;2} = \sum_k P_j^k \vec{e}_{k;1}$, d'où $d\vec{e}_{j;2} \cdot \vec{e}_{i;2} = \sum_k (dP_j^k \cdot \vec{e}_{i;2}) \vec{e}_{k;1} + \sum_k P_j^k (d\vec{e}_{k;1} \cdot \vec{e}_{i;2})$.

On a $P_j^k(\vec{x}) = \frac{\partial \chi^k}{\partial q^j}(\vec{q}_2)$, avec $\vec{q}_2 = \vec{\varphi}_2^{-1}(\vec{x})$, d'où $dP_j^k(\vec{x}) = d\frac{\partial \chi^k}{\partial q^j}(\vec{q}_2) \cdot d\vec{\varphi}_2^{-1}(\vec{x})$, d'où $dP_j^k(\vec{x}) \cdot \vec{e}_{i;2}(\vec{x}) = d\frac{\partial \chi^k}{\partial q^j}(\vec{q}_2) \cdot (d\vec{\varphi}_2^{-1}(\vec{x}) \cdot \vec{e}_{i;2}(\vec{x})) = d\frac{\partial \chi^k}{\partial q^j}(\vec{q}_2) \cdot \vec{E}_i = \frac{\partial^2 \chi^k}{\partial q_2^i \partial q_2^j}(\vec{q}_2)$.

On a $d\vec{e}_{k;1} \cdot \vec{e}_{i;2} = \sum_\ell P_i^\ell d\vec{e}_{k;1} \cdot \vec{e}_{\ell;1}$. D'où en sommant les deux résultats on obtient (2.42).

D'où immédiatement (2.43), d'où (2.44).

En particulier, si $\vec{\varphi}_1 = I$ et $\vec{\varphi}_2$ est le système polaire, on obtient $\Gamma_{ij;2}^k = \sum_\ell \frac{\partial^2 q_1^\ell}{\partial q_2^i \partial q_2^j} \frac{\partial q_2^k}{\partial q_1^\ell}$: on remarque donc que les symboles de Christoffel en polaires ne sont pas nuls, bien qu'ils le soient en cartésien : ces symboles ne peuvent donc pas être les composantes d'un tenseur puisqu'ils ne satisfont pas aux formules de changement de base. ■

3 Métrique et système de coordonnées

3.1 Définition

Définition 3.1 Dans S variété de dimension m dans \mathbb{R}^n , une métrique riemannienne est un champ de tenseurs $g \in T_2^0(S)$ qui est symétrique défini positif. I.e. c'est une application $g : \vec{x} \in S \rightarrow g(\vec{x}) = \text{noté } g_{\vec{x}} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ qui est C^∞ telle que $g_{\vec{x}}$ définit un produit scalaire dans \mathbb{R}^n (forme bilinéaire symétrique définie positive). I.e. $g_{\vec{x}}$ est bilinéaire et vérifie $g_{\vec{x}}(\vec{v}, \vec{w}) = g_{\vec{x}}(\vec{w}, \vec{v})$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, et $g_{\vec{x}}(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ pour tout $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Définition 3.2 La métrique euclidienne sur S est la métrique riemannienne telle que $g_{\vec{x}}$ est le produit scalaire euclidien $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ restreint à TS . Autrement dit $g_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x}), \vec{w}(\vec{x})) = \stackrel{\text{déf}}{=} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{w}(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS$.

Soit un système de coordonnées $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$, de base $(\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}))_{i=1, \dots, m}$ et de base duale $(e^i(\vec{x}) = dq^i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$.

En un point \vec{x} de S , une métrique est un produit scalaire dans $TS_{\vec{x}}$. On notera $g(\vec{x}) = g_{\vec{x}}$ de produit scalaire (cette métrique en \vec{x}) :

$$g_{\vec{x}} = \sum_{ij} g_{ij}(\vec{x}) e^i(\vec{x}) \otimes e^j(\vec{x}) \quad \text{où donc} \quad g_{\vec{x}}(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})) = g_{ij}(\vec{x}), \quad (3.1)$$

soit :

$$g = \sum_{ij} g_{ij} e^i \otimes e^j \quad \text{avec} \quad g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij}. \quad (3.2)$$

Donc pour $\vec{v} = \sum_i v^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x})$ et $\vec{w} = \sum_i w^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x})$ (expression sur la base du système de coordonnées) on a :

$$g_{\vec{x}}(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{ij} g_{ij}(\vec{x}) v^i(\vec{x}) w^j(\vec{x}) = [\vec{v}]^T \cdot [g_{\vec{x}}] \cdot [\vec{w}].$$

Remarque 3.3 En général la métrique euclidienne sur S n'est pas le push-forward de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^m restreinte à U . En effet, par définition du pull-back de $g(\cdot, \cdot)$ on a :

$$(\vec{\varphi}^* g)(\vec{q})(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = g(\vec{x})(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})) = g_{ij}(\vec{x}) \neq \delta_{ij},$$

et donc $(\vec{\varphi}^* g)$ n'est pas la métrique euclidienne dans U . Sauf si $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ est une b.o.n. indépendamment de \vec{x} pour la métrique $g(\cdot, \cdot)$, ce qui n'est pas le cas pour la surface = le cercle dans \mathbb{R}^n ou bien = la sphère dans \mathbb{R}^3 (dans ces cas la base du système n'est pas normée). ■

Exemple 3.4 La métrique euclidienne dans \mathbb{R}^n est donnée dans le système cartésien usuel par :

$$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n} = g_{\vec{x}} = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i, \quad [g_{ij}] = I,$$

où (dx^i) est la base duale de la base canonique (\vec{E}_i) , et dans ce cas $g_{ij}(\vec{x}) = (\vec{E}_i, \vec{E}_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}$ est indépendant de \vec{x} . ■

Exemple 3.5 Dans \mathbb{R}^2 , la métrique euclidienne s'exprime en coordonnées polaires comme :

$$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2} = g_{\vec{x}} = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta, \quad [g_{ij}(\vec{x})] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

L'expression dans la base des polaires est obtenue en calculant les $g_{\vec{x}}(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x}))$, ou bien en appliquant les formules de changement de base $[g]_{\text{new}} = P^T \cdot [g]_{\text{old}} \cdot P$ des formes bilinéaires, où P est la matrice de passage $P = [d\vec{\varphi}(r, \theta)] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$. ■

Exemple 3.6 Sur le cercle de \mathbb{R}^2 , la métrique euclidienne s'exprime en coordonnées polaires comme :

$$g_{\vec{x}} = r^2 d\theta \otimes d\theta, \quad [g_{ij}] = [g_{11}] = (r^2),$$

puisque $(\vec{e}_2(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x}))_{\mathbb{R}^2} = r^2$. ■

Exemple 3.7 Dans \mathbb{R}^3 , la métrique euclidienne s'exprime en coordonnées sphériques comme :

$$g_{\vec{x}} = dr \otimes dr + r^2 \cos^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + r^2 d\varphi \otimes d\varphi, \quad [g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

■

Exemple 3.8 Sur la surface de la sphère de \mathbb{R}^3 , la métrique euclidienne s'exprime en coordonnées sphériques comme :

$$g_{\vec{x}} = r^2 \cos^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + r^2 d\varphi \otimes d\varphi, \quad [g_{ij}] = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

■

Exercice 3.9 Exprimer dans \mathbb{R}^3 , à l'aide des coordonnées sphériques, la différentielle dg de la métrique (3.4).

Réponse. On a $dg \in T_3^0(\mathbb{R}^3)$ défini par les $dg.\vec{v} \in T_2^0(\mathbb{R}^3)$ donnés par, avec (3.4) :

$$\begin{aligned} dg.\vec{v} &= (d^2 r.\vec{v}) \otimes dr + dr \otimes (d^2 r.\vec{v}) \\ &+ [2r \cos^2 \varphi (dr.\vec{v}) - r^2 \sin \varphi \cos \varphi (d\varphi.\vec{v})]d\theta \otimes d\theta + r^2 \cos^2 \varphi ((d^2 \theta.\vec{v}) \otimes d\theta + d\theta \otimes (d^2 \theta.\vec{v})) \\ &+ 2r(dr.\vec{v})d\varphi \otimes d\varphi + r^2((d^2 \varphi.\vec{v}) \otimes d\varphi + d\varphi \otimes (d^2 \varphi.\vec{v})). \end{aligned}$$

Et on a $dg.\vec{e}_1 = \vec{0} = dg.\vec{e}_2 = dg.\vec{e}_3$, en utilisant les symboles de Christoffel, c'est à dire $dg = 0$.

C'était de fait évident, car c'est la différentielle de la métrique euclidienne qui est constante donc de différentielle nulle : $dg = 0$. \blacksquare

3.2 Connexion sur les métriques : première approche

Dans le cas $m = n$, on pose $\nabla = d$ opérateur de dérivation. Dans le cas $m \leq n$:

Définition 3.10 Connaissant (2.31), si $\alpha, \beta \in T_1^0(S)$ sont deux formes différentielles sur S , on définit la dérivée covariante de $\alpha \otimes \beta \in T_2^0(S)$ dans la direction \vec{v} par (formule de Leibniz de dérivation d'un produit) :

$$\nabla(\alpha \otimes \beta).\vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} (\nabla\alpha.\vec{v}) \otimes \beta + \alpha \otimes (\nabla\beta.\vec{v}) \stackrel{\text{noté}}{=} \nabla_{\vec{v}}(\alpha \otimes \beta). \quad (3.6)$$

et la dérivée sur S est notée :

$$\nabla(\alpha \otimes \beta) = (\nabla\alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\nabla\beta). \quad (3.7)$$

Et si $T \in T_2^0(S)$ est somme de tenseurs élémentaires, $T = \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \otimes \beta_j$, alors ∇T est défini par linéarité (donc $\nabla T \in T_3^0(S)$) :

$$\nabla T.\vec{v} = \sum_{i,j=1}^m \nabla(\alpha_i \otimes \beta_j).\vec{v} \stackrel{\text{noté}}{=} \nabla_{\vec{v}} T. \quad (3.8)$$

3.3 Connexion sur les métriques dans une base

Soit un système de coordonnées $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$ et de base duale $(e^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$. On a en particulier, avec (2.37), pour tout $i, j, k = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \nabla(e^i \otimes e^j).\vec{e}_k &\stackrel{\text{noté}}{=} \nabla_{\vec{e}_k}(e^i \otimes e^j) \stackrel{\text{déf}}{=} (\nabla_{\vec{e}_k} e^i) \otimes e^j + e^i \otimes (\nabla_{\vec{e}_k} e^j) \\ &= - \sum_{\ell=1}^m \Gamma_{i\ell}^k e^\ell \otimes e^j - \sum_{\ell=1}^m \Gamma_{j\ell}^k e^i \otimes e^\ell. \end{aligned} \quad (3.9)$$

D'où, $T \in T_2^0(S)$ étant de la forme $T = \sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes e^j$, on a :

$$\nabla_{\vec{v}} T \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{ij} (dT_{ij}.\vec{v}) e^i \otimes e^j + \sum_{ij} T_{ij} \nabla_{\vec{v}}(e^i \otimes e^j). \quad (3.10)$$

Cette définition est en particulier applicable aux métriques $T = g$. Ainsi par exemple pour $k = 1, \dots, m$:

$$\nabla g.\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} e^i \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{ij} \Gamma_{k\ell}^i e^\ell \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{ij} \Gamma_{k\ell}^j e^i \otimes e^\ell = \nabla_{\vec{e}_k} g, \quad (3.11)$$

soit :

$$\nabla g.\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} e^i \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{j\ell} \Gamma_{k\ell}^i e^i \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{i\ell} \Gamma_{k\ell}^j e^i \otimes e^j. \quad (3.12)$$

Et $\nabla g.\vec{v} = \sum_{k=1}^m v^k \nabla g.\vec{e}_k = \nabla_{\vec{v}} g = \sum_{k=1}^m v^k \nabla_{\vec{e}_k} g$ pour tout $\vec{v} = \sum_{k=1}^m v^k \vec{e}_k \in TS_{\vec{x}}$.

3.4 “Métrique tuée” : métrique de Killing

On se donne une métrique $g(\cdot, \cdot)$ sur S .

Définition 3.11 Dans le cas $m = n$, la métrique est tuée dans Ω ssi $dg = 0$ dans $T_3^0(\Omega)$.

Dans le cas $m \leq n$, la métrique est tuée sur S ssi :

$$\nabla g = 0 \quad (3.13)$$

dans $T_3^0(S)$.

Une métrique vérifiant cette propriété est appelée métrique de Killing.

N.B. : Wilhem Killing, mathématicien allemand du début du 20ème siècle, étudiant de Weierstrass, a donné son nom à ce type de métrique. Comme une métrique de Killing est annulée par différenciation (par définition), il est tentant de parler de métrique tuée.

Exemple 3.12 Dans \mathbb{R}^n la métrique euclidienne $g = \sum_i dx^i \otimes dx^i$ est un tenseur constant (indépendant de \vec{x}), donc toute dérivation la tue : on a $dg = 0$ (puisque $d^2x^i = 0$). ■

Proposition 3.13 Si $g(\cdot, \cdot) \in T_2^0(S)$ est la métrique euclidienne restreinte à S , alors $g(\cdot, \cdot)$ est une métrique de Killing, i.e. $\nabla g = 0$ sur S .

Preuve. Soit $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ est un système de coordonnées (donc avec $m \leq n$), de base $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, m}$. On a :

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)_{\mathbb{R}^n},$$

donc :

$$\nabla g_{ij} \cdot \vec{e}_k = (\nabla \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k, \vec{e}_j)_{\mathbb{R}^n} + (\vec{e}_i, \nabla \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{\ell=1}^m \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{jk}^\ell g_{i \ell},$$

d'où $\nabla g \cdot \vec{e}_k = 0$ avec (3.12), vrai pour tout $k = 1, \dots, m$. ■

Exemple 3.14 Vérification dans le cas des polaires et $S = C(\vec{0}, R)$ le cercle de rayon R (ici $m = 1$ et $n = 2$). La métrique euclidienne de \mathbb{R}^2 restreinte à TS est une métrique de Killing.

Ici $g_{\vec{x}}$ est défini sur $TS_{\vec{x}}$, i.e. uniquement sur $\text{Vect}\{\vec{e}_2(\vec{x})\}$. Et on a $g = g_{22} e^2 \otimes e^2 = r^2 d\theta \otimes d\theta$ et avec (3.12) où $i = j = \ell = 2$:

$$\nabla g \cdot \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial r^2}{\partial \theta} - r^2 \Gamma_{\theta\theta}^\theta - r^2 \Gamma_{\theta\theta}^\theta \right) d\theta \otimes d\theta = 0 - 0 - 0,$$

puisque $\Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0$. On a bien $\nabla g_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_2 = 0$. ■

Proposition 3.15 Soit $g \in T_2^0(S)$ une métrique. S'il existe un système de coordonnées pour lequel cette métrique est tuée, alors elle l'est dans tout système de coordonnées.

Preuve. La définition d'une métrique tuée est $\nabla g = 0$ indépendante de toute base (de toute représentation dans une base) : c'est une définition intrinsèque. Si g est une métrique, si sa différentielle ∇g vérifie $\nabla g = 0$, on a $\nabla g = 0$ quelle que soit l'expression de g dans un système de coordonnées, d'où le résultat. ■

Exemple 3.16 La métrique euclidienne de \mathbb{R}^n exprimée en polaire est une métrique de Killing (ici $m = n = 2$).

Par exemple pour la métrique euclidienne exprimée en coordonnées polaires, cf. (3.3), on a :

$$dg_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = (d^2 r \cdot \vec{v}) \otimes dr + dr \otimes (d^2 r \cdot \vec{v}) + (d(r^2) \cdot \vec{v}) d\theta \otimes d\theta + r^2 (d^2 \theta \cdot \vec{v}) \otimes d\theta + r^2 d\theta \otimes (d^2 \theta \cdot \vec{v}),$$

avec en particulier $d(r^2) = 2r dr$. En particulier on a, avec les symboles de Christoffel (2.38) :

$$dg_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_1 = 0 + 0 + 2r d\theta \otimes d\theta + r^2 \left(-\frac{1}{r}\right) d\theta \otimes d\theta + r^2 \left(-\frac{1}{r}\right) d\theta \otimes d\theta = 0,$$

et :

$$dg_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_2 = -r d\theta \otimes dr - r dr \otimes d\theta + 0 + r^2 \frac{1}{r} dr \otimes d\theta + r^2 \frac{1}{r} d\theta \otimes dr = 0.$$

Et donc pour tout \vec{v} (donc combinaison linéaire de \vec{e}_1 et \vec{e}_2) on a $dg_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = 0$. Donc la différenciation tue la métrique euclidienne, ce qu'on savait déjà, bien qu'ici la métrique euclidienne soit exprimée en polaire. ■

Exemple 3.17 Voir l'exercice 3.9. ■

3.5 Métrique de Killing et symboles de Christoffel

Soit un système de coordonnées $\vec{\varphi}$ de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ en \vec{x} , de base duale $(e^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ en \vec{x} . Soit $g(\cdot, \cdot)$ une métrique de Killing donnée (i.e. telle que $\nabla g = 0$). On note :

$$g(\vec{x}) = \sum_{i,j} g_{ij}(\vec{x}) e^i(\vec{x}) \otimes e^j(\vec{x}).$$

Proposition 3.18 Pour tout $i, j, k = 1, \dots, m$ on a :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \sum_{\ell=1}^m (g_{i\ell} \Gamma_{jk}^\ell + g_{j\ell} \Gamma_{ik}^\ell), \quad (3.14)$$

les $\Gamma_{jk}^i = e^i \cdot (\nabla \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)$ étant les symboles de Christoffel. D'où, pour tout $i, j, k = 1, \dots, m$:

$$2 \sum_{\ell=1}^m \Gamma_{ik}^\ell g_{j\ell} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}, \quad (3.15)$$

permettant de calculer les Γ_{jk}^i à l'aide des g_{ij} .

Preuve. On a $g(\vec{x}) = \sum_{ij} g_{ij}(\vec{x}) e^i(\vec{x}) \otimes e^j(\vec{x})$. D'où :

$$dg \cdot \vec{e}_k = \sum_{ij} (dg_{ij} \cdot \vec{e}_k) e^i \otimes e^j + \sum_{ij} g_{ij} (de^i \cdot \vec{e}_k) \otimes e^j + \sum_{ij} g_{ij} e^i \otimes (de^j \cdot \vec{e}_k),$$

et g étant une métrique de Killing on obtient avec (2.37) :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} e^i \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{ij} \Gamma_{k\ell}^i e^\ell \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{ij} \Gamma_{k\ell}^j e^i \otimes e^\ell \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} e^i \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{\ell j} \Gamma_{ki}^\ell e^i \otimes e^j - \sum_{ij\ell} g_{i\ell} \Gamma_{kj}^\ell e^i \otimes e^j. \end{aligned}$$

Et $(e^i \otimes e^j)$ étant une base on obtient (3.14). D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} &= \sum_{\ell=1}^n (g_{i\ell} \Gamma_{jk}^\ell + g_{j\ell} \Gamma_{ik}^\ell) + \sum_{\ell=1}^n (g_{k\ell} \Gamma_{ji}^\ell + g_{j\ell} \Gamma_{ki}^\ell) - \sum_{\ell=1}^n (g_{i\ell} \Gamma_{kj}^\ell + g_{k\ell} \Gamma_{ij}^\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^n [\Gamma_{jk}^\ell (g_{i\ell} - g_{i\ell}) + \Gamma_{ik}^\ell (g_{j\ell} + g_{j\ell}) + \Gamma_{ji}^\ell (g_{k\ell} - g_{k\ell})], \end{aligned}$$

i.e. (3.15) qui se lit également $2[L_k] \cdot [g] = [B_k]$, soit $2[L_k] = [B_k] \cdot [g]^{-1}$, où $[L_k]$ est la matrice des $(L_k)_j^i = \Gamma_{ik}^j$ pour $i, j = 1, \dots, n$ et où $[B_k]$ est la matrice des $(B_k)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ pour $i, j = 1, \dots, n$. Connaissant g on en déduit donc les Γ_{jk}^i . \blacksquare

Le corollaire suivant sera utilisé lors de l'étude des surfaces, cas $m = n-1$ et $\vec{e}_n = \vec{n}$ étant alors un vecteur normal unitaire à la surface :

Corollaire 3.19 Notons $g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} e^i \otimes e^j$ une métrique de Killing dans \mathbb{R}^n . Supposons que \vec{e}_n est normé et orthogonal à tous les autres vecteurs de base, i.e. $g_{\vec{x}}(\vec{e}_n(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})) = \delta_{nj}$ pour tout j . La matrice $[g] = [g_{ij}]$ de g est donc de la forme :

$$[g] = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{n-1,1} & \dots & g_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Comme les g_{nj} sont constants (soit = 0 soit = 1) pour tout $j = 1, \dots, n$, on a, pour tout $j, k = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial g_{nj}}{\partial q^k} = 0. \quad (3.17)$$

D'où avec $j = n$ dans (3.15) :

$$2\Gamma_{ij}^n = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^n}. \quad (3.18)$$

Exemple 3.20 Sur la sphère de \mathbb{R}^3 , soit $\vec{q} = (\theta, \varphi, r)$, et soit le système de coordonnées $\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{q}) = \vec{\psi}(\theta, \varphi, r) = \vec{\varphi}(r, \theta, \varphi)$ où $\vec{\varphi}$ est le système de coordonnées sphériques (1.7). Posons $\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{\psi}_{,1}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \theta}(\vec{x}) = \vec{\varphi}_{,2}(\vec{x}) = \vec{e}_2(\vec{x})$ (suivant un parallèle), $\vec{f}_2(\vec{x}) = \vec{\psi}_{,2}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \varphi}(\vec{x}) = \vec{\varphi}_{,3}(\vec{x}) = \vec{e}_3(\vec{x})$ (suivant un méridien) et $\vec{f}_3(\vec{x}) = \vec{\psi}_{,3}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial r}(\vec{x}) = \vec{\varphi}_{,1}(\vec{x}) = \vec{e}_1(\vec{x})$ (vecteur radial unitaire). La matrice de g dans cette base est $[g]_{|\vec{f}} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [g_{ij}]$, cf. exercice 3.7.

D'où (3.18) donne :

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^3} = -r \cos^2 \varphi = \Gamma_{\theta\theta}^r, \quad \Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^3} = -r = \Gamma_{\varphi\varphi}^r, \quad \Gamma_{33}^3 = 0 = \Gamma_{rr}^r,$$

et les $\Gamma_{ij}^3 = \Gamma_{ij}^r = 0$ quand $i \neq j$. Déjà vu avec (2.5) et (2.6). ▀

4 Volume

Ici $m = n$. Voir annexe A pour les déterminants.

4.1 Volume algébrique

Dans \mathbb{R}^n le volume algébrique $\tilde{\mu} \in T_n^0(\mathbb{R}^n)$ (non nécessairement positif) limité par n vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in \mathbb{R}^n$ est par définition le déterminant :

$$\tilde{\mu}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n). \quad (4.1)$$

4.2 Volume algébrique dans la base du système et jacobien

Soit $\vec{\varphi} : \vec{q} \in U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un système de coordonnées dans Ω .

Dans l'espace U des paramètres, on prend comme base la base canonique notée $(\vec{E}_i)_{i=1, \dots, m}$, de base duale notée $(dX^i)_{i=1, \dots, m}$.

Dans l'espace géométrique \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne, on se fixe une base orthonormée $(\vec{b}_i)_{i=1, \dots, n}$. On pose :

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}) = \sum_{i=1}^n \varphi^i(\vec{q}) \vec{b}_i = \begin{pmatrix} \varphi^1(\vec{q}) \\ \vdots \\ \varphi^n(\vec{q}) \end{pmatrix}_{|\vec{b}_i} = \begin{pmatrix} x^1(\vec{q}) \\ \vdots \\ x^n(\vec{q}) \end{pmatrix}_{|\vec{b}_i}. \quad (4.2)$$

Ainsi :

$$d\vec{\varphi}(\vec{q}) = \sum_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j}(\vec{q}) \vec{b}_j \otimes dX^i = \left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} \right]_{|\vec{E}, \vec{b}} \stackrel{\text{noté}}{=} [(P_{\vec{x}})_j^i], \quad (4.3)$$

et $[P_{\vec{x}}] = [d\vec{\varphi}(\vec{q})] = \left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j}(\vec{q}) \right] = [P_j^i]$ est la matrice jacobienne de $\vec{\varphi}$ en \vec{q} relativement aux bases (\vec{E}_i) et (\vec{b}_i) .

La base du système est $(\vec{e}_j(\vec{x}))_{j=1, \dots, n}$ où :

$$\vec{e}_j(\vec{x}) = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j}(\vec{q}) \vec{b}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial q^j}(\vec{q}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial q^j}(\vec{q}) \end{pmatrix}_{|\vec{b}_i}, \quad (4.4)$$

et les composantes de $\vec{e}_j(\vec{x})$ sont données par la j -ème colonne de $[P_{\vec{x}}]$. (Autrement dit c'est la matrice de l'endomorphisme $P_{\vec{x}} = \sum_{ij} P_j^i \vec{b}_i \otimes b^j$ de \mathbb{R}^n qui fait passer de la base (\vec{b}_i) à la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$: on a $P_{\vec{x}} \cdot \vec{b}_j = \sum_i P_j^i \vec{b}_i = \vec{e}_j(\vec{x})$.)

Et la base duale est $(e^i(\vec{x}))_{i=1, \dots, n}$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$.

Ainsi, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, le jacobien de $\vec{\varphi}$ en \vec{q} :

$$J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \det[d\vec{\varphi}(\vec{q})] = \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_n(\vec{x})) = \det(P_{\vec{x}}) \quad (4.5)$$

est le volume limit\u00e9 par les vecteurs $\vec{e}_i(\vec{x})$. Le calcul matriciel redonne ce r\u00e9sultat puisque :

$$\det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_n(\vec{x})) = \det(d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_1, \dots, d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_n) = \det(d\vec{\varphi}(\vec{q})) \det(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n),$$

et $\det(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n) = 1$ est le volume limit\u00e9 par les vecteurs de la base canonique.

Soit n vecteurs \vec{w}_j , $j = 1, \dots, n$. On note β_j^i et $w_j^i(\vec{x})$ les composantes des \vec{w}_j respectivement dans les bases (\vec{b}_i) et $(\vec{e}_i(\vec{x}))$:

$$\vec{w}_j = \sum_i \beta_j^i \vec{b}_i = \sum_i w_j^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x}), \quad (4.6)$$

o\u00f9 donc $w_j^i(\vec{x}) = dq^i(\vec{x}) \cdot \vec{w}_j$. On note :

$$[W_{\vec{x}}] = [w_j^i(\vec{x})] = ([\vec{w}_1]_{|\vec{e}(\vec{x})} \quad \dots \quad [\vec{w}_n]_{|\vec{e}(\vec{x})}) \quad (4.7)$$

la matrice dont les colonnes sont les composantes des \vec{w}_j dans la base du syst\u00e8me. On a en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$\begin{aligned} \vec{w}_j &= \sum_k w_j^k(\vec{x}) \vec{e}_k(\vec{x}) = \sum_k w_j^k(\vec{x}) d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_k = \sum_{ki} w_j^k(\vec{x}) \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k}(\vec{q}) \vec{b}_i \\ &= \sum_i ([d\vec{\varphi}(\vec{q})][W_{\vec{x}}])_j^i \vec{b}_i \quad (= \sum_i \beta_j^i \vec{b}_i), \end{aligned} \quad (4.8)$$

d'o\u00f9 $\beta_j^i = ([d\vec{\varphi}(\vec{q})][W_{\vec{x}}])_j^i$, d'o\u00f9 :

$$[\beta_j^i] = [d\vec{\varphi}(\vec{q})][W_{\vec{x}}],$$

et donc :

$$\det[\beta_j^i] = \det[d\vec{\varphi}(\vec{q})] \det[W_{\vec{x}}] = J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) \det[W_{\vec{x}}]. \quad (4.9)$$

Et (\vec{b}_i) \u00e9tant une b.o.n. pour la m\u00e9trique euclidienne, on a $\tilde{\mu}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = \det[\beta_j^i]$ (volume limit\u00e9 par les \vec{w}_j). D'o\u00f9 :

Proposition 4.1 *Le volume $\tilde{\mu}_{\vec{x}}$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$ exprim\u00e9 en dans la base du syst\u00e8me de coordonn\u00e9es est donn\u00e9 par, pour tout $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{w}_j = \sum_i w_j^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x})$:*

$$\tilde{\mu}_{\vec{x}}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) \det[w_j^i(\vec{x})]. \quad (4.10)$$

En particulier on retrouve :

$$\tilde{\mu}(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_n(\vec{x})) = J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) \quad (4.11)$$

est le volume limit\u00e9 par les vecteurs de base du syst\u00e8me.

4.3 Volume alg\u00e8bre dans la base du syst\u00e8me et m\u00e9trique

Proposition 4.2 *Soit $g(\cdot, \cdot)$ la m\u00e9trique euclidienne exprim\u00e9e dans la base du syst\u00e8me :*

$$g_{\vec{x}} = \sum_{ij} g_{ij}(\vec{x}) dq^i(\vec{x}) \otimes dq^j(\vec{x}), \quad (4.12)$$

et :

$$[g_{\vec{x}}] = [g_{\vec{x}}(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x}))] = [g_{ij}(\vec{x})] \quad (4.13)$$

la matrice de $g(\cdot, \cdot)$ dans cette base. Quand $J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) = \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_n(\vec{x})) > 0$, i.e. quand la base du syst\u00e8me en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$ est directe, on a :

$$J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) = \sqrt{\det[g_{\vec{x}}]} \quad (4.14)$$

Et l'\u00e9l\u00e9ment de volume en \vec{x} s'\u00e9crit :

$$\tilde{\mu}_{\vec{x}} = \sqrt{\det[g_{\vec{x}}]} dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^n(\vec{x}),$$

soit encore :

$$\tilde{\mu}_{\vec{x}}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = \sqrt{\det[g_{\vec{x}}]} \det[w_j^i(\vec{x})], \quad \text{quand} \quad \vec{w}_j = \sum_i w_j^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x}), \quad (4.15)$$

i.e. quand les $w_j^i(\vec{x})$ sont les composantes des \vec{w}_j dans la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ du syst\u00e8me.

Preuve. On a $[d\vec{\varphi}(\vec{q})]$ matrice jacobienne de $\vec{\varphi}$ dont les colonnes sont les composantes des $\vec{e}_j(\vec{x})$ dans une base orthonormée $B = (\vec{b}_i)$. Donc : $(\det[d\vec{\varphi}(\vec{q})])^2 = \det[d\vec{\varphi}(\vec{q})]^T \cdot \det[d\vec{\varphi}(\vec{q})] = \det([d\vec{\varphi}(\vec{q})]^T \cdot [d\vec{\varphi}(\vec{q})]) = \det([\vec{e}_i(\vec{x})]_{\vec{b}}^T \cdot [\vec{e}_j(\vec{x})]_{\vec{b}}) = \det([\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})]_{\mathbb{R}^n})$ où $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ est le produit scalaire euclidien, et par hypothèse $g_{ij} = g_{\vec{x}}(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})) = (\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n}$ puisque $g(\cdot, \cdot)$ est la métrique euclidienne. \blacksquare

Exemple 4.3 En polaire $[g_{\vec{x}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, et $J_{\vec{q}} = \sqrt{\det[g_{\vec{x}}]} = r$, et donc le volume limité par $\vec{v}_1 = v_1^1 \vec{e}_1(\vec{x}) + v_1^2 \vec{e}_2(\vec{x})$ et $\vec{v}_2 = v_2^1 \vec{e}_1(\vec{x}) + v_2^2 \vec{e}_2(\vec{x})$ est donné par

$$\tilde{\mu}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = r \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix},$$

ce qu'on vérifie immédiatement : ici $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = r$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, la base $(\vec{e}_1, \frac{\vec{e}_2}{r})$ est orthonormée, donc $\vec{v}_1 = v_1^1 \vec{e}_1 + v_1^2 \vec{e}_2 = v_1^1 (\vec{e}_1) + r v_1^2 (\frac{\vec{e}_2}{r})$, idem pour \vec{v}_2 , et donc $\tilde{\mu}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ r v_1^2 & r v_2^2 \end{pmatrix}$. \blacksquare

4.4 Volume algébrique et pull-back

On considère le tenseur volume algébrique $\tilde{\mu} \in T_n^0(\Omega)$ défini en (4.1).

Par définition du pull-back d'un tenseur, ici $(\vec{\varphi}^* \tilde{\mu} \in T_n^0(U))$ pull-back du tenseur "élément de volume" $\tilde{\mu}$, on a $(\vec{\varphi}^* \tilde{\mu})(\vec{q}) \in T_n^0 \mathbb{R}^n_{\vec{q}}$ défini par, pour tout $\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_n \in T \mathbb{R}^n_{\vec{q}}$:

$$\begin{aligned} (\vec{\varphi}^* \tilde{\mu})(\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_n) &= \tilde{\mu}_{\vec{x}}((\vec{\varphi}_* \vec{W}_1)(\vec{x}), \dots, (\vec{\varphi}_* \vec{W}_n)(\vec{x})) \\ &= \tilde{\mu}_{\vec{x}}(d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{W}_1, \dots, d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{W}_n) \\ &= \det(d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{W}_1, \dots, d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{W}_n) \\ &= J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) \det(\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_n). \end{aligned} \quad (4.16)$$

puisque $(\vec{\varphi}_* \vec{W}_j)(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{W}_j \in T \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ est le push-forward de \vec{W}_j .

Dans U l'espace des paramètres \vec{q} notons $d\tilde{V}$ l'élément de volume algébrique, avec donc, pour tout $\vec{W}_i \in T \mathbb{R}^n_{\vec{q}}$:

$$d\tilde{V}(\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_n) = \det(\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_n). \quad (4.17)$$

Donc (4.16) donne dans $T_n^0(U)$:

$$J_{\vec{\varphi}} d\tilde{V} = \vec{\varphi}^* \tilde{\mu}, \quad (4.18)$$

i.e. le pull-back de l'élément de volume $\tilde{\mu}$ (en \vec{x}) par $\vec{\varphi}$ est $J d\tilde{V}$ (en \vec{q}). Soit encore, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$\vec{\varphi}^* \tilde{\mu}(\vec{q}) = J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) d\tilde{V} = \sqrt{\det[g_{\vec{x}}]} d\tilde{V}, \quad (4.19)$$

quand $J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) = \det[d\vec{\varphi}(\vec{q})] > 0$. D'où :

Définition 4.4 On définit la métrique $C^b \in T_0^2(U)$ comme étant le pull-back de la métrique euclidienne $g(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$:

$$C^b \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\varphi}^* g, \quad (4.20)$$

i.e. pour tout $\vec{q} \in U$, avec $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$ et $\vec{w}_i = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{W}_i$ push-forward de \vec{W}_i :

$$C^b_{\vec{q}}(\vec{W}_1, \vec{W}_2) \stackrel{\text{déf}}{=} g_{\vec{x}}(\vec{w}_1, \vec{w}_2). \quad (4.21)$$

On obtient :

Proposition 4.5 $C^b = \vec{\varphi}^* g \in T_0^2(U)$ est une métrique sur U , et :

$$\vec{\varphi}^* \tilde{\mu}(\vec{q}) = \sqrt{\det[C^b(\vec{q})]} \det = \sqrt{\det[(\vec{\varphi}^* g)(\vec{q})]} \det, \quad (4.22)$$

défini un forme multilinéaire alternée qui permet de calculer le volume géométrique $\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ dans Ω en effectuant le calcul "sur la configuration de référence U ".

Preuve. $C^b_{\vec{q}}$ est trivialement un produit scalaire, $\vec{\varphi}$ étant un difféomorphisme. Et on a (4.19). \blacksquare

4.5 Volume positif

Définition 4.6 Le volume (positif) limité par n vecteurs est donné par la valeur absolue du déterminant de ces vecteurs :

$$dv_{\vec{x}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = |\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)|.$$

N.B. : la valeur absolue du jacobien sert à tenir compte d'un changement éventuel d'orientation de la base (même orientation si le jacobien $\det(d\vec{\varphi}(\vec{q})) > 0$ et orientation opposée sinon), le volume (positif) d'un domaine étant toujours positif (ou nul), donc indépendant de l'orientation choisie. Voir cours d'intégration.

La formule de changement de base dans les intégrales est :

$$\int_{\vec{x} \in \Omega} f(\vec{x}) dx^1 \dots dx^n = \int_{\vec{q} \in U} f(\vec{\varphi}(\vec{q})) |J_{\vec{\varphi}}(\vec{q})| dq^1 \dots dq^n, \quad (4.23)$$

le volume d'un domaine Ω étant donné par le cas $f = 1$.

5 Normale à une surface

Soit $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface régulière. La métrique $g(\cdot, \cdot)$ choisie sur S est la métrique euclidienne (permettant le calcul des volumes usuels), métrique qui sera souvent exprimée dans la base du système. La base dans U sera la base canonique de \mathbb{R}^{n-1} .

5.1 Forme normale

L'espace tangent $TS_{\vec{x}}$ à la surface en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$ est engendré par les vecteurs tangents, pour $i = 1, \dots, n-1$:

$$\vec{e}_i(\vec{x}) = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i, \quad (5.1)$$

ces vecteurs étant indépendants puisque $\vec{\varphi}$ est une surface régulière.

Définition 5.1 La forme normale en \vec{x} à la surface $\vec{\varphi}$ est la forme linéaire :

$$\ell_{\vec{x}} : \vec{v} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \ell_{\vec{x}}(\vec{v}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}), \vec{v}). \quad (5.2)$$

($\ell_{\vec{x}}$ est linéaire car le déterminant est une forme multilinéaire et l'usage du déterminant impose la métrique euclidienne dans \mathbb{R}^n .)

La forme normale à la surface $\vec{\varphi}$ est la forme différentielle $\ell \in T_1^0(S)$ définie par $\ell(\vec{x}) = \ell_{\vec{x}}$.

Proposition 5.2 La forme normale en \vec{x} est nulle sur $TS_{\vec{x}}$: elle vérifie :

$$\text{Ker} \ell_{\vec{x}} = TS_{\vec{x}}. \quad (5.3)$$

Preuve. Les $\vec{e}_i(\vec{x})$ pour $i = 1, \dots, n-1$ étant indépendants, et $\ell_{\vec{x}}$ étant donné par (5.2), $\ell_{\vec{x}}(\vec{v}) = 0$ équivaut à \vec{v} combinaison linéaire des $\vec{e}_i(\vec{x})$, i.e. $\vec{v} \in TS_{\vec{x}}$. ■

Exemple 5.3 Dans \mathbb{R}^2 et les coordonnées polaires $\vec{\varphi} : (r, \theta) \rightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$. On note

$\vec{e}_1(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta}(r, \theta) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$ les vecteurs de base du système.

Soit $S = C(\vec{0}, R)$ le cercle de rayon R (notre "surface" en 2-D), donné par $\vec{x} = \vec{\varphi}_R(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, de vecteur tangent :

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{\varphi}_R'(\theta) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{e}_2(\vec{x}).$$

La forme normale au cercle $\ell_{\vec{x}}$ étant linéaire est donnée par son image sur les vecteurs d'une base en \vec{x} . Et $(\vec{e}_1(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x}))$ est une base en \vec{x} . On a $\ell_{\vec{x}}(\vec{e}_1(\vec{x})) = \det(\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{e}_1(\vec{x})) = -R$, et $\ell_{\vec{x}}(\vec{e}_2(\vec{x})) = \det(\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x})) = 0$, d'où :

$$\ell_{\vec{x}} = -R dr(\vec{x}) \quad (5.4)$$

est la forme normale au cercle. ■

Exemple 5.4 Pour le cercle $\vec{\psi}(\theta) = \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos(-\theta) \\ R \sin(-\theta) \end{pmatrix} = \vec{\varphi}_R(-\theta)$ parcouru en sens inverse, de vecteur tangent :

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{\psi}'(\theta) = R \begin{pmatrix} \sin(-\theta) \\ -\cos(-\theta) \end{pmatrix} = -\vec{e}_2(\vec{x}).$$

On déduit $\ell_{\vec{x}}(\vec{e}_1(\vec{x})) = \det(\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{e}_1(\vec{x})) = \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x})) = R$, $\ell_{\vec{x}}(\vec{e}_2(\vec{x})) = 0$, d'où :

$$\ell_{\vec{x}} = R dr(\vec{x}). \quad (5.5)$$

(La forme normale a le signe opposé par rapport à l'exercice précédent.) ▀

Exemple 5.5 Pour un rayon $r \rightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(r, \theta_0) = \begin{pmatrix} r \cos \theta_0 \\ r \sin \theta_0 \end{pmatrix}$, le vecteur tangent en \vec{x} est :

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r}(r, \theta_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1(\vec{x}).$$

On a $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_1(\vec{x}) = \det(\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{e}_1(\vec{x})) = 0$, et $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_2(\vec{x}) = \det(\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x})) = r$, d'où :

$$\ell_{\vec{x}} = r d\theta(\vec{x}).$$

En particulier $\ell_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{\|\vec{e}_2(\vec{x})\|} = 1$ est le volume (ici l'aire en 2-D) limité par les vecteurs normaux orthogonaux $\vec{e}_1(\vec{x})$ et $\frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{\|\vec{e}_2(\vec{x})\|}$. ▀

5.2 Forme normale unitaire

On rappelle que la métrique utilisée sur S est la métrique riemannienne $g(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_g = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ dans \mathbb{R}^n , et on note $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|_g = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})_g} = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})_{\mathbb{R}^n}} = \|\vec{v}\|_{\mathbb{R}^n}$ la norme associée.

Remarque 5.6 On a tendance à écrire $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|_{\mathbb{R}^n}$ quand implicitement \vec{v} est exprimée dans la base canonique, et on a tendance à écrire $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|_g$ quand implicitement \vec{v} est exprimée dans la base du système, en particulier sur une surface où $g(\cdot, \cdot)$ est la métrique euclidienne restreinte à la surface. Auquel cas $g_{ij}(\vec{x}) = g(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})) = (\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n}$ donne les composante de $g(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ dans la base (duale) du système, et en particulier $g_{ii} = \|\vec{e}_i\|_{\mathbb{R}^n}^2$. ▀

On rappelle que la norme $\|\ell\|$ d'une forme linéaire $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$ est donnée par :

$$\|\ell\| = \sup_{\vec{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{|\ell(\vec{v})|}{\|\vec{v}\|_g}.$$

Exemple 5.7 $g(\cdot, \cdot) = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$ en coordonnées polaires, et $\|\vec{v}\|_g = \sqrt{v^1 + r^2 v^2}$ quand $\vec{v} = v^1(\vec{x})\vec{e}_1(\vec{x}) + v^2(\vec{x})\vec{e}_2(\vec{x})$. D'où $\|\ell\| = \sup_{\vec{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{|v^1(\vec{x})\alpha_1(\vec{x}) + v^2(\vec{x})\alpha_2(\vec{x})|}{\sqrt{v^1(\vec{x}) + r^2 v^2(\vec{x})}}$ quand $\alpha_i(\vec{x}) = \ell(\vec{e}_i(\vec{x}))$. ▀

Définition 5.8 $\ell_{\vec{x}}$ étant la forme linéaire normale en \vec{x} à la surface S , cf. (5.2), on appelle forme normale unitaire à la surface en \vec{x} la forme linéaire :

$$n_{\vec{x}}^b = \frac{\ell_{\vec{x}}}{\|\ell_{\vec{x}}\|} \stackrel{\text{noté}}{=} n^b(\vec{x}). \quad (5.6)$$

Ainsi $n^b \in T_1^0(S)$ est champ de formes sur S .

On a donc :

$$n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{v} = \frac{\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{v}}{\|\ell_{\vec{x}}\|},$$

pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 5.9 Si $\vec{v} \in T_{\vec{x}}S$ alors $n_{\vec{x}}^b(\vec{v}) = 0$. Et $\|n_{\vec{x}}^b\| = 1$.

Preuve. $\frac{|n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{v}}{\|\ell_{\vec{x}}\| \|\vec{v}\|}$ donne $\|n_{\vec{x}}^b\| = \frac{\|\ell_{\vec{x}}\|}{\|\ell_{\vec{x}}\|} = 1$ et $n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} \in T_{\vec{x}}S$. ▀

Exemple 5.10 Suite de l'exemple 5.3 : $\|\ell_{\vec{x}}\| = \sup_{v^1, v^2} \frac{|v^1 \ell_{\vec{x}}(\vec{e}_1(\vec{x}))|}{|(v^1)^2 + r^2 (v^2)^2|^{\frac{1}{2}}} = \sup_{v^1} \frac{|v^1 R|}{|v^1|} = R$. D'où :

$$n_{\vec{x}}^b = -dr(\vec{x}). \quad (5.7)$$

au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(R, \theta)$. ▀

Exemple 5.11 Suite de l'exemple 5.4 :

$$n_{\vec{x}}^b = dr(\vec{x}). \quad (5.8)$$

au point $\vec{x} = \vec{\psi}(\theta) = \vec{\varphi}(R, -\theta)$. ▀

Exemple 5.12 Suite de l'exemple 5.5 : $\|\ell_{\vec{x}}\| = \sup_{v^1, v^2} \frac{|v^2 \ell_{\vec{x}}(\vec{e}_2(\vec{x}))|}{|(v^1)^2 + r^2 (v^2)^2|^{\frac{1}{2}}} = \sup_{v^2} \frac{|v^2 R|}{|Rv^2|} = 1 = \ell \cdot \frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{\|\vec{e}_2(\vec{x})\|}$. D'où :

$$n_{\vec{x}}^b = \ell_{\vec{x}} = r d\theta(\vec{x}), \quad (5.9)$$

au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(r, \theta_0)$. ▀

5.3 Vecteur normal unitaire

En un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, disposant d'un produit scalaire $g_{\vec{x}}(\cdot, \cdot)$ dans \mathbb{R}^n , à l'aide du théorème de représentation de Riesz, la forme linéaire $\ell_{\vec{x}}$ (resp. $n_{\vec{x}}^b$) peut être représentée par un vecteur $\vec{\lambda}_{\vec{x}}$ (resp. $\vec{n}_{\vec{x}}$) :

$$\begin{aligned} \exists! \vec{\lambda}_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \ell_{\vec{x}}(\vec{v}) &= (\vec{\lambda}_{\vec{x}}, \vec{v})_{g_{\vec{x}}} && \text{avec} && \|\vec{\lambda}_{\vec{x}}\|_{g_{\vec{x}}} = \|\ell_{\vec{x}}\|, \\ \exists! \vec{n}_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad n_{\vec{x}}^b(\vec{v}) &= (\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{v})_{g_{\vec{x}}} && \text{avec} && \|\vec{n}_{\vec{x}}\|_{g_{\vec{x}}} = 1 (= \|n_{\vec{x}}^b\|). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Proposition 5.13 et définition. $\vec{n} \in TS$ (est un champ de vecteurs sur S) qui vérifie :

$$\vec{n}_{\vec{x}} = \frac{\vec{\lambda}_{\vec{x}}}{\|\vec{\lambda}_{\vec{x}}\|_g} \quad \text{et} \quad n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{n}_{\vec{x}} = g_{\vec{x}}(\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{n}_{\vec{x}}) = 1 \quad (= (\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{n}_{\vec{x}})_{g_{\vec{x}}} = \|\vec{n}_{\vec{x}}\|_g^2).$$

Et :

$$\forall \vec{v} \in TS_{\vec{x}}, \quad (\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{v})_{g_{\vec{x}}} = 0.$$

Les vecteurs $\vec{\lambda}_{\vec{x}}$ et $\vec{n}_{\vec{x}}$ sont normaux à la surface S en \vec{x} , et $\vec{n}_{\vec{x}}$ est appelé vecteur normal unitaire à la surface $\vec{\varphi}$ en \vec{x} .

Et $\vec{n}_{\vec{x}}$ est tel que la base $(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}), \vec{n}_{\vec{x}})$ est une base directe, i.e. tel que :

$$\det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}), \vec{n}_{\vec{x}}) > 0. \quad (5.11)$$

(Le volume algébrique limité par les vecteurs de la base est positif.)

Preuve. On a $g(\vec{n}_{\vec{x}} - \frac{\vec{\lambda}_{\vec{x}}}{\|\vec{\lambda}_{\vec{x}}\|_g}, \vec{v}) = n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{v} - \frac{\ell_{\vec{x}}(\vec{v})}{\|\ell_{\vec{x}}\|} = 0$ pour tout $\vec{v} \in TS_{\vec{x}}$, par bilinéarité de $g(\cdot, \cdot)$ et définition de $n_{\vec{x}}^b$. Donc $\vec{n}_{\vec{x}} = \frac{\vec{\lambda}_{\vec{x}}}{\|\vec{\lambda}_{\vec{x}}\|_g}$. Donc $n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{n}_{\vec{x}} = 1 = g(\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{n}_{\vec{x}})$ est donné par le théorème de Riesz (ou bien calcul : $g(\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{n}_{\vec{x}}) = \frac{1}{\|\vec{\lambda}_{\vec{x}}\|_g^2} g(\vec{\lambda}_{\vec{x}}, \vec{\lambda}_{\vec{x}}) = 1$).

Puis pour $\vec{v} \in TS_{\vec{x}}$ on a $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = 0 = \|\ell_{\vec{x}}\| n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{v}$, d'où $n_{\vec{x}}^b \cdot \vec{v} = 0 = (\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{v})_{g_{\vec{x}}}$.

Puis $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{\lambda}_{\vec{x}} = \|\vec{\lambda}_{\vec{x}}\|_g^2 \geq 0$, d'où $\det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}), \vec{\lambda}_{\vec{x}}) \geq 0$, d'où (5.11) (le déterminant est une forme multilinéaire). ▀

Exemple 5.14 Cercle dans le sens trigonométrique : suite des exemples 5.3 et 5.10 :

$$\vec{n}_{\vec{x}} = -\vec{e}_1(\vec{x}), \quad (5.12)$$

i.e. le vecteur normal unitaire pointe vers l'intérieur du cercle. ▀

Exemple 5.15 Cercle dans le sens inverse : suite des exemples 5.4 et 5.11 :

$$\vec{n}_{\vec{x}} = +\vec{e}_1(\vec{x}), \quad (5.13)$$

i.e. le vecteur normal unitaire pointe vers l'extérieur du cercle. ▀

Exemple 5.16 Suite des exemples 5.5 et 5.12 : $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{r}$. ▀

Exemple 5.17 On se place en coordonnées sphériques (1.7), et on se place sur la sphère de rayon R (fixé). Et on note

$$\vec{x} = \vec{\varphi}_R(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (= \vec{\varphi}(R, \theta, \varphi)).$$

On dispose des deux vecteurs tangents à la sphère (du système de coordonnées $\vec{\varphi}_R$) :

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(\vec{x}) &= \frac{\partial \vec{\varphi}_R}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \vec{e}_2(R, \theta, \varphi), \\ \vec{f}_2(\vec{x}) &= \frac{\partial \vec{\varphi}_R}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \vec{e}_3(R, \theta, \varphi). \end{aligned}$$

Et on note :

$$\vec{f}_3(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r}(R, \theta, \varphi) = \vec{e}_1(R, \theta, \varphi).$$

Donc ici $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ dans la notation des coordonnées sphériques.

La forme normale est donnée par $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{v})$, donc $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_2(\vec{x}) = \ell_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_3(\vec{x}) = 0$ et $\ell_{\vec{x}} \cdot \vec{e}_1(\vec{x}) = \det(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) = R^2 \cos \varphi$, ce qui donne :

$$\ell_{\vec{x}} = R^2 \cos \varphi \, dr.$$

D'où :

$$n^\flat(\vec{x}) = dr(\vec{x}), \quad \vec{n}(\vec{x}) = \vec{e}_1(\vec{x}).$$

On retrouve le résultat attendu. ▀

Remarque 5.18 Une notation utilisée pour $\vec{\lambda}_{\vec{x}}$ est :

$$\vec{\lambda} = \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_{n-1},$$

où $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ est une base de l'hyperplan tangent $T_{\vec{x}}S$, qui donne donc :

$$(\vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_{n-1}, \vec{v})_{\mathbb{R}^n} = \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{v})$$

pour tout \vec{v} . En particulier dans \mathbb{R}^3 on retrouve « $(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c})_{\mathbb{R}^3} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ » ; d'où $\ell(\vec{v}) = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}) = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{v})_{\mathbb{R}^3}$, et on obtient $\vec{n} = \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\|} \perp \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. ▀

Proposition 5.19 $\vec{n}_{\vec{x}} \otimes n_{\vec{x}}^\flat$ est l'application linéaire de projection orthogonale sur $\vec{n}_{\vec{x}}$ relativement au produit scalaire $g_{\vec{x}}(\cdot, \cdot)$:

$$(\vec{n}_{\vec{x}} \otimes n_{\vec{x}}^\flat) \cdot \vec{v} = v_\perp \vec{n}_{\vec{x}} = \vec{v}_\perp \quad (5.14)$$

quand $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp = \vec{v}_\parallel + v_\perp \vec{n}_{\vec{x}} \in T_{\vec{x}}S \oplus^{\perp g} \text{Vect}\{\vec{n}_{\vec{x}}\}$, où :

$$v_\perp = n_{\vec{x}}^\flat \cdot \vec{v} \quad (= (\vec{n}_{\vec{x}}, \vec{v})_{g_{\vec{x}}}). \quad (5.15)$$

Preuve. Par définition de la contraction on a $(\vec{n}_{\vec{x}} \otimes n_{\vec{x}}^\flat) \cdot \vec{v} = (n_{\vec{x}}^\flat \cdot \vec{v}) \vec{n}_{\vec{x}}$. ▀

Remarque 5.20 En mécanique quantique on note $|\vec{v}\rangle =^{\text{def}} \vec{v}$ un vecteur et $\langle \ell | =^{\text{def}} \ell$ une forme linéaire. Et on note $|\vec{v}\rangle \langle \ell | =^{\text{def}} \vec{v} \otimes \ell$ l'application linéaire de projection sur \vec{v} , et on note $|\vec{v}\rangle \langle \ell | \cdot |\vec{w}\rangle = \langle \ell | \vec{w} \rangle |\vec{v}\rangle$. Ainsi on note $\vec{n}_{\vec{x}} \otimes n_{\vec{x}}^\flat = |\vec{n}_{\vec{x}}\rangle \langle n_{\vec{x}}^\flat |$. ▀

6 Aire

6.1 Élément d'aire

On reprend notre surface $\vec{\varphi}$ avec en chaque \vec{x} son vecteur normal unitaire $\vec{n}(\vec{x}) = \vec{n}_{\vec{x}}$. La métrique sur $S = \text{Im} \vec{\varphi}$ est la métrique euclidienne $g(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$.

Définition 6.1 On appelle élément d'aire en \vec{x} la forme multilinéaire alternée $d\tilde{\sigma}_{\vec{x}} = d\tilde{\sigma}(\vec{x})$ définie sur $TS_{\vec{x}}$ par :

$$d\tilde{\sigma}_{\vec{x}} : \begin{cases} (TS_{\vec{x}})^{n-1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) & \longrightarrow d\tilde{\sigma}(\vec{x})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{n}_{\vec{x}}). \end{cases} \quad (6.1)$$

En particulier $d\tilde{\sigma}(\vec{x})(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}))$ donne l'aire limitée par les vecteurs tangents de la base du système de coordonnées sur la surface.

Définition 6.2 L'élément d'aire vectoriel est :

$$d\vec{\sigma}_{\vec{x}} = \vec{n}(\vec{x}) d\sigma_{\vec{x}}. \quad (6.2)$$

(Il sert à mesurer les flux $\int_S \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}_{\vec{x}} = \int_S \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\sigma_{\vec{x}}$.)

6.2 Système de coordonnées Φ dans \mathbb{R}^n associé à $\vec{\varphi}$ sur S

On reprend notre système de coordonnées $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ sur S .

On note $\Phi : \tilde{U} = U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le système de coordonnées défini par, pour tout $\vec{q} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\Phi((\vec{q}, z)) = \vec{\varphi}(\vec{q}) + z \vec{n}_{\vec{\varphi}(\vec{q})} \quad (= \vec{x} + z \vec{n}_{\vec{x}}), \quad (6.3)$$

où donc z donne « l'altitude au dessus de la surface ».

Exemple 6.3 Voir exemple 5.17 (sphériques) où $\vec{q} = (\theta, \varphi)$, $z = r$ et $\Phi(\theta, \varphi, z) = \vec{\varphi}(z, \theta, \varphi)$. \blacksquare

$\Phi : \tilde{U} \rightarrow \Phi(\tilde{U})$ est un difféomorphisme (pour ε assez petit), et est donc également un système de coordonnées. On note $z = q_n$ et donc $(\vec{q}, z) = (q^1, \dots, q^{n-1}, q^n) \in \tilde{U}$.

Comme $\vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial q^n}$, on note :

$$\vec{e}_n(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x}). \quad (6.4)$$

La base du système Φ est $(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}), \vec{e}_n(\vec{x}))$ (base directe) en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, où $\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial q^i}(\vec{q})$ pour $i = 1, \dots, n$. Sa base duale est $(e^1(\vec{x}), \dots, e^n(\vec{x})) = (dq^1(\vec{x}), \dots, dq^n(\vec{x}))$ où en particulier :

$$e^n(\vec{x}) = dq^n(\vec{x}) = n^b(\vec{x}), \quad (6.5)$$

où n^b est la forme linéaire normale unitaire.

Remarque 6.4 Soit $(\vec{b}_i)_{i=1, \dots, n}$ une b.o.n. de \mathbb{R}^n en \vec{x} avec $\vec{b}_n = \vec{n}(\vec{x})$. On a :

$$d\Phi_{\vec{q}} = \sum_{i,j=1}^n (d\Phi_{\vec{q}})_j^i \vec{b}_i \otimes dX^j, \quad (6.6)$$

où donc $[d\Phi_{\vec{q}}] = [(d\Phi_{\vec{q}})_j^i]$ est la matrice jacobienne de Φ (relativement à (\vec{b}_i) et à la base canonique de $\mathbb{R}^n \supset \tilde{U}$). \blacksquare

6.3 Aire

$d\Phi(\vec{q})$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice $[d\Phi_{\vec{q}}]$, matrice $n \times n$, et on pourra considérer $\det[d\Phi_{\vec{q}}]$. Alors que $[d\vec{\varphi}_{\vec{q}}]$ est une matrice $n \times (n-1)$ et son déterminant n'a pas de sens.

Quand, pour la métrique euclidienne, on dispose d'une base orthonormée $B = (\vec{b}_i)$ en \vec{x} , on a :

$$\det[d\Phi(\vec{q})] = \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_n(\vec{x})) = d\tilde{\sigma}(\vec{x})(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x})) \stackrel{\text{noté}}{=} J_{\Phi}(\vec{q}), \quad (6.7)$$

les $\vec{e}_i(\vec{x})$ étant exprimés sur la base B .

Et l'élément d'aire est noté sur $TS_{\vec{x}}$:

$$d\tilde{\sigma}(\vec{x}) = J_{\Phi}(\vec{q}) dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}). \quad (6.8)$$

Soit $g(\cdot, \cdot)$ la métrique euclidienne exprimée dans la base du système Φ :

$$g_{\vec{x}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\vec{x}) dq^i(\vec{x}) \otimes dq^j(\vec{x}). \quad (6.9)$$

On a :

$$[g_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} [g_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ j=1, \dots, n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

puisque $g(\vec{e}_i, \vec{n}) = \delta_{in}$ par définition de $\vec{n}_{\vec{x}}$.

Proposition 6.5 Avec $g(\cdot, \cdot)$ la métrique euclidienne exprimée dans la base du système Φ , cf. (6.9), et $d\Phi$ exprimée à l'aide de sa matrice $[F]$, cf. (6.6), on a, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$\begin{aligned} d\vec{\sigma}(\vec{x}) &= J_{\Phi}(\vec{q}) dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}), \\ &= \sqrt{\det[g_{ij}(\vec{x})]_{\substack{i=1,\dots,n-1 \\ j=1,\dots,n-1}}} dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}), \\ &= \sqrt{\det[g_{ij}(\vec{x})]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}} dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (6.11)$$

où $J_{\Phi}(\vec{q}) = \det(d\Phi(\vec{q}))$ est le jacobien du système de coordonnées Φ en \vec{q} , cf. (6.7).

Preuve. On applique (4.14). ▀

Exemple 6.6 Dans \mathbb{R}^2 , pour le cercle $\vec{\varphi} : \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$, on a $\vec{n}(\vec{x}) = -\vec{e}_1(\vec{x})$, cf. (5.12), et donc $d\sigma(\vec{x})(\vec{e}_1(\vec{x})) = \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) = 0$ et $d\sigma(\vec{x})(\vec{e}_2(\vec{x})) = \det(\vec{e}_2(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) = \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \vec{e}_2(\vec{x})) = R$:

$$d\vec{\sigma}(\vec{x}) = R d\theta(\vec{x}).$$

Ici l'élément d'aire positif s'appelle élément de longueur (cas 1-D), et en particulier $\int_S d\sigma = 2\pi R$ est bien la longueur du cercle. ▀

Exemple 6.7 Dans \mathbb{R}^2 , pour le cercle $\vec{\varphi} : \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos(-\theta) \\ R \sin(-\theta) \end{pmatrix}$, le vecteur tangent est $\vec{f}(\vec{x}) = -\vec{e}_2(\vec{x})$ (on tourne dans l'autre sens), le vecteur normal unitaire est $\vec{n}(\vec{x}) = +\vec{e}_1(\vec{x})$ cf. (5.13) (normale pointant vers l'extérieur). Et $d\vec{\sigma}(\vec{x})(\vec{f}(\vec{x})) = \det(\vec{f}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) = +R$, d'où :

$$d\vec{\sigma}(\vec{x}) = R d\theta(\vec{x}),$$

même signe que pour l'exemple précédent. ▀

Définition 6.8 On appelle élément d'aire positif en \vec{x} la forme dont l'image est la valeur absolue :

$$d\sigma_{\vec{x}} \stackrel{\text{noté}}{=} |J_{\Phi}(\vec{q})| dq^1(\vec{x}) \dots dq^{n-1}(\vec{x}),$$

donnée par, pour tout $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1} \in TS_{\vec{x}}$:

$$d\sigma_{\vec{x}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) = |d\vec{\sigma}_{\vec{x}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})| \quad (= |\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{n}(\vec{x}))|).$$

Remarque 6.9 Notation de Hodge. Ayant défini la forme normale ℓ , cf. (5.2), on note $d\vec{\sigma} = *\ell$, où $*\ell$ est obtenue à l'aide de l'opérateur de Hodge (ou l'opérateur étoilé de Hodge) défini par :

$$(*\ell)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) = \ell(\vec{v}_n),$$

pour tout base orientée $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de \mathbb{R}^n . Voir cours de géométrie différentielle.

(L'opérateur de Hodge est défini de manière plus générale par $\ell \in \mathcal{A}_k \xrightarrow{*} *\ell \in \mathcal{A}_{n-k}$ où :

$$(*\ell)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}) = \ell(\vec{v}_{n-k+1}, \dots, \vec{v}_n),$$

pour tout base orientée $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de \mathbb{R}^n .) ▀

6.4 Symboles de Christoffel γ_{ij}^n pour Φ

On disposait des symboles de Christoffel pour $\vec{\varphi}$:

$$\gamma_{ij}^k = e^k \cdot (d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j), \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n-1.$$

On dispose des symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = e^k \cdot (d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ pour Φ , pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$. Il est immédiat que :

$$\Gamma_{ij}^k = \gamma_{ij}^k, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n-1. \quad (6.12)$$

Et (3.18) page 23 donne :

Proposition 6.10 Quand g est une métrique de Killing (i.e. t.q. $dg = 0$), ce qui est le cas de la métrique euclidienne, et quand $g(\cdot, \cdot)$ est exprimée sur la base du système Φ :

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dq^i \otimes dq^j, \quad (6.13)$$

i.e. quand les $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, alors on a, pour tout $i, j = 1, \dots, n-1$:

$$\gamma_{ij}^n = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}, \quad (6.14)$$

i.e. les γ_{ij}^n sont calculables à l'aide de la métrique exprimée sur la base du système. (Ce sont, pour les $\vec{e}_i, \vec{e}_j \in TS$, les composantes normales $\gamma_{ij}^n = n^\flat \cdot (d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ des dérivées covariantes $d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, soit encore $\gamma_{ij}^n = g(\vec{n}, d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$).

7 Transport parallèle dans \mathbb{R}^n

7.0 Transport parallèle dans \mathbb{R}^n d'une fonction le long d'une courbe

On se donne une courbe $\vec{c} :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition 7.1 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est transportée parallèlement le long de \vec{c} ssi \vec{c} est une courbe de niveau de f :

$$f \circ \vec{c} \text{ est constante}, \quad (7.1)$$

i.e. $f(\vec{x}) = \text{constante}$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$ ("l'altitude $f(\vec{x})$ " ne change pas lorsqu'on se promène le long de la courbe).

Quand $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est transportée parallèlement le long de \vec{c} , par dérivation de (7.1) :

$$df(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) = 0, \quad (7.2)$$

en tout point $\vec{x} = \vec{c}(t)$ quand $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$: les variations de f le long de la courbe sont nulles.

Exemple 7.2 Toute fonction constante est transportée parallèlement à toute courbe. \blacksquare

Exemple 7.3 La fonction $f(x, y) = r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est transportée parallèlement à tout cercle $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$ centré à l'origine : $f \circ \vec{c}$ est constant sur ces cercles (puisque $f(\vec{c}(t)) = R$). Ou encore, utilisant le produit scalaire canonique, $df(\vec{x})$ est représenté par son gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ (le gradient indique la direction de variation maximale). Et $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{r}$ est parallèle à \vec{x} , alors que $\vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \perp \vec{x}$. On a bien $df(\vec{x}) \cdot \vec{c}'(t) = (\vec{\nabla} f(\vec{x}), \vec{v}(\vec{x}))_{\mathbb{R}^2} = 0$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$. \blacksquare

7.1 Transport parallèle dans \mathbb{R}^n d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Définition 7.4 Soit $\vec{c} : t \in]a, b[\rightarrow \vec{c}(t) \in \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. Un champ de vecteurs \vec{w} défini dans \mathbb{R}^n est dit transporté parallèlement à la courbe \vec{c} ssi la fonction :

$$\vec{w} \circ \vec{c} \text{ est constante}, \quad (7.3)$$

c'est à dire ssi, pour tout $t \in]a, b[$, au point $\vec{x} = \vec{c}(t)$, quand $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$, par dérivation de fonctions composées :

$$d\vec{w}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) = 0 \quad (7.4)$$

en tout point $\vec{x} = \vec{c}(t)$ quand $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$. I.e. en \vec{x} les variations de \vec{w} dans la direction $\vec{v}(\vec{x})$ sont nulles.

Exemple 7.5 Tout champ de vecteurs \vec{w} qui est constant est transporté parallèlement à toute courbe, car on a $d\vec{w}(\vec{x}) = 0$ en tout \vec{x} .

N.B. : on peut ici considérer les champs de vecteurs constants, c'est à dire $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{w}(\vec{y})$ pour tout \vec{x}, \vec{y} , car on est dans \mathbb{R}^n ; quand on sera sur des surfaces, seule la notion de "vecteur tangent" aura un sens, et par exemple sur la sphère, un champ de vecteurs ne peut pas être constant : en deux points distincts voisins, les vecteurs tangents n'appartiennent pas au même plan tangent. Voir paragraphe suivant. ■

Exemple 7.6 On se place dans \mathbb{R}^2 . On choisit les coordonnées polaires : soit $\vec{\varphi}$ le système de coordonnées polaires. Soit \vec{w} un champ de vecteurs exprimé sur la base du système de coordonnées polaires :

$$\vec{w} : \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{w}(\vec{x}) = \alpha(\vec{x})\vec{e}_1(\vec{x}) + \beta(\vec{x})\vec{e}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha(\vec{x}) \\ \beta(\vec{x}) \end{pmatrix}_{|(\vec{e})},$$

où $\vec{e}_1(\vec{x}) = \vec{\varphi}_{,r}(\vec{q})$ et $\vec{e}_2(\vec{x}) = \vec{\varphi}_{,\theta}(\vec{q})$, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(r, \theta)$, sont les vecteurs de base du système de coordonnées. En \vec{x} on considère sa différentielle $d\vec{w}(\vec{x})$ appliquée au vecteur $\vec{e}_2(\vec{x})$, ce qui donne, voir (1.42) :

$$\begin{aligned} d\vec{w} \cdot \vec{e}_2 &= (d\alpha \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_1 + \alpha(d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + (d\beta \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + \beta(d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) \\ &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - r\beta\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta}\right)\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Et on considère la courbe S ="le cercle" $\vec{c}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$ =noté \vec{x} pour $\theta \in [0, 2\pi[$ (et $R > 0$) relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 . Le vecteur vitesse (vecteur tangent) à la courbe \vec{c} en \vec{x} est donné par $\vec{c}'(\theta) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{e}_2(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{c}(\theta)$.

Le champ \vec{w} est transporté parallèlement le long de S ssi $d\vec{w} \cdot \vec{e}_2 = 0$, c'est à dire ssi $\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - r\beta = 0$ et $\frac{\alpha}{r} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} = 0$. D'où $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \alpha = 0$. On en déduit :

$$\alpha(r, \theta) = a(r) \cos \theta + b(r) \sin \theta, \quad \text{d'où} \quad \beta(r, \theta) = \frac{1}{r}(-a(r) \sin \theta + b(r) \cos \theta),$$

avec a et b des fonctions quelconques. Donc, dans la base canonique :

$$\vec{w}(\vec{x}) = (a(r) \cos \theta + b(r) \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_{|(\vec{E})} + (-a(r) \sin \theta + b(r) \cos \theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{|(\vec{E})} = \begin{pmatrix} a(r) \\ b(r) \end{pmatrix}_{|(\vec{E})},$$

et $\vec{w}(\vec{x})$ est un vecteur qui ne dépend que de r . Donc seuls les champs de vecteurs de \mathbb{R}^2 qui ne dépendent que de r (et pas de θ) sont transportés parallèlement au cercle. (C'était intuitivement évident.)

N.B. : ici on a utilisé implicitement le pull-back de α (idem pour β) dans la notation $\alpha(r, \theta)$. On aurait dû poser par exemple $\tilde{\alpha}(r, \theta) = \alpha(x, y)$ et écrire l'équation différentielle pour $\tilde{\alpha}$ et non pour α . ■

Proposition 7.7 Dans un système de coordonnées $\vec{\varphi}$, un champ de vecteurs \vec{w} est transporté parallèlement à une courbe \vec{c} de vecteur tangent $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ en $\vec{x} = \vec{c}(t)$ ssi on a (7.4) i.e. ssi, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{k=1}^n w^i|_k v^k = 0, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w^i}{\partial q^k} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jk}^i w^j \right) v^k = 0. \quad (7.5)$$

Preuve. C'est l'expression de $d\vec{w} \cdot \vec{v}$ dans la base du système de coordonnées, c'est à dire quand $\vec{w} = \sum_i w^i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$, voir (2.22). ■

7.2 Géodésique dans \mathbb{R}^n : une droite

Définition 7.8 Une géodésique est une courbe $\vec{c} : t \in [a, b] \rightarrow \vec{x} = \vec{c}(t) \in \mathbb{R}^n$ telle que son vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ est transporté parallèlement à lui-même le long de \vec{c} , c'est à dire tel que :

$$(\vec{v}(\vec{x}) =) \quad (\vec{v} \circ \vec{c})(t) \quad \text{est constant dans } [a, b], \quad (7.6)$$

(quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$) c'est à dire tel que \vec{v} est constant de long de la courbe.

Proposition 7.9 Dans \mathbb{R}^n les géodésiques sont les courbes telles que :

$$(\vec{v} \circ \vec{c})' = 0, \quad (7.7)$$

c'est à dire telles que :

$$\vec{c}''(t) = 0, \quad \text{pour tout } t. \quad (7.8)$$

C'est à dire, dans \mathbb{R}^n , les géodésiques sont les droites.

Preuve. On cherche des courbes \vec{c} telles que $\vec{v}(\vec{x}) = (\vec{v} \circ \vec{c})(t) = \vec{c}'(t)$ est constant, donc telles que $\vec{c}''(t) = 0$. Et $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ est constant s'écrit $= \vec{c}'(0)$ pour tout t ; d'où " $\vec{c}(t) = \vec{c}'(0)t + \vec{x}_0$ ", ce qui est l'équation d'une droite. ■

Remarque 7.10 Dans (7.7) on pourrait écrire $(\vec{v} \circ \vec{c})'(t) = d\vec{v}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x}) = 0$, mais cette dernière écriture $d\vec{v}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})$ n'a pas de sens immédiat : pour calculer $d\vec{v}(\vec{x})$ il faut calculer ses variations dans toutes les directions, or \vec{v} n'est défini que sur la courbe (penser aux densités linéiques), ce qui fait qu'on ne peut dériver que dans la direction de la courbe (celle du vecteur \vec{v} tangent à la courbe), et on ne peut pas dériver dans des directions non tangentes à la courbe. I.e. on ne peut dériver \vec{v} que dans la direction $\vec{v}(\vec{x})$, i.e. on ne peut dériver que la fonction $t \rightarrow (\vec{v} \circ \vec{c})(t)$, et c'est le sens qu'il faut donner à $d\vec{v}.\vec{v}$ (bien que $d\vec{v}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ n'est pas défini sur tout \mathbb{R}^n a priori).

Autrement dit la notation $d\vec{v}$ de la différentielle n'est pas licite : seule la dérivée directionnelle dans la direction \vec{v} l'est. On conserve quand même abusivement la notation de la différentielle, et on écrit donc quand même $d\vec{v}.\vec{v} = 0$. Cet abus disparaîtra quand on définira (plus loin) la différentiation sur une surface. ■

8 Transport parallèle sur une surface dans \mathbb{R}^n

8.1 Transport parallèle sur une surface d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

8.1.1 Définition

On se donne une surface S dans \mathbb{R}^n .

Ici on se place dans le cas où on ne "voit" que S (on ne peut pas s'échapper de la surface). Donc localement on ne peut se déplacer que dans la direction de vecteurs qui sont "parallèles" à S (i.e. le long de courbes dans S).

Soit $\vec{c} :]a, b[\rightarrow S$ une courbe sur S de vecteurs vitesses $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$.

Soit $\vec{w} \in TS$ un champ de vecteurs sur S . (En mécanique par exemple, S est une "surface" soumise à une force surfacique tangentielle \vec{w} .)

On s'intéresse aux valeurs du champ de vecteurs \vec{w} le long de \vec{c} , i.e. on s'intéresse aux vecteurs :

$$\vec{w}(\vec{x}) = (\vec{w} \circ \vec{c})(t).$$

Les variations de ce champ \vec{w} en $\vec{x} = \vec{c}(t)$ le long de la courbe sont données par $(\vec{w} \circ \vec{c})'(t)$. De ces variations on ne retient que "ce qu'on voit", i.e. on retient que les projections sur le plan tangent $TS_{\vec{x}}$ au point $\vec{x} = \vec{c}(t)$ à savoir :

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}((\vec{w} \circ \vec{c})'(t)).$$

Définition 8.1 Le champ de vecteurs $\vec{w} \in TS$ est dit transporté sur la surface (ou dans TS) parallèlement à la courbe \vec{c} ssi, quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$:

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}((\vec{w} \circ \vec{c})'(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad (8.1)$$

i.e. ssi :

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{w}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \vec{c}([a, b]). \quad (8.2)$$

Définition 8.2 On reprend la notation des connexions, cf. (2.11) : on note :

$$(\nabla_{\vec{v}}\vec{w})(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{w}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})),$$

la dérivée covariante sur S de \vec{w} dans la direction \vec{v} en \vec{x} . Et on note :

$$\frac{D\vec{w}}{dt} \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_{\vec{v}}\vec{w}, \quad \text{donc} \quad = \text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}\left(\frac{d(\vec{w} \circ \vec{c})}{dt}(t)\right). \quad (8.3)$$

Corollaire 8.3 (Caractérisation d'un transport parallèle.) $\vec{w} \in TS$ est transporté parallèlement à la courbe sur la surface ssi :

$$\frac{D\vec{w}}{dt} = 0 \quad (= \nabla_{\vec{v}}\vec{w}). \quad (8.4)$$

Définition 8.4 Si \vec{w} est un champ de vecteurs instationnaire, i.e. $\vec{w} : [0, T] \times S \rightarrow \vec{w}(t, \vec{x}) \in TS_{\vec{x}}$, alors on note :

$$\frac{D\vec{w}}{dt} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla_{\vec{v}}\vec{w},$$

et $\frac{D\vec{w}}{dt}$ est appelée dérivée matérielle ou dérivée totale.

Remarque 8.5 Soit $u \rightarrow \tilde{c}(u) = \vec{c}(t(u))$ un autre paramétrage de la courbe \vec{c} avec $t : u \rightarrow t(u)$ un difféomorphisme. Comme $(\vec{w} \circ \tilde{c})(u) = (\vec{w} \circ \vec{c})(t(u))$, on a :

$$(\vec{w} \circ \tilde{c})'(u) = (\vec{w} \circ \vec{c})'(t(u)) t'(u),$$

et donc $(\vec{w} \circ \tilde{c})'(u)$ est parallèle à $(\vec{w} \circ \vec{c})'(t)$: si une projection est nulle pour un paramétrage, elle est nulle pour tout autre paramétrage. \blacksquare

8.1.2 Dans un système de coordonnées

Soit $\vec{\varphi} : \vec{q} = (q^1, \dots, q^m) \rightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}) \in \mathbb{R}^n$, avec $m \leq n$, un paramétrage de la surface (régulière) S qui définit un système de coordonnées sur cette surface. Soit $(\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}))_{i=1, \dots, m}$ la base du système de coordonnées en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$.

Proposition 8.6 Soit \vec{c} une courbe sur S , de vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ (tangent à S) en $\vec{x} = \vec{c}(t)$. On note v^i les composantes de \vec{v} dans la base (\vec{e}_i) . Soit $\vec{w} \in TS$ un champ de vecteurs sur S , et w^i ses composantes dans la base (\vec{e}_i) . Donc :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m v^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x}), \quad \vec{w}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m w^i(\vec{x}) \vec{e}_i(\vec{x}).$$

Le champ de vecteurs \vec{w} est transporté sur S parallèlement à \vec{c} ssi, pour tout $i = 1, \dots, m$:

$$\sum_{j=1}^m w^i_{|j} v^j = 0, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i w^k \right) v^j = 0, \quad (8.5)$$

cf. (2.20) et (2.22).

Preuve. C'est (2.22) avec (2.20) : avec $\vec{w} = \sum_{i=1}^m w^i \vec{e}_i$ on a $d\vec{w} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^m (dw^i \cdot \vec{v}) \vec{e}_i + \sum_{i=1}^m w^i d\vec{e}_i \cdot \vec{v}$, et avec $\vec{v} = \sum_{j=1}^m v^j \vec{e}_j$ on obtient $d\vec{w} \cdot \vec{v} = \sum_{i,j=1}^m v^j (dw^i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_i + \sum_{i,j=1}^m w^i v^j d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, et donc

$$d\vec{w} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial w^i}{\partial q^j} \right) \vec{e}_i + \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m w^i v^j \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k,$$

soit $d\vec{w} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial w^i}{\partial q^j} \right) \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k,j=1}^m w^k v^j \Gamma_{kj}^i \vec{e}_i$.

En projetant sur $TS_{\vec{x}}$, il reste $\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{w} \cdot \vec{v}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{k,j=1}^m w^k v^j \Gamma_{kj}^i \right) \vec{e}_i$, soit $\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{w} \cdot \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^m w^i_{|j} v^j \vec{e}_i$ où on a noté $w^i_{|j} = \frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^m w^k \Gamma_{kj}^i$.

Et donc \vec{w} est transporté parallèlement à \vec{v} ssi $\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(d\vec{w} \cdot \vec{v}) = 0$, i.e. ssi les composantes de $d\vec{w} \cdot \vec{v}$ sur la base du système sont nulles, i.e. ssi pour tout $i = 1, \dots, m$ on a $0 = (d\vec{w} \cdot \vec{v})^i = \sum_{j=1}^m w^i_{|j} v^j$. \blacksquare

8.1.3 Exemples sur le cercle

Exemple 8.7 En 2-D on prend $S =$ la courbe = le cercle $\vec{c}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} =$ noté \vec{x} pour $R > 0$ fixé et $\theta \in [0, 2\pi[$, relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 . On se place en coordonnées polaires. Le vecteur vitesse (vecteur tangent) à la courbe \vec{c} en \vec{x} est donné par $\vec{c}'(\theta) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{e}_2(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{c}(\theta)$.

Soit $\vec{w} = \vec{e}_2 : S \rightarrow TS$. On considère ses variations $d\vec{e}_2$ le long de \vec{c} , i.e. on regarde :

$$d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \Gamma_{\theta\theta}^r \vec{e}_r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \vec{e}_2 = -r\vec{e}_r$$

en les $\vec{x} = \vec{c}(t)$, et de ces variations on ne voit que celle parallèles à \vec{e}_2 (le plan tangent en \vec{x} est ici une droite qui a pour vecteur directeur $\vec{v} = \vec{e}_2(\vec{x})$) ; on obtient :

$$e^2 \cdot (d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = 0. \quad (8.6)$$

Le champ \vec{e}_2 est transporté parallèlement le long de lui-même. \blacksquare

Exemple 8.8 Suite ; même courbe \vec{c} . On prend maintenant un champ de vecteurs $\vec{w} : S \rightarrow TS$ tangent à S , donc de la forme (à valeurs dans TS) :

$$\vec{w} : \vec{x} \in S \rightarrow \vec{w}(\vec{x}) = \beta(\vec{x})\vec{e}_2(\vec{x}) \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{c}(\theta).$$

On considère ses variations $d\vec{w} = d\beta \vec{e}_2 + \beta d\vec{e}_2$ le long de \vec{c} , i.e. on regarde

$$d\vec{w} \cdot \vec{e}_2 = (d\beta \cdot \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + \beta (d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \beta (\Gamma_{\theta\theta}^r \vec{e}_1 + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \vec{e}_2)$$

en $\vec{x} = \vec{c}(t)$, et de ces variations on ne voit que celle parallèles à \vec{e}_2 (le plan tangent en \vec{x} est ici une droite qui a pour vecteur directeur $\vec{v} = \vec{e}_2(\vec{x})$) ; on obtient :

$$e^2 \cdot (d\vec{w} \cdot \vec{e}_2) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \beta \Gamma_{\theta\theta}^\theta. \quad (8.7)$$

Ici $\Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0$, voir (2.3), et donc le champ \vec{w} est transporté sur S parallèlement à \vec{c} ssi $\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = 0$, i.e. ssi $\beta = \beta_0$ est constant le long du cercle “ $R = \text{constante}$ ” (i.e. β ne dépend pas de θ). Donc seuls les champs $\vec{w} : \vec{x} \rightarrow (\text{cste})\vec{e}_2(\vec{x}) \in TS$ sont transportés parallèlement au cercle sur le cercle.

On retrouve en particulier que le champ \vec{e}_2 est transporté parallèlement le long de lui-même.

Interprétation mécanique : pour que le champ soit transporté parallèlement, il ne doit pas y avoir d’accélération tangentielle, uniquement une accélération centrifuge ou centripète. C’est le cas d’un avion en vol à altitude constante (sans toucher aux commandes de vol), qui est dans ce cas transporté parallèlement à un grand cercle terrestre : s’il “accélère” (resp. s’il coupe ses moteurs), il s’éloigne (resp. il se rapproche) de la terre, et il ne reste pas parallèle à un grand cercle terrestre, et il n’est plus transporté parallèlement à la terre.

Exemple explicite avec la courbe $\vec{\gamma}(\theta) = \vec{c}(\theta^2) = R \begin{pmatrix} \cos(\theta^2) \\ \sin(\theta^2) \end{pmatrix} = \text{noté } \vec{x} \text{ pour } R > 0 \text{ fixé et } \theta \in]0, \sqrt{2\pi}[$. \blacksquare

8.1.4 Exemples sur la sphère de \mathbb{R}^3

Exemple 8.9 Avec les coordonnées sphériques, on prend le méridien $\vec{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta_0 \cos \varphi \\ R \sin \theta_0 \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$ de vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(\varphi) = \vec{e}_3(\vec{x})$ en $\vec{x} = \vec{c}(\varphi)$, et on prend le champ de vecteurs $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{e}_3(\vec{x})$.

On a $\vec{w}(\vec{x}) = (\vec{w} \circ \vec{c})(\varphi) = \begin{pmatrix} -R \cos \theta_0 \sin \varphi \\ -R \sin \theta_0 \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$, et $\frac{d(\vec{w} \circ \vec{c})}{d\varphi}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R \cos \theta_0 \cos \varphi \\ -R \sin \theta_0 \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \end{pmatrix} = -R\vec{e}_1(\vec{x})$, de projection sur le plan tangent $\text{Proj}_{TS}(\frac{d\vec{w} \circ \vec{c}}{d\varphi}(\varphi)) = \vec{0}$. Donc le champ de vecteur \vec{e}_3 est transporté parallèlement le long du méridien (“le long de lui-même”).

(Noter que $\|\vec{e}_3(\vec{x})\| = R$ est constant, en particulier le long d’un méridien.) \blacksquare

Exemple 8.10 Suite : même méridien et on prend maintenant le champ de vecteurs, pour \vec{x} sur le méridien, $\vec{w}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{\|\vec{e}_2(\vec{x})\|} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unitaire tangent au parallèle. On a $\frac{d(\vec{w} \circ \vec{c})}{d\varphi}(\varphi) = \vec{0}$, de projection sur le plan tangent $\text{Proj}_{TS}(\frac{d\vec{w} \circ \vec{c}}{d\varphi}(\varphi)) = \vec{0}$. Donc le champ de vecteur \vec{w} est transporté parallèlement le long du méridien.

Donc tout vecteur de type $\alpha \vec{e}_3(\vec{x}) + \beta \frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{\|\vec{e}_2(\vec{x})\|}$, avec α et β constants, est transporté parallèlement le long d’un méridien. Un tel vecteur à une longueur constante (ici $\sqrt{R^2 \alpha^2 + \beta^2}$) et “tourne en même temps” que le méridien : il est transporté parallèlement au méridien. Exemple : un avion qui suit un méridien : son fuselage ou ses ailes sont transportées parallèlement à la terre le long du méridien. \blacksquare

Exemple 8.11 Suite : même méridien et on prend maintenant le champ de vecteurs $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{e}_2(\vec{x})$ (tangent au parallèle non unitaire). On a $\vec{w}(\vec{x}) = (\vec{w} \circ \vec{c})(\varphi) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \cos \varphi \\ \cos \theta_0 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\frac{d(\vec{w} \circ \vec{c})}{d\varphi}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \sin \varphi \\ -\cos \theta_0 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \vec{e}_2(\vec{x})$ (ailleurs que sur l'équateur), de projection sur le plan tangent $\text{Proj}_{TS}(\frac{d\vec{w} \circ \vec{c}}{d\varphi}(\varphi)) = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \vec{e}_2(\vec{x}) \neq \vec{0}$ (ailleurs que sur l'équateur et aux pôles). Donc le champ de vecteur \vec{e}_2 n'est pas transporté parallèlement le long du méridien (sa longueur $\|\vec{w}(\vec{x})\| = R \cos \varphi$ change avec φ contrairement au vecteur unitaire associé $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ de l'exemple précédent). ■

Exemple 8.12 En 3-D, avec les coordonnées sphériques, on prend $\vec{c}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi_0 \\ R \sin \theta \cos \varphi_0 \\ R \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$ (un parallèle qui n'est pas un grand cercle sauf si $\varphi_0 = 0$ i.e. si c'est l'équateur) de vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(\theta) = \vec{e}_2(\vec{x})$ en $\vec{x} = \vec{c}(\theta)$, et on prend le champ de vecteurs $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{e}_2(\vec{x})$. On a $d\vec{w} \cdot \vec{v} = d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -r \cos^2 \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3$, de projection :

$$\text{Proj}_{TS}(d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \vec{e}_3 \neq \vec{0} \quad \text{pour } \varphi_0 \neq 0 :$$

le vecteur tangent aux parallèles n'est pas transporté parallèlement au parallèle sur la sphère, sauf dans le cas de l'équateur qui transporte effectivement son vecteur tangent par rapport à lui-même. (Remarque : pour $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, le parallèle est réduit à un point : ce n'est pas une courbe régulière.) ■

8.1.5 Remarque

Remarque 8.13 Si $\vec{w} \circ \vec{c} : t \rightarrow \vec{w}(\vec{c}(t))$ est bien défini, ainsi que $(\vec{w} \circ \vec{c})'(t)$, il n'en est pas de même de $d\vec{w}(\vec{x})$ puisque \vec{w} n'est défini que sur la surface alors que $d\vec{w}(\vec{x})$ est l'application linéaire qui doit être définie sur \mathbb{R}^n (développement limité $\vec{w}(\vec{y}) - \vec{w}(\vec{x}) = d\vec{w}(\vec{x}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) + o(\|\vec{y} - \vec{x}\|)$ avec $\vec{y} - \vec{x}$ vecteur non tangent à la surface en général). Ainsi la formule (8.2) n'est pas bien défini si elle est considérée "brutalement", i.e. sans référence à la surface S et à la courbe \vec{c} : cette formule (8.2) que si elle exprime (8.1) (voir également remarque 7.10).

Cela ne pose pas de problème dans les applications en mécanique, voir exemples suivants. D'ailleurs sur la surface, le calcul donnera des expressions du type $\frac{\partial \vec{w}}{\partial q^i}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial(\vec{w} \circ \vec{c})}{\partial q^i}(\vec{q})$, et seules les dérivées le long des lignes de coordonnées sur la surface seront considérées (les dérivées directionnelles parallèlement à la surface), i.e. en d'autres termes l'expression $d\vec{w}(\vec{x})$ ne sera pas considérée comme étant $d\vec{w}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{w}}{\partial q^i}(\vec{x}) dq^i(\vec{x})$, mais comme étant $\sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{w}}{\partial q^i}(\vec{x}) dq^i(\vec{x}) = \text{noté } \nabla \vec{w}(\vec{x})$ (connexion) lorsqu'on dérivera le long de la surface. ■

8.2 Géodésique sur une surface

8.2.1 Définition

On se donne une surface $S \subset \mathbb{R}^n$. On se donne deux points "voisins" sur la surface S .

Intuitivement : la géodésique joignant ces deux points est la courbe dans S qui est "la plus courte" possible. Ou encore la courbe qui permet de joindre ces deux points en un minimum de temps, sous-entendu dans l'ensemble des courbes parcourues à une même vitesse constante. Ou encore la courbe sur la surface obtenue en "appliquant" une droite sur cette surface, le résultat passant par les deux points.

Mathématiquement, la définition est :

Définition 8.14 Une géodésique sur S est une courbe géométrique $\text{Im} \vec{c}$ image d'une courbe régulière $\vec{c} : t \in [a, b] \rightarrow \vec{c}(t) \in S$ sur la surface S , telle que, notant $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ "la vitesse" au point $\vec{x} = \vec{c}(t)$:

1- le paramétrage $t \in [a, b]$ de \vec{c} est choisi tel que la courbe \vec{c} est parcourue à vitesse constante, i.e. qu'il vérifie $\|\vec{c}'(t)\| = \|\vec{c}'(a)\|$ pour tout $t \in [a, b]$, i.e. $\|\vec{v}(\vec{x})\| = \text{constante}$ pour tout $\vec{x} \in \text{Im} \vec{c}$, et

2- son vecteur vitesse est transporté sur S parallèlement à lui-même le long de \vec{c} , i.e. :

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}((\vec{v} \circ \vec{c})'(t)) = \vec{0}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (8.8)$$

Et comme $\vec{c}'(t) = \vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{c}(t)) = (\vec{v} \circ \vec{c})(t)$ donne $\vec{c}''(t) = (\vec{v} \circ \vec{c})'(t)$:

Définition 8.15 Bis. Ou encore, une géodésique est une courbe \vec{c} parcourue à vitesse constante telle que :

$$\text{Proj}_{TS_{\vec{x}}}(\vec{c}''(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad (8.9)$$

i.e. l'accélération $\vec{c}''(t)$ est orthogonale au plan tangent, i.e. l'accélération tangentielle est nulle.

Il n'y a donc pas de "force tangentielle" pour une particule soumise à " $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ ", i.e. la particule va "tout droit" sur la surface, i.e. ne prend pas de "virage" sur le plan tangent ; en d'autres termes la force $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ est $\perp S$, i.e. est exclusivement "centrifuge" ou "centripète" (ou nulle) relativement à la surface.

Et comme $\vec{c}'(t) = \vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{c}(t))$ donne $\vec{c}''(t) = d\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})$:

Définition 8.16 Ter. Ou encore, une géodésique est une courbe \vec{c} parcourue à vitesse constante telle que son champ \vec{v} de vecteurs tangents, donné par $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$, vérifie :

$$\text{Proj}_{TS}(d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{0}. \quad (8.10)$$

Avec la notation précédente (8.3), on peut réécrire (8.8) comme, pour tout t :

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = 0, \quad (8.11)$$

qui signifie que "l'accélération sur la surface" est nulle. Ou encore avec la notation des connexions, aux points $\vec{x} = \vec{c}(t)$:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{v} = 0 \quad (= \nabla_{\vec{c}'(t)} \vec{v}). \quad (8.12)$$

Remarque 8.17 Rappel. Pour une courbe parcourue à vitesse $\vec{c}'(t)$ constante, on a $\|\vec{c}'(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = (\vec{c}'(t), \vec{c}'(t))_{\mathbb{R}^n}$ constant et donc de dérivée nulle : $2(\vec{c}'(t), \vec{c}''(t))_{\mathbb{R}^n} = 0$, d'où $\vec{c}'(t) \perp \vec{c}''(t)$, i.e. l'accélération est toujours orthogonale à la vitesse (pour une courbe parcourue à vitesse constante).

Supposer de plus $\text{Proj}_{TS}(\vec{c}''(t)) = 0$ revient à supposer que l'accélération est également nulle dans une direction du plan tangent orthogonale à la vitesse (on ne peut conserver qu'une accélération normale à la surface). Intuitivement, cela revient à dire que la courbe ressemble à une droite puisqu'accélération latérale nulle signifie qu'on ne va n'y à droite ni à gauche. I.e. localement si on se place dans un voisinage du point où la surface semble plate (voisinage "suffisamment petit" pour assimiler la surface au plan tangent donné par le développement limité au premier ordre), les géodésiques semblent être droites. Par exemple sur terre quand on construit une maison, un mur "droit et horizontal" suit une géodésique (courbe "la plus courte"). Ou encore le pont du lac Pontchartrain en Louisiane (États-Unis) qui est long de 38,4 km, et qui est "tout droit" ou "en ligne droite" au sens "sur la surface terrestre", alors qu'en fait il suit une géodésique (sa longueur permet d'ailleurs de voir la rotondité de la terre). D'ailleurs sur une sphère une géodésique est un morceau de grand cercle : on obtient la courbe la plus courte entre deux points, voir exercices suivants. ■

Exemple 8.18 Un méridien est une géodésique, voir exemple 8.9, puisqu'ayant $\|\vec{e}_3(\vec{x})\| = R$ constant, le paramétrage usuel permet de parcourir le méridien à vitesse constante.

Un parallèle n'est pas une géodésique sauf si c'est l'équateur, voir exemple 8.12 (bien que $\|\vec{e}_2(\vec{x})\| = \|\vec{v}(\vec{x})\| = R \cos \varphi_0 = \text{constante}$ et donc que le paramétrage usuel permet de parcourir le parallèle à vitesse constante).

Par exemple, le chemin le plus court pour aller de Madrid à New York n'est pas de suivre le 40ème parallèle mais de se placer sur un grand cercle passant par ces villes, cf remarque 8.17 : le chemin le plus court est obtenu en prenant l'intersection de la sphère avec le plan qui passe par les trois points : centre de la terre, Madrid et New-York (plan qui n'est pas parallèle à l'équateur, i.e. qui ne contient pas de parallèle). Autrement dit, si on essaie d'appliquer une droite sur la sphère, on obtient un grand cercle. ■

Exercice 8.19 On rappelle qu'un grand cercle sur la sphère $S = S(0, R)$ de \mathbb{R}^3 est l'intersection de la sphère et d'un plan passant par le centre de la sphère. Montrer que les grands cercles sont des géodésiques.

Réponse. Quitte à faire un changement de base euclidien orthonormé $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$ on se ramène au cas où le plan a pour équation $Z = 0$: le grand cercle est l'équateur dont on a déjà vu qu'il était une géodésique, exemple 8.12.

(Si l'équation du plan est $ax + by + cz = 0$, le changement de variable envoie \vec{E}_3 troisième vecteur de base canonique sur $\vec{b}_3 = \vec{n}$ où $\vec{n} = \frac{(a,b,c)^t}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ vecteur normal unitaire du plan, et \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sur deux vecteurs \vec{b}_1, \vec{b}_2 tels que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ forme une base orthonormée.)

Réponse. Bis : calcul direct = exercice de calcul différentiel.

Les grands cercles donc de la forme, pour une sphère centrée à l'origine, si $R > 0$ (rayon) et si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est non nul (vecteur normal à un plan passant par l'origine) :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$$

On se place en coordonnées sphériques (satisfaction automatique de $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$) ; les grands cercles sont donc définis par (relation implicite entre θ et φ) :

$$a \cos \theta \cos \varphi + b \sin \theta \cos \varphi + c \sin \varphi = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (8.13)$$

Par exemple, si $a = b = 0$ (le plan est horizontal), alors on a $c \neq 0$ d'où $\varphi = 0$, ce avec θ quelconque, et le grand cercle est l'équateur ; si $c = 0$ (le vecteur normal est horizontal), alors $a \cos \theta + b \sin \theta = 0$, i.e. $\tan \theta = \text{cste}$ (si $b \neq 0$) (sinon c'est $\cotan \theta = \text{cste}$), et donc $\theta = \text{cste}$: on est sur un méridien.

On suppose $c \neq 0$, et quitte à multiplier par une constante, on prend $c = -1$ et on obtient l'expression explicite :

$$\varphi = \varphi(\theta) = \tan^{-1}(a \cos \theta + b \sin \theta).$$

Paramétrons un grand cercle en θ , soit :

$$\vec{c}(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\varphi(\theta)) \\ \sin \theta \cos(\varphi(\theta)) \\ \sin(\varphi(\theta)) \end{pmatrix}.$$

Son vecteur vitesse en $\vec{x} = \vec{c}(\theta)$ est $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(\theta) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos(\varphi(\theta)) \\ \cos \theta \cos(\varphi(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix} + R\varphi'(\theta) \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin(\varphi(\theta)) \\ -\sin \theta \sin(\varphi(\theta)) \\ \cos(\varphi(\theta)) \end{pmatrix}$,

i.e.

$$\vec{c}'(\theta) = \vec{e}_2(\vec{x}) + \varphi'(\theta)\vec{e}_3(\vec{x}), \quad \text{quand } \vec{x} = \vec{c}(\theta).$$

Et donc, en omettant \vec{x} et θ pour alléger l'écriture :

$$\begin{aligned} \vec{c}'' &= d\vec{e}_2 \cdot \vec{c}' + \varphi'' \vec{e}_3 + \varphi' d\vec{e}_3 \cdot \vec{c}' \\ &= d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \varphi' d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \varphi'' \vec{e}_3 + \varphi' d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + \varphi'^2 d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3, \\ &= -R \cos^2 \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3 - 2\varphi' \tan \varphi \vec{e}_2 + \varphi'' \vec{e}_3 - \varphi'^2 R \vec{e}_1 \end{aligned}$$

Et en projetant sur le plan tangent on obtient :

$$\text{Proj}_{TS}(\vec{c}''(\theta)) = -2\varphi' \tan \varphi \vec{e}_2 + (\varphi'' + \sin \varphi \cos \varphi) \vec{e}_3.$$

Cette projection n'est pas nulle (le long d'un méridien par exemple où quand φ n'est pas constant), mais le grand cercle n'a pas été parcouru à vitesse constante : la paramétrisation choisie du grand cercle (paramétrisation en θ) ne permet pas d'appliquer la définition d'une géodésique. Choisissons maintenant une paramétrisation à vitesse constante.

Les vecteurs \vec{e}_2 et \vec{e}_3 étant orthogonaux, on a $\|\vec{c}'\|^2 = \|\vec{e}_2 + \varphi' \vec{e}_3\|^2 = \|\vec{e}_2\|^2 + \varphi'^2 \|\vec{e}_3\|^2$, et donc :

$$\|\vec{c}'\| = R(\cos^2 \varphi + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}},$$

est la vitesse de parcours avec le paramétrage en θ . On effectue alors le changement de paramétrage $\theta \leftrightarrow t$ tel que $dt = (\cos^2 \varphi + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}} d\theta$, i.e. on pose :

$$\tilde{c}(t) = \vec{c}(\theta), \quad \text{où donc} \quad \frac{d\theta}{dt}(t) = (\cos^2 \varphi + \varphi'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi(\theta(t)).$$

(Il faut un changement de paramétrage inversible d'inverse continu, ce qui est le cas car $\cos^2 \varphi + \varphi'^2 = \frac{1}{R} \|\vec{c}'(\theta)\|$ avec $\|\vec{c}'(\theta)\| \geq \|\vec{e}_2\| > 0$.) On a maintenant :

$$\tilde{c}'(t) = \vec{c}'(\theta) \frac{d\theta}{dt}(t) = (\cos^2 \varphi + \varphi'^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{c}'(\theta), \quad \text{quand } \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(\theta),$$

de norme constante = R : avec la paramétrisation t proposée, le cercle est parcouru à vitesse constante.

Et :

$$\tilde{c}''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tilde{c}'(\theta) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tilde{c}''(\theta), \quad \text{quand } \theta = \theta(t).$$

Et ayant $(\varphi \circ \theta)'(t) = \varphi'(\theta(t))\theta'(t)$, on a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\varphi'\theta'(-\sin\varphi\cos\varphi + \varphi'')(\cos^2\varphi + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}} = \varphi' \frac{\sin\varphi\cos\varphi - \varphi''}{(\cos^2\varphi + \varphi'^2)^2},$$

et donc

$$\tilde{c}''(t) = \varphi' \frac{\sin\varphi\cos\varphi - \varphi''}{(\cos^2\varphi + \varphi'^2)^2} \tilde{c}'(\theta) + \frac{1}{(\cos^2\varphi + \varphi'^2)} \tilde{c}''(\theta),$$

et donc la projection $\text{Proj}_{TS}(\tilde{c}''(t))$ donne, au préalable multipliée par $(\cos^2\varphi + \varphi'^2)^2 \neq 0$ pour simplifier, et notant $P = \text{Proj}_{TS}(\tilde{c}''(t)) (\cos^2\varphi + \varphi'^2)^2$:

$$P = \varphi'(\sin\varphi\cos\varphi - \varphi'')(\tilde{e}_2 + \varphi'\tilde{e}_3) + (\cos^2\varphi + \varphi'^2)(-2\varphi'\tan\varphi\tilde{e}_2 + (\varphi'' + \sin\varphi\cos\varphi)\tilde{e}_3)$$

Cette projection est nulle ssi les composantes en \tilde{e}_2 et en \tilde{e}_3 sont nulles, i.e. ssi :

$$\begin{cases} \varphi'(\varphi'' + \sin\varphi\cos\varphi + 2\tan\varphi\varphi'^2) = 0, \\ 2\varphi'^2\cos\varphi\sin\varphi + (\varphi'' + \sin\varphi\cos\varphi)\cos^2\varphi = 0. \end{cases}$$

On a $\tan^{-1}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Et $\varphi(\theta) = \tan^{-1}(a\cos\theta + b\sin\theta)$.

Et $\varphi'(\theta) = \frac{-a\sin\theta + b\cos\theta}{1+\tan^2(\varphi)} = \cos^2\varphi(-a\sin\theta + b\cos\theta)$.

Et $\varphi''(\theta) = -2\sin\varphi\cos\varphi\varphi'(-a\sin\theta + b\cos\theta) - \cos^2\varphi(a\cos\theta + b\sin\theta) = -2\tan\varphi\varphi'^2 - \cos\varphi\sin\varphi$.

D'où la première nullité.

D'où $(\varphi'' + \sin\varphi\cos\varphi)\cos^2\varphi = -2\cos\varphi\sin\varphi\varphi'^2$, d'où la deuxième nullité. \blacksquare

Proposition 8.20 Soit $\tilde{\gamma} : u \rightarrow \tilde{x} = \tilde{\gamma}(u) \in S$ une courbe (non parcourue à vitesse constante a priori). Cette courbe est une géodésique ssi :

$$\text{Proj}_{TS}(\tilde{\gamma}''(u)) = \frac{(\tilde{\gamma}''(u), \tilde{\gamma}'(u))_{\mathbb{R}^n}}{\|\tilde{\gamma}'(u)\|^2} \tilde{\gamma}'(u). \quad (8.14)$$

Si on note $\tilde{w}(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}'(u)$ le vecteur tangent en $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(u)$, on a de manière équivalente :

$$\text{Proj}_{TS}(d\tilde{w}(\tilde{x}).\tilde{w}(\tilde{x})) = \frac{(d\tilde{w}(\tilde{x}).\tilde{w}(\tilde{x}), \tilde{w}(\tilde{x}))_{\mathbb{R}^n}}{\|\tilde{w}(\tilde{x})\|^2} \tilde{w}(\tilde{x}). \quad (8.15)$$

Preuve. On se ramène à un paramétrage à vitesse constante : soit $t : u \rightarrow t(u)$ une fonction C^2 strictement croissante (de fonction inverse $u : t \rightarrow u(t)$ C^2 strictement croissante) et soit $\tilde{c} : t \rightarrow \tilde{c}(t) = \tilde{\gamma}(u(t))$ la courbe telle que $\|\tilde{c}'(t)\| = 1$ pour tout t . Comme $\tilde{c}'(t) = \tilde{\gamma}'(u(t))u'(t)$, on choisit donc $u'(t) = \frac{1}{\|\tilde{\gamma}'(u(t))\|}$, ou encore $t'(u) = \|\tilde{\gamma}'(u)\|$.

Comme $\tilde{\gamma}(u) = \tilde{c}(t)$ quand $t = t(u)$, i.e. $\tilde{\gamma}(u) = \tilde{c}(t(u))$, on obtient $\tilde{\gamma}'(u) = \tilde{c}'(t(u))t'(u)$, puis :

$$\tilde{\gamma}''(u) = \tilde{c}''(t(u))(t'(u))^2 + \tilde{c}'(t(u))t''(u).$$

Ayant \tilde{c} une géodésique, on a $\text{Proj}_{TS}(\tilde{c}''(t)) = 0$, et donc (avec Proj linéaire et $\tilde{c}'(t)$ dans le plan tangent) :

$$\text{Proj}_{TS}(\tilde{\gamma}''(u)) = \tilde{c}'(t(u))t''(u) = \tilde{\gamma}'(u) \frac{t''(u)}{t'(u)}.$$

Et $t'(u) = \|\tilde{\gamma}'(u)\| = \left((\tilde{\gamma}'(u), \tilde{\gamma}'(u))_{\mathbb{R}^n}\right)^{\frac{1}{2}}$ donne :

$$t''(u) = \frac{1}{2} \left((\tilde{\gamma}'(u), \tilde{\gamma}'(u))_{\mathbb{R}^n}\right)^{-\frac{1}{2}} 2(\tilde{\gamma}''(u), \tilde{\gamma}'(u))_{\mathbb{R}^n},$$

soit $t''(u) = \frac{(\tilde{\gamma}''(u), \tilde{\gamma}'(u))_{\mathbb{R}^n}}{\|\tilde{\gamma}'(u)\|}$. D'où (8.14).

Puis $\tilde{\gamma}'(u) = \tilde{w}(\tilde{\gamma}(u))$ donne $\tilde{\gamma}''(u) = d\tilde{w}(\tilde{\gamma}(u)).\tilde{\gamma}'(u)$, soit $\tilde{\gamma}''(u) = d\tilde{w}(\tilde{x}).\tilde{w}(\tilde{x})$ quand $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(u)$. D'où (8.15). \blacksquare

8.2.2 Equation

La principale difficulté réside dans les notations. On commence par reprendre les notations précédentes :

Soit U un ouvert dans \mathbb{R}^m (espace des paramètres); et soit S une variété de dimension m dans \mathbb{R}^n (espace géométrique) paramétrisée par :

$$\vec{\varphi} : \vec{q} = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^m \end{pmatrix} \in U \longrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{q}) \\ \vdots \\ x^n(\vec{q}) \end{pmatrix} \in S,$$

avec $\vec{\varphi}$ supposée être un difféomorphisme C^∞ . C'est une système de coordonnées sur S . On dispose ainsi de la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ du système.

On considère une courbe (régulière) sur S :

$$\vec{c} : t \in]a, b[\longrightarrow \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{c}(t) = \vec{\varphi}(\vec{q}(t)) \in S.$$

avec $\vec{q} : t \in]a, b[\longrightarrow \vec{q}(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ une fonction donnée (courbe dans $U \subset \mathbb{R}^m$).

On choisit comme base la base canonique $(\vec{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ de \mathbb{R}^m , et on note alors :

$$\vec{q} : t \in]a, b[\longrightarrow \vec{q}(t) = \sum_{i=1}^m q^i(t) \vec{E}_i \in \mathbb{R}^m.$$

La vitesse le long de la courbe est :

$$\frac{d\vec{q}}{dt}(t) = \dot{\vec{q}}(t) = \sum_{i=1}^m \dot{q}^i(t) \vec{E}_i = \begin{pmatrix} \dot{q}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}^m(t) \end{pmatrix}_{\mathbb{R}^m}.$$

Proposition 8.21 On a en $\vec{x} = \vec{c}(t) = \vec{\varphi}(\vec{q}(t))$:

$$\vec{c}'(t) = \sum_{i=1}^m \dot{q}^i(t) \vec{e}_i(\vec{x}), \quad (8.16)$$

i.e. les $(\dot{q}^i(t))_{i=1,\dots,m}$ sont les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{c}'(t) = \vec{v}(\vec{x})$ de la courbe \vec{c} en $\vec{x} = \vec{c}(t)$ dans la base du système de coordonnées en \vec{x} . On note abusivement :

$$\vec{c}' = \sum_{i=1}^m \dot{q}^i \vec{e}_i. \quad (8.17)$$

Preuve. On a $\vec{c}(t) = \vec{\varphi}(\vec{q}(t))$ d'où en dérivant :

$$\vec{c}'(t) = d\vec{\varphi}(\vec{q}(t)) \cdot \frac{d\vec{q}}{dt}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{dq^i}{dt}(t) d\vec{\varphi}(\vec{q}(t)) \cdot \vec{E}_i = \sum_{i=1}^m \dot{q}^i(t) \vec{e}_i(\vec{x}),$$

puisque $\vec{e}_i(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. ▀

Corollaire 8.22 La projection de l'accélération dans le plan tangent est donnée par :

$$\text{Proj}_{TS}(\vec{c}''(t)) = \sum_{i=1}^m \left(\ddot{q}^i(t) + \sum_{j,k=1}^m \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j(t) \dot{q}^k(t) \right) \vec{e}_i(\vec{x}). \quad (8.18)$$

Preuve. En dérivant $\vec{c}'(t) = \sum_{i=1}^m \dot{q}^i(t) \vec{e}_i(\vec{c}(t))$, cf. (8.16), on a :

$$\vec{c}''(t) = \sum_{i=1}^m \ddot{q}^i(t) \vec{e}_i(\vec{c}(t)) + \sum_{j=1}^m \dot{q}^j(t) d\vec{e}_j(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}'(t) = \sum_{i=1}^m \ddot{q}^i(t) \vec{e}_i(\vec{x}) + \sum_{j,k=1}^m \dot{q}^j(t) \dot{q}^k(t) d\vec{e}_j(\vec{x}) \cdot \vec{e}_k(\vec{x}).$$

Comme $d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \sum_{i=1}^m \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i$, on déduit que $\text{Proj}_{TS}(d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \sum_{i=1}^m \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i$, d'où (8.18). ▀

On en déduit :

Corollaire 8.23 (Les équations déterminant une géodésique.) Soit $\vec{c} : t \rightarrow \vec{x} = \vec{c}(t) = \vec{\varphi}(\vec{q}(t)) \in S$ une courbe sur S , et soit $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ son vecteur tangent au point $\vec{x} = \vec{c}(t)$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) \vec{c} est une géodésique,
- (ii) pour tout $i = 1, \dots, m$:

$$\ddot{q}^i(t) + \sum_{j,k=1}^m \Gamma_{jk}^i(\vec{x}) \dot{q}^j(t) \dot{q}^k(t) = 0, \quad (8.19)$$

- (iii) son vecteur tangent est transporté parallèlement à la courbe :

$$\text{Proj}_{TS}(d\vec{v}.\vec{v}) = 0. \quad (8.20)$$

Et en particulier, une courbe qui vérifie (8.19) ou (8.20) est parcourue à vitesse constante (c'est une géodésique).

Preuve. (i) \Rightarrow (ii). Si \vec{c} est une géodésique, alors $\text{Proj}_{TS}(\vec{c}''(t)) = 0$ et (8.18) implique (8.19).

(ii) \Leftrightarrow (iii). On a $\vec{c}'(t) = \vec{v}(\vec{c}(t))$, d'où $\vec{c}''(t) = d\vec{v}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$. Donc (8.19) équivaut à (8.20).

(iii) \Rightarrow (i). Car $\vec{c}''(t) = d\vec{v}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})$. ▀

Remarque 8.24 On peut montrer directement qu'une courbe qui vérifie (8.19) est parcourue à vitesse constante : avec (8.14) et (8.18) on obtient :

$$\frac{(\vec{c}''(t), \vec{c}'(t))_{\mathbb{R}^n}}{\|\vec{c}'(t)\|} \vec{c}'(t) = 0,$$

et comme la courbe est régulière on a $\vec{c}'(t) \neq \vec{0}$, et donc $(\vec{c}''(t), \vec{c}'(t))_{\mathbb{R}^n} = 0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\vec{c}'(t)\|^2) = 0$: la courbe est parcourue à vitesse constante. ▀

Exercice 8.25 Réciproque de l'exercice 8.19. Montrer à l'aide de (8.19) que les géodésiques sur la sphère $S = S(0, R)$ de \mathbb{R}^3 , passant par un point \vec{x}_0 donné, sont les grands cercles.

Réponse. Première réponse : soit \vec{x}_0 donné sur la sphère et soit \vec{c} une géodésique passant par \vec{x} . Soit $\vec{c}'(t) = \vec{v}(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$. Quitte à faire un changement de variables, on peut supposer que \vec{x}_0 est sur l'équateur, et que $\vec{v}(\vec{x}_0)$ est tangent horizontal. L'équateur est solution de (8.19), et donc c'est la solution. Et c'est un grand cercle.

Réponse. Bis. Deuxième réponse : calculs génériques (exercice de calcul différentiel).

1- Les grands cercles (non verticaux) d'une sphère de rayon R centrée à l'origine sont données par (8.13), où on prend $c=1$:

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \tan \varphi.$$

(On a $\cos \varphi \neq 0$, i.e. $\varphi \neq \pm\pi/2$, le plan choisi étant non vertical ne passant pas par les pôles).

En supposant $\theta = \theta(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$, on obtient donc en dérivant :

$$\theta'(-a \sin \theta + b \cos \theta) = \varphi'(1 + \tan^2 \varphi),$$

et en dérivant encore :

$$\theta''(-a \sin \theta + b \cos \theta) + \theta'^2(-a \cos \theta - b \sin \theta) = \varphi''(1 + \tan^2 \varphi) + 2\varphi'^2 \tan \varphi(1 + \tan^2 \varphi),$$

soit :

$$\theta''(-a \sin \theta + b \cos \theta) - \theta' \tan \varphi = \varphi''(1 + \tan^2 \varphi) + 2\varphi' \theta' \tan \varphi(-a \sin \theta + b \cos \theta),$$

soit :

$$(\theta'' - 2\varphi' \theta' \tan \varphi)(-a \sin \theta + b \cos \theta) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\varphi'' + \theta' \cos \varphi \sin \varphi). \quad (8.21)$$

2- Les géodésiques satisfont à une équation différentielle vérifiée par les grands cercles : ce sont les grands cercles. Vérifions-le avec les équations de la géodésique données par (8.19), avec (2.6) :

$$\begin{cases} \theta'' - 2\theta' \varphi' \tan \varphi = 0, \\ \varphi'' + \theta'^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Et ces équations vérifient trivialement (8.21).

Remarque : on peut intégrer la première équation, réécrite $\frac{\theta''}{\theta'} = 2\varphi' \tan \varphi = 2\varphi' \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$: on obtient $\log(\theta') = -2 \log(\cos \varphi) + \tilde{c} = \log(\frac{c}{\cos^2 \varphi})$, où $\tilde{c} = \log c \in \mathbb{R}$. D'où $\theta' = \frac{c}{\cos^2 \varphi} = c(1 + \tan^2 \varphi)$. La seconde équation donne alors $\varphi'' + c^2 \tan \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 0$, équation différentielle en $\vec{\varphi}$. ▀

Proposition 8.26 Soit \vec{c} une courbe sur S . Si \vec{c} est la courbe la plus courte joignant deux points A et B (nécessairement sur la courbe), alors \vec{c} est une géodésique sur S .

Preuve. On considère une famille de courbes $\vec{c}_u : t \in [a, b] \rightarrow \vec{c}_u(t)$ sur S , avec $u \in]-1, 1[$ telles que $\vec{c}_u(a) = A$ et $\vec{c}_u(b) = B$ pour tout u (toutes les courbes commencent en A pour se terminer en B), famille telle que $\vec{c} = \vec{c}_{u_0}$ est la courbe la plus courte joignant A et B . On note $\vec{c}(u, t) = \vec{c}_u(t)$ et on suppose que toutes les fonctions \vec{c} sont 2 fois différentiables. La longueur d'une courbe \vec{c}_u est :

$$L(u) = \int_a^b \|\vec{c}_u'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(u, t) \right\| dt.$$

Par hypothèse $L(u)$ est minimum pour $u = 0$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial u} (\|\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(u, t)\|) = \frac{\partial}{\partial u} ((\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(u, t), \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(u, t))_{\mathbb{R}^n})^{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{\partial^2 \vec{c}}{\partial u \partial t}(u, t), \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(u, t))_{\mathbb{R}^n}}{\|\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(u, t)\|},$$

d'où, en dérivant sous le signe \int :

$$\frac{dL}{du}(u) = \int_a^b (\frac{\partial^2 \vec{c}}{\partial u \partial t}(u, t), \frac{\vec{c}_u'(t)}{\|\vec{c}_u'(t)\|})_{\mathbb{R}^n} dt.$$

On note $\vec{w}_u(t) = \frac{\vec{c}_u'(t)}{\|\vec{c}_u'(t)\|}$ (vecteur vitesse normalisé), et par intégration par parties on obtient :

$$\frac{dL}{du}(u) = - \int_a^b (\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}(u, t), \frac{d\vec{w}_u}{dt}(t))_{\mathbb{R}^n} dt + (\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}(u, 1), \vec{w}_u(1))_{\mathbb{R}^n} - (\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}(u, 0), \vec{w}_u(0))_{\mathbb{R}^n},$$

avec $\vec{c}(u, 1) = B$ constant pour tout u , donc de dérivée en u nulle, idem pour $\vec{c}(u, 0) = A$: les termes de bord sont nuls. Donc avec $\frac{dL}{du}(u_0) = 0$, on a :

$$\int_a^b (\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}(u_0, t), \frac{d\vec{w}_{u_0}}{dt}(t))_{\mathbb{R}^n} dt = 0.$$

Ceci devant être vrai pour tout a, b (ou tout A, B sur la courbe), on en déduit que pour tout t on a $\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}(u_0, t) \perp \frac{d\vec{w}_{u_0}}{dt}(t)$ pour tout t . Les courbes \vec{c}_u étant toutes dans S , le vecteur $\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}(u, t)$ est dans TS . Et si on prend toutes les familles de courbes possibles, notant $\vec{x} = \vec{c}_u(t)$, on en déduit que l'accélération $\text{Proj}_{T_{\vec{x}}S} \frac{d\vec{w}_{u_0}}{dt}(t)$ est nulle (voir exercice suivant) : la courbe est une géodésique. \blacksquare

Exercice 8.27 Soit $\vec{c} : t \in [a, b] \rightarrow \vec{c}(t)$ une courbe non parcourue à vitesse constante. On se donne un paramétrage s intrinsèque de la courbe (parcours à vitesse unité), i.e. on pose $\vec{r}(s) = \vec{c}(t(s))$ pour $s \in [0, L]$, où donc $s \rightarrow t(s)$ est un changement de variable d'inverse $t \rightarrow t(s)$ qui donne $\|\vec{r}'(s)\| = 1$ pour tout s . On pose $\vec{w}(t) = \frac{\vec{c}'(t)}{\|\vec{c}'(t)\|}$. Montrer que $\frac{d\vec{w}}{dt}(t)$ est parallèle à $\vec{r}''(s)$, i.e. que ces deux vecteurs sont normaux à la courbe (alors que $\vec{c}''(t)$ n'est pas parallèle à $\vec{r}''(s)$ en général).

Réponse. On a $\frac{d\|\vec{c}'(t)\|}{dt} = \frac{d}{dt} ((\vec{c}'(t), \vec{c}'(t))_{\mathbb{R}^n})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|\vec{c}'(t)\|} (\vec{c}''(t), \vec{c}'(t))_{\mathbb{R}^n} = (\vec{c}''(t), \vec{w}(t))_{\mathbb{R}^n}$, d'où d'une part :

$$\vec{w}'(t) = \frac{\vec{c}''(t)\|\vec{c}'(t)\| - \vec{c}'(t)(\vec{c}''(t), \vec{w}(t))_{\mathbb{R}^n}}{\|\vec{c}'(t)\|^2}.$$

Et d'autre part $\vec{r}(s) = \vec{c}(t(s))$ donne $\vec{r}'(s) = \vec{c}'(t(s)) t'(s)$ qui est normé à 1, d'où $t'(s) = \frac{1}{\|\vec{c}'(t(s))\|}$. Puis

$$\vec{r}''(s) = \vec{c}''(t(s)) (t'(s))^2 + \vec{c}'(t(s)) t''(s),$$

avec $t''(s) = ((\vec{c}'(t(s)), \vec{c}'(t(s)))_{\mathbb{R}^n})^{-\frac{1}{2}}$ qui donne $t''(s) = -t'(s)(\vec{c}''(t(s)), \vec{c}'(t(s)))_{\mathbb{R}^n} \|\vec{c}'(t(s))\|^{-3}$. Donc, notant $t = t(s)$:

$$\vec{r}''(s) = \vec{c}''(t) \frac{1}{\|\vec{c}'(t)\|^2} - \vec{c}'(t) (\vec{c}''(t), \vec{c}'(t))_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\vec{c}'(t)\|^4}.$$

Et donc $\vec{w}'(t) = \|\vec{c}'(t)\| \vec{r}''(s)$: les vecteurs sont parallèles. Et comme pour un paramétrage curviligne intrinsèque on a $\vec{r}''(s) \perp \vec{r}'(s)$ (car $\|\vec{r}'(s)\|^2 = 1$), on en déduit que \vec{w} est également orthogonal à la courbe. \blacksquare

8.3 Shifter

Soit \vec{c} une courbe sur S .

Soit $\vec{w}_0 \in TS_{\vec{x}_0}$ un vecteur du plan tangent à S en \vec{x}_0 . Par résolution de l'équation différentielle linéaire avec condition initiale :

$$\frac{D\vec{w}}{dt} = 0, \quad \text{avec condition initiale} \quad \vec{w}(\vec{x}_0) = \vec{w}_0, \quad (8.22)$$

voir la notation (8.3), il existe un unique champ de vecteur \vec{w} le long de \vec{c} solution.

Définition 8.28 Ce champ de vecteurs solution est dit être le champ de vecteurs transporté parallèlement à \vec{c} à partir de \vec{w}_0 .

Définition 8.29 On appelle alors transport parallèle du point $\vec{c}(s)$ au point $\vec{c}(t)$ le long de \vec{c} l'application $S_{t,s}$ ("shifter" en anglais) :

$$S_{t,s} : \begin{cases} T_{\vec{c}(s)}S & \longrightarrow T_{\vec{c}(t)}S \\ \vec{w}(\vec{c}(s)) & \longrightarrow \vec{w}(\vec{c}(t)) \end{cases}$$

de transport parallèle des vecteurs du plan tangent $T_{\vec{c}(s)}S$ en les vecteurs du plan tangent $T_{\vec{c}(t)}S$ le long de \vec{c} .

Exemple 8.30 En coordonnées sphériques, sur la sphère, le long d'un méridien le vecteur $\vec{e}_3(\vec{x})$ (vecteur de base tangent au méridien) est transporté parallèlement au méridien. Par contre, le long d'un parallèle le vecteur $\vec{e}_2(\vec{x})$ (vecteur de base tangent au parallèle) n'est pas transporté parallèlement au parallèle (sauf pour le parallèle = l'équateur = grand cercle). \blacksquare

Exemple 8.31 Dans \mathbb{R}^n , i.e. le cas $TS = \mathbb{R}^n$, on a $\text{Proj}_{TS} = I$ identité, et un transport parallèle dans \mathbb{R}^n n'est qu'un déplacement "identité vectorielle" du point \vec{x}_0 au point \vec{x} , i.e. : $S_{t,s} : (\vec{x}_0, \vec{w}_0) \rightarrow (\vec{x}, \vec{w}_0)$. \blacksquare

9 Formes fondamentales et courbure

9.1 Première forme fondamentale $g \in T_2^0(S)$ (métrique)

Soit $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface régulière avec $m \leq n-1$. Et $\vec{\varphi}$ définit également le système de coordonnées sur la surface et $\vec{e}_i(\vec{x}) = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i$ la base du système de coordonnées sur la surface en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. Et on note $(e^i(\vec{x}) = dq^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ la base duale sur la surface.

Et on note $G \in T_0^2(\mathbb{R}^m)$ une métrique dans \mathbb{R}^m et $g \in T_0^2(\mathbb{R}^n)$ une métrique dans \mathbb{R}^n .

Définition 9.1 La première forme fondamentale sur la surface $S = \text{Im}\vec{\varphi}$ est le tenseur métrique $g_{|TS}$ "restreint à la surface", encore noté $g \in T_2^0(S)$.

Il est donc défini comme étant en $\vec{x} \in S$ la forme bilinéaire $g_{\vec{x}} \in L^2(TS_{\vec{x}}, TS_{\vec{x}}; \mathbb{R})$ donnée par les :

$$g_{\vec{x}}(\vec{v}_{\vec{x}}, \vec{w}_{\vec{x}}) \in \mathbb{R},$$

pour tous les $\vec{v}_{\vec{x}}, \vec{w}_{\vec{x}} \in TS_{\vec{x}}$. De manière équivalente, il est défini par les :

$$g_{\vec{x}}(\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x})) \stackrel{\text{noté}}{=} g_{ij}(\vec{x}), \quad \forall i, j = 1, \dots, m,$$

et donc comme :

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dq^i \otimes dq^j,$$

au sens $g(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\vec{x}) e^i(\vec{x}) \otimes e^j(\vec{x})$ en tout $\vec{x} \in S$.

Et $[g_{\vec{x}}]_{\vec{\varphi}} = [g_{ij}(\vec{x})]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ est la matrice représentant $g_{\vec{x}}(\cdot, \cdot)$ dans la base du système de coordonnées.

Exemple 9.2 Si on utilise le produit scalaire $g(\cdot, \cdot)$ canonique de \mathbb{R}^n , on a :

$$g_{ij}(\vec{x}) = (\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{e}_j(\vec{x}))_{\mathbb{R}^n} = [\vec{e}_i(\vec{x})]^T \cdot [\vec{e}_j(\vec{x})].$$

Et pour la sphère précédente, cas $n=3$ et $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, avec la base du système sphérique, on retrouve :

$$[g_{\vec{x}}]_{sph} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\theta, \varphi)$, i.e. :

$$g_{\vec{x}} = R^2 \cos^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + R^2 d\varphi \otimes d\varphi,$$

métrique usuelle (riemanienne) sur la sphère. ▀

9.2 Deuxième forme fondamentale $k \in T_2^0(S)$: tenseur des courbures

9.2.1 Rappel : première définition de la courbure (positive), approche élémentaire

On va reformuler les résultats du cours de première année “Intégration sur les courbes et surfaces” (cours sur les repères de Frénet), en termes de géométrie différentielle, ce qui permettra de donner un sens à la courbure sous forme tensorielle.

On se place dans \mathbb{R}^n (avec ici $n = 2$ ou 3).

On se donne une courbe :

$$\vec{c} : t \in [a, b] \rightarrow \vec{x} = \vec{c}(t) \in \mathbb{R}^n$$

de paramètre t . On choisit reparamétriser la courbe à l’aide de la coordonnée curviligne intrinsèque, i.e. un paramétrage de la courbe :

$$\vec{r} : s \in [0, L] \rightarrow \vec{x} = \vec{r}(s)$$

où $s : t \in [a, b] \rightarrow s(t) \in [0, L]$ est un changement de variable (difféomorphisme croissant d’inverse $t : s \in [0, L] \rightarrow t(s) \in [a, b]$) t.q. :

$$\vec{r}(s) = \vec{c}(t(s)) \quad \text{avec} \quad \|\vec{r}'(s)\| = 1.$$

Donc la courbe géométrique $\text{Im} \vec{c} = \text{Im} \vec{r}$ est parcourue à vitesse unité quand on choisit de la représenter avec \vec{r} .

Remarque 9.3 Comme $\vec{r}'(s) = \vec{c}'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$, on a donc $\frac{ds}{dt}(t) = \|\vec{c}'(t)\|$, ce qui donne la fonction $s : t \rightarrow s(t) = \int_0^t \|\vec{c}'(\tau)\| d\tau$ (le changement de variable), et $s(t)$ est la longueur de la courbe entre les points $\vec{c}(a) = \vec{r}(0)$ et $\vec{c}(t) = \vec{r}(s(t))$. ▀

Notation. On note :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{r}'(s), \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{r}(s), \quad (9.2)$$

le vecteur unitaire tangent à la courbe en \vec{x} .

Comme $\|\vec{u}(\vec{x})\|^2 = 1 = \|\vec{r}'(s)\|^2 = (\vec{r}'(s), \vec{r}'(s))_{\mathbb{R}^n}$, on en déduit $2(\vec{r}''(s), \vec{r}'(s)) = 0$ (par dérivation), i.e. que, pour tout s :

$$\vec{r}''(s) \perp \vec{r}'(s).$$

Le vecteur $\vec{r}'(s)$ étant tangent à la courbe, on en déduit que $\vec{r}''(s)$ est orthogonal à la courbe (i.e. dans l’hyperplan orthogonal à $\vec{u}(\vec{x})$). En particulier, il n’y a pas d’accélération tangentielle à la courbe (courbe parcourue à vitesse constante) quand on choisit le paramétrage intrinsèque.

Définition 9.4

$$k(\vec{x}) = \|\vec{r}''(s)\|, \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{r}(s), \quad (9.3)$$

est appelé la courbure de la courbe en \vec{x} .

Définition 9.5 Quand $k(\vec{x}) \neq 0$, $R(\vec{x}) = \frac{1}{k(\vec{x})}$ est le rayon de courbure et

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|}, \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{r}(s), \quad (9.4)$$

appelé vecteur normal à la courbe en \vec{x} . Dans ce cas $k(\vec{x}) \neq 0$, $\vec{n}(\vec{x})$ étant défini, on a :

$$\vec{r}''(s) = k(\vec{x})\vec{n}(\vec{x}), \quad (9.5)$$

et le plan $(\vec{x}, \vec{u}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$ est appelé l’hyperplan osculateur (le plan osculateur dans \mathbb{R}^3).

Remarque 9.6 Si $k(\vec{x}) = 0$, dans \mathbb{R}^2 on peut choisir $\vec{n}(\vec{x}) = \pm \begin{pmatrix} u_2(\vec{x}) \\ -u_1(\vec{x}) \end{pmatrix}$ ($\perp \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\vec{x}) \\ u_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$) : il n'y a pas unicité du choix du sens de $\vec{n}(\vec{x})$. Dans \mathbb{R}^3 , on a encore plus de choix : cette définition de la normale ne sera pas retenue dans la suite : on lui préférera la définition à partir de la forme normale. ■

Remarque 9.7 Le plan osculateur $(\vec{x}, \vec{r}'(s), \vec{r}''(s))$ en \vec{x} est également défini par $(\vec{x}, \vec{c}'(t), \vec{c}''(t))$: en effet $\vec{c}'(t)/\vec{r}'(s(t))$, car $\vec{c}'(t) = \vec{r}'(s(t))s'(t)$, et $\vec{c}''(t) \in \text{Vect}\{\vec{r}'(s(t)), \vec{r}''(s(t))\}$ car $\vec{c}''(t) = \vec{r}'''(s(t))(s'(t))^2 + \vec{r}''(s(t))s''(t)$. ■

Exemple 9.8 Pour le cercle $\vec{c}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, on retrouve bien sûr que le rayon est $= R$ (indépendant de s), et la courbure est $k = \frac{1}{R}$ (indépendante de s) : de fait, la courbure et le rayon de courbure ont été définis pour avoir ce résultat. Ici la coordonnée curviligne intrinsèque est $s = \frac{t}{R}$. ■

Exemple 9.9 On reprend les notations de l'exemple 5.3.

Pour le cercle $\vec{x} = \vec{\varphi}(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \vec{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $s \in [0, 2\pi R]$, on a $\vec{r}''(s) = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{R} \vec{p}_1(\vec{x})$, d'où :

$$\vec{n}(\vec{x}) = -\vec{p}_1(\vec{x}),$$

et le vecteur normal unitaire est dirigée vers le centre du cercle. Et on retrouve le résultat de l'exemple 5.10. ■

Exemple 9.10 On reprend les notations de l'exemple 5.4 (cercle parcouru en sens inverse).

Pour le cercle $\vec{x} = \vec{z}(R, -\theta) = \vec{\psi}(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} = \vec{r}_2(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ -\sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $s \in [0, 2\pi R]$, on a $\vec{r}_2''(s) = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ -\sin \frac{s}{R} \end{pmatrix} = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{R} \vec{p}_1(\vec{z}(R, -\theta)) = -\frac{1}{R} \vec{p}_1(\vec{x})$, d'où :

$$\vec{n}(\vec{x}) = -\vec{p}_1(\vec{x}),$$

et la normale unitaire est encore dirigée vers le centre du cercle. Attention : cf. exemple 5.11 : le sens a changé par rapport à la définition de la forme normale unitaire. ■

9.2.2 Courbure (algébrique) : choix de la définition de la courbure

Les deux exemples précédents (9.9) et (9.10) montrent qu'on retrouve, mais uniquement au signe près, la normale unitaire définie précédemment en (5.2) et (5.6).

Cela pose un problème : il faut savoir quelle définition on choisit. En fait, la définition classique (9.3) ne sera pas retenue dans la suite : elle impose $k \geq 0$ (et le sens de \vec{n} en conséquence), alors qu'il est "naturel" de considérer les courbures négatives, ce que permet la définition 5.2 de la forme normale et de la forme normale unitaire définition 5.6. Penser à une courbe sinusoïde dont la courbure change de sens (change de signe).

En outre, la définition classique équation (9.3) ne permet pas de considérer le cas $k(\vec{x}) = 0$ pour définir un vecteur normal (en un tel point \vec{x}) ; alors que pour la définition équation (5.10), le choix de la normale n'est pas lié à la courbure.

D'où la nouvelle définition de la courbure :

Définition 9.11 On considère le vecteur normal unitaire $\vec{n}(\vec{x})$ donné par (5.10) à partir de la forme normale définie en (5.2). Il vérifie en particulier (5.11).

Soit \vec{r} une courbe dans S paramétrée par une coordonnée curviligne intrinsèque.

On appelle courbure (algébrique) de la courbe \vec{r} en $\vec{x} = \vec{r}(s) \in \text{Im}\vec{r}$ le réel $k_{\vec{r}}(\vec{x})$ donné par, quand $\vec{x} = \vec{r}(s)$:

$$\vec{r}''(s) = k_{\vec{r}}(\vec{x})\vec{n}(\vec{x}), \quad (9.6)$$

Et quand $k(\vec{x}) \neq 0$, $R(\vec{x}) = \frac{1}{k(\vec{x})}$ est le rayon de courbure (algébrique). Si $k(\vec{x}) = 0$ on dit que le rayon de courbure est infini.

Exemple 9.12 Le cercle parcouru dans le sens trigonométrique vérifie : le vecteur unitaire $\vec{n}_{\vec{x}} = -\vec{e}_1(\vec{x})$ pointe vers l'intérieur du cercle, voir exemple 5.14, et on a $\vec{r}''(s) = -\frac{1}{R}\vec{e}_1(\vec{x})$, voir exemple 9.9. Donc $\vec{r}''(s) = +\frac{1}{R}\vec{n}_{\vec{x}}$, et la courbure est positive. ■

Exemple 9.13 Le cercle parcouru dans le sens inverse vérifie : le vecteur unitaire $\vec{n}_{\vec{x}} = \vec{e}_1(\vec{x})$ pointe vers l'extérieur du cercle, voir exemple 5.15, et on a $\vec{r}''(s) = -\frac{1}{R}\vec{e}_1(\vec{x})$, voir exemple 9.10. Donc $\vec{r}''(s) = -\frac{1}{R}\vec{n}_{\vec{x}}$, et la courbure est négative. ■

Exemple 9.14 L'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ellipsoïde de révolution autour de l'axe des z (comme la planète Terre), est paramétrée usuellement par $\vec{\varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \cos \varphi \\ c \sin \varphi \end{pmatrix}$, θ et φ étant la longitude et la latitude. Plaçons-nous sur l'équateur $\varphi = 0$: la courbe considérée est donc le "cercle" de centre la terre, et de rayon a . à savoir $\vec{c}_1(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc la courbure le long de cette courbe est constante : $k_{\vec{c}_1}(\vec{x}) = \frac{1}{a}$.

Considérons un méridien par exemple $\theta = 0$: la courbe considérée est $\vec{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ 0 \\ c \sin \varphi \end{pmatrix}$, i.e. une ellipse dans un plan vertical, et la courbure le long du méridien n'est pas constante : $k_{\vec{c}_2}(\vec{x})$ varie entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{c}$.

Si on prend une courbe quelconque, on obtient la courbure associée. ■

9.2.3 Deuxième forme fondamentale $k \in T_2^0(S)$: tenseur des courbures

La courbure étant caractérisée par les variations $\vec{r}''(s)$ du vecteur tangent $\vec{r}'(s)$ le long de la courbe (en coordonnées intrinsèques), on peut également exprimer cette courbure à l'aide des variations en fonction de \vec{x} .

Notons :

$$\vec{u}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{r}'(s), \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{r}(s),$$

le vecteur tangent unitaire en \vec{x} à la courbe \vec{r} , i.e. $\vec{u}(\vec{r}(s)) = \vec{r}'(s)$. Donc en dérivant en s :

$$d\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}) = \vec{r}''(s) = k_{\vec{r}}(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x}), \quad \text{quand} \quad \vec{x} = \vec{r}(s).$$

D'où :

$$k_{\vec{r}}(\vec{x}) = \vec{n}^b(\vec{x}) \cdot (d\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x})) \quad (= g(\vec{n}(\vec{x}), d\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}))), \quad (9.7)$$

noté :

$$k_{\vec{r}} = \vec{n}^b \cdot (d\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (= g(\vec{n}, d\vec{u} \cdot \vec{u})), \quad (9.8)$$

$g(\cdot, \cdot)$ étant une métrique donnée (euclidienne dans le cas classique \mathbb{R}^n).

Définition 9.15 On définit le tenseur des courbures sur TS comme étant le tenseur $k \in T_2^0(S)$ défini par :

$$k(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{n}^b \cdot (d\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad (= g(\vec{n}, d\vec{v} \cdot \vec{w})), \quad (9.9)$$

i.e. $k(\vec{v}, \vec{w})$ est la composante normale à TS de la dérivée covariante $d\vec{v} \cdot \vec{w}$.

(N.B. : dans certaines références mathématiques comme par exemple dans Marsden et Hughes [9], il y a un signe $-$ dans la définition (9.9) ; ici on garde le signe $+$, ce qui donnera, pour le tenseur de courbure associé, le "bon signe" pour la courbure de la sphère, voir paragraphe suivant.)

En particulier pour une courbe $\vec{r}(s)$ de vecteur tangent $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{r}'(s)$ en $\vec{x} = \vec{r}(s)$, on a :

$$k(\vec{v}, \vec{v}) = k_{\vec{r}}$$

la courbure définie précédemment.

Cette définition n'est pas immédiatement satisfaisante car, \vec{v} étant dérivé dans (9.9), il n'est pas clair que k soit un tenseur :

Proposition 9.16 Soit $m = n-1$, i.e. S est une variété de dimension $n-1$ dans \mathbb{R}^n . On note $d(n^b) \stackrel{\text{noté}}{=} dn^b \in T_2^0(S)$ la différentielle de la forme normale unitaire $n^b \in T_1^0(S)$. On a, pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS$:

$$dn^b.(\vec{w}, \vec{v}) = -n^b.(d\vec{v}.\vec{w}). \quad (9.10)$$

D'où :

$$k = -dn^b, \quad (9.11)$$

et k est un tenseur $\in T_2^0(S)$ qui « mesure les variations de n^b le long de la surface » (les variations qui donnent la courbure).

Dans le système de coordonnées Φ on a pour tout $i, j = 1, \dots, m$:

$$k(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \gamma_{ij}^n \stackrel{\text{noté}}{=} k_{ij}, \quad \text{soit} \quad [k] = [\gamma_{ij}^n]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}}. \quad (9.12)$$

En particulier $k(\cdot, \cdot)$ est symétrique : pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS$ on a :

$$k(\vec{v}, \vec{w}) = k(\vec{w}, \vec{v}).$$

Et on a, pour tout $i, j = 1, \dots, m$, quand $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$:

$$k_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} \quad (= \gamma_{ij}^n), \quad (9.13)$$

i.e. le tenseur des courbures est entièrement déterminé par la métrique sur la surface.

En particulier, si la base du système de coordonnées est orthogonale (sans être nécessairement normée), la matrice $[k_{ij}]$ est diagonale.

Preuve. Par définition de $n^b \in T_1^0(S)$ on a $n^b.\vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in TS$, et donc par dérivation on a $dn^b \in T_2^0(S)$ avec pour tout $\vec{w} \in TS$:

$$dn^b.(\vec{w}, \vec{v}) + n^b.(d\vec{v}.\vec{w}) = 0,$$

d'où (9.10). En particulier :

$$dn^b.(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = -n^b.(d\vec{e}_i.\vec{e}_j) = -\gamma_{ij}^n,$$

par définition des symboles de Christoffel (cf. le système de coordonnées Φ défini en (6.3)). Ceux-ci étant symétriques en ij , $k(\cdot, \cdot)$ est symétrique. D'où (9.13) avec (3.18). \blacksquare

Définition 9.17 Définition alternative : on définit le tenseur des courbures sur TS comme étant le tenseur $k \in T_2^0(S)$ défini par (9.11) :

$$k \stackrel{\text{déf}}{=} -dn^b. \quad (9.14)$$

9.2.4 Interprétation : courbure $k(\vec{v}, \vec{v})$

Proposition 9.18 (Interprétation du tenseur des courbures.) Soit \vec{c} une courbe régulière sur S , soit $\vec{x} = \vec{c}(t)$ un point sur cette courbe.

On suppose que (localement au voisinage de \vec{x}) la courbe est contenue dans un plan orthogonal à S , i.e. contenue dans un plan $P_{\vec{x}}$ qui contient $\vec{n}(\vec{x})$.

Et on suppose la courbe parcourue à vitesse unité (quitte à la reparamétriser), i.e. $\|\vec{v}(\vec{x})\| = \|\vec{c}'(t)\| = 1$ pour tout t quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$. Alors la valeur :

$$\kappa_{\vec{v}_{\vec{x}}} = k_{\vec{x}}(\vec{v}_{\vec{x}}, \vec{v}_{\vec{x}}) \quad (9.15)$$

est la courbure en \vec{x} dans la direction $\vec{v}_{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$ (unitaire).

Preuve. On a $\|\vec{c}'(t)\|^2 = 1$ donc par dérivation on a $\vec{c}''(t) \perp \vec{c}'(t)$ (courbe parcourue à vitesse constante). Par hypothèse $P_{\vec{x}} = \text{Vect}\{\vec{c}'(t), \vec{n}(\vec{x})\} \ni \vec{c}''(t)$, et donc $\vec{c}''(t) = \kappa(\vec{x})\vec{n}(\vec{x})$ pour un certain κ : et par définition $\kappa(\vec{x})$ est la courbure.

Et $\vec{c}'(t) = \vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{c}(t))$ donne $\vec{c}''(t) = d\vec{v}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})$, et donc $n^b(\vec{x}).\vec{c}''(t) = n^b(\vec{x}).(d\vec{v}(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x})) = k(\vec{v}(\vec{x}), \vec{v}(\vec{x}))$. Donc $k(\vec{v}, \vec{v}) \stackrel{\text{noté}}{=} \kappa$ est la courbure annoncée (quand \vec{v} est unitaire). \blacksquare

Corollaire 9.19 On se place dans la base du système de coordonnées $\vec{\varphi}$. On note $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$ et :

$$k = \sum_{i,j=1}^m k_{ij} dq^i \otimes dq^j. \quad (9.16)$$

On a :

$$\kappa_{\vec{v}} = k(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^m k_{ij} v^i v^j. \quad (9.17)$$

Et en particulier :

$$\kappa_i = k\left(\frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|}, \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|}\right) \quad (= \frac{1}{\|\vec{e}_i\|^2} k_{ii}) \quad (9.18)$$

est la courbure de la surface dans la direction du i -ème vecteur de base.

N.B. : ce n'est pas en général la courbure le long de la i -ème ligne de coordonnées dans son plan osculateur mais c'est la courbure de la géodésique qui en \vec{x} a pour vecteur tangent un vecteur parallèle à \vec{e}_i (voir l'exemple des parallèles en coordonnées sphériques réécrit dans l'exemple suivant 9.20, et voir paragraphe 9.4). En d'autres termes, c'est la courbure de la surface en un point \vec{x} dans la direction \vec{v} , et non la courbure d'une courbe choisie au hasard sur la surface dont un vecteur tangent en \vec{x} est \vec{v} (il y a beaucoup de telles courbes, courbes qui n'ont pas même courbure, cf. un parallèle et un grand cercle tangents en un point sur la sphère terrestre).

Preuve. Pour une courbe passant par \vec{x} contenue dans le plan vertical de vecteur tangent $\vec{e}_i(\vec{x})$, cette même courbe reparamétrisée pour être parcourue à vitesse unitaire a pour vecteur tangent $\frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|}$, d'où la valeur de $\kappa_i = k\left(\frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|}, \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|}\right)$. ■

Exemple 9.20 Pour la sphère exprimée en coordonnées sphériques, avec (9.1) et (9.13) on obtient, ici avec $x^n = x^3 = r$:

$$k_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -R \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

Ou encore on utilise (2.5). Cela signifie :

$$k = -R \cos^2 \varphi d\theta \otimes d\theta - R d\varphi \otimes d\varphi.$$

Donc, le long d'un méridien parcouru à vitesse unité pour avoir la courbure :

$$k\left(\frac{\vec{e}_3}{\|\vec{e}_3\|}, \frac{\vec{e}_3}{\|\vec{e}_3\|}\right) = -\frac{R}{R^2} = -\frac{1}{R},$$

et le méridien (qui est un grand cercle) est une courbe de courbure $-\frac{1}{R}$ et de rayon de courbure $-R$. En particulier, le centre de courbure par rapport à un point \vec{x} sur le méridien est donnée par $\vec{x} + (-R) \cdot \vec{n}(\vec{x}) =$ le centre de la sphère : résultat qu'il fallait retrouver.

Et le long d'un parallèle parcouru à vitesse unité pour avoir la courbure :

$$k\left(\frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}\right) = \frac{-R \cos^2 \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{1}{R}$$

et le parallèle (qui n'est pas un grand cercle quand $\varphi \neq 0$) est une courbe de courbure $-\frac{1}{R}$ et de rayon de courbure $-R$. En particulier, le centre de courbure par rapport à un point \vec{x} sur le méridien est donnée par $\vec{x} + (-R) \cdot \vec{n}(\vec{x}) =$ le centre de la sphère.

Ce dernier résultat est moins intuitif (on aurait pu imaginer que le rayon de courbure était celui du cercle contenu dans le plan du parallèle) : pour le comprendre il faut remarquer que c'est la courbure de la surface qu'on calcule et non la courbure d'une courbe sur la surface. Ici un point \vec{x} de la sphère passe beaucoup de courbes dont le vecteur tangent en \vec{x} est parallèle au vecteur $\vec{v} = \vec{e}_2(\vec{x})$. Et seul ce vecteur tangent est pris en compte dans le calcul de $k(\vec{v}, \vec{v}) = -dn^b(\vec{v}, \vec{v})$. Et on s'intéresse de fait à la courbe dont le plan osculateur $\vec{x} + \text{Vect}\{\vec{r}'(s), \vec{r}''(s)\}$ contient la normale à la sphère : il est immédiat que c'est un grand cercle (géodésique), et que ce n'est pas un parallèle. D'où le résultat.

Calcul pour le parallèle : $\vec{c}'(\theta) = \vec{e}_2(\vec{x}) = R \cos \varphi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{c}''(\theta) = -R \cos \varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où le plan osculateur $(\vec{x}, \text{Vect}\{\vec{r}'(s), \vec{r}''(s)\}) = (\vec{x}, \text{Vect}\{\vec{c}'(t), \vec{c}''(t)\})$ est le plan "horizontal" (qui contient le parallèle), plan qui ne contient pas le vecteur normal à la sphère $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. Si $\varphi = 0$ on est sur l'équateur qui est un grand cercle. ■

9.3 Le tenseur $K \in T_1^1(S)$ des courbures associé

9.3.1 L'endomorphisme $K_{\vec{x}}$ associé à $k_{\vec{x}}$

Disposant de la métrique $g(\cdot, \cdot)$, à l'aide du théorème de représentation de Riesz, au tenseur de courbure $k \in T_2^0(S)$ on associe l'endomorphisme $K_{\vec{x}} \in L(T_{\vec{x}}S, T_{\vec{x}}S)$ défini par :

$$(K.\vec{v}, \vec{w})_g = k(\vec{v}, \vec{w}) \quad (= g(d\vec{v}.\vec{w}, \vec{n})), \quad (9.20)$$

au sens où, pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS$ (deux champs de vecteurs surfaciques), pour tout $\vec{x} \in S$:

$$g_{\vec{x}}(K(\vec{x}).\vec{v}(\vec{x}), \vec{w}(\vec{x})) = k_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x}), \vec{w}(\vec{x})).$$

On exprime également (9.20) en écrivant :

$$k = K^b. \quad (9.21)$$

Et k étant symétrique, K est symétrique.

Représentation matricielle. Dans la base $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n-1}$ du système de coordonnées, soient $[K] = [K_j^i]$ la matrice de K , $[g] = [g_{ij}]$ la matrice de g , et $[k] = [k_{ij}]$ la matrice de k . On a donc posé :

$$K = \sum_{i,j=1}^{n-1} K_j^i \vec{e}_i \otimes e^j, \quad g = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} e^i \otimes e^j, \quad k = \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Avec (9.20) on obtient :

$$[g].[K] = [k] \quad \text{i.e.} \quad [K] = [g]^{-1}.[k]. \quad (9.22)$$

En effet (9.20) donne $[\vec{w}]^T.[g].[K].[\vec{v}] = [\vec{w}]^T.[k].[\vec{v}]$ pour tout \vec{v}, \vec{w} . Cela s'écrit également pour tout i, j :

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} g_{i\ell} K_j^\ell = k_{ij} \quad \text{ou encore} \quad K_j^i = \sum_{\ell=1}^{n-1} g^{i\ell}.k_{\ell j}, \quad (9.23)$$

où $[g^{ij}] = \text{d\u00e9f} [g_{ij}]^{-1} = [g]^{-1}$.

Exercice 9.21 Expliciter les calculs sur la base du système de coordonnées permettant d'obtenir (9.22) ou (9.23).

R\u00e9ponse. On pose $K = \sum_{\ell, m=1}^{n-1} K_m^\ell \vec{e}_\ell \otimes dq^m$ et donc $K.\vec{e}_j = \sum_{\ell} K_j^\ell \vec{e}_\ell$ (colonne j de $[K]$). On a (9.20) d'o\u00f9 :

$$g(K.\vec{e}_j, \vec{e}_i) = k(\vec{e}_j, \vec{e}_i),$$

soit :

$$\sum_{\ell} K_j^\ell g_{\ell i} = k_{ji},$$

soit $\sum_{\ell} g_{i\ell} K_j^\ell = k_{ij}$ (par sym\u00e9trie de g et de k), soit $([g].[K])_{ij} = k_{ij}$, ce pour tout i, j , soit (9.23), d'o\u00f9 (9.22). \blacksquare

Remarque 9.22 En passant au transpos\u00e9 dans (9.22), on a \u00e9galement, par sym\u00e9trie de k , g et K :

$$[K].[g] = [k] \quad \text{i.e.} \quad [K] = [k].[g]^{-1}. \quad (9.24)$$

\blacksquare

9.3.2 Courbures principales, courbure moyenne, courbure gaussienne

D\u00e9finition 9.23 Les valeurs propres de l'endomorphisme $K_{\vec{x}}$ sont appel\u00e9es les courbures principales et leurs inverses les rayons de courbure principaux. Le premier invariant : la trace :

$$\text{Tr}(K_{\vec{x}}) \quad (9.25)$$

est appel\u00e9e courbure moyenne (somme des valeurs propres), et le dernier invariant : le d\u00e9terminant :

$$\det(K_{\vec{x}}) \quad (9.26)$$

est appel\u00e9 courbure gaussienne (produit des valeurs propres).

Proposition 9.24 Si la base du système de coordonnées est orthogonale, alors (cf. (9.18)) :

$$\kappa_i(\vec{x}) = K_i^i(\vec{x}).$$

donne la courbure en \vec{x} de la courbe contenue dans le plan $\text{Vect}\{\vec{e}_i(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})\}$.

Preuve. En effet, dans ce cas $[g]$ est diagonale, et $K_i^i = \frac{k_{ii}}{g_{ii}}$ avec $g_{ii} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \|\vec{e}_i\|^2$: on applique (9.18). \blacksquare

Exemple 9.25 Pour la sphère on a $[g]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$ dans le système de coordonnées sphériques qui est orthogonal, et donc avec (9.19) :

$$[K_{\vec{x}}] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Et $[K_{\vec{x}}]$ est la matrice des courbures (inverse des rayons de courbure) dans la base du système de coordonnées. En particulier $[\vec{e}_1]^T \cdot [K] \cdot [\vec{e}_1] = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}$ donne la courbure d'un grand cercle (courbe sur la surface contenue dans un plan normal à la surface).

Les rayons de courbures valent bien $-R$ (et R en valeur absolue), et les signes “-” sont en accord avec le centre du cercle osculateur qui est le point $\vec{x} + (-R) \cdot \vec{n}_{\vec{x}}$ (centre de la sphère).

La courbure moyenne est $-\frac{2}{R} = \text{Tr}(K)$, la courbure Gaussienne est $\frac{1}{R^2} = \det(K)$. \blacksquare

Remarque 9.26 Une autre définition de la courbure moyenne est $\frac{1}{n-1} |\text{Tr}(K)|$, qui pour la sphère redonne bien le résultat attendu $\frac{1}{R}$. Et pour obtenir une autre “courbure moyenne” à partir de la courbure gaussienne, on prend $(|\det K|)^{\frac{1}{n-1}}$ qui pour la sphère redonne $\frac{1}{R}$. \blacksquare

9.4 Géodésique et deuxième forme fondamentale

Proposition 9.27 L'équation d'une géodésique $\vec{c} :]a, b[\rightarrow S$ (qui est en particulier une courbe parcourue à la vitesse unité) s'exprime également :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = k(\vec{v}, \vec{v})\vec{n},$$

au sens $d\vec{v} \cdot \vec{v} = k(\vec{v}, \vec{v})\vec{n}$, où on a noté $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$.

Preuve. La notation $\frac{d\vec{v}(\vec{x})}{dt}$ est la notation abusive de $\frac{d(\vec{v} \circ \vec{c})}{dt}(t) = \frac{d\vec{c}'}{dt}(t) = \vec{c}''(t) = d\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{c}(t)$. Et si on projette sur la normale on obtient $\vec{n}^b(d\vec{v} \cdot \vec{v}) = k(\vec{v}, \vec{v})$. Et pour une géodésique, la projection de $d\vec{v} \cdot \vec{v}$ sur le plan tangent est nul, ce qui est le cas quand $d\vec{v} \cdot \vec{v}$ est normal à la surface. \blacksquare

10 Tenseurs des déformations

10.1 Rappel

10.1.1 Transposée d'une forme bilinéaire

Définition 10.1 Si $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, on appelle application bilinéaire transposée l'application $b^T : F \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times F$:

$$b^T(\vec{v}, \vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{v}). \quad (10.1)$$

(Il est immédiat que l'application b^T ainsi définie est bilinéaire.)

10.1.2 Différentielles premières et secondes ...

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit U un ouvert dans E . Soit :

$$f : U \rightarrow F \quad (10.2)$$

une fonction $C^0(U; F)$.

Soit \vec{u} fixé dans U . La différentielle de f en $\vec{u} \in U$ notée $(Df)(\vec{u}) = Df(\vec{u})$ est l'application linéaire (si elle existe) :

$$Df(\vec{u}) : E \rightarrow F \quad (10.3)$$

donnée par, pour $\vec{v} \in E$:

$$Df(\vec{u}).\vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{u} + h\vec{v}) - f(\vec{u})}{h} \in F.$$

Et $Df(\vec{u}).\vec{v}$ est appelée la dérivée directionnelle de f en \vec{u} dans la direction \vec{v} . Et si l'application :

$$Df : U \rightarrow L(E; F) \quad (10.4)$$

existe et est continue sur U , on dit que f est $C^1(U; F)$.

La différentielle seconde en $\vec{u} \in U$ est l'application linéaire :

$$D(Df)(\vec{u}) \stackrel{\text{noté}}{=} D^2f(\vec{u}) : E \rightarrow L(E; F) \quad (10.5)$$

donnée par (si elle existe), pour $\vec{v} \in E$:

$$D^2f(\vec{u}).\vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Df(\vec{u} + h\vec{v}) - Df(\vec{u})}{h} \in L(E; F),$$

i.e. est définie par, pour $\vec{v}, \vec{w} \in E$:

$$(D^2f(\vec{u}).\vec{v}).\vec{w} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Df(\vec{u} + h\vec{v}).\vec{w} - Df(\vec{u}).\vec{w}}{h} \in F.$$

Et si l'application :

$$D^2f : U \rightarrow L(E; L(E; F))$$

(ainsi définie) est continue sur U , on dit que f est $C^2(U; F)$.

À l'aide du difféomorphisme canonique $L(E; L(E; F)) \simeq L(E, E; F)$ on note :

$$(D^2f(\vec{u}).\vec{v}).\vec{w} \stackrel{\text{noté}}{=} D^2f(\vec{u})(\vec{v}, \vec{w}).$$

Et le théorème de Schwarz indique que si f est C^2 alors $D^2f(\vec{u})$ est symétrique : pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in E$ on a $D^2f(\vec{u})(\vec{v}, \vec{w}) = D^2f(\vec{u})(\vec{w}, \vec{v})$:

$$D^2f(\vec{u}) = D^2f(\vec{u})^T.$$

10.1.3 ... et dérivées partielles premières et secondes

Supposons que $E = E_1 \times E_2$ et $U = U_1 \times U_2$ où U_i est un ouvert dans E_i .

Pour $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in U_1 \times U_2$, on notera :

$$f_{\vec{u}_2} : U_1 \rightarrow F, \quad f_{\vec{u}_2}(\vec{u}_1) \stackrel{\text{déf}}{=} f(\vec{u}_1, \vec{u}_2), \quad (10.6)$$

idem pour $f_{\vec{u}_1}$.

La différentielle Df en $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est donnée par, pour $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E_1 \times E_2$:

$$\begin{aligned} Df(\vec{u}).\vec{v} &= Df(\vec{u}).(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = Df(\vec{u}).(\vec{v}_1, 0) + Df(\vec{u}).(0, \vec{v}_2) \\ &\stackrel{\text{noté}}{=} D_1f(\vec{u}).\vec{v}_1 + D_2f(\vec{u}).\vec{v}_2. \end{aligned}$$

Les applications linéaires ainsi définies :

$$D_1f(\vec{u}) \in L(E_1; F), \quad D_2f(\vec{u}) \in L(E_2; F), \quad (10.7)$$

sont appelées les dérivées partielles. On a donc :

$$D_1f(\vec{u}).\vec{v}_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{u}_1 + h\vec{v}_1, \vec{u}_2) - f(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}{h} \in F, \quad (10.8)$$

soit encore :

$$D_1f(\vec{u}) = Df_{\vec{u}_2}(\vec{u}_1) \quad (10.9)$$

la différentielle de $f_{\vec{u}_2}$ en \vec{u}_1 . Idem pour $D_2f(\vec{u})$.

Puis par bilinéarité, quand $\vec{u} \in U$ et $\vec{v}_i, \vec{w}_i \in E_i$:

$$\begin{aligned} D^2 f(\vec{u})((\vec{v}_1, \vec{v}_2), (\vec{w}_1, \vec{w}_2)) &= D^2 f(\vec{u})(\vec{v}_1, 0), (\vec{w}_1, 0) + D^2 f(\vec{u})(\vec{v}_1, 0), (0, \vec{w}_2) \\ &\quad + D^2 f(\vec{u})(0, \vec{v}_2), (\vec{w}_1, 0) + D^2 f(\vec{u})(0, \vec{v}_2), (0, \vec{w}_2) \\ &\stackrel{\text{noté}}{=} D_{11} f(\vec{u})(\vec{v}_1, \vec{w}_1) + D_{12} f(\vec{u})(\vec{v}_1, \vec{w}_2) \\ &\quad + D_{21} f(\vec{u})(\vec{v}_2, \vec{w}_1) + D_{22} f(\vec{u})(\vec{v}_2, \vec{w}_2). \end{aligned}$$

Les applications bilinéaires ainsi définies :

$$D_{ij} f(\vec{u}) \in L(E_i, E_j; F), \quad (10.10)$$

où :

$$D_{11} f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = D^2 f_{\vec{u}_2}(\vec{u}_1), \quad (10.11)$$

idem pour D_{22} , et :

$$\begin{aligned} D_{12} f(\vec{u}).(\vec{v}_1, \vec{w}_2) &= D^2 f(\vec{u})(\vec{v}_1, 0), (0, \vec{w}_2) = D((Df)(\vec{u}).(\vec{v}_1, 0)).(0, \vec{w}_2) \\ &= D(D_1 f(\vec{u}).\vec{v}_1).(0, \vec{w}_2) = D_2(D_1 f(\vec{u}).\vec{v}_1).\vec{w}_2, \end{aligned} \quad (10.12)$$

idem pour $D_{21} f(\vec{u})$, sont appelées les dérivées partielles secondes. Ainsi :

$$D_{ij} = D_j \circ D_i. \quad (10.13)$$

Quand $f \in C^2$, la symétrie de D^2 donne $D^2 f(\vec{u})(\vec{v}_1, 0), (0, \vec{w}_2) = D^2 f(\vec{u})(0, \vec{w}_2), (\vec{v}_1, 0)$, soit $D_{12} f(\vec{u})(\vec{v}_1, \vec{w}_2) = D_{21} f(\vec{u})(\vec{w}_2, \vec{v}_1)$, soit :

$$D_{12} f(\vec{u}) = D_2(D_1 f)(\vec{u}) = D_1(D_2 f)(\vec{u}) = D_{21} f(\vec{u})^T. \quad (10.14)$$

10.1.4 Cas particulier

Cas particulier $E_1 = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times E_2 \rightarrow F$, on a :

$$Df(\vec{u}).(1, \vec{0}) = D_1 f(\vec{u}).1 \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{\partial f}{\partial x^1}(\vec{u}) \in F, \quad (10.15)$$

Et on a, pour $v \in \mathbb{R}$ et $\vec{w} \in E_2$:

$$\begin{aligned} D_{12} f(\vec{u}).(v, \vec{w}) &= D^2 f(\vec{u}).((v, 0), (0, \vec{w})) = D((Df)(\vec{u}).(v, 0)).(0, \vec{w}) \\ &= v D\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)(\vec{u}).(0, \vec{w}) = v D_2\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)(\vec{u}).\vec{w}, \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} D_{21} f(\vec{u}).(\vec{w}, v) &= D^2 f(\vec{u}).((0, \vec{w}), (v, 0)) = D((Df)(\vec{u}).(\vec{0}, \vec{w})).(v, 0) \\ &= D((D_2 f)(\vec{u}).\vec{w}).(v, 0) = v \frac{\partial}{\partial x^1}((D_2 f)(\vec{u}).\vec{w}). \end{aligned}$$

Par symétrie de D^2 quand $f \in C^2$, on obtient :

$$D_2\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)(\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x^1}(D_2 f)(\vec{u}) \in L(E_2; F), \quad (10.16)$$

avec donc :

$$D_2 \circ \frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} \circ D_2 f. \quad (10.17)$$

Si de plus $E_2 = \mathbb{R}$, on retrouve :

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, x^2) = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2) \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x^1, x^2) \in F,$$

toujours quand $f \in C^2$.

10.1.5 Application à un mouvement $\vec{\psi}$

Soit un “mouvement” (une application C^2) :

$$\vec{\psi} : \begin{cases} [0, T] \times S_0 & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \vec{X}) & \mapsto \vec{x} = \vec{\psi}(t, \vec{X}). \end{cases} \quad (10.18)$$

(Par exemple S_0 est une surface.) Sa différentielle au point (t, \vec{X}) est donnée par, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $\vec{W} \in (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$D\vec{\psi}(t, \vec{X}).(s, \vec{W}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\psi}(t + hs, \vec{X} + h\vec{W}) - \vec{\psi}(t, \vec{X})}{h},$$

quand S_0 est une variété plate (un ouvert dans $(TS_0)_{\vec{X}}$), et si S_0 est une variété quelconque, on remplace le terme $h\vec{W}$ dans le membre de droite par $\vec{c}(h)$ où \vec{c} est une courbe en \vec{X} dans S_0 telle que $\vec{c}'(0) = \vec{W}$. Utilisant le paragraphe précédent où ici $x_1 = t$ dans (10.15), on notera :

$$D_{1.1} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad D_2 = d \quad (10.19)$$

les dérivées partielles en temps et en espace, où donc pour $(t, \vec{X}) \in [0, T] \times S_0$:

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad d\vec{\psi}(t, \vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n), \quad (10.20)$$

et $d\vec{\psi}(t, \vec{X}).\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\vec{w} \in (TS_0)_{\vec{X}}$. Et par exemple on aura pour la dérivation seconde croisée :

$$D_{12}\vec{\psi}(t, \vec{X}) = \frac{\partial d\vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) = d \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) = \frac{\partial d\vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n), \quad (10.21)$$

et, pour tout $\vec{w} \in (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$\frac{\partial d\vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}).\vec{w} \in \mathbb{R}^n. \quad (10.22)$$

10.2 En espace : jacobienne et transposée

10.2.1 Rappel : transposée d'une application linéaire

Soit $(E, (\cdot, \cdot)_E)$ et $(F, (\cdot, \cdot)_F)$ deux espaces vectoriels munis de produits scalaires, et $L \in \mathcal{L}(E; F)$ une application linéaire continue de E dans F (si E et F sont de dimension finie alors une telle application linéaire est toujours continue).

Définition 10.2 L'application linéaire transposée de L est l'application $L^T : F \rightarrow E$ définie par :

$$(L^T.\vec{w}, \vec{u})_E = (L.\vec{u}, \vec{w})_F, \quad \forall (\vec{u}, \vec{w}) \in E \times F. \quad (10.23)$$

Ayant supposé L continue, une telle application linéaire L^T existe : à \vec{w} fixé la forme linéaire $\ell_{\vec{w}} : \vec{u} \rightarrow (L.\vec{u}, \vec{w})_F$ est continue, et donc, par application du théorème de représentation de Riesz, il existe $\vec{a} \in E$ t.q. $\ell_{\vec{w}}.\vec{u} = (\vec{a}, \vec{u})_E$, on note $\vec{a} = L^T.\vec{w}$, et il est immédiat que L^T est linéaire.

On s'intéresse dans la suite uniquement au cas d'espace de dimension finie comme les $TS_{\vec{x}}$. Notons $m = \dim E$ et $n = \dim F$. Soit (\vec{e}_i) une base de E de base duale (e^i) , et soit (\vec{f}_i) une base de F de base duale (f^i) . Alors L est entièrement déterminée par les $f^i.(L.\vec{e}_j) = \text{noté } L_j^i$, et L^T par les $e^i.(L^T.\vec{f}_j) = \text{noté } (L^T)_j^i$. On a donc noté :

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_j^i \vec{f}_i \otimes e^j, \quad L^T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (L^T)_j^i \vec{e}_i \otimes f^j.$$

$[L] = [L_j^i]$ est la matrice de L , et $[L^T] = [(L^T)_j^i]$ celle de L^T , dans les bases choisies.

Exemple 10.3 Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, bases canoniques $(\vec{E}_{1;\mathbb{R}^2}, \vec{E}_{2;\mathbb{R}^2})$ de \mathbb{R}^2 et $(\vec{E}_{1;\mathbb{R}^3}, \vec{E}_{2;\mathbb{R}^3}, \vec{E}_{3;\mathbb{R}^3})$ de \mathbb{R}^3 . Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné par $L.\vec{E}_{1;\mathbb{R}^2} = \vec{E}_{1;\mathbb{R}^3}$, $L.\vec{E}_{2;\mathbb{R}^2} = \vec{E}_{2;\mathbb{R}^3}$, i.e. $[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (et $L(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est le plan horizontal de \mathbb{R}^3). On prend les produits scalaires canoniques, on a $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donné par $(L^T.\vec{E}_{j;\mathbb{R}^3}, \vec{E}_{i;\mathbb{R}^2})_{\mathbb{R}^2} = (L.\vec{E}_{i;\mathbb{R}^2}, \vec{E}_{j;\mathbb{R}^3})_{\mathbb{R}^3}$, d'où $L^T.\vec{E}_{1;\mathbb{R}^3} = \vec{E}_{1;\mathbb{R}^2}$, $L^T.\vec{E}_{2;\mathbb{R}^3} = \vec{E}_{2;\mathbb{R}^2}$, $L.\vec{E}_{3;\mathbb{R}^2} = \vec{0}$, soit $[L^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (et $\text{Ker}L^T = \text{Vect}\{\vec{E}_{3;\mathbb{R}^3}\} = (\text{Im}L)^\perp$). ■

10.2.2 Jacobienne et transposée

Soient S_0 une variété de dimension m dans \mathbb{R}^n (plus loin se sera une “surface”).

On reprend les notations (10.18) (plus loin ce sera l'application “mouvement d'une surface”) : soit $\vec{\psi} : [0, T] \times S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^2 . On utilisera les notations (10.19) et (10.20). A t fixé on note :

$$\vec{\psi}_t(\vec{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\psi}(t, \vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{x}, \quad \vec{\psi}_t(S_0) = S_t. \quad (10.24)$$

Et on suppose que $\vec{\psi}_t : S_0 \rightarrow S_t$ définit un difféomorphisme. Ainsi S_t est une variété de dimension m dans \mathbb{R}^n . (Exemple : un objet occupe la position S_0 à l'instant 0 et la position S_t à l'instant t , autrement dit S_τ est une photo de l'objet à l'instant τ).

Définition 10.4 Notons quand $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$, toujours à partir de (10.18) :

$$F_t(\vec{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} F_{\vec{X};t} \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n)$$

la différentielle de $\vec{\psi}_t$ en \vec{X} , appelée gradient de déformation (bien que ce ne soit pas un gradient mais une différentielle).

C'est l'application linéaire définie sur $(TS_0)_{\vec{X}}$ par, à t fixé :

$$F_t(\vec{X}).\vec{W} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\vec{\psi}_t(\vec{c}(s)) - \vec{\psi}_t(\vec{c}(0))}{h} \quad (= (\vec{\psi} \circ \vec{c})'(0) \stackrel{\text{noté}}{=} d\vec{\psi}(\vec{X}).\vec{c}'(0)),$$

où $\vec{c} : s \rightarrow \vec{c}(s)$ est une courbe dans S_0 en \vec{X} , i.e. t.q. $\vec{c}(0) = \vec{X}$ et $\vec{c}'(0) = \vec{W}$.

Proposition 10.5 Soit $\vec{c}_0 : s \in]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S_0$ une courbe en $\vec{X} \in S_0$ (donc telle que $\vec{c}_0(0) = \vec{X}$) de vecteur tangent $\vec{c}_0'(0) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{W}(\vec{X})$ en \vec{X} . Cette courbe est transformée par le mouvement en la courbe $\vec{c}_t : s \in]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S_t$ où $\vec{c}_t(s) = (\vec{\psi} \circ \vec{c}_0)(s)$. Alors \vec{c}_t est une courbe en $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$ de vecteur tangent en \vec{x} donné par $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{c}_t'(0)$ où :

$$\vec{w}(\vec{x}) = d\vec{\psi}_t(\vec{X}).\vec{W}(\vec{X}) \in (TS_t)_{\vec{x}}, \quad (10.25)$$

et $F_t(\vec{X})$ transforme les vecteurs tangents à $(TS_0)_{\vec{X}}$ en des vecteurs tangents à $(TS_t)_{\vec{x}}$.

Preuve. On dérive $\vec{c}_t(s) = (\vec{\psi} \circ \vec{c}_0)(s)$. ■

Définition 10.6 La formule (10.25) est appelée formule de transport des champs de vecteurs tangents par le mouvement $\vec{\psi}$.

Remarque 10.7 On notera également, pour $\vec{X} \in S_0$ fixé :

$$\vec{\psi}_{\vec{X}}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\psi}(t, \vec{X}) = \vec{x} \quad (10.26)$$

l'application “trajectoire de \vec{X} ” dans \mathbb{R}^n . (Exemple : un point de l'objet se trouve en \vec{X} à l'instant 0 et en \vec{x} à l'instant t .) Ici à \vec{X} fixé, la vitesse $\vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) = \frac{d\vec{\psi}_{\vec{X}}}{dt}(t) = \vec{v}(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^n$, n'est pas un vecteur tangent à S_t , à moins que la surface S_0 ne “glisse sur elle-même”. ■

10.2.3 $F(t, \vec{X})$ dans une base de \mathbb{R}^n

Soit $(\vec{b}_{i;0})_{i=1,\dots,n}$ et $(\vec{b}_{i;t})_{i=1,\dots,n}$ deux bases de \mathbb{R}^n . On notera $(b_0^i)_{i=1,\dots,n}$ et $(b_t^i)_{i=1,\dots,n}$ les bases duales.

Pour $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ notons :

$$\vec{X} = \sum_{i=1,\dots,n} X^i \vec{b}_{i;0}, \quad (10.27)$$

et pour $\vec{X} \in S_0$ notons :

$$\vec{x} = \vec{\psi}(t, \vec{X}) = \sum_{i=1}^n \psi^i(t, \vec{X}) \vec{b}_{i;t} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{b}_{i;t}. \quad (10.28)$$

D'où :

$$F(t, \vec{X}) = d\vec{\psi}_t(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \vec{b}_{i;t} \otimes d\psi^i(t, \vec{X}), \quad (10.29)$$

au sens, pour tout $\vec{W} \in (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \cdot \vec{W} = \sum_{i=1}^n (d\psi^i(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}) \vec{b}_{i;t}. \quad (10.30)$$

Remarque 10.8 On peut écrire :

$$d\psi^i(t, \vec{X}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi^i}{\partial X^j}(t, \vec{X}) b_j^i,$$

et donc, notant $\tilde{F}_j^i(t, \vec{X}) = \frac{\partial \psi^i}{\partial X^j}(t, \vec{X})$:

$$F(t, \vec{X}) = d\vec{\psi}(t, \vec{X}) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{F}_j^i(t, \vec{X}) \vec{b}_{i;t} \otimes b_j^i. \quad (10.31)$$

Mais cette expression ne sera pas utilisée : elle pourrait inciter à penser que F va de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n (représenté par une matrice $[\tilde{F}_j^i]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ $n \times n$), ce qui n'est pas le cas quand $m < n$: l'ensemble de définition de F est $(TS_0)_{\vec{X}}$ et non \mathbb{R}^n tout entier (quand $m < n$). Dans la suite, la matrice représentant F sera une matrice $n \times m$. ■

10.2.4 $F(t, \vec{X})$ avec la base du système $\vec{\varphi}_0$

On a $F_t(\vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n)$ avec $\dim (TS_0)_{\vec{X}} = m$, et sa représentation dans une base est une matrice $n \times m$.

Soit $\vec{\varphi}_0 : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S_0 \subset \mathbb{R}^n$ un système de coordonnées sur S_0 et soit $(\vec{e}_{I;0}(\vec{X}))_{I=1,\dots,m}$ la base du système en $\vec{X} = \vec{\varphi}_0(\vec{q}_0)$ (à savoir $\vec{e}_{I;0}(\vec{X}) = d\vec{\varphi}_0(\vec{q}_0) \cdot \vec{E}_I$ pour $I = 1, \dots, m$ où $(\vec{E}_I)_{I=1,\dots,m}$ est la base canonique de \mathbb{R}^m .) Soit $(e_0^I(\vec{X}))_{I=1,\dots,m}$ la base duale.

Soit $(\vec{b}_{i;t})_{i=1,\dots,n}$ une base de \mathbb{R}^n de base duale $(b_i^i)_{i=1,\dots,n}$. N.B. : cette base va être dérivée en temps et est donc bien considérée comme étant une base dans \mathbb{R}^n tout entier (pas uniquement de $(TS_t)_{\vec{x}}$).

On peut alors représenter F_t par :

$$F_t(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^m F_J^i(t, \vec{X}) \vec{b}_{i;t} \otimes e_0^J(\vec{X}). \quad (10.32)$$

Et $[F_J^i]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = [F]$ est la matrice $n \times m$ qui représente F dans les bases choisies. En particulier pour $J = 1, \dots, m$:

$$F_t(\vec{X}) \cdot \vec{e}_{J;0}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n F_J^i(t, \vec{X}) \vec{b}_{i;t}. \quad (10.33)$$

10.2.5 $F^T(t, \vec{X})$ avec la base du système $\vec{\varphi}_0$

On a $F_t^T(\vec{X}) \in L(\mathbb{R}^n; (TS_0)_{\vec{X}})$, et sa représentation dans une base est une matrice $m \times n$.

Avec les bases précédentes $(\vec{b}_{i;t})_{i=1,\dots,n}$ de \mathbb{R}^n et $(\vec{e}_{I;0}(\vec{X}))_{I=1,\dots,m}$ du système de coordonnées sur S_0 , on peut représenter F^T par :

$$F_t^T(\vec{X}) = \sum_{I=1}^m \sum_{j=1}^n (F^T)_j^I(t, \vec{X}) \vec{e}_{I;0}(\vec{X}) \otimes \vec{b}_t^j. \quad (10.34)$$

Et $[(F^T)_j^I]_{\substack{I=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = [F^T]$ est la matrice $m \times n$ qui représente F^T dans les bases choisies. En particulier pour $j = 1, \dots, n$:

$$F_t^T(\vec{X}) \cdot \vec{b}_{j;t} = \sum_{I=1}^m (F^T)_j^I(t, \vec{X}) \vec{e}_{I;0}(\vec{X}). \quad (10.35)$$

Et comme $(F_t^T \cdot \vec{b}_{j;t}, \vec{e}_{I;0})_{g_0} = (F_t \cdot \vec{e}_{I;0}, \vec{b}_{j;t})_{g_t}$ par définition de la transposée, et comme $F_t^T \cdot \vec{b}_{j;t} = \sum_{K=1}^m (F_t^T)_j^K \vec{e}_{K;0}$ et $F_t \cdot \vec{e}_{I;0} = \sum_{k=1}^n (F_t)_I^k \vec{b}_{k;t}$ on obtient :

$$[g_0]_{|e_0} \cdot [F_t^T] = [F_t]^T \cdot [g_t]_{|b}, \quad (10.36)$$

où $[g_0]_{|e_0} = [g_0(\vec{e}_{I;0}, \vec{e}_{J;0})]_{I,J=1,\dots,m}$ et $[g_t]_{|b} = [g_t(\vec{b}_{i;t}, \vec{b}_{j;t})]_{i,j=1,\dots,n}$ sont respectivement les matrices des métriques dans les bases choisies de $(TS_0)_{\vec{X}}$ et \mathbb{R}^n .

10.2.6 Remarque : $F(t, \vec{X})$ dans des bases de $(TS_0)_{\vec{X}}$ et $(TS_t)_{\vec{x}}$ complétées

Soit $\vec{\varphi}_t = \vec{\psi}_t \circ \vec{\varphi}_0$ le système de coordonnées choisi pour S_t . Soit $(\vec{e}_{i;t}(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ sa base en \vec{x} , à savoir $\vec{e}_{i;t}(\vec{x}) = d\vec{\varphi}_t(\vec{q}_t) \cdot \vec{E}_i$, de base duale $(e_t^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$. Par dérivation on a $d\vec{\varphi}_t = d\vec{\psi}_t \cdot d\vec{\varphi}_0$, et donc quand $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$:

$$\vec{e}_{i;t}(\vec{x}) = d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \cdot \vec{e}_{i;0}(\vec{X}). \quad (10.37)$$

Ou encore on applique (10.25).

Comme $F_t(\vec{X}) = d\vec{\psi}_t(t, \vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; (TS_t)_{\vec{x}})$, on peut exprimer $F_t(\vec{X})$ comme :

$$F_{\vec{X};t} = \sum_{i=1}^m \sum_{J=1}^m (F_t)_J^i(\vec{X}) \vec{e}_{i;t}(\vec{x}) \otimes e_0^J(\vec{X}). \quad (10.38)$$

Mais la dérivée en temps posera problème : on ne pourra pas dériver ‘‘brutalement’’ (10.38) en temps, au sens où, si on dérive (10.38) on obtient ‘‘brutalement’’, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{X})$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{J=1}^m \frac{\partial (F_t)_J^i}{\partial t}(t, \vec{X}) \vec{e}_{i;t}(\vec{x}) \otimes e_0^J(\vec{X}) + \sum_{i=1}^m \sum_{J=1}^m (F_t)_J^i \frac{d\vec{e}_{i;t}(t, \vec{x})}{dt} \otimes e_0^J(\vec{X}), \quad (10.39)$$

où on a noté $\vec{e}_i(t, \vec{x}) = \stackrel{\text{déf}}{\vec{e}_{i;t}(\vec{x})}$, et où pour $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{d\vec{e}_i(t, \vec{x})}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t}(t, \vec{x}) + d\vec{e}_i(t, \vec{x}) \cdot \vec{v}(t, \vec{x}), \quad (10.40)$$

est la dérivée totale de \vec{e}_i . Cela n’a pas de sens ici : la vitesse $\vec{v}(t, \vec{x}) \notin (TS_t)_{\vec{x}}$ a priori (sauf si par exemple on a un mouvement de surface qui ‘‘glisse sur elle-même’’), alors que $d\vec{e}_{i;t}(\vec{x})$ est un opérateur qui agit uniquement dans $(TS_t)_{\vec{x}}$ tel que défini précédemment : on a $\vec{e}_i \in TS_t = T_0^1(S_t)$ et donc $d\vec{e}_{i;t} \in T_1^1(S_t)$.

Il faut donc corriger cette approche : par exemple, quand $m = n-1$, en considérant les surfaces S_t comme étant les ‘‘fibres moyennes de surfaces épaisses’’. Par exemple, on utilise (6.3), ici :

$$\Phi_t((\vec{q}, z)) = \vec{\varphi}_t(\vec{q}) + z \vec{n}_{\vec{\varphi}_t(\vec{q})}, \quad (10.41)$$

ce qui permet de définir $(\vec{e}_{i;t})_{i=1,\dots,n}$ comme base de \mathbb{R}^n (base du système $\Phi_t =$ base de $\vec{\varphi}_t$ complétée) et non plus uniquement $(\vec{e}_{i;t})_{i=1,\dots,m}$ sur le plan tangent $(TS_t)_{\vec{x}}$.

Et maintenant, on part de (10.38), modifié en :

$$F_{\vec{X};t} = \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^m (F_t)^i_J(\vec{X}) \vec{e}_{i;t}(\vec{x}) \otimes e_0^J(\vec{X}), \quad (10.42)$$

où $(F_t)^i_J = 0$ pour tout $i \geq m + 1$. Et (10.39) est modifiée pour donner :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{J=1}^m \frac{\partial F^i_J}{\partial t}(t, \vec{X}) \vec{e}_{i;t}(\vec{x}) \otimes e_0^J(\vec{X}) + \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^m F^i_J \frac{d\vec{e}_i(t, \vec{x})}{dt} \otimes e_0^J(\vec{X}), \quad (10.43)$$

Et on pourra se servir des symboles de Christoffel γ_{ij}^n , cf. paragraphe 6.4 : pour $i = 1, \dots, m$, (10.40) donne :

$$\vec{v}_t = \sum_{j=1}^n v_t^j \vec{e}_{j;t} \Rightarrow \frac{d\vec{e}_i(t, \vec{x})}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t}(t, \vec{x}) + \sum_{j,k=1}^n v_t^j \gamma_{ij}^k \vec{e}_k(t, \vec{x}). \quad (10.44)$$

Et $\frac{d\vec{e}_i(t, \vec{x})}{dt}$ n'est pas nécessairement dans le plan tangent à cause de $\sum_{j=1}^n v_t^j \gamma_{ij}^n \vec{e}_n(t, \vec{x})$.

10.2.7 Tenseurs des déformations C et C^b

Soient \vec{W}_1, \vec{W}_2 dans $(TS_0)_{\vec{X}}$ et leurs transportés $\vec{w}_i = F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_i$ dans $(TS_t)_{\vec{x}}$ où $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$. Par définition de la transposée on a :

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2)_{g_{\vec{x},t}} = (F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_1, F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_2)_{g_{\vec{x},t}} = (F_{\vec{X};t}^T \cdot F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_{\vec{X},0}}. \quad (10.45)$$

Définition 10.9 L'endomorphisme $C_t(\vec{X}) = C_{\vec{X};t} : (TS_0)_{\vec{X}} \rightarrow (TS_0)_{\vec{X}}$ défini par :

$$C_{\vec{X};t} = F_{\vec{X};t}^T \cdot F_{\vec{X};t} \quad (10.46)$$

est appelé le tenseur des déformations en \vec{X} . Et $C_t = F_t^T \cdot F_t = TS_0 \rightarrow TS_0$ est appelé le tenseur des déformations.

Il est immédiat que $C_{\vec{X};t}$ est symétrique : $(F^T \cdot F)^T = F^T \cdot (F^T)^T = F^T \cdot F$.

Ce tenseur mesure les déformations relatives des vecteurs transportés par $\vec{\psi}_t$: (10.45) donne :

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2)_{g_{\vec{x},t}} = (C_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_{\vec{X},0}}. \quad (10.47)$$

N.B. : la définition de $C_t(\vec{X})$ dépend très fortement du choix des métriques sur $(TS_0)_{\vec{X}}$ et $(TS_t)_{\vec{x}}$.

Soit le tenseur :

$$C_t^b \in T_2^0(S_0) \quad (10.48)$$

associé à C_t à l'aide du théorème de Riesz : pour tout $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$C_t^b(\vec{X})(\vec{W}_1, \vec{W}_2) \stackrel{\text{déf}}{=} (C_t(\vec{X}) \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_{\vec{X},0}}, \quad (10.49)$$

encore noté :

$$C_{\vec{X};t}^b(\vec{W}_1, \vec{W}_2) \stackrel{\text{déf}}{=} (C_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_{\vec{X},0}}. \quad (10.50)$$

Et avec (10.47) et $\vec{w}_i = F_t(\vec{X}) \cdot \vec{W}_i$, on a :

$$C_{\vec{X};t}^b(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = g_{\vec{x};t}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \quad (= g_{\vec{x};t}(F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_1, F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_2)), \quad (10.51)$$

qui mesure les déformations relatives des vecteurs \vec{W}_1 et \vec{W}_2 après le mouvement $\vec{\psi}_t$.

Proposition 10.10 $C_t^b \in T_2^0(S_0)$ est le pull-back de la métrique $g_t \in T_2^0(S_t)$ par $\vec{\psi}_t$:

$$C_t^b = \vec{\psi}_t^* g_t, \quad (10.52)$$

Et C_t^b est une métrique sur S_0 qui ramène le calcul des déformées dans S_t à un calcul sur "la configuration de référence S_0 ".

Preuve. Par définition du pull-back on a quand $\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{X})$:

$$(\vec{\psi}_t^* g_t)_{\vec{X}}(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = g_{\vec{x},t}(d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \cdot \vec{W}_1, d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \cdot \vec{W}_2) = g_{\vec{X};0}(C_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2) = C_{\vec{X};t}^b(\vec{W}_1, \vec{W}_2).$$

Et C_t^b est bien le pull-back de g_t par $\vec{\psi}_t$.

Puis $C_{\vec{X};t}^b$ est trivialement bilinéaire symétrique, cf. (10.49), et

$$C_{\vec{X};t}^b(\vec{W}, \vec{W}) = g_{\vec{x},t}(F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}, F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}) = \|F_{\vec{X};t} \cdot \vec{W}\|_{g(\vec{x};t)}^2 > 0$$

quand $\vec{W} \neq \vec{0}$ (car $F_{\vec{X};t}$ est inversible, $\vec{\psi}$ étant un mouvement) : $C_{\vec{X};t}^b$ est un produit scalaire. \blacksquare

N.B. : $C_t(\vec{X}) \in \mathcal{L}((TS_0)_{\vec{X}}; (TS_0)_{\vec{X}})$ est un endomorphisme sur $(TS_0)_{\vec{X}}$, et comme on dispose de l'isomorphisme canonique $\mathcal{L}((TS_0)_{\vec{X}}; (TS_0)_{\vec{X}}) \simeq \mathcal{L}((TS_0)_{\vec{X}}, (TS_0)_{\vec{X}}^*; \mathbb{R})$, on identifie C_t canoniquement au tenseur $\tilde{C}_t \in T_1^1(S_0)$: l'isomorphisme est donné par $\ell(C_{t,\vec{X}} \cdot \vec{W}) = \tilde{C}_{t,\vec{X}}(\vec{W}, \ell)$, et on note $\tilde{C} = C$.

10.2.8 Tenseurs des déformations C et C^b dans une base de $(TS_0)_{\vec{X}}$

On reprend F_t donné par (10.32). On a pour $J = 1, \dots, m$:

$$C_t \cdot \vec{e}_{J;0} = F_t^T \cdot (F_t \cdot \vec{e}_{J;0}) = \sum_{k=1}^n (F_t)_J^k F_t^T \cdot \vec{b}_{k;t} = \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^m (F_t)_J^k (F_t^T)_k^I \vec{e}_{I;0}.$$

Ainsi :

$$C_t = \sum_{I,J=1}^m (C_t)_{IJ}^I \vec{e}_{I;0} \otimes e_0^J. \quad (10.53)$$

où :

$$(C_t)_{IJ}^I = \sum_{k=1}^n (F_t^T)_k^I (F_t)_J^k. \quad (10.54)$$

Et comme $[F^T] = [g_0]_{|e_0}^{-1} \cdot [F_t]^T \cdot [g_t]_{|b_t}$, on a également :

$$[C_t] = [g_0]_{|e_0}^{-1} \cdot [F_t]^T \cdot [g_t]_{|b_t} \cdot [F_t]. \quad (10.55)$$

Dans la base $(\vec{e}_{I;0}(\vec{X}))$ de $(TS_0)_{\vec{X}}$, soit $[C_t^b] = [C_{IJ;t}]$ la matrice de C_t^b :

$$C_t^b = \sum_{I,J=1}^m C_{t,IJ} e_0^I \otimes e_0^J, \quad (10.56)$$

où donc $C_{t,IJ} = C_t^b(\vec{e}_{I;0}, \vec{e}_{J;0}) = (C_t \cdot \vec{e}_{I;0}, \vec{e}_{J;0})_{g_0}$. Et avec (10.49) ou (10.51), on a :

$$[C_t^b] = [g_0]_{|e_0} \cdot [C_t] \quad \text{soit} \quad C_{t,IJ} = \sum_{K=1}^m g_{IK;0} (C_t)_J^K. \quad (10.57)$$

En effet $C^b(\vec{e}_{I;0}, \vec{e}_{J;0}) = (C \cdot \vec{e}_{I;0}, \vec{e}_{J;0})_{g_0} = \sum_K C_I^K (\vec{e}_{K;0}, \vec{e}_{J;0})_{g_0} = \sum_K C_I^K g_{KJ;0} = ([C]^T \cdot [g_0])_{IJ}$, soit $[C^b] = [C]^T \cdot [g_0]_{|e_0}$ et la matrice $[g_0]$ est symétrique (de même que $[C]$ d'ailleurs).

10.3 En temps : tenseurs des taux de déformation lagrangien D et D^b sous l'hypothèse métrique euclidienne

10.3.1 $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X})$

On a $\vec{\psi} : [0, T] \times S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\vec{\psi} \in C^2$, et donc :

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} : [0, T] \times S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{V}_t(\vec{X}), \quad (10.58)$$

et $\vec{V}(t, \vec{X})$ a un sens, est appelé la vitesse lagrangienne, et $\vec{V} \in C^1$.

On a $F_t(\vec{X}) = d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} F(t, \vec{X}) = d\vec{\psi}(t, \vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n)$ au sens $F(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}(\vec{X}) = d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \cdot \vec{W}(\vec{X})$ quand $\vec{W} \in TS_0$. Ainsi à \vec{X} fixé on dispose de $F_{\vec{X}} : [0, T] \rightarrow F_{\vec{X}}(t) = F(t, \vec{X})$ définie sur $(TS_0)_{\vec{X}}$. Et donc :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}) = d \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) = d\vec{V}(t, \vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n), \quad (10.59)$$

voir (10.20), au sens, pour tout $\vec{W}_{\vec{X}} \in (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}_{\vec{X}} = d \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}_{\vec{X}} = d\vec{V}(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}_{\vec{X}}, \quad (10.60)$$

sous l'hypothèse $\vec{\psi} \in C^2$.

10.3.2 $\frac{\partial(F^T)}{\partial t}(t, \vec{X})$ et métrique euclidienne

On dispose des métriques g_0 définie dans S_0 et g_t définie dans $\mathbb{R}^n \supset S_t$.

On a $F_t \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n)$. On a $F_t^T \in L(\mathbb{R}^n; (TS_0)_{\vec{X}})$ défini pour tout $\vec{W}_1(\vec{X}) \in (TS_0)_{\vec{X}}$ et tout $\vec{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ par :

$$g_{\vec{x},0}(F^T(t, \vec{X}) \cdot \vec{w}_2, \vec{W}_1(\vec{X})) = g_{\vec{x},t}(F(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}_1(\vec{X}), \vec{w}_2), \quad (10.61)$$

quand $\vec{x} = \vec{\psi}(t, \vec{X})$. La dérivée en temps donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F^T}{\partial t}(t, \vec{X}) \cdot \vec{w}_2, \vec{W}_1(\vec{X}) \right)_{g_{\vec{x},0}} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}_1(\vec{X}), \vec{w}_2 \right)_{g_{\vec{x},t}} + \frac{dg_{\vec{x},t}}{dt}(F(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}_1(\vec{X}), \vec{w}_2(t, \vec{x})). \end{aligned} \quad (10.62)$$

Hypothèse. On prend $g_t = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n (plus généralement on peut considérer une métrique constante dans le temps).

N.B. : souvent on prend également $g_0 = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n restreinte à S_0 , autrement dit, on dispose du même instrument de mesure (le produit scalaire euclidien) à chaque instant dans \mathbb{R}^n . (L'expression de ce produit scalaire dans une base dépendra néanmoins de la base choisie qui pourra être la base d'un système de coordonnées.)

Dans ce cas on a $\frac{dg_{\vec{x},t}}{dt} = 0$ (la métrique euclidienne ne dépend pas du temps), et (10.62) donne :

$$\left(\frac{\partial F^T}{\partial t} \cdot \vec{w}_2, \vec{W}_1 \right)_{g_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{W}_1, \vec{w}_2 \right)_{\mathbb{R}^n} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^T \cdot \vec{w}_2, \vec{W}_1 \right)_{g_0}, \quad (10.63)$$

pour tout $\vec{W}_1 \in (TS_0)_{\vec{X}}$ et $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, et donc, ayant choisi $g_t = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ la métrique euclidienne, on a :

$$\frac{\partial F^T}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^T. \quad (10.64)$$

10.3.3 $\frac{\partial C}{\partial t}(t, \vec{X})$ et métrique euclidienne

On a $C(t, \vec{X}) = F^T(t, \vec{X}) \cdot F(t, \vec{X})$ pour $(t, \vec{X}) \in [0, T] \times S_0$ défini par, pour tout $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$(C \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} = (F \cdot \vec{W}_1, F \cdot \vec{W}_2)_{g_t}. \quad (10.65)$$

D'où par dérivation en temps :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right)_{g_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{W}_1, F \cdot \vec{W}_2 \right)_{g_t} + (F \cdot \vec{W}_1, \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{W}_2)_{g_t} + \frac{dg(t, \vec{x})}{dt}(F \cdot \vec{W}_1, F \cdot \vec{W}_2). \quad (10.66)$$

On reprend l'hypothèse précédente : $g_t = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n (constante). Et donc :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial F^T}{\partial t} \cdot F + F^T \cdot \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (10.67)$$

qui vaut 2 fois la partie symétrique de $(F^T \cdot \frac{\partial F}{\partial t})$ grâce à (10.64). En particulier $\frac{\partial C}{\partial t}$ est symétrique.

10.3.4 $\frac{\partial C^b}{\partial t}(t, \vec{X})$ et métrique euclidienne

On a :

$$C_t^b(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = (C \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} \quad (= (\vec{\psi}^* g_t)(\vec{x})(\vec{W}_1, \vec{W}_2)), \quad (10.68)$$

et donc :

$$\frac{\partial C^b}{\partial t}(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right)_{g_0}, \quad (10.69)$$

avec (10.67).

Exprimé avec la métrique euclidienne dans S_t on a également :

$$\frac{\partial C^b}{\partial t}(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = (F \cdot \vec{W}_1, \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{W}_2)_{g_t} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{W}_1, F \cdot \vec{W}_2 \right)_{g_t}. \quad (10.70)$$

10.3.5 Tenseurs des taux de déformation lagrangien D et D^b et métrique euclidienne

Définition 10.11 Le tenseur taux de déformation lagrangien est le tenseur $D_t \in T_1^1(S_0)$ défini par :

$$D_t = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t}(t) \in T_1^1(S_0), \quad (10.71)$$

au sens :

$$D(t, \vec{X}) = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t}(t, \vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} D_t(\vec{X}), \quad (10.72)$$

avec $D_t(\vec{X})$ endomorphisme de $(TS_0)_{\vec{X}}$ qui est symétrique quand g_t est la métrique euclidienne.

On lui associe le tenseur $D_t^b \in T_2^0(S_0)$ à l'aide du théorème de représentation de Riesz :

$$D_t^b(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = (D_t \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0}. \quad (10.73)$$

Et comme $(D_t \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right)_{g_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (C_t \cdot \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} C_t^b(\vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_t^b}{\partial t}(\vec{W}_1, \vec{W}_2)$, on a :

$$D_t^b = \frac{1}{2} \frac{\partial C_t^b}{\partial t}(t) \in T_2^0(S_0). \quad (10.74)$$

10.4 Vitesse eulérienne $\vec{v}(t, \vec{x})$, et $d\vec{v}(t, \vec{x})$

10.4.1 Définition

Posons :

$$\vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{v}(t, \vec{x}), \quad (10.75)$$

quand $\vec{x} = \vec{\psi}(t, \vec{X})$, \vec{V} étant la vitesse lagrangienne et \vec{v} la vitesse eulérienne. Ainsi :

$$\vec{V}_t : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \vec{v}_t : S_t \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (10.76)$$

et donc :

$$d\vec{V}_t(\vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad d\vec{v}_t(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^n). \quad (10.77)$$

(Les variations spatiales le long des surfaces.)

Comme $\vec{V}(t, \vec{X}) = \vec{v}(t, \vec{x}) = \vec{v}(t, \vec{\psi}(t, \vec{X}))$, soit encore :

$$\vec{V}_t(\vec{X}) = (\vec{v}_t \circ \vec{\psi}_t)(\vec{X}), \quad (10.78)$$

on a, quand $\vec{x} = \vec{\psi}(t, \vec{X})$:

$$d\vec{V}_t(t, \vec{X}) = d\vec{v}_t(t, \vec{x}) \cdot F_t(\vec{X}). \quad (10.79)$$

Ainsi pour les $\vec{W}(\vec{X}) \in (TS_0)_{\vec{X}}$, quand $\vec{w}(t, \vec{x}) = F_t(\vec{X}) \cdot \vec{W}(\vec{X}) = (\vec{\psi}_{t*} \vec{W})(\vec{X})$ (push-forward par $\vec{\psi}$) :

$$d\vec{v}_t(t, \vec{x}) \cdot \vec{w}(t, \vec{x}) = d\vec{V}_t(t, \vec{X}) \cdot \vec{W}(\vec{X}) \in \mathbb{R}^n. \quad (10.80)$$

Remarque 10.12 $d\vec{v}_t$ n'est pas un endomorphisme de \mathbb{R}^n , sauf quand $(TS_t)_{\vec{x}} = \mathbb{R}^n$ i.e. quand S_t est un ouvert de \mathbb{R}^n . Et donc en général sa trace $\text{Tr}(d\vec{v}_t(\vec{x})) = \text{div}(\vec{v}_t(\vec{x}))$ n'a pas de sens (la trace est un opérateur défini sur les endomorphismes qui sont en particulier représentés par des matrices carrées). ▀

10.4.2 \vec{v}^\flat et $d\vec{v}^\flat$ et métrique euclidienne

On a $\vec{v}_t : S_t \rightarrow \vec{v}_t(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$, donc sa différentielle en \vec{x} vérifie :

$$d\vec{v}_t(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^n).$$

Soit la forme bilinéaire :

$$(d\vec{v}_t)^\flat(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \quad (10.81)$$

associé par Riesz à $d\vec{v}_t(\vec{x})$ relativement à la métrique $g_t(\cdot, \cdot)$: pour tout $\vec{u}(\vec{x}) \in (TS_t)_{\vec{x}}$ et tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$(d\vec{v}_t)^\flat(\vec{x})(\vec{u}(\vec{x}), \vec{w}) = (d\vec{v}_t(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}), \vec{w})_{g_{\vec{x},t}}. \quad (10.82)$$

Pour $\vec{x} \in S_t$, soit $\vec{v}_t^\flat(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$ la forme linéaire associée par Riesz à $\vec{v}_t(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$: pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{v}_t^\flat(\vec{x}) \cdot \vec{w} = (\vec{v}_t(\vec{x}), \vec{w})_{g_{\vec{x},t}}. \quad (10.83)$$

On a ainsi défini la forme différentielle $\vec{v}_t^\flat : S_t \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$. Sa différentielle en \vec{x} vérifie :

$$d(\vec{v}_t^\flat)(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^{n*}).$$

Proposition 10.13 On a, quand g_t est la métrique euclidienne :

$$d(\vec{v}_t^\flat)(\vec{x}) = (d\vec{v}_t)^\flat(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad (10.84)$$

où on a utilisé l'isomorphisme canonique $L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^{n*}) \simeq L((TS_t)_{\vec{x}}, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Preuve. Avec (10.83), on a pour $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{v}_t^\flat(\vec{x}) \cdot \vec{w} = g_{\vec{x},t}(\vec{v}_t(\vec{x}), \vec{w}),$$

d'où pour tout $\vec{u} \in TS_t$:

$$(d(\vec{v}_t^\flat)(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x})) \cdot \vec{w} = (dg_{\vec{x},t} \cdot \vec{u}(\vec{x}))(\vec{v}_t(\vec{x}), \vec{w}) + g_{\vec{x},t}(d\vec{v}_t(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}), \vec{w}),$$

d'où avec (10.82) et $dg = 0$ pour la métrique euclidienne (qui est une métrique de Killing) :

$$(d(\vec{v}_t^\flat)(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x})) \cdot \vec{w} = (d\vec{v}_t)^\flat(\vec{x})(\vec{u}(\vec{x}), \vec{w}).$$

Et on a l'identification $(d(\vec{v}_t^\flat)(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x})) \cdot \vec{w} = d(\vec{v}_t^\flat)(\vec{x})(\vec{u}(\vec{x}), \vec{w})$ grâce à l'isomorphisme canonique. ■

10.4.3 $d\vec{v}$ et $d\vec{v}^T$

Ayant $d\vec{v}_t(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^n)$, on a $d\vec{v}_t^T(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n; (TS_t)_{\vec{x}})$ défini par, pour tout $\vec{u}_{\vec{x}} \in (TS_t)_{\vec{x}}$ et tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$(d\vec{v}_t^T(\vec{x}) \cdot \vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}})_{g_{\vec{x},t}} = (d\vec{v}_t(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{\vec{x}}, \vec{w})_{g_{\vec{x},t}}. \quad (10.85)$$

On définit alors :

$$(d\vec{v}_t^T)^\flat(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n, (TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}) \quad (10.86)$$

par :

$$(d\vec{v}_t^T)^\flat(\vec{x})(\vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}}) = (d\vec{v}_t^T(\vec{x}) \cdot \vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}})_{g_{\vec{x},t}}, \quad (10.87)$$

Et avec (10.84) on définit le transposé $((d\vec{v}_t)^\flat)^T(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n, (TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R})$ par (comme le transposé d'un tenseur $\binom{0}{2}$), pour $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{u}_{\vec{x}} \in (TS_t)_{\vec{x}}$:

$$((d\vec{v}_t)^\flat)^T(\vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}}) = (d\vec{v}_t)^\flat(\vec{u}_{\vec{x}}, \vec{w}) \quad (10.88)$$

Proposition 10.14 On a, métrique euclidienne ou non :

$$((d\vec{v}_t)^\flat)^T = ((d\vec{v}_t)^\flat)^T.$$

Preuve. Pour $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{u} \in TS_t$:

$$((d\vec{v}_t)^\flat)^T(\vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}}) = ((d\vec{v}_t)^\flat)^T \cdot \vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}})_{g_{\vec{x},t}} = (d\vec{v}_t \cdot \vec{u}_{\vec{x}}, \vec{w})_{g_{\vec{x},t}} = (d\vec{v}_t)^\flat(\vec{u}_{\vec{x}}, \vec{w}) = ((d\vec{v}_t)^\flat)^T(\vec{w}, \vec{u}_{\vec{x}}).$$

■

10.5 $\vec{v}_{||}$ et divergence

10.5.1 Divergence pour les volumes ou pour les surfaces qui glissent sur elles-mêmes

La divergence de la vitesse eulérienne est une mesure de la compressibilité, voir cours précédents.

Pour les volumes, i.e. dans le cas où S_t est un ouvert de \mathbb{R}^n , on a $(TS_t)_{\vec{x}} = \mathbb{R}^n$ et on a $d\vec{v}_t(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$: l'opérateur $d\vec{v}_t(\vec{x})$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^n .

Une surface qui glisse sur elle-même, cas $S_t = S_0$, est donnée par un mouvement $\vec{\psi}_t : S_0 \rightarrow S_t = S_0$ qui vérifie : la vitesse $\vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X}) = \vec{v}(t, \vec{x}) \in (TS_t)_{\vec{x}}$ (vitesse tangente à la surface). Ainsi $d\vec{v}_t(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}; (TS_t)_{\vec{x}})$: l'opérateur $d\vec{v}_t(\vec{x})$ est un endomorphisme de $(TS_t)_{\vec{x}}$. D'où :

Proposition 10.15 Dans le cas particulier où $S_0 = \Omega_0$ et $S_t = \Omega_t$ sont des ouverts de \mathbb{R}^n , on a $d\vec{v}_t(\vec{x})$ endomorphisme de \mathbb{R}^n , et dans le cas particulier où $S_t = S_0$ (la surface glisse sur elle-même), on a $d\vec{v}_t(\vec{x})$ endomorphisme de $(TS_t)_{\vec{x}}$, la trace a un sens et vaut, lorsque $g_t(\cdot, \cdot)$ est la métrique euclidienne :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(d\vec{v}_t(\vec{x})) &\stackrel{\text{noté}}{=} \text{div} \vec{v}_t(\vec{x}) = \text{Tr}\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}).F(t, \vec{X})^{-1}\right) \\ &= \text{Tr}(D(t, \vec{X}).C(t, \vec{X})^{-1}). \end{aligned} \quad (10.89)$$

(La dernière égalité pourra être généralisée à des mouvements quelconques de surfaces.)

Preuve. Ici $F(t, \vec{X})$ est considéré comme un opérateur $(TS_0)_{\vec{X}} \rightarrow \text{Im}((TS_0)_{\vec{X}}) = (TS_t)_{\vec{x}}$ et on dispose de son inverse $F(t, \vec{X})^{-1} : (TS_t)_{\vec{x}} \rightarrow (TS_0)_{\vec{X}}$. On applique (10.79), soit $d\vec{v}_t(\vec{x}) = d\vec{V}(t, \vec{X}).F(t, \vec{X})^{-1} = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{X}).F(t, \vec{X})^{-1} \in L((TS_t)_{\vec{x}}; (TS_t)_{\vec{x}})$. D'où (10.89)₁.

Puis $C = F^T.F$ donne $2D = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial F^T}{\partial t}.F + F^T \frac{\partial F}{\partial t}$, d'où :

$$F^{-T}.2D.F^{-1} = F^{-T}.\frac{\partial F^T}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}.F^{-1} = \frac{\partial F}{\partial t}.F^{-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}.F^{-1}\right)^T,$$

puisque $g_t(\cdot, \cdot)$ est la métrique euclidienne, cf. (10.64). Et $\frac{\partial F}{\partial t}.F^{-1} \in L((TS_t)_{\vec{x}}; (TS_t)_{\vec{x}})$, d'où :

$$\text{Tr}\left(\frac{\partial F}{\partial t}.F^{-1}\right) = \text{Tr}(F^{-T}.D.F^{-1}).$$

Puis $F^{-1} = C^{-1}.F^T$, d'où $F^{-T}.D.F^{-1} = F^{-T}.D.C^{-1}.F^T$. D'où :

$$\text{Tr}\left(\frac{\partial F}{\partial t}.F^{-1}\right) = \text{Tr}(F^{-T}.D.C^{-1}.F^T) = \text{Tr}(D.C^{-1}).$$

En effet, rappel : qu'elle que soit le choix de la base (\vec{a}_i) dans $(TS_0)_{\vec{X}}$, une base (\vec{b}_i) étant donnée dans $(TS_t)_{\vec{x}} = (TS_0)_{\vec{X}}$ ici, et $[P] = [P^j_i]$ étant la matrice de passage de (\vec{a}_i) à (\vec{b}_i) , on a $\text{Tr}(P^{-1}.A.P) = \sum_{ijk}(P^{-1})^i_j A^j_k P^k_i = \sum_{ijk}(P^k_i (P^{-1})^i_j) A^j_k = \sum_{jk} \delta^k_j A^j_k = \sum_k A^k_k = \text{Tr}(A)$ (la trace est intrinsèque : ne dépend pas de l'observateur, soit ici ne dépend de la base). Ici $P = F^T$. \blacksquare

10.5.2 Définition de $\vec{v}_{||}$ sur les surfaces

L'opérateur somme $d\vec{v}_t + d\vec{v}_t^T$ n'a pas de sens en général sur les variétés : $d\vec{v}_t(\vec{x}) \in L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^n)$ alors que $d\vec{v}_t^T \in L(\mathbb{R}^n; (TS_t)_{\vec{x}})$. (Cela a un sens dans le cadre du paragraphe précédent.)

Soit S_t une surface dans \mathbb{R}^n (une variété de dimension $m = n-1$). Étant donné un système de coordonnées $\vec{\varphi}_t$ sur S_t , on dispose du vecteur normal unitaire $\vec{n}_t(\vec{x})$ en tout $\vec{x} \in S_t$. On décompose alors \vec{v}_t suivant sa partie parallèle et sa partie normale :

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{t||} + v_{tn}\vec{n}_t \in (TS_t)_{\vec{x}} \oplus \text{Vect}\{\vec{n}_t(\vec{x})\}, \quad (10.90)$$

où $v_{tn}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} n_t^b(\vec{x}).\vec{v}_t(\vec{x}) = (\vec{v}_t(\vec{x}), \vec{n}_t(\vec{x}))_{g_t, \vec{x}}$ est la projection sur la normale à la surface relativement à la métrique g_t sur $(TS_t)_{\vec{x}}$, et où $\vec{v}_{t||} = \vec{v}_t - v_{tn}\vec{n}_t$. Et on note :

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + v_n \vec{n}. \quad (10.91)$$

10.5.3 Connexion $\nabla \vec{v}_{||}$ sur $(TS_t)_{\vec{x}}$, et tenseur des courbures

(10.90) donne :

$$d\vec{v}_t(\vec{x}) = d\vec{v}_{t||}(\vec{x}) + dv_{tn}(\vec{x}) \vec{n}_t(\vec{x}) + v_{tn}(\vec{x}) d\vec{n}_t(\vec{x}), \quad \in L((TS_t)_{\vec{x}}; \mathbb{R}^n), \quad (10.92)$$

au sens, pour tout $\vec{u}(\vec{x}) \in (TS_t)_{\vec{x}}$ (avec notations allégées) :

$$d\vec{v} \cdot \vec{u} = d\vec{v}_{t||} \cdot \vec{u} + (dv_n \cdot \vec{u}) \vec{n} + v_n d\vec{n} \cdot \vec{u}. \quad (10.93)$$

D'où, pour tout $\vec{u}, \vec{w} \in (TS_t)_{\vec{x}}$, puisque $(\vec{n}, \vec{w})_{g_t} = 0$:

$$(d\vec{v} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t} = (d\vec{v}_{t||} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t} + v_n (d\vec{n} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t}.$$

Comme $\vec{v}_{t||} \in TS_t$, et on peut utiliser la connexion définie en (2.11) : pour tout $\vec{u} \in (TS_t)_{\vec{x}}$:

$$(\nabla \vec{v}_{t||} \cdot \vec{u})(\vec{x}) = \text{Proj}_{(TS_t)_{\vec{x}}} (d\vec{v}_{t||}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x})), \quad (10.94)$$

noté :

$$\nabla \vec{v}_{t||} \cdot \vec{u} = \text{Proj}_{TS_t} (d\vec{v}_{t||} \cdot \vec{u}). \quad (10.95)$$

Et donc, avec $k = -d\vec{n}^\flat \in T_2^0(S_t)$ le tenseur de courbure donné par (9.11) et $K \in T_1^1(S_t)$ l'endomorphisme associé donné par (9.20), pour tout $\vec{u}, \vec{w} \in (TS_t)_{\vec{x}}$:

$$\begin{aligned} (d\vec{v} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t} &= (\nabla \vec{v}_{t||} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t} - v_n k(\vec{u}, \vec{w}) \\ &= (\nabla \vec{v}_{t||} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t} - v_n (K\vec{u}, \vec{w})_{g_t} \end{aligned} \quad (10.96)$$

caractérise la projection de $d\vec{v} \cdot \vec{u}$ sur $(TS_t)_{\vec{x}}$, i.e. caractérise $d\vec{v}^\flat$ sur $(TS_t)_{\vec{x}} \times (TS_t)_{\vec{x}}$.

10.5.4 Divergence $\text{div}_{||} \vec{v}_{||}$

Comme :

$$\nabla \vec{v}_{t||} \in L((TS_t)_{\vec{x}}; (TS_t)_{\vec{x}}) \simeq T_1^1(S_t), \quad (10.97)$$

est un endomorphisme sur $(TS_t)_{\vec{x}}$. Et on peut définir sa trace :

$$\text{div}_{||} \vec{v}_{t||} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Tr}(\nabla \vec{v}_{t||}) \quad (10.98)$$

Le transposé de $\nabla \vec{v}_{t||}$ est aussi un endomorphisme sur $(TS_t)_{\vec{x}}$:

$$(\nabla \vec{v}_{t||})^T \in L((TS_t)_{\vec{x}}; (TS_t)_{\vec{x}}) \simeq T_1^1(S_t), \quad (10.99)$$

où, pour tout $\vec{u}, \vec{w} \in (TS_t)_{\vec{x}}$:

$$((\nabla \vec{v}_{t||})^T \cdot \vec{w}, \vec{u})_{g_t} = (\nabla \vec{v}_{t||} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t} \quad (10.100)$$

Et ainsi le symétrisé :

$$\frac{\nabla \vec{v}_{t||} + (\nabla \vec{v}_{t||})^T}{2} \in T_1^1(S_t) \quad (10.101)$$

est bien défini, et :

$$\text{div}_{||} \vec{v}_{t||} = \text{Tr}\left(\frac{\nabla \vec{v}_{t||} + (\nabla \vec{v}_{t||})^T}{2}\right). \quad (10.102)$$

10.5.5 D_t^\flat comme pull-back

On définit les bémols :

$$(\nabla \vec{v}_{t||})^\flat \in T_2^0(TS_t), \quad ((\nabla \vec{v}_{t||})^T)^\flat \in T_2^0(TS_t), \quad (10.103)$$

où, pour tout $\vec{u}, \vec{w} \in (TS_t)_{\vec{x}}$:

$$(\nabla \vec{v}_{t||})^\flat(\vec{u}, \vec{w}) = (\nabla \vec{v}_{t||} \cdot \vec{u}, \vec{w})_{g_t}, \quad ((\nabla \vec{v}_{t||})^T)^\flat(\vec{w}, \vec{u}) = ((\nabla \vec{v}_{t||})^T \cdot \vec{w}, \vec{u})_{g_t}. \quad (10.104)$$

Et par définition des symétriques de tenseurs, on a :

$$((\nabla \vec{v}_{t||})^T)^\flat = ((\nabla \vec{v}_{t||})^\flat)^T \quad (10.105)$$

Proposition 10.16 Quand g_t est la métrique euclidienne, le tenseur $D_t^\flat \in T_2^0(S_0)$ est donné par :

$$D_t^\flat = \vec{\psi}^* \left(\frac{\nabla \vec{v}_t^\flat_{||} + (\nabla \vec{v}_t^\flat_{||})^T}{2} - v_{tn} k_t \right), \quad (10.106)$$

pull-back, où $k_t = -d\vec{n}_t^\flat$ est le tenseur des courbures sur $(TS_t)_{\vec{x}}$, cf. (9.11).

Autrement dit, $D_t^\flat(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = \left(\frac{\nabla \vec{v}_t^\flat_{||} + (\nabla \vec{v}_t^\flat_{||})^T}{2} - v_{tn} k_t \right)(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ quand $\vec{W}_i \in (TS_0)_{\vec{X}}$ et $\vec{w}_i = F(t, \vec{X}).\vec{W}_i \in (TS_t)_{\vec{x}}$, ou encore :

$$(D_t \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} = \left(\left(\frac{\nabla \vec{v}_t_{||} + (\nabla \vec{v}_t_{||})^T}{2} - v_{tn} K_t \right) . \vec{w}_1, \vec{w}_2 \right)_{g_t}. \quad (10.107)$$

Preuve. On a dans $T_1^1(S_0)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial F^T . F}{\partial t} = d\vec{V}^T . F + F^T . d\vec{V} = F^T . d\vec{v}^T . F + F^T . d\vec{v} . F = F^T . (d\vec{v}^T + d\vec{v}) . F.$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} . \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right)_{g_0} = ((d\vec{v}^T + d\vec{v}) . F . \vec{W}_1, F . \vec{W}_2)_{g_t} = (d\vec{v}^T + d\vec{v})^\flat (F . \vec{W}_1, F . \vec{W}_2)_{g_t},$$

i.e. (10.106) avec (10.92) sachant $(\vec{n}_t(\vec{x}), \vec{w}_2)_{\mathbb{R}^n} = 0$ où $\vec{w}_2 = F.\vec{W}_2 \in (TS_t)_{\vec{x}}$. \blacksquare

Lemme 10.17 On a pour les représentations matricielles dans des bases données :

$$[D].[C^{-1}] = [D^\flat].[C^\flat]^{-1}. \quad (10.108)$$

Preuve. On se fixe une base en \vec{X} dans $(TS_0)_{\vec{X}}$ ce qui permet d'avoir les représentations matricielles. La définition de D_t^\flat donne $[D_t^\flat] = [D_t].[g_0]$, et de même $[C_t^\flat] = [C_t].[g_0]$, les matrices étant symétriques. D'où :

$$[D].[C^{-1}] = [D^\flat].[g_0]^{-1} . [g_0].[C^\flat]^{-1} = [D^\flat].[C^\flat]^{-1}. \quad \blacksquare$$

Corollaire 10.18 On a :

$$\text{Tr}(D_t . C_t^{-1}) = \text{div}_{||} \vec{v}_t_{||} - v_{tn} \text{Tr}(K_t), \quad (10.109)$$

ainsi que :

$$\text{Tr}([D_t^\flat].[C_t^\flat]^{-1}) = \text{div}_{||} \vec{v}_t_{||} - v_{tn} \text{Tr}(K_t). \quad (10.110)$$

Preuve. Notons :

$$Z_t = \frac{\nabla \vec{v}_t_{||} + (\nabla \vec{v}_t_{||})^T}{2} - v_n K_t, \quad \text{Tr}(Z_t) = \text{div}_{||} \vec{v}_t_{||} - v_n \text{Tr}(K_t), \quad (10.111)$$

l'endomorphisme de $(TS_t)_{\vec{x}}$ associé au membre de droite de (10.107). Ainsi (10.107) se réécrit :

$$\begin{aligned} (D\vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0} &= (Z . \vec{w}_1, \vec{w}_2)_{g_t} = (Z . F . \vec{W}_1, F . \vec{W}_2)_{g_t} \\ &= (F^T . Z . F . \vec{W}_1, \vec{W}_2)_{g_0}, \end{aligned}$$

et donc :

$$D = F^T . Z . F.$$

Et donc :

$$F^{-T} . D . F^{-1} = Z. \quad (10.112)$$

Comme $\text{Tr}(AB) = \sum_{ik} A_k^i B_i^k = \text{Tr}(BA)$, on a :

$$\text{Tr}(Z) = \text{Tr}(D . F^{-1} . F^{-T}) = \text{Tr}(D . C^{-1}), \quad (10.113)$$

puisque $C = F^T . F$, d'où (10.109). D'où (10.110) à l'aide de (10.108). \blacksquare

Notation. Comme $C_t^b = \vec{\psi}^* g_t$ est le pull-back de la métrique g_t , on peut utiliser la métrique C_t^b sur S_0 plutôt que la métrique g_0 . (On prend souvent g_0 et g_t les métriques euclidiennes, et donc ici on n'utilise pas la métrique g_0 sur S_0 mais la métrique $\vec{\psi}^* g_t$.) Et à la forme bilinéaire D_t^b on peut alors associé l'endomorphisme \tilde{D}_t défini implicitement par :

$$(\tilde{D}_t \vec{U}_1, \vec{U}_2)_{C_t^b} = D_t^b(\vec{U}_1, \vec{U}_2). \quad (10.114)$$

Comme matriciellement on obtient $[D_t^b] = [\tilde{D}_t][C_t^b]$, et donc $[D_t^b].[C_t^b]^{-1} = [\tilde{D}]$, on obtient :

$$\text{Tr}(\tilde{D}_t) = \text{Tr}([D_t^b].[C_t^b]^{-1}) \stackrel{\text{noté}}{=} \text{Tr}_{C^b}(D_t^b) \stackrel{\text{noté}}{=} \text{Tr}_{C_t}(D_t), \quad (10.115)$$

la trace $\text{Tr}_{C^b}(D_t^b)$ étant la trace de l'endomorphisme associé à D_t^b au travers de la métrique $C_t^b = \vec{\psi}^* g_t$ (l'endomorphisme \tilde{D}). Et le résultat (10.110) est réécrit :

$$\text{Tr}_{C^b}(D_t^b) = \text{div}_{||\vec{v}_t||} - v_{tn} \text{Tr}(K_t). \quad (10.116)$$

Voir par exemple l'utilisation de cette notation dans Marsden et Hughes [9].

11 Conservation de la masse

11.1 Principe (ou loi) de conservation de la masse pour un volume

11.1.1 Principe

Soit $\Psi_t : \vec{X} \in \Omega_0 \rightarrow \vec{x} = \Psi_t(\vec{X}) = \Psi(t, \vec{X}) \in \Omega_t$ un mouvement dans \mathbb{R}^n , où Ω_0 et Ω_t sont des ouverts de \mathbb{R}^n . On note :

$$F(t, \vec{X}) = d\Psi_t(\vec{X}) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad J(t, \vec{X}) = \det(F(t, \vec{X})) \quad (11.1)$$

la différentielle et le jacobien de Ψ_t en \vec{X} . Et $F_t : \vec{X} \rightarrow F(t, \vec{X})$ est appelé le gradient de déformation (bien que ce soit une différentielle).

Soit $\rho(t, \vec{x})$ la densité massique d'un objet occupant l'ouvert Ω_t à l'instant t (en particulier $\rho(0, \vec{X})$ est la densité massique de l'objet occupant l'ouvert Ω_0 à l'instant 0). On suppose $\rho \in C^\infty$.

Loi de conservation de la masse : pour tout $t \in [0, T]$, pour tout ouvert $A \subset \Omega_0$,

$$\int_{\vec{x} \in \Psi_t(A)} \rho(t, \vec{x}) dx = \int_{\vec{X} \in A} \rho(0, \vec{X}) dX \quad (= \text{constante du temps}), \quad (11.2)$$

i.e. l'objet transporté conserve sa masse au cours du temps.

Proposition 11.1 Localisation. La loi de conservation de la masse s'écrit, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $\vec{X} \in \Omega_0$:

$$\rho(t, \vec{x}) |J(t, \vec{X})| = \rho(0, \vec{X}), \quad (11.3)$$

quand $\vec{x} = \Psi(t, \vec{X})$.

Preuve. On utilise la formule de changement de variables dans les intégrales :

$$\int_{\vec{x} \in \Psi(A)} \rho(t, \vec{x}) dx = \int_{\vec{X} \in A} \rho(t, \Psi(t, \vec{X})) |J(t, \vec{X})| dX$$

avec (11.2). Et si $\int_B f(y) dy = \int_B g(y) dy$ pour tout B borélien, alors $f = g$, voir cours d'intégration (souvent vu sous la forme : si h est intégrable, si $\int_B h(y) dy = 0$ pour tout B dans la tribu, alors $h = 0$). \blacksquare

11.1.2 Conservation de la masse et divergence

On note :

$$\vec{V}_t(\vec{X}) = \vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \vec{X}) \in \mathbb{R}^n \quad (11.4)$$

la vitesse lagrangienne dans Ω_t (et $= \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}(t, \vec{X})$ sur Ω_t), et on note $\vec{v}(t, \vec{x})$ la vitesse eulérienne :

$$\vec{v}_t(\vec{x}) = \vec{v}(t, \vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{V}(t, \vec{X}) \in \mathbb{R}^n \quad (11.5)$$

quand $\vec{x} = \Psi_t(\vec{X})$. Et $\vec{v}_t \in T\Omega_t = T_0^1(\Omega_t)$ est un champ de vecteurs sur Ω_t de différentielle $d\vec{v}_t \in T_1^1(\Omega_t)$.

Proposition 11.2 Avec $J(t, \vec{X}) = \det([F_t(\vec{X})])$, on a pour $\vec{X} \in \Omega_0$ quand $\vec{x} = \Psi_t(\vec{X})$:

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t, \vec{X}) = \text{div} \vec{v}(t, \vec{x}) J(t, \vec{X}), \quad (11.6)$$

où $\vec{v}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \vec{X})$ est la vitesse eulérienne.

Preuve. On se donne une base $(\vec{a}_I(\vec{X}))$ en \vec{X} et une base $(\vec{b}_i(\vec{x}))$ en $\vec{x} = \Psi(\vec{X})$, et on note $[F_t(\vec{X})]$ la matrice de $F_t(\vec{X}) = d\Psi(t, \vec{X})$ dans ces bases.

On applique (A.31) et (10.89) avec $A(t) = [d\Psi(t, \vec{X})]$ et $J = \det(A)$. ▀

Corollaire 11.3 (Localisation bis.) Si, en $\vec{x} \in \Omega_t$ à l'instant t , la vitesse eulérienne est $\vec{v}(t, \vec{x}) = \vec{v}_t(\vec{x})$, la loi de conservation de la masse s'écrit en les points $(t, \vec{x}) \in [0, T] \times \Omega_t$:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0, \quad (11.7)$$

où $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + d\rho$ est la dérivée totale et div la divergence dans Ω_t . Et donc, avec les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (11.8)$$

Preuve. Ψ_t étant un difféomorphisme, J est C^∞ , ne s'annule pas, et est positif (car l'est à $t = 0$). D'où par dérivation de (11.3) en temps :

$$\frac{d\rho(t, \Psi(t, \vec{X}))}{dt} J(t, \vec{X}) + \rho(t, \Psi(\vec{X})) \frac{\partial J}{\partial t}(t, \vec{X}) = 0,$$

$\frac{d\rho}{dt}$ étant la dérivée totale, d'où (11.7) à l'aide de (11.6) sachant $J \neq 0$. D'où avec $\vec{x} = \Psi(t, \vec{X})$, avec $\vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \vec{X})$ la vitesse lagrangienne, et avec les dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \vec{x}) + d\rho(t, \vec{x}) \cdot \vec{V}(t, \vec{X}) \right) + \rho(t, \vec{x}) \text{div} \vec{v}(t, \vec{x}) = 0,$$

d'où (11.8) puisque $\vec{v}(t, \vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{V}(t, \vec{X})$ quand $\vec{x} = \Psi(t, \vec{X})$, sachant $\text{div}(\rho \vec{v}) = d\rho \cdot \vec{v} + \rho \text{div} \vec{v}$. ▀

11.2 Conservation de la masse pour les surfaces

Ici S_t est une surface dans \mathbb{R}^n (variété de dimension m) pour $t \in [0, T]$.

11.2.1 Gradients de déformations

S_0 est déformée en S_t par le mouvement $\vec{\psi}_t$:

$$\vec{\psi}_t : \vec{X} \in S_0 \rightarrow \vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X}) \in \mathbb{R}^n, \quad (11.9)$$

ce qui définit $S_t = \text{Im} \vec{\psi}_t$. Et on note $F(t, \vec{X}) = F_t(\vec{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \stackrel{\text{noté}}{=} d\vec{\psi}(t, \vec{X})$ la différentielle en espace de $\vec{\psi}$ appelée gradient de déformation, avec donc :

$$F_t(\vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; \mathbb{R}^n), \quad (11.10)$$

et $\text{Im}(F_t(\vec{X})) = (TS_t)_{\vec{x}}$.

Soit $\vec{\varphi}_0 : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S_0 \subset \mathbb{R}^n$ un système de coordonnées sur S_0 de base $(\vec{b}_{i;0} = d\vec{\varphi}_0 \cdot \vec{E}_i)_{i=1,\dots,m}$.
Et soit :

$$\vec{\varphi}_t = \vec{\psi}_t \circ \vec{\varphi}_0 : U \rightarrow S_t. \quad (11.11)$$

Proposition 11.4 $\vec{\varphi}_t$ est un système de coordonnées sur S_t de base $(\vec{b}_{i;t}(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ en $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$ où :

$$\vec{b}_{i;t}(\vec{x}) = F_t(\vec{X}) \cdot \vec{b}_{i;0}(\vec{X}).$$

Preuve. $\vec{\varphi}_t$ est un difféomorphisme car composé de difféomorphismes. Et $\vec{b}_{i;t}(\vec{x}) = d\vec{\varphi}_t(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i = d\vec{\psi}_t(\vec{X}) \cdot \vec{\varphi}_0(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i = F_t(\vec{X}) \cdot \vec{b}_{i;0}(\vec{X})$. \blacksquare

Soit $J(t, \vec{X})$ l'aire limitée par les vecteurs $\vec{b}_{i;t}(\vec{x})$ dans $(TS_t)_{\vec{x}}$ muni de la métrique euclidienne. Cette aire est égal au volume de hauteur 1 dont la base est donnée par ces vecteurs.

Notons :

$$\tilde{F}_t(\vec{X}) \in L((TS_0)_{\vec{X}}; (TS_t)_{\vec{x}}), \quad \tilde{F}_t(\vec{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} F_t(\vec{X}), \quad (11.12)$$

la bijection permettant de considérer l'inverse $\tilde{F}_t(\vec{X})^{-1} \in L((TS_t)_{\vec{x}}; (TS_0)_{\vec{X}})$, et dont la matrice est une matrice carrée $m \times m$ (alors que la matrice de F_t est une matrice $n \times m$). Ici t est nécessairement fixé et $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(t, \vec{X})$ n'a pas de sens (à moins que $m = n$ où que la surface glisse sur elle-même pour que $S_t = S_\tau = S_0$ pour tout $\tau \in [0, T]$).

11.2.2 Métrique euclidienne et aire

Pour le moment on travaille à t fixé.

On suppose qu'on dispose d'une base $(\vec{a}_{i;t}(\vec{x}))_{i=1,\dots,m}$ en chaque point $\vec{x} \in S_t$, et qu'ainsi la variété S_t est considérée indépendamment d'un espace plus grand la contenant (ici \mathbb{R}^n). Et on dispose de même d'une base $(\vec{a}_{i;0}(\vec{X}))_{i=1,\dots,m}$ en chaque point $\vec{X} \in S_0$. Ainsi :

$$\tilde{F}_t(\vec{X}) = \sum_{i,j=1}^m \tilde{F}_{tj}^i \vec{a}_{i;t}(\vec{x}) \otimes a_0^i(\vec{X}), \quad (11.13)$$

et $[\tilde{F}_{tj}^i]$ est la matrice carrée $m \times m$ de $\tilde{F}_t(\vec{X})$. Et le volume limité par des vecteurs $\vec{c}_{i;0}(\vec{X}) \in (TS_0)_{\vec{X}}$ pour $i = 1, \dots, m$ est transformé en le volume limité par les vecteurs $\vec{c}_{i;t}(\vec{x}) = F_t(\vec{X}) \cdot \vec{c}_{i;0}(\vec{X}) \in (TS_t)_{\vec{x}}$ pour $i = 1, \dots, m$ donné par :

$$\det([\vec{c}_{1;t}(\vec{x})]_{|a_t}, \dots, [\vec{c}_{m;t}(\vec{x})]_{|a_t}) = \det([\tilde{F}(t, \vec{X})]) \det([\vec{c}_{1;0}(\vec{X})]_{|a_0}, \dots, [\vec{c}_{m;0}(\vec{X})]_{|a_0}). \quad (11.14)$$

On pose :

$$J_t(\vec{X}) = \det([\tilde{F}(t, \vec{X})]), \quad (11.15)$$

qui est le volume transporté : si $(\vec{c}_{i;0}(\vec{X}))$ est une b.o.n. pour la métrique euclidienne sur $(TS_0)_{\vec{X}}$, alors $\det([\tilde{F}(t, \vec{X})])$ est le volume dans $(TS_t)_{\vec{x}}$ limité par les vecteurs transportés, volume indépendant de la b.o.n. choisie.

11.2.3 Aire et tenseur des déformations

Soit $C_t = F_t^T \cdot F_t$ le tenseur des déformations.

Lemme 11.5 On a :

$$C_t(\vec{X}) = \tilde{F}_t(\vec{X})^T \cdot \tilde{F}_t(\vec{X}), \quad (11.16)$$

et pour g_t la métrique euclidienne sur $(TS_t)_{\vec{x}}$:

$$J_t(\vec{X}) = (\det[C_t^b(\vec{X})])^{\frac{1}{2}}. \quad (11.17)$$

Preuve. Pour $\vec{U}, \vec{W} \in (TS_0)_{\vec{X}}$ on a $(C_t \cdot \vec{U}, \vec{W})_{g_0} = (F_t^T \cdot F_t \cdot \vec{U}, \vec{W})_{g_0} = (F_t \cdot \vec{U}, F_t \cdot \vec{W})_{g_t} = (\tilde{F}_t \cdot \vec{U}, \tilde{F}_t \cdot \vec{W})_{g_t} = (\tilde{F}_t^T \cdot \tilde{F}_t \cdot \vec{U}, \vec{W})_{g_0}$.

D'où $C_t^b(\vec{b}_{i;0}, \vec{b}_{j;0}) = g_t(\vec{b}_{i;t}, \vec{b}_{j;t}) = (\vec{b}_{i;t}, \vec{b}_{j;t})_{\mathbb{R}^n}$ car on a imposé la métrique euclidienne, d'où $[C_t^b(\vec{b}_{i;0}, \vec{b}_{j;0})] = [[\vec{b}_{i;t}]_{a_t}^T \cdot [\vec{b}_{j;t}]_{a_t}] = ([\tilde{F}_t]^T \cdot [\tilde{F}_t])_{ij}$, d'où $[C_t^b] = [\tilde{F}_t]^T \cdot [\tilde{F}_t]$, d'où $\det[C_t^b] = (\det[\tilde{F}_t])^2$. \blacksquare

Remarque 11.6 On rappelle que $C_t^b = \vec{\psi}_t^* g_t$, donc que $J_t(\vec{X}) = (\det[\vec{\psi}_t^* g_t(\vec{X})])^{\frac{1}{2}}$: donc le volume dépend exclusivement du pull-back de la métrique g_t par $\vec{\psi}$. ■

Le tenseur des déformations $C_t(\vec{X})$ est un endomorphisme de $(TS_0)_{\vec{X}}$ qui permet de se placer sur la variété S_0 de dimension m indépendamment de l'espace ambiant \mathbb{R}^n . En particulier, comme précédemment on note pour $(t, \vec{X}) \in [0, T] \times S_0$:

$$D_t(\vec{X}) = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t}(t, \vec{X}), \quad (11.18)$$

dérivation temporelle dans S_0 .

Proposition 11.7 On prend g_t la métrique euclidienne sur S_t . On a sur $[0, T] \times (TS_0)_{\vec{X}}$:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{Tr}(D.C^{-1}) = J \operatorname{Tr}([D^b].[C^b]^{-1}). \quad (11.19)$$

Preuve. Avec (A.31) on a :

$$\frac{d(\det[C_t^b])}{dt} = \det([C_t^b]) \operatorname{Tr}\left(\frac{d[C_t^b]}{dt}.[C_t^b]^{-1}\right) = J^2 \operatorname{Tr}(2[D_t^b].[C_t^b]^{-1}).$$

Et

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d(\det[C_t^b])^{\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{1}{2} (\det[C_t^b])^{-\frac{1}{2}} \frac{d(\det[C_t^b])}{dt}.$$

Puis on utilise (10.108). ■

11.2.4 Conservation de la masse pour les surfaces

Sur les surfaces, la loi de conservation de la masse s'énonce, quand $J_t = \det(\tilde{F}_t(\vec{X}))$:

$$\text{constante} = \int_{\vec{x} \in S_t} \rho(t, \vec{x}) dx = \int_{\vec{X} \in S_0} \rho(t, \vec{\psi}(t, \vec{X})) |J(t, \vec{X})| dX. \quad (11.20)$$

Faire le parallèle avec (11.3).

Comme \tilde{F} est un difféomorphisme et $\tilde{F}_0 = I$, on a $J > 0$ et les valeurs absolues sont redondantes.

Proposition 11.8 La loi de conservation de la masse sur les surfaces s'énonce également :

$$\rho(t, \vec{\psi}(t, \vec{X})) J(t, \vec{X}) = \rho(0, \vec{X}), \quad (11.21)$$

et encore :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{Tr}([D^b].[C^b]^{-1}) = 0, \quad (11.22)$$

et donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}_{||} \vec{v}_{||} + \rho v_n \operatorname{Tr}(K) = 0, \quad (11.23)$$

expression faisant intervenir le tenseur des courbures et la composante parallèle à $(TS_t)_{\vec{x}}$ de la vitesse eulérienne.

Preuve. (11.21) se déduit de (11.20) (ici on utilise \tilde{F}_t et non F_t), d'où (11.22) par dérivation en utilisant (11.19). Puis on se sert de (10.109). ■

12 Transport de la normale à une surface

12.1 Transport d'une surface par le mouvement

(Voir notes de cours “mécanique : fonctions lagrangiennes et eulériennes...”, qu'on présente différemment ici.)

On se place ici dans le cas S_t variété de dimension $m = n-1$ dans \mathbb{R}^n .

On suppose disposer de la métrique euclidienne (qu'on exprimera dans un système de coordonnées).

Ici on s'intéresse à un objet “sans épaisseur” occupant un domaine surfacique $S_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ à l'instant t_0 et un domaine surfacique $S_t \subset \mathbb{R}^n$ à l'instant t . En $\vec{x} \in S_t$ à l'instant t sa densité massique est notée $\rho(t, \vec{x})$ (densité surfacique) et sa vitesse eulérienne est notée $\vec{v}(t, \vec{x})$ (définie dans tout \mathbb{R}^n : l'objet se déplace dans l'espace, pas uniquement le long de la surface).

La difficulté réside dans les notations.

Soit S_0 une (hyper-) surface (de dimension $n-1$) dans \mathbb{R}^n qui se déplace dans \mathbb{R}^n . Soit :

$$\vec{\psi}_t : \begin{cases} S_0 \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow S_t \subset \mathbb{R}^n \\ \vec{X} & \mapsto \vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X}), \end{cases} \quad (12.1)$$

le mouvement de “la surface” avec $\vec{\psi}_0 = I$ (l'identité). Pour $\vec{X} \in S_0$ et $\vec{x} \in S_t$, on notera également :

$$\vec{N}(\vec{X}) = \vec{n}_0(\vec{X}) \quad \text{et} \quad \vec{n}(\vec{x}) = \vec{n}_t(\vec{x})$$

les vecteurs unitaires normaux à S_0 en \vec{X} et à S_t en \vec{x} .

12.2 Généralisation aux coques

De manière à pouvoir généraliser les calculs aux “coques” déformables (ou “surfaces épaisses” déformables), considérons que la surface $S_t = \vec{\psi}_t(S_0)$ est la “fibre moyenne” d'un objet ayant une “épaisseur” : on dispose des ouverts Ω_0 et Ω_t de \mathbb{R}^n avec $S_0 \subset \Omega_0$ et $S_t \subset \Omega_t$, et on dispose d'un mouvement, pour $t \in [0, T]$:

$$\Psi_t : \begin{cases} \Omega_0 & \rightarrow \Omega_t \\ \vec{X} & \mapsto \Psi_t(\vec{X}) \end{cases} \quad \text{t.q.} \quad \forall \vec{X} \in S_0, \quad \Psi_t(\vec{X}) = \vec{\psi}_t(\vec{X}), \quad (12.2)$$

avec $\Psi_0 = I$. Et on pose, pour tout $\vec{X} \in \Omega_0$:

$$F_t(\vec{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} d\Psi_t(\vec{X}) \quad (12.3)$$

le gradient de déformation.

Exemple 12.1 Soit S_0 donnée, soit $\varepsilon > 0$ donné, et soit :

$$\Omega_0 = \{\vec{Y} = \vec{X} + h\vec{N}(\vec{X}), \forall \vec{X} \in S_0, \forall h \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}.$$

(Ω_0 est d'épaisseur 2ε .) Soit la fonction Ψ_t :

$$\Psi_t : \begin{cases} \Omega_0 & \rightarrow \Omega_t \\ \vec{Y} & \mapsto \Psi_t(\vec{Y}), \end{cases}$$

définie par, pour tout $\vec{X} \in S_0$ et tout $h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, notant $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$:

$$\Psi_t(\vec{X} + h\vec{N}(\vec{X})) = \vec{\psi}_t(\vec{X}) + h\vec{n}(\vec{\psi}_t(\vec{X})) = \vec{x} + h\vec{n}(\vec{x}). \quad (12.4)$$

C'est un mouvement de “coque” où S_0 est la fibre moyenne, mouvement “qui conserve la normale à la fibre moyenne” : on a $d\Psi_t(\vec{X}) \cdot \vec{N}(\vec{X}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi_t(\vec{X} + h\vec{N}(\vec{X})) - \Psi_t(\vec{X})}{h} = \vec{n}(\vec{x})$, i.e. le transport de la normale en \vec{X} donne la normale en \vec{x} .

(Un mouvement de coque quelconque ne conserve pas la normale à la fibre moyenne.) ▀

12.3 Transport des vecteurs de base tangents et de la normale

Soit Ψ_t donné en (12.2) (dédit de $\vec{\psi}_t$).

On se donne :

$$\vec{\varphi}_0 : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S_0 \subset \mathbb{R}^n \\ \vec{q} \mapsto \vec{X} = \vec{\varphi}_0(\vec{q}) \end{cases}$$

un système de coordonnées sur S_0 . Et on prend comme système de coordonnées sur S_t le système donné par :

$$\vec{\varphi}_t = \vec{\psi}_t \circ \vec{\varphi}_0 : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S_t \subset \mathbb{R}^n \\ \vec{q} \mapsto \vec{x} = \vec{\varphi}_t(\vec{q}) = \vec{\psi}_t(\vec{X}). \end{cases}$$

La base du système de coordonnées sur la surface S_t est $(\vec{e}_{t;i}(\vec{x}))_{i=1,\dots,n-1}$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}_t(\vec{q})$ où :

$$\vec{e}_{t;i}(\vec{x}) = d\vec{\varphi}_t(\vec{q}).\vec{E}_i = d\vec{\psi}_t(\vec{q}).\vec{e}_{0;i}(\vec{X}), \quad (12.5)$$

i.e. la base du système de coordonnées $\vec{\varphi}_0$ est transportée par le mouvement $\vec{\psi}_t$ en la base du système de coordonnées $\vec{\varphi}_t$. Et la base duale est $(\vec{e}_t^i(\vec{x}) = dq_t^i(\vec{x}))_{i=1,\dots,n-1}$ au point $\vec{x} = \vec{\varphi}_t(\vec{q})$. Comme Ψ_t restreint à S_0 est égale à $\vec{\psi}_t$, cf. (12.2), on a aussi :

$$\vec{e}_{t;i}(\vec{x}) = d\Psi_t(\vec{X}).\vec{e}_{0;i}(\vec{X}), \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \quad (12.6)$$

Proposition 12.2 On a quand $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X}) \in S_t$ et $F_t(\vec{X}) = d\Psi_t(\vec{X}) :$

$$\vec{n}_t(\vec{x}) = \frac{F_t(\vec{X})^{-T}.\vec{n}_0(\vec{X})}{\|F_t(\vec{X})^{-T}.\vec{n}_0(\vec{X})\|}. \quad (12.7)$$

Attention : la normale n'est pas transportée par le mouvement en un vecteur normal (et unitaire), sauf dans le cas très particulier de mouvements Ψ comme dans l'exemple 12.1 (surface épaisse dont la déformation conserve la normale à la fibre moyenne).

Preuve. La forme normale à la surface S_0 en \vec{X} est donnée par, pour tout $\vec{V} \in \mathbb{R}^n :$

$$\ell_0(\vec{X}).\vec{V} = \det(\vec{e}_{0;1}(\vec{X}), \dots, \vec{e}_{0;n-1}(\vec{X}), \vec{V}).$$

La forme normale à la surface S_t en \vec{x} est donnée par, pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, notant $\vec{v} = F_t(\vec{X}).\vec{V} :$

$$\begin{aligned} \ell_t(\vec{x}).\vec{v} &= \det(\vec{e}_{t;1}(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{t;n-1}(\vec{x}), \vec{v}) \\ &= \det(F_t(\vec{X}).\vec{e}_{0;1}(\vec{X}), \dots, F_t(\vec{X}).\vec{e}_{0;n-1}(\vec{X}), F_t(\vec{X}).\vec{V}) \\ &= \det(F_t(\vec{X})) \det(\vec{e}_{0;1}(\vec{X}), \dots, \vec{e}_{0;n-1}(\vec{X}), \vec{V}) \\ &= \det(F_t(\vec{X})) \ell_0(\vec{X}).\vec{V}. \end{aligned}$$

D'où pour les vecteurs associés par le théorème de représentation de Riesz à l'aide des métriques g_t sur S_t et g_0 sur S_0 , cf. (5.10), pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\vec{v} = F_t(\vec{X}).\vec{V} :$

$$g_{t,\vec{x}}(\vec{\lambda}_t(\vec{x}), \vec{v}) = \det(F_t(\vec{X})) g_{0,\vec{X}}(\vec{\lambda}_0(\vec{X}), \vec{V})$$

d'où, pour tout $\vec{V} \in \mathbb{R}^n :$

$$g_{0,\vec{X}}(F_t^T(\vec{X}).\vec{\lambda}_t(\vec{x}), \vec{V}) = g_{0,\vec{X}}(\det(F_t(\vec{X})) \vec{\lambda}_0(\vec{X}), \vec{V}).$$

D'où :

$$F_t(\vec{X})^T.\vec{\lambda}_t(\vec{x}) = \det(F_t(\vec{X})) \vec{\lambda}_0(\vec{X}).$$

D'où (12.7) par normalisation des $\vec{\lambda}$. ▀

12.4 Relation entre les éléments d'aire

On se replace sur nos surfaces S_0 et S_t (les fibres moyennes).

Proposition 12.3 Lorsque la métrique choisie est la métrique euclidienne dans \mathbb{R}^n : en $\vec{x} = \vec{\psi}_t(\vec{X})$, pour tout $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{n-1} \in T(S_0)_{\vec{X}}$, notant $\vec{v}_i = F_t(\vec{X}) \cdot \vec{V}_i \in T(S_t)_{\vec{x}}$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et notant $J_t(\vec{X}) = \det(F_t(\vec{X}))$, on a :

$$d\sigma_t(\vec{x})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) = |J_t(\vec{X})| \|F_t(\vec{X})^{-T} \cdot \vec{N}(\vec{X})\| d\sigma_0(\vec{X})(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{n-1}). \quad (12.8)$$

D'où, pour toute fonction $f_t : S_t \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable :

$$\int_{\vec{x} \in S_t} f_t(\vec{x}) d\sigma_t(\vec{x}) = \int_{\vec{X} \in S_0} f_t(\psi_t(\vec{X})) |J_t(\vec{X})| \|F_t(\vec{X})^{-T} \cdot \vec{N}(\vec{X})\| d\sigma_0(\vec{X}). \quad (12.9)$$

Preuve. Soit $\vec{M} = F_t^{-1} \cdot \vec{n}$ (le pull-back de \vec{n} par $\vec{\psi}_t$), avec donc $\vec{n} = F_t \cdot \vec{M}$. Avec (12.7) on a (projection de \vec{W} sur $\text{Vect}\{\vec{N}\}$) :

$$N^\flat \cdot \vec{M} = g_{0, \vec{X}}(\vec{M}, \vec{N}) = g_{0, \vec{X}}(F_t^{-1} \cdot \vec{n}, \vec{N}) = g_{t, \vec{x}}(\vec{n}, F_t^{-T} \cdot \vec{N}) = \|F_t^{-T} \cdot \vec{N}\| g_{t, \vec{x}}(\vec{n}, \vec{n}),$$

ce avec $g_{t, \vec{x}}(\vec{n}, \vec{n}) = 1$. D'où $\vec{M} = \|F_t^{-T} \cdot \vec{N}\| \cdot \vec{N} + \vec{M}_\parallel$ avec $\vec{M}_\parallel \in (TS_0)_{\vec{X}}$ qui est orthogonal à \vec{N} pour le produit scalaire euclidien.

D'où, pour tout $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1} \in (TS_t)_{\vec{x}}$ vecteurs indépendants (sinon on aura $0 = 0$), avec $\vec{V}_i = F_t^{-1} \cdot \vec{v}_i \in (TS_0)_{\vec{X}}$ (les pull-back) :

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma}_t(\vec{x})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) &= \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{n}) \\ &= \det(F_t \cdot \vec{V}_1, \dots, F_t \cdot \vec{V}_{n-1}, F_t \cdot \vec{M}) \\ &= \det(F_t) \det(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{n-1}, \vec{M}) \\ &= \det(F_t) \det(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{n-1}, \|F_t^{-T} \cdot \vec{N}\| \vec{N}), \end{aligned} \quad (12.10)$$

puisque \vec{M}_\parallel est combinaison linéaire des \vec{V}_i et n'intervient pas dans le déterminant, d'où (12.8). D'où (12.9). \blacksquare

Exemple 12.4 En particulier quand Ψ est donné par (12.4) avec donc $F_t(\vec{X})^{-T} \cdot \vec{N}(\vec{X}) = \vec{n}(\vec{x})$ (normale transportée par Ψ), on a :

$$d\sigma_t(\vec{x})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) = |J_t(\vec{X})| d\sigma_0(\vec{X})(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{n-1}). \quad (12.11)$$

\blacksquare

A Rappels : déterminants

Soit E un espace vectoriel de dimension m de dual $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$.

A.1 Forme multilinéaire alternée

Une forme p -linéaire (linéaire, bilinéaire et trilinéaire quand $p = 1$ et 2 et 3) est une application $z : (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \in E^p \rightarrow \mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chaque \vec{v}_i :

$$z(\dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \lambda \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots) = z(\dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots) + \lambda z(\dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\vec{u} \in E$ et tout $\vec{v}_i \in E$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

Elle est dite alternée ssi :

$$z(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p) = -z(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) \quad (\text{A.1})$$

pour tout $\vec{v}_i \in E$ pour tout $i, j = 1, \dots, p$. Ou de manière équivalente ssi $z(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est nulle dès que deux des \vec{v}_i sont égaux.

Soit S_p l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, p\}$ dans lui-même, une telle bijection étant appelée une permutation. Une transposition τ est une permutation $\tau \in S_p$ qui échange deux entiers : $i \neq j$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, et $\tau(k) = k$ pour tout $k \neq i, j$. Toute permutation est composée de transpositions, et la signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation est 1 si elle est composée d'un nombre pair de transpositions et -1 sinon.

Si z est p -linéaire, alors la forme p -linéaire z_a définie par :

$$z_a(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \sum_{\sigma \in S_p} z(\vec{v}_{\sigma_1}, \dots, \vec{v}_{\sigma_p}) \quad (\text{A.2})$$

est une forme p -linéaire alternée appelée antisymétrisée de z .

Soit p formes linéaires $\ell^1, \dots, \ell^p \in E^*$. Le produit tensoriel de ces p formes est l'application multilinéaire $\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^p : E^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^p)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{i=1}^p \ell^i \cdot \vec{v}_i \quad (= \ell^1(\vec{v}_1) \dots \ell^p(\vec{v}_p)). \quad (\text{A.3})$$

Le produit extérieur $\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^p$ de ces p formes est la partie alternée de $\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^p$, i.e. avec la notation (A.2) : $\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^p \stackrel{\text{déf}}{=} (\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^p)_a$, soit :

$$\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^p = \sum_{\sigma \in S_p} \ell^{\sigma_p} \otimes \dots \otimes \ell^{\sigma_1}, \quad (\text{A.4})$$

i.e. pour tout \vec{v}_i :

$$(\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^p)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p \ell^i \cdot \vec{v}_{\sigma_i}. \quad (\text{A.5})$$

Exemple A.1 Dans \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique (\vec{E}_i) de base duale (dx^i) , on a :

$$dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1,$$

avec donc $(dx^1 \wedge dx^2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \text{aire du parallélogramme de côtés } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2$. ▀

A.2 Forme m -linéaire alternée et déterminant \det_B

Proposition A.2 Si $p = m$ (la dimension de E) alors l'ensemble $\mathcal{A}_m(E)$ des formes m -linéaires alternées est de dimension 1. D'où si $B = (\vec{b}_i)_{i=1, \dots, m}$ est une base de E de base duale $(b^i)_{i=1, \dots, m}$, alors $b^1 \wedge \dots \wedge b^m$ est une base de $\mathcal{A}_m(E)$ et :

$$(b^1 \wedge \dots \wedge b^m)(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = 1. \quad (\text{A.6})$$

Donc si z est une forme m -linéaire alternée alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = \lambda b^1 \wedge \dots \wedge b^m,$$

à savoir $\lambda = z(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$.

Preuve. (b^i) étant la base duale, avec (A.5) on a immédiatement (A.6).

Soit z une forme m -linéaire alternée. Une telle forme est entièrement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs de base, i.e. par les $z(\vec{b}_{\sigma_1}, \dots, \vec{b}_{\sigma_m})$ pour toute permutation $\sigma \in S_m$. Toute permutation est composée de transposition, et donc, z étant alternée, z est déterminée $z(\vec{b}_{\sigma_1}, \dots, \vec{b}_{\sigma_m})$ où σ est croissante, donc avec σ l'identité : z est déterminée par $z(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) \stackrel{\text{noté}}{=} \lambda$. ▀

Définition A.3 Le déterminant \det_B relativement à la base B est la forme m -linéaire alternée dans E espace de dimension m donné quand $\lambda = 1$:

$$\det_B \stackrel{\text{déf}}{=} b^1 \wedge \dots \wedge b^m. \quad (\text{A.7})$$

Corollaire A.4 Si $C = (\vec{c}_i)$ est une autre base, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\det_B = \lambda \det_C, \quad (\text{A.8})$$

à savoir $\lambda = \det_B(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$.

N.B. : si $\lambda > 0$ on dit que les bases ont même orientation.

Soit $(\vec{v}_j)_{j=1, \dots, m}$ m vecteurs dans E . Soit $(v_j^i)_{i=1, \dots, m}$ les composantes de \vec{v}_j dans la base B :

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^m v_j^i \vec{b}_i = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ \vdots \\ v_j^m \end{pmatrix} \Big|_B.$$

Alors $[v_j^i]$ est la matrice des composantes, et :

$$\det_B(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) \stackrel{\text{noté}}{=} \det_B[v_j^i]. \quad (\text{A.9})$$

A.3 Déterminant $\det_B(L)$ d'un endomorphisme

Définition A.5 Soit $L \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $B = (\vec{b}_i)_{i=1, \dots, m}$ une base de E de base duale $(b^i)_{i=1, \dots, m}$. On définit le déterminant $\det_B(L)$ par :

$$\det_B(L) \stackrel{\text{déf}}{=} \det_B(L.\vec{b}_1, \dots, L.\vec{b}_m). \quad (\text{A.10})$$

Soit les réels :

$$L_j^i \stackrel{\text{déf}}{=} b^i.(L.\vec{b}_j), \quad (\text{A.11})$$

et $[L] = [L_j^i]$ appelée la matrice de L relativement à la base B . Autrement dit on a posé $L = \sum_{i,j=1}^m L_j^i \vec{b}_i \otimes b^j$. On note :

$$\det_B(L) \stackrel{\text{noté}}{=} \det_B[L_j^i]. \quad (\text{A.12})$$

A.4 Déterminant $\det(L)$ (volume algébrique) dans \mathbb{R}^m

On se place dans \mathbb{R}^m muni de sa base canonique (\vec{E}_i) , et on note (dx^i) sa base duale.

Définition A.6 Le déterminant dans \mathbb{R}^m est le déterminant $\det_{(\vec{E}_i)}$ où (\vec{E}_i) est une base canonique. On note :

$$\det = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \quad (\text{A.13})$$

Et le déterminant est appelé "volume algébrique".

Exemple A.7 Dans \mathbb{R}^2 on a $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$. Si (\vec{b}_1, \vec{b}_2) est une base donnée par $\vec{b}_j = \sum_i \beta_j^i \vec{E}_i$, on a $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \beta_1^1 \beta_2^2 - \beta_2^1 \beta_1^2 \neq 1$ en général. \blacksquare

Définition A.8 Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^m on note :

$$\det(L) = \det(L.\vec{E}_1, \dots, L.\vec{E}_m) = \det[L_j^i] = \det[L], \quad (\text{A.14})$$

où on a noté $L = \sum_{ij} L_j^i \vec{E}_i \otimes dx^j$.

A.5 Déterminant \det d'une matrice

De manière générale, si $[A] = [a_j^i]$ est une matrice, on la considère comme étant la matrice de l'endomorphisme $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$:

$$A = \sum_{ij} a_j^i \vec{E}_i \otimes dx^j \quad (\text{A.15})$$

exprimé dans la base canonique, et le déterminant de la matrice est par définition :

$$\det[a_j^i] = \det(A). \quad (\text{A.16})$$

Remarque A.9 Dans un espace vectoriel de dimension m , il n'y a pas de base canonique en général : "la base canonique" n'a de sens que dans un espace produit comme $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ où un vecteur de la base canonique est l'un des vecteurs $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ de $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

Par exemple dans un "plan incliné" dans \mathbb{R}^3 , il n'y a pas de base "canonique", comme dans les espaces tangents $(TS_t)_{\vec{x}}$. \blacksquare

A.6 Calculs par récurrence des déterminants de matrices : mineurs et cofacteurs

On s'intéresse au calcul de déterminant de matrices $A = [a_j^i]_{i,j=1,\dots,m}$. On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^m associé à cette matrice relativement à la base canonique, cf. (A.15).

Définition A.10 Soit M_j^i la matrice $m-1 \times m-1$ déduite de A en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. Cette matrice peut-être considéré comme la matrice d'un endomorphisme de \mathbb{R}^{m-1} dans la base canonique de \mathbb{R}^{m-1} .

Les mineurs de A sont les déterminants $m_j^i = \det(M_j^i)$.

Définition A.11 Le cofacteurs sont les :

$$c_j^i = (-1)^{i+1} m_j^i. \quad (\text{A.17})$$

La matrice des cofacteurs est la matrice $C = [c_j^i]_{i,j=1,\dots,m}$.

Proposition A.12 Le déterminant de A est donné par exemple par le développement par rapport à la première colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_1^i m_1^i = \sum_{i=1}^m a_1^i c_1^i = (A.C^T)_1^1 = (C.A^T)_1^1, \quad (\text{A.18})$$

où $C^T = [c_i^j]_{i,j=1,\dots,m}$ est la matrice transposée de C .

Et de même, en développant par rapport à la j -ème colonne pour $j \in [1, m]_{\mathbb{N}}$ quelconque :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m a_j^i c_j^i = (A.C^T)_j^j = (C.A^T)_j^j. \quad (\text{A.19})$$

Preuve. Le déterminant est une forme multi-linéaire alternée sur les colonnes, et donc $\det(A) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) = \sum_i a_1^i \det(\vec{E}_i, \dots, \vec{a}_m) = \sum_i a_1^i \det(\vec{E}_i, \vec{a}_2 - a_2^1 \vec{E}_1, \dots, \vec{a}_m - a_m^1 \vec{E}_1) = \sum_i a_1^i c_1^i$. \blacksquare

Exemple A.13 Dans \mathbb{R}^3 on trouve :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

\blacksquare

A.7 $\det(A) = \det(A^T)$

Si $A = [a_j^i]_{i,j=1,\dots,m}$, sa matrice transposée est $A^T = [a_i^j]_{i,j=1,\dots,m}$.

Donc si C est la matrice des cofacteurs de A , alors C^T est la matrice des cofacteurs de A^T . D'où :

Proposition A.14 On a :

$$\det(A^T) = \det(A). \quad (\text{A.20})$$

Preuve. Avec (A.19) on a $\det(A) = \frac{1}{m} \sum_{ij} a_j^i c_j^i = \frac{1}{m} \sum_{ij} a_i^j c_i^j = \det(A^T)$. \blacksquare

A.8 $\det([L].[M]) = \det([L]) \det([M])$

Proposition A.15 Si $[L]$ et $[M]$ sont deux matrices $m \times m$ alors :

$$\det([L].[M]) = \det([L]) \det([M]), \quad (\text{A.21})$$

i.e. le déterminant du produit est le produit des déterminants.

En particulier si $[L]$ est inversible alors :

$$\det([L]^{-1}) = (\det[L])^{-1}. \quad (\text{A.22})$$

Preuve. Démonstration par récurrence sur la dimension de l'espace à l'aide la définition A.10 et de (A.19). \blacksquare

A.9 Cofacteurs et inverse d'une matrice

Proposition A.16 On a, I étant la matrice identité de \mathbb{R}^m :

$$A.C^T = C.A^T = \det(A) I, \quad (\text{A.23})$$

et donc quand A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T. \quad (\text{A.24})$$

Preuve. Terme diagonal :

$$(A.C^T)_i^i = \sum_{j=1}^m a_j^i c_j^i = \det(A),$$

cf. (A.19).

Terme extra diagonal, $j \neq i$. Pour la lisibilité prenons $i = 1$ et $j = 2$ (idem pour les autres cas). Soit alors B dont les deux premières colonnes sont identiques et égales à la première colonne de A , et dont toutes les autres colonnes sont celles de A : on a donc posé $b_1^i = b_2^i = b_1^i$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $b_j^i = b_j^i$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et tout $j = 3, \dots, m$. Deux colonnes de B étant identiques on a $\det B = 0$, et les cofacteurs c_2^k sont donc les mêmes pour A et pour B (toutes les colonnes sauf la deuxième sont égales). D'où :

$$(A.C^T)_2^1 = \sum_{k=1}^m a_k^1 c_k^2 = \sum_{k=1}^m b_k^1 c_k^2 = \sum_{k=1}^m b_k^2 c_k^2 = \det(B.C^T) = \det(B) \det(C^T) = 0.$$

D'où (A.23), d'où (A.24). ▀

A.10 Déterminant det et produit scalaire euclidien

On se place dans \mathbb{R}^m muni de sa base de son produit scalaire euclidien, et on prend une base orthonormée $B = (\vec{b}_i)$ (relativement au produit scalaire euclidien), et on note (b^i) sa base duale.

Proposition A.17 Le déterminant est indépendant du choix de la base orthonormée de même orientation :

$$\det_B = \det \quad \text{quand } B \text{ est une b.o.n. orientée positive} \quad (\text{A.25})$$

Preuve. Il s'agit de montrer que $b^1 \wedge \dots \wedge b^m = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$.

On a $(b^1 \wedge \dots \wedge b^m)(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = 1$.

On a $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)(L.\vec{E}_1, \dots, L.\vec{E}_m) = \det(L)$ où L est l'endomorphisme de changement de base.

Soit P la matrice de L donné par $L = \sum_{i,j=1}^m P_j^i \vec{E}_i \otimes dx^j$, où donc $\vec{b}_j = L.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^m P_j^i \vec{E}_i$.

Par hypothèse (\vec{b}_i) est orthonormée, soit $(\vec{b}_i, \vec{b}_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}$, d'où $\delta_{ij} = \sum_{k,\ell} P_i^k P_j^\ell (\vec{E}_k, \vec{E}_\ell)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{k,\ell} P_i^k P_j^\ell \delta_{k\ell} = \sum_k P_i^k P_j^k = (P^T.P)^i_j$, d'où $P^T.P = I$. D'où $(\det P)^2 = 1$, d'où $\det P = 1$ car $\det P > 0$, les bases ayant même orientation. ▀

A.11 Déterminant \det_B et produit scalaire

Soit $g(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_g$ un produit scalaire, soit $(\vec{b}_i)_{i=1, \dots, m}$ une base, et soit $[g]_B = [g_{ij}] = [g(\vec{b}_i, \vec{b}_j)]$ la matrice de g dans la base (\vec{b}_i) . En d'autres termes $g = \sum_{ij} g_{ij} b^i \otimes b^j$. Et si $\vec{v} = \sum_k v^k \vec{b}_k$ et $\vec{w} = \sum_\ell w^\ell \vec{b}_\ell$ sont deux vecteurs exprimés sur la base (\vec{b}_i) , on a :

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k\ell} v^k w^\ell g_{k\ell} = [\vec{v}]_B^T \cdot [g]_B \cdot [\vec{w}]_B.$$

Si $\vec{v}_i = \sum_{k=1}^m v_i^k \vec{b}_k$ pour $i = 1, \dots, m$ sont m vecteurs exprimés sur la base B , on note $[V]_B = [v_j^i]_B$ la matrice dont les colonnes sont les composantes des \vec{v}_j dans la base (\vec{b}_i) . On obtient matriciellement :

$$[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}} = [V]_B^T \cdot [g]_B \cdot [V]_B,$$

d'où pour les déterminants de matrices :

$$\det[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)] = \det[g]_B \cdot (\det[V]_B)^2.$$

Si de plus (\vec{b}_i) est une base directe relativement à $g(\cdot, \cdot)$, i.e. si $\det[g] > 0$, et si les (\vec{v}_i) forment une base orientée positivement, i.e. si $\det[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)] > 0$, on en déduit :

$$\det_B(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = \frac{\sqrt{\det[g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)]}}{\sqrt{\det[g]_B}} \quad (= \det[V]_B), \quad (\text{A.26})$$

expression générique utilisée par exemple dans le cas de la métrique euclidienne exprimée dans un système de coordonnées $\vec{\varphi}$.

Proposition A.18 Si $C = (\vec{c}_i)$ est une base quelconque on a :

$$\det_C = \frac{1}{\sqrt{\det[g]_C}} \det = \frac{1}{|\det P|} \det. \quad (\text{A.27})$$

où P est la matrice de passage d'une base orthonormée $B = (\vec{b}_i)$ à C , i.e. $\vec{c}_j = \sum_i P_j^i \vec{b}_i$.

Preuve. (A.26) donne $\det_C(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = \frac{\sqrt{\det[g(\vec{b}_i, \vec{b}_j)]}}{\sqrt{\det[g]_C}} = \frac{1}{\sqrt{\det[g]_C}}$ quand $B = (\vec{b}_i)$ est une base orthonormée.

Quand P est la matrice de changement de base, $\vec{c}_j = \sum_i P_j^i \vec{b}_i$, soit $P_j^i = b^i \cdot (\vec{c}_j)$ pour tout i, j , on a $[g]_C = P^T \cdot [g]_B \cdot P$ car $g(\vec{c}_i, \vec{c}_j) = g(P \cdot \vec{b}_i, P \cdot \vec{b}_j) = \sum_{k\ell} P_i^k P_j^\ell g(\vec{b}_k, \vec{b}_\ell)$, d'où $\det[g]_C = (\det P)^2 \det[g]_B$ avec ici B orthonormée. \blacksquare

Exemple A.19 Dans \mathbb{R}^2 , le volume limité par le parallélogramme de côtés donnés par les vecteurs \vec{v} et \vec{w} est $|\det(\vec{v}, \vec{w})|$. En cartésien, on a :

$$\det = dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 \quad (\text{A.28})$$

(antisymétrique), et donc $\det(\vec{v}, \vec{w}) = v^1 w^2 - v^2 w^1$ quand $\vec{v} = v^1 \vec{E}_1 + v^2 \vec{E}_2$, et $\vec{w} = w^1 \vec{E}_1 + w^2 \vec{E}_2$.

En particulier, $\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = 1 = (dx^1 \wedge dx^2)(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = (dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = 1$ est le volume (ici l'aire) du quadrangle limité par les vecteurs de base canonique; et

Et si on change l'ordre des vecteurs, on obtient par exemple $\det(\vec{E}_2, \vec{E}_1) = -1$. Et le volume limité par \vec{E}_2 et \vec{E}_1 est donné par la valeur absolue du déterminant. \blacksquare

Exemple A.20 Et en polaire, avec $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice de changement de base, on a $J_{\vec{\varphi}} = \det P = r$ et donc

$$\det = dx^1 \wedge dx^2 = r dr \wedge d\theta = r(dr \otimes d\theta - d\theta \otimes dr), \quad (\text{A.29})$$

et donc $\det(\vec{v}, \vec{w}) = r(v^r w^\theta - v^\theta w^r)$ quand $\vec{v} = v^r \vec{e}_1 + v^\theta \vec{e}_2$ et $\vec{w} = w^r \vec{e}_1 + w^\theta \vec{e}_2$. Les formules de

changement de base donnent effectivement $\begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$ et

donc $\begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta v^1 + \sin \theta v^2 \\ \frac{1}{r}(-\sin \theta v^1 + \cos \theta v^2) \end{pmatrix}$. Et on trouve bien : $r(v^r w^\theta - v^\theta w^r) = v^1 w^2 - v^2 w^1$.

Ici $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, $\sqrt{\det[g]} = r = \sqrt{\det[g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)]}$

En particulier, $(r dr \wedge d\theta)(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = r(dr \otimes d\theta - d\theta \otimes dr)(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = r$ est le volume (ici l'aire) limité par les deux vecteurs (de base du système) orthogonaux \vec{e}_1 et \vec{e}_2 de longueur respective 1 et r . \blacksquare

Exemple A.21 Sur la sphère de \mathbb{R}^3 , la métrique euclidienne dans la base du système sphérique a pour matrice $[g] = \begin{pmatrix} g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) & g(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ g(\vec{e}_3, \vec{e}_2) & g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$, cf. (3.4). D'où $\sqrt{\det[g]} = R^2 \cos \varphi$. \blacksquare

Exemple A.22 Sur la sphère de \mathbb{R}^3 , pour la base normalisée (\vec{f}_1, \vec{f}_2) où $\vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_2(\vec{x})}{R \cos \varphi}$ et $\vec{f}_2(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3(\vec{x})}{R}$, la matrice de g est $[g] = \begin{pmatrix} g(\vec{f}_1, \vec{f}_1) & g(\vec{f}_1, \vec{f}_2) \\ g(\vec{f}_2, \vec{f}_1) & g(\vec{f}_2, \vec{f}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, autrement dit (\vec{f}_1, \vec{f}_2) est orthonormée pour $g(\cdot, \cdot)$. D'où $\sqrt{\det[g]} = 1$. Cette base normalisée est très utilisée pour les calculs de surface. \blacksquare

A.12 Dérivée d'un déterminant

Lemme A.23 Soit $A(t) = [a_j^i(t)]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ une fonction matricielle $C^1([0, T]; \mathbb{R}^{m^2})$.

Soit $[c_j^i(t)] = (\det A)[(A^{-1})_i^j]$ la matrice des cofacteurs de $A(t)$. On a :

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \sum_{i,j=1}^m \frac{da_j^i}{dt} c_j^i = \det(A) \sum_{i,j=1}^m \frac{da_j^i}{dt} (A^{-1})_i^j, \quad (\text{A.30})$$

soit :

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \det(A) \operatorname{Tr}\left(\frac{dA}{dt} \cdot A^{-1}\right). \quad (\text{A.31})$$

Preuve. Soit $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$ le vecteur dont les composantes dans la base canonique sont stockées dans la j -ème colonne de A : $[\vec{a}_j] = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^m \end{pmatrix}$. Ainsi $\det(A) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$. Comme \det est une forme multilinéaire alternée on a :

$$\frac{d(\det(A))}{dt} = \det\left(\frac{d\vec{a}_1}{dt}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\right) + \dots + \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \frac{d\vec{a}_m}{dt}\right).$$

Le j -ème terme de la somme développé par rapport à la j -ème colonne donne :

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \frac{d\vec{a}_j}{dt}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_m) = \sum_{i=1}^m \frac{da_j^i}{dt} c_j^i,$$

et on fait la somme : $\frac{d(\det A)}{dt} = \sum_{i,j=1}^m \frac{da_j^i}{dt} c_j^i$. ▀

Remarque A.24 (A.31) est une relation matricielle, et la trace est ici la somme des termes diagonaux de la matrice.

On rappelle cependant que la trace est par définition un opérateur qui agit sur les endomorphismes, qu'une matrice A carrée peut toujours être considérée comme étant la matrice d'un endomorphisme, et que la valeur de la trace est alors indépendante de la base choisie : notant P la matrice de passage d'une base dans une autre et $Q = P^{-1}$ on a

$$\operatorname{Tr}(QAP) = \sum_{ik\ell} Q_k^i A_\ell^k P_i^\ell = \sum_{k\ell} (PQ)_k^\ell A_\ell^k = \sum_k A_k^k = \operatorname{Tr}(A),$$

la formule de changement de base $A \rightarrow P^{-1}AP$ étant vraie pour les endomorphismes (ou les tenseurs T_1^1). ▀

B Annexe : Langage de géométrie différentielle : quelques notions

Appelé calcul de Cartan, cf. Cartan [3].

Ici on dira qu'une paramétrisation est régulière si elle est injective et au moins C^2 (on aura besoin de la normale).

Le but est d'introduire les variétés sans référence à un espace "plus grand" : par exemple on relativité générale, nous vivons sur la variété espace-temps de dimension 4, variété qui n'est pas un espace vectoriel (c'est une "surface") et qu'on ne veut pas considérer comme sous-ensemble d'un espace vectoriel plus grand (de dimension ≥ 5).

On renvoie à un cours de géométrie différentielle pour une présentation complète. Ici on ne fait qu'une introduction.

B.1 Définitions : variétés, cartes, atlas

Jusqu'à présent on a considéré une paramétrisation $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ de la surface S (la géométrie).

Ici on considère l'inverse $\vec{\zeta} = \vec{\varphi}^{-1} : S \rightarrow U$. Et on notera $S = \mathcal{M}$ (Manifold en anglais).

En particulier, avec les notations précédentes, on pourra avoir $\mathcal{M} = \Omega$ un ouvert de \mathbb{R}^n ou bien $\mathcal{M} = S$ une surface dans \mathbb{R}^n . Dans tous les cas, \mathcal{M} sera notre "ensemble géométrique", qu'on va essayer de "cartographier" (i.e. de repérer les points de cet ensemble par exemple à l'aide de coordonnées polaire, cartésiennes, sphériques...)

Remarque B.1 Attention! En géométrie différentielle, $\vec{\zeta}$ est appelé un système de coordonnées. Alors qu'en mécanique, le système de coordonnées c'est $\vec{\varphi} = \vec{\zeta}^{-1}$! Ici la fonction $\zeta : \vec{x} \rightarrow \vec{q}$ envoie un point géométrique \vec{x} vers sa représentation en coordonnées paramétriques \vec{q} . ■

Soit donc \mathcal{M} un ensemble de points dans \mathbb{R}^n . On va définir la notion de " \mathcal{M} variété de dimension p ".

Définition B.2 Une carte locale sur \mathcal{M} est une bijection $\vec{\zeta} : S \rightarrow U$, où S un sous-ensemble de \mathcal{M} et U est un ouvert de \mathbb{R}^p , la carte étant alors notée $(S, \vec{\zeta})$.

Définition B.3 Un atlas sur \mathcal{M} est une collection de cartes locales $\{(S_i, \vec{\zeta}_i); i \in I\}$, où I est un ensemble donné, telle que :

1- $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} S_i$, et

2- toutes les cartes sont compatibles entre elles, i.e. si $(S_i, \vec{\zeta}_i)$ et $(S_j, \vec{\zeta}_j)$ sont deux cartes telles que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ alors $\vec{\zeta}_j \circ \vec{\zeta}_i^{-1}$ est un difféomorphisme C^∞ là où il a un sens, i.e. de l'ouvert $\vec{\zeta}_i(S_i \cap S_j) \subset \mathbb{R}^p$ sur l'ouvert $\vec{\zeta}_j(S_i \cap S_j) \subset \mathbb{R}^p$.

Définition B.4 Si \mathcal{M} peut être muni d'un tel atlas, on dit que \mathcal{M} est une variété de dimension p .

Exemple B.5 Le cercle centré en $\vec{0}$ de rayon R dans \mathbb{R}^2 peut être muni des deux cartes $\vec{\zeta}_i = \vec{\varphi}_i^{-1} : \vec{x} = (x, y) \in S_i \rightarrow \vec{q}(\theta) \in U_i$ où $\vec{\varphi}_i(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$ où $U_1 =]-\pi, \pi[$ (ouvert qui exclut le point $\vec{x} = (-R, 0) \in S$) et pour $U_2 =]0, 2\pi[$ (ouvert qui exclut le point $\vec{x} = (0, R) \in S$). Ces deux cartes (S_1, ζ_1) et (S_2, ζ_2) forment un atlas du cercle, et le cercle est une variété de dimension 1. Par exemple pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, [$, on a $\zeta_1(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}) = \theta(x, y)$. ■

Exemple B.6 \mathcal{M} est "la France", S_i une région de France à cartographier, et U_i est la photo prise d'un avion, $\vec{\zeta}_i$ est une carte locale, et l'atlas est donné par un atlas routier (ici l'atlas routier est l'ensemble des images $U_i = \vec{\zeta}_i(S_i)$). ■

Exemple B.7 Une hyper-surface S dans \mathbb{R}^n est une variété de dimension $n-1$. Exemple de la sphère dans \mathbb{R}^3 . ■

Exemple B.8 Projection stéréographique. On considère la sphère $S^2 = S(0, R) = \mathcal{M}$ de \mathbb{R}^3 centrée en 0 de rayon R , à laquelle on enlève le pôle nord. Pour \vec{x} un point de cette sphère, on trace une droite qui passe par \vec{x} et le pôle nord, et on prend $\vec{\zeta}_1 : \vec{x} \rightarrow \vec{q} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ l'intersection de cette droite avec le plan " $z = -1$ ". Ici $S_1 = S^2 - \{\text{pôle nord}\}$, la carte est $(S_1, \vec{\zeta}_1)$, et $U = \mathbb{R}^2$.

(On appelle également projection stéréographique la projection précédente ou on remplace le plan d'équation " $z = -1$ " par le plan d'équation " $z = \text{constante}$ ").

Si on veut disposer du pôle nord, on fait la construction "symétrique" à partir du pôle sud. A l'aide des deux cartes ainsi définies, on a recouvert la sphère : ces deux cartes forment un atlas. ■

Exemple B.9 Un point \vec{x} de la sphère $\mathcal{M} = S^2 = S(0, R)$ de \mathbb{R}^3 centrée en 0 de rayon R , à laquelle on a enlevé "les pôles et le méridien de Greenwich", ensemble noté S , peut être repéré par $(\theta, \varphi) \in U$ (longitude-latitude) avec $U =]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ouvert de \mathbb{R}^2 , i.e. on pose $\vec{\zeta} : \vec{x} \rightarrow \vec{\zeta}(\vec{x}) = (\theta, \varphi)$.

A l'aide des coordonnées sphériques, $\vec{r} : (\theta, \varphi) \rightarrow \vec{r}(\theta, \varphi) = \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$, et on a

$\vec{\zeta} = \vec{r}^{-1} : \vec{x} \rightarrow \vec{r}^{-1}(\vec{x})$, et $\vec{\zeta} : S \rightarrow U$ est une carte dans \mathcal{M} . ■

B.2 Orientation d'une surface

Soit $\vec{\zeta}^{-1} = \vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ une paramétrisation locale régulière de \mathcal{M} . Soit $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,n-1}$ la base image de la base canonique $(\vec{E}_i)_{i=1,\dots,n-1}$ de \mathbb{R}^{n-1} par $\vec{\varphi}$, i.e. $\vec{e}_i(\vec{x}) = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{E}_i$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. (En d'autres termes $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,n-1}$ est la base du système de coordonnées $\vec{\varphi}$.)

Définition B.10 Soit $\vec{\psi} : \vec{r} \in V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ une seconde paramétrisation locale régulière de S . On dit que $\vec{\varphi}$ et $\vec{\psi}$ définissent la même orientation locale de S ssi le changement de paramétrisation $\vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi} : \vec{q} \in U \rightarrow \vec{r} \in V$ est de jacobien positif, i.e. ssi $\det(d(\vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi})(\vec{q})) > 0$ pour tout $\vec{q} \in U$.

(Noter que $[d\vec{\varphi}(\vec{q})]$ est une matrice $n * (n-1)$, alors que $[d(\vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi})(\vec{q})]$ est une matrice carrée $(n-1) * (n-1)$.)

Exemple B.11 Dans \mathbb{R}^2 , soit S le cercle de rayon R (à un point près) paramétré par $\vec{\varphi} : \theta \in]0, 2\pi[\rightarrow \vec{x} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Par convention, on dit qu'on dispose de l'orientation positive du cercle.

On a $\vec{e}_1(\vec{x}) = \vec{\varphi}'(\theta) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{a}_1(\theta)$.

Pour $\lambda > 0$, soit la paramétrisation du cercle $\vec{\psi} : t \in [0, \frac{2\pi}{\lambda}[\rightarrow \vec{y} = R \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \end{pmatrix}$. On a $\vec{f}_1(\vec{y}) = \vec{\psi}'(t) = \lambda R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda t) \\ \cos(\lambda t) \end{pmatrix} = \vec{b}_1(t)$ (cercle parcouru dans le même sens à la vitesse λR).

La relation entre $\vec{x} = \vec{\varphi}(\theta)$ et $\vec{y} = \vec{\psi}(t)$ est donnée à l'aide de $\vec{\varphi}(\lambda t) = \vec{\psi}(t)$. Donc au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\lambda t) = \vec{\psi}(t) = \vec{y}$, on a $\vec{b}_1(t) = \lambda \vec{a}_1(\lambda t)$, i.e. $\vec{f}_1(\vec{x}) = \lambda \vec{e}_1(\vec{x})$: la matrice de changement de base est le scalaire $\lambda > 0$, et donc on conserve bien l'orientation du cercle. \blacksquare

Exemple B.12 Paramétrisation du cercle en sens inverse. Pour $\mu > 0$, soit la paramétrisation du cercle $\vec{\psi} : t \in [0, \frac{2\pi}{\mu}[\rightarrow \vec{y} = R \begin{pmatrix} \cos(2\pi - \mu t) \\ \sin(2\pi - \mu t) \end{pmatrix}$. On a $\vec{g}_1(\vec{y}) = \vec{\psi}'(t) = -\mu R \begin{pmatrix} -\sin(2\pi - \mu t) \\ \cos(2\pi - \mu t) \end{pmatrix} = \vec{c}_1(t)$ (cercle parcouru en sens inverse à la vitesse μR).

La relation entre $\vec{x} = \vec{\varphi}(\theta)$ et $\vec{y} = \vec{\psi}(t)$ est donnée à l'aide de $\vec{\varphi}(2\pi - \mu t) = \vec{\psi}(t)$: Donc au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(2\pi - \mu t) = \vec{\psi}(t) = \vec{y}$, on a $\vec{c}_1(t) = -\mu \vec{a}_1(2\pi - \mu t)$, i.e. $\vec{f}_1(\vec{x}) = -\mu \vec{e}_1(\vec{x})$: la matrice de changement de base est le scalaire $-\mu < 0$, et donc $\vec{\varphi}$ et $\vec{\psi}$ donnent deux orientations différentes du cercle. \blacksquare

Proposition B.13 Localement il n'existe que deux orientations possibles.

Preuve. Une application régulière $\vec{\chi} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ a son jacobien > 0 ou < 0 . Ici $\vec{\chi} = \vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi}$. \blacksquare

Définition B.14 (Orientation locale.) Une carte locale $(S, \vec{\varphi}^{-1})$ détermine une orientation de S , i.e. : l'orientation de S au voisinage de \vec{x}_0 déterminée par $\vec{\varphi}$ est donnée par l'orientation de la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,n-1}$.

Donc, pour un autre difféomorphisme local $\vec{\psi}$ (une autre carte locale $(S_2, \vec{\psi}^{-1})$), de base associée $(\vec{f}_i(\vec{x}))_{i=1,\dots,n-1}$ où $\vec{f}_i(\vec{x}) = d\vec{\psi}(\vec{q}_2) \cdot \vec{E}_i$ quand $\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{q}_2)$, cette base a même orientation que la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ si la matrice de changement de base a son déterminant positif.

Définition B.15 (Orientation globale.) Soit S une surface régulière (une variété). On dit que S est orientable ssi il existe un atlas $(U_i, \vec{\varphi}_i^{-1})_I$ de S qui conserve l'orientation, i.e. ssi sur $U_i \cap U_j$ on a $\det(d(\vec{\varphi}_j \circ \vec{\varphi}_i^{-1})(\vec{q})) > 0$ pour tout point \vec{q} commun aux cartes $\vec{\varphi}_i$ et $\vec{\varphi}_j$, pour tous i, j .

Exemple B.16 La sphère est orientable, le ruban de Möbius n'est pas orientable. \blacksquare

B.3 Différentiation sur une variété

A l'aide d'un atlas on peut définir une topologie sur une variété (les ouverts, d'où la continuité) puis la différentiabilité :

Définition B.17 Une sous-ensemble A d'une variété \mathcal{M} est un ouvert ssi pour tout $a \in A$ il existe une carte locale $(U_a, \vec{\varphi}_a)$ avec $a \in U_a$ et $U_a \subset A$.

I.e., pour tout $a \in A$, il existe $U_a \subset A$ tel U_a est l'image réciproque d'un ouvert de \mathbb{R}^m avec $a \in U_a$ (puisque par définition d'une carte $\vec{\varphi}_a : U_a \rightarrow V_a$ l'ensemble V_a est ouvert dans \mathbb{R}^m).

Corollaire B.18 Ayant défini les ouverts de \mathcal{M} , on a ainsi défini une topologie sur \mathcal{M} .

Preuve. On vérifie aisément que l'ensemble des ouverts ainsi définis sont tels qu'une union quelconque et une intersection finie sont des ouverts, et que l'ensemble vide et \mathcal{M} tout entier sont des ouverts. ■

Exemple B.19 La sphère S^2 de \mathbb{R}^3 , munie des cartes de l'exemple B.8, est munie de la topologie attendue : celle induite de \mathbb{R}^3 , i.e. ses ouverts coïncident avec les $\Omega \cap S^2$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 . (Ici S^2 est également considéré comme ensemble plongé dans \mathbb{R}^3 . Dans la suite, S^2 sera souvent considérée par elle-même : sans référence à son plongement dans \mathbb{R}^3). ■

Définition B.20 Soit $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ où \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux variétés de dimensions respectives m_1 et m_2 . On dit que f est de classe C^r en $\vec{x} \in \mathcal{M}_1$ ssi il existe une carte $(U_1, \vec{\varphi}_1)$ au voisinage de \vec{x} , avec $\vec{\varphi}_1 : U_1 \rightarrow V_1$, et une carte $(U_2, \vec{\varphi}_2)$ au voisinage de $f(\vec{x})$, avec $\vec{\varphi}_2 : U_2 \rightarrow V_2$, tel que $f(U_1) \subset U_2$ et tel que $\vec{\varphi}_2 \circ f \circ \vec{\varphi}_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ est de classe C^r (de l'ouvert $V_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ dans l'ouvert $V_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$).

Et $\vec{\varphi}_2 \circ f \circ \vec{\varphi}_1^{-1} \stackrel{\text{noté}}{=} f_{\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2}$ est appelé u représentant local de f .

Proposition B.21 L'identité $I : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est un difféomorphisme.

Preuve. Par définition d'une variété, les changements de cartes $\vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1^{-1} : V \rightarrow V$ sont des difféomorphismes, donc $\vec{\varphi}_2 \circ I \circ \vec{\varphi}_1^{-1} = \vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1^{-1}$ est un difféomorphisme. ■

Corollaire B.22 Les cartes $(U, \vec{\varphi})$ sont tels que les $\vec{\varphi}$ sont des difféomorphismes.

Preuve. On applique la définition précédente : on note $\vec{\varphi} : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ la bijection définissant la carte locale. 1- soit $\vec{\psi} : V \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme. Alors $(U, \vec{\psi} \circ \vec{\varphi})$ est également une carte locale. 2- On en déduit que $\vec{\psi}^{-1} \circ (\vec{\psi} \circ \vec{\varphi}) \circ I : U \rightarrow V$, où I est l'identité de U , est un difféomorphisme ; i.e. $\vec{\varphi}$ est un difféomorphisme. ■

B.4 Fibré tangent à une variété

Définition B.23 Soit \mathcal{M} une variété, soit $\vec{x} \in \mathcal{M}$ et soient deux réels a, b t.q. $a < 0 < b$. Une courbe sur \mathcal{M} en \vec{x} est une application $\vec{c} : t \in]a, b[\mapsto \vec{c}(t) \in \mathcal{M}$ telle que $\vec{c}(0) = \vec{x}$ et telle que \vec{c} est C^1 . Une courbe est régulière ssi $\vec{c}'(t) \neq 0$ pour tout t . On ne traitera que de courbes régulières.

Remarque B.24 En appliquant la définition B.20, où ici \mathcal{M} joue le rôle de \mathcal{M}_2 , le caractère C^1 est bien défini : il suffit de prendre $\vec{\varphi}_1 : U \rightarrow V$ où V est un ouvert de \mathbb{R}^m , $\vec{\varphi}_2$ l'identité de $]a, b[$ dans lui-même : dire que \vec{c} est C^r équivaut à dire que $\vec{\varphi}_1 \circ \vec{c} :]a, b[\rightarrow V$ est C^r . ■

Le fibré tangent à une variété sera la réunion des espaces vectoriels tangents. C'est l'ensemble de vecteurs tangents à la variété, vecteurs qui ne peuvent pas ici être définis comme étant des bipoints sur la variété : exemple de la sphère où un vecteur (non nul) tangent en un point A n'est pas un bipoint $\vec{v} = \vec{AB}$ où B est aussi un point de la sphère ; pour que \vec{v} soit tangent à la sphère, et $\vec{v} = \vec{AC}$, le point C n'appartient pas à la sphère (il est forcément strictement "au dessus" de la sphère).

On suit l'approche d'Abraham et Marsden, i.e. l'approche à l'aide des courbes tracées sur la variété : un vecteur vitesse (vecteur tangent à la courbe) sera déclaré être un vecteur tangent à la variété.

Définition B.25 Soit $(U, \vec{\varphi})$ une carte tel que $\vec{x} \in U \subset \mathcal{M}$. Deux courbes \vec{c}_1, \vec{c}_2 sont tangentes en \vec{x} relativement à $\vec{\varphi}$ ssi les courbes $\vec{\varphi} \circ \vec{c}_1$ et $\vec{\varphi} \circ \vec{c}_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^m$ sont tangentes en 0, i.e. ssi :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\vec{\varphi}(\vec{c}_1(t)) - \vec{\varphi}(\vec{c}_2(t))\|_{\mathbb{R}^m}}{t} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Remarque B.26 Dans le cas des surfaces plongées dans \mathbb{R}^n (ou dans le cas des ouverts de \mathbb{R}^n) et $\vec{\varphi}$ de classe C^1 , on retrouve les résultats usuels : l'expression (B.1) dit que les vecteurs tangents sont identiques : avec $\vec{c}_i(0) = \vec{x}$, on a $\frac{\|\vec{\varphi}(\vec{c}_1(t)) - \vec{\varphi}(\vec{c}_2(t))\|_{\mathbb{R}^m}}{t} = \left\| \frac{\vec{\varphi}(\vec{c}_1(t)) - \vec{\varphi}(\vec{c}_1(0))}{t} - \frac{\vec{\varphi}(\vec{c}_2(t)) - \vec{\varphi}(\vec{c}_2(0))}{t} \right\|_{\mathbb{R}^m} = \|d\vec{\varphi}(\vec{x}) \cdot (\vec{c}'_1(0) - \vec{c}'_2(0)) + o(1)\|$, et $\vec{\varphi}$ étant un difféomorphisme, quand $t \rightarrow 0$ on obtient $\|\vec{c}'_1(0) - \vec{c}'_2(0)\| = 0$, i.e. que les vecteurs tangents $\vec{c}'_1(0)$ et $\vec{c}'_2(0)$ sont égaux (vitesses égales). ■

Proposition B.27 Le fait que deux courbes soient tangentes ne dépend pas de la carte choisie : si $(U_1, \vec{\varphi}_1)$ et $(U_2, \vec{\varphi}_2)$ sont deux cartes en \vec{x} , si \vec{c}_1 et \vec{c}_2 sont deux courbes tangentes en \vec{x} relativement à $\vec{\varphi}_1$, alors elles sont tangentes en \vec{x} relativement à $\vec{\varphi}_2$.

Preuve. Pour $i = 1, 2$. On a $\vec{\varphi}_2 \circ \vec{c}_i = (\vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1^{-1}) \circ (\vec{\varphi}_1 \circ \vec{c}_i)$ (au voisinage de \vec{x}), et donc $d(\vec{\varphi}_2 \circ \vec{c}_i)(t) = d(\vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1^{-1})(\vec{\varphi}_1(\vec{c}_i(t))) \cdot d(\vec{\varphi}_1 \circ \vec{c}_i)(t)$, et donc $d(\vec{\varphi}_2 \circ \vec{c}_i)(0) = d(\vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1^{-1})(\vec{x}) \cdot d(\vec{\varphi}_1 \circ \vec{c}_i)(0)$. Comme $d(\vec{\varphi}_1 \circ \vec{c}_1)(0) = d(\vec{\varphi}_1 \circ \vec{c}_2)(0)$, on en déduit $d(\vec{\varphi}_2 \circ \vec{c}_1)(0) = d(\vec{\varphi}_2 \circ \vec{c}_2)(0)$. ■

Il est immédiat que la relation “être tangent en \vec{x} ” est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive). On définit alors les classes d'équivalence des courbes tangentes en \vec{x} : pour \vec{c} une courbe donnée en \vec{x} , on note $[\vec{c}]_{\vec{x}}$ sa classe d'équivalence :

$$[\vec{c}]_{\vec{x}} = \{\text{courbes tangentes à } \vec{c} \text{ en } \vec{x}\}.$$

Exemple B.28 Dans le cas d'une variété qui est un ouvert dans \mathbb{R}^m , une courbe est donnée par $\vec{c} :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ et son vecteur tangent en \vec{x} est parfaitement défini par $\vec{c}'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{c}(t) - \vec{x}}{t}$. Un représentant de $[\vec{c}]_{\vec{x}}$ est alors donné par la droite $\tilde{\vec{c}}(t) = \vec{x} + t\vec{c}'(0)$, i.e. $[\vec{c}]_{\vec{x}}$ est caractérisé par le vecteur tangent $\vec{c}'(0)$ à cette droite. ■

Définition B.29 On appelle espace tangent à \mathcal{M} en \vec{x} , ou fibré tangent à \mathcal{M} en \vec{x} , l'espace :

$$T_{\vec{x}}(\mathcal{M}) = \{[\vec{c}]_{\vec{x}} : \vec{c} \text{ courbe en } \vec{x}\}$$

Et on note :

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{\vec{x} \in \mathcal{M}} T_{\vec{x}}(\mathcal{M}),$$

appelé fibré tangent (ou espace tangent) de \mathcal{M} .

On peut alors définir la différentielle :

Définition B.30 Pour $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de classe C^1 et $\vec{c} :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ une courbe sur \mathcal{M} , la fonction $f \circ \vec{c} :]a, b[\rightarrow \mathcal{N}$ est une courbe sur \mathcal{N} . On définit $Tf : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$ par :

$$Tf([\vec{c}]_{\vec{x}}) = [f \circ \vec{c}]_{f(\vec{x})} \stackrel{\text{noté}}{=} (f(\vec{x}), Df(\vec{x}) \cdot \vec{v}), \quad (\text{B.2})$$

quand \vec{v} est un représentant de la classe $[\vec{c}]_{\vec{x}}$. Et $Df(\vec{x}) \cdot \vec{v}$ est appelé différentielle de f en \vec{x} dans la direction \vec{v} .

Cette définition a bien un sens : par définition $Df(\vec{x}) \cdot \vec{v} = d(f \circ \vec{c})(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{c}(t)) - f(\vec{x})}{t} \in \mathbb{R}$. Et on vérifie facilement que la courbe $f \circ \vec{c}$ est tangente à toute courbe $f \circ \tilde{\vec{c}}$ pour tout $\tilde{\vec{c}} \in [\vec{c}]_{\vec{x}}$: cette définition est indépendante de la courbe choisie dans $[\vec{c}]_{\vec{x}}$.

B.5 Connexion

On reprend ce qui a été dit au paragraphe C, où on remplace S par \mathcal{M} .

B.6 p -forme différentielle

Une p -forme extérieure (ou plus simplement une p -forme) sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un tenseur $\alpha \in T_p^0(\Omega)$ qui est alterné, i.e. tel que, pour tout \vec{x} , la forme multilinéaire $\alpha(\vec{x}) \in L((\mathbb{R}^n)^p; \mathbb{R})$ est alternée. C'est à dire, pour tout \vec{x} , $\alpha_{\vec{x}}$ est multilinéaire et, pour tous $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \in T_{\vec{x}}(\mathbb{R}^n)$:

$$\alpha_{\vec{x}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \text{sign}(\pi) \alpha_{\vec{x}}(\vec{v}_{\pi(1)}, \dots, \vec{v}_{\pi(p)})$$

pour toute permutation π sur $\{1, \dots, p\}$, où $\text{sign}(\pi) = \pm 1$ est la signature de la permutation. (Définition équivalente : $\alpha_{\vec{x}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = 0$ chaque fois que deux des vecteurs sont égaux.)

On note $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des $(0 \ p)$ tenseurs qui sont alternés. Et un élément de $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n)$ est appelé une p -forme sur \mathbb{R}^n .

B.7 Volume

En particulier le déterminant vérifie $\det \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n)$ (c'est une n -forme), et il définit le volume, et l'ensemble des n -formes dans \mathbb{R}^n est de dimension 1, i.e. toute n -forme dans \mathbb{R}^n est proportionnelle au déterminant. En coordonnées cartésiennes, $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$ étant la base duale de la base canonique $(\vec{E}_i)_{i=1, \dots, n}$ de \mathbb{R}^n , on note :

$$\det = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

C'est la forme multi-linéaire alternée vérifiant $\det(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n) = 1$. Et donc $\mu \in \mathcal{A}_n(\Omega)$ est nécessairement de type :

$$\mu(\vec{x}) = g(\vec{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

où $g \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

Remarque B.31 Rappel dans \mathbb{R}^n . Soit $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme.

Le pull-back d'une fonction $g \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ par $\vec{\varphi}$ est une fonction $f \in C^\infty(U; \mathbb{R})$, notée $f = \vec{\varphi}^* g$, définie par :

$$(\vec{\varphi}^* g)(\vec{q}) = g(\vec{x}),$$

quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. Le pull-back permet de faire des calculs sur la "configuration de référence", ici U , au lieu de les faire sur la "configuration actuelle", ici Ω .

Pour $p \geq 1$, le pull-back d'un tenseur $\underline{t} \in T_p^0(\Omega)$ par $\vec{\varphi}$ est le tenseur noté $\vec{\varphi}^* \underline{t} \in T_p^0(U)$ défini par, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, et quand $\vec{v}_i(\vec{x}) = d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{V}_i(\vec{q})$ pour $i = 1, \dots, p$ (les transportés des \vec{V}_i par $\vec{\varphi}$) :

$$(\vec{\varphi}^* \underline{t})(\vec{q}, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_p) = \underline{t}(\vec{x}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p),$$

i.e. $(\vec{\varphi}^* \underline{t})(\vec{q}, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_p) = \underline{t}(\vec{\varphi}(\vec{q}), d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{V}_1, \dots, d\vec{\varphi}(\vec{q}) \cdot \vec{V}_p)$. Noté encore :

$$(\vec{\varphi}^* \underline{t})_{\vec{q}}(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_p) = \underline{t}_{\vec{x}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p),$$

Et, quand $f = \vec{\varphi}^* g$ est le pull-back de g par $\vec{\varphi}$, le pull-back de μ par $\vec{\varphi}$ est donné par, quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$(\vec{\varphi}^* \mu)(\vec{q}) = f(\vec{q}) J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) dX^1 \wedge \dots \wedge dX^n, \quad (\text{B.3})$$

où $(dX^i)_{i=1, \dots, n}$ est la base duale de la base canonique dans $\mathbb{R}^n \supset U$ et $J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) = \det(d\vec{\varphi}(\vec{q}))$ le jacobien de $\vec{\varphi}$ en \vec{q} . ■

Remarque B.32 Attention aux notations : dans (B.3) on a utilisé la notation dX^i et non dq^i . Si on avait utilisé cette dernière notation, on aurait écrit $\vec{\varphi}^* \mu(\vec{q}) = f(\vec{q}) J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$, la notation dq^i est alors celle de la base duale de la base euclidienne dans $\mathbb{R}^n \supset U$; d'ailleurs on intègre sur U . Ce n'est donc pas $dq^i(\vec{x})$, notation pour la base duale dans $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ de la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ en $\vec{x} \in \Omega$ du système de coordonnées : (dX^i) est la base duale de la base canonique dans l'espace de départ.

Pour éviter les confusions d'écriture, on utilisera dX^i (et non dq^i) quand on travaillera dans U sans référence à $\vec{\varphi}$. ■

Définition B.33 L'intégrale de μ sur Ω (ouvert de \mathbb{R}^n) est la valeur de l'intégrale de Lebesgue de g sur Ω :

$$\int_{\Omega} \mu \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega} g dx^1 \dots dx^n. \quad (\text{B.4})$$

On suppose que $\det(d\vec{\varphi}(\vec{q})) > 0$ pour tout \vec{q} . On a donc également dans ce cas :

$$\int_U \vec{\varphi}^* \mu \stackrel{\text{déf}}{=} \int_U (\vec{\varphi}^* g)(\vec{q}) J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) dX^1 \dots dX^n. \quad (\text{B.5})$$

(Ici on est dans le cas $\vec{\varphi} : U \rightarrow \Omega$ difféomorphisme avec U et Ω ouverts de \mathbb{R}^n .)

Et on obtient pour un difféomorphisme $\vec{\varphi}$ qui conserve l'orientation (i.e. $J_{\vec{\varphi}}(\vec{q}) > 0$ pour tout \vec{q}), réécriture de (4.23) (changement de variables dans les intégrales) :

$$\int_{\Omega} \mu = \int_U \vec{\varphi}^* \mu, \quad (\text{B.6})$$

écriture usuelle de (4.23) en géométrie différentielle (lorsque $\vec{\varphi}$ conserve l'orientation dans \mathbb{R}^n) qui va être généralisée aux surfaces orientables de \mathbb{R}^n .

Interprétation : pour calculer l'intégrale de μ sur Ω ("configuration actuelle"), il suffit de calculer l'intégrale de son pull-back $\vec{\varphi}^* \mu$ sur U ("configuration de référence").

B.8 Aire d'une surface orientable

On réécrit (B.6) dans le langage de la géométrie différentielle. On se donne une surface régulière orientable $S \subset \mathbb{R}^n$ paramétrée par :

$$\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n.$$

On note $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1, \dots, n-1}$ la base sur S définie par $\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q})$ au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$. Et on note $(e^i(\vec{x}) = dq^i(\vec{x}))_{i=1, \dots, n-1}$ la base duale. Et on suppose que $\vec{\varphi}$ définit l'orientation.

Soit μ une $(n-1)$ -forme sur S (donc $\mu(\vec{x})$ est une forme multilinéaire alternée définie sur $T_{\vec{x}}S$ le plan tangent à S en \vec{x}). On a μ de la forme :

$$\mu(\vec{x}) = g(\vec{x}) dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}),$$

qu'on peut caractériser à l'aide de son pull-back dans U , qui est de la forme, quand $f(\vec{q}) = (\vec{\varphi}^* g)(\vec{q}) = g(\vec{x})$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$:

$$\vec{\varphi}^* \mu(\vec{q}) = f(\vec{q}) \sqrt{\det(C_{\vec{q}}^b)} dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{n-1}.$$

Définition B.34 On définit alors l'intégrale de μ sur une surface orientée S par :

$$\int_S \mu \stackrel{\text{déf}}{=} \int_U \vec{\varphi}^* \mu, \quad (\text{B.7})$$

qui n'est autre que la formule de changement de variables usuelle.

B.9 Produit intérieur

Pour $\vec{w} \in T(\mathbb{R}^n)$ on définit l'opérateur de produit intérieur (contraction) :

$$i_{\vec{w}} : \begin{cases} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R}^n), \\ \alpha & \mapsto i_{\vec{w}} \alpha, \quad (i_{\vec{w}} \alpha_{\vec{x}})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_{\vec{x}}(\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}). \end{cases}$$

En particulier pour $\alpha = \det$ le déterminant (qui détermine le volume), pour $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ tangents à la surface, pour \vec{n} le vecteur normal unitaire à la surface, $i_{\vec{n}} \alpha$ détermine l'aire (au signe près) du parallélépipède de côté $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. On a en effet (au signe près), en se restreignant à $TS_{\vec{x}}$:

$$(i_{\vec{n}} \det)_{\vec{x}} = (-1)^{n-1} dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}) = (-1)^{n-1} d\sigma_{\vec{x}},$$

puisque :

$$(i_{\vec{n}} \det)_{\vec{x}}(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x})) = \det(\vec{n}(\vec{x}), \vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x})) = (-1)^{n-1} \det(\vec{e}_1(\vec{x}), \dots, \vec{e}_{n-1}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})).$$

B.10 Différentielle extérieure

(En quelque sorte, l'opération "réciproque" du produit intérieur.)

On introduit l'opérateur de différentiation extérieure :

$$d_{\text{ext}} : \begin{cases} \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n), \\ \beta & \mapsto d_{\text{ext}}\beta, \end{cases}$$

comme suit : pour une forme $n-1$ -linéaire alternée β sur \mathbb{R}^n on commence par considérer sa différentielle usuelle définie en \vec{x} , i.e. l'application linéaire tangente $d\beta(\vec{x}) \stackrel{\text{noté}}{=} \beta'(\vec{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R}^n))$ (définie par le développement limité à l'ordre 1). Donc $\beta'(\vec{x}) \cdot \vec{w} \in \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ est la dérivée dans la direction \vec{w} définie par :

$$(\beta'(\vec{x}) \cdot \vec{w})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta(\vec{x} + h\vec{w}) - \beta(\vec{x})}{h}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) \in \mathbb{R}.$$

(On supposera au moins $\beta \in C^1$.) Et à β' on associe la différentielle extérieure (alternée) $d_{\text{ext}}\beta \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n)$, en posant :

$$d_{\text{ext}}\beta_{\vec{x}}(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\beta'(\vec{x}) \cdot \vec{v}_i)(\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_{n-1}).$$

En particulier, si $\beta_{\vec{x}} = \beta_{a_1 \dots a_{n-1}}(\vec{x}) dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_{n-1}}$ (et toute $(n-1)$ -forme différentielle est une somme de tels termes), on a :

$$d_{\text{ext}}\beta_{\vec{x}} = d\beta_{a_1 \dots a_{n-1}}(\vec{x}) \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_{n-1}},$$

où $d\beta_{a_1 \dots a_{n-1}}(\vec{x}) = \sum_{a_i=1}^n \frac{\partial \beta_{a_1 \dots a_{n-1}}}{\partial x^{a_i}} dx^{a_i}$. Comme les $da^i \wedge da^i$ sont nuls, il reste :

$$d_{\text{ext}}\beta_{\vec{x}} = \frac{\partial \beta_{a_1 \dots a_{n-1}}}{\partial x^{a_n}} dx^{a_n} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_{n-1}} = \gamma(\vec{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

où les $\gamma(\vec{x})$ sont faciles à déterminer : ainsi si $\beta \in \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ alors $d_{\text{ext}}\beta_{\vec{x}}$ est proportionnel au volume.

Exemple B.35 On prend Φ le système de coordonnées cartésien dans \mathbb{R}^n . Soit la mesure :

$$\mu_{\vec{x}} = x^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}, \quad (\text{B.8})$$

qui donne :

$$d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = dx^n \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1},$$

i.e. :

$$d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (-1)^n \det = (-1)^n d\Omega,$$

où $d\Omega$ est l'élément de volume.

Et pour une surface plane (horizontale) de normale $\vec{n} = \vec{E}_n$, on a $i_{\vec{n}}(d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}})(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_{n-1}) = d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}}(\vec{E}_n, \vec{E}_1, \dots, \vec{E}_{n-1})$, d'où :

$$i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

■

Exemple B.36 Soit $\vec{\varphi}$ un système de coordonnées sur une surface. On prend Φ le système de coordonnées dans \mathbb{R}^n déduit de $\vec{\varphi}$, cf. (10.41). Soit (sur la surface) la mesure :

$$\mu_{\vec{x}} = g(\vec{x}) dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}), \quad (\text{B.9})$$

qui donne :

$$d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = dg(\vec{x}) \wedge dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x})$$

On a $dg(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^i}(\vec{x}) dq^i(\vec{x})$, et donc :

$$d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = \frac{\partial g}{\partial q^n}(\vec{x}) dq^n(\vec{x}) \wedge dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}). \quad (\text{B.10})$$

En particulier :

$$g(\vec{x}) = q^n(\vec{x}) \implies d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = dq^n(\vec{x}) \wedge dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}),$$

et donc $d_{\text{ext}}\mu = (-1)^{n+1} \frac{\det}{\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}$, i.e. l'élément de volume est donné par :

$$\det = d\Omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (-1)^{n+1} J_{\Phi} d_{\text{ext}}\mu,$$

où \det est le volume et J_{Φ} est le jacobien du système de coordonnées Φ .

Puis $i_{\vec{n}}(d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}})(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}) = d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}}(\vec{n}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$, d'où :

$$i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = dq^1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge dq^{n-1}(\vec{x}) :$$

la contraction avec le vecteur normal unitaire donne la mesure de surface. \blacksquare

Exemple B.37 Dans \mathbb{R}^2 , on prend les coordonnées polaires avec donc les vecteurs de base $\vec{e}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2(\vec{x}) = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, et la base duale $(dr(\vec{x}), d\theta(\vec{x}))$. L'élément de volume est $d\Omega = dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$.

Sur le cercle $\vec{\varphi} : \theta \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$ (paramétré dans le sens trigonométrique), la normale unitaire est donnée par $\vec{n}(\vec{x}) = -\vec{e}_1(\vec{x})$, cf. remarque 5.18, qui fait de (\vec{e}_2, \vec{n}) une base directe. Le système de coordonnées Φ associé à $\vec{\varphi}$ est donc donné par, cf. (10.41) :

$$\Phi(\theta, z) = \vec{\varphi}(\theta) + z\vec{n}(\vec{x}) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

et les vecteurs de base sont (pour $|z| < R$, ce qui est suffisant car on s'intéresse au cercle) :

$$\begin{cases} \vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, z) = (R - z) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{R - z}{R} \vec{e}_2(\vec{x}), \\ \vec{f}_2(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(r, z) = \vec{n}(\vec{x}) = - \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -\vec{e}_1(\vec{x}). \end{cases}$$

La base duale est donc $f^1(\vec{x}) = \frac{R}{R-z} d\theta(\vec{x})$ et $f^2(\vec{x}) = -dr(\vec{x}) = dz(\vec{x})$.

Soit $\mu(\vec{x}) = z d\theta(\vec{x})$ la mesure sur le cercle. (Par rapport à l'exemple précédent, ici on a $q^n = z$ et $dq^n = dz$). Donc $d_{\text{ext}}\mu = dz \wedge d\theta = -dr \wedge d\theta$, et $-r d_{\text{ext}}\mu = r dr \wedge d\theta$ est l'élément de volume.

Puis pour \vec{x} sur le cercle (avec donc $z=0$ et $\vec{f}_1 = \vec{e}_2$) on obtient $i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}}(\vec{f}_1) = d_{\text{ext}}\mu(\vec{n}, \vec{e}_2) = (dz \wedge d\theta)(\vec{n}, \vec{e}_2) = 1 = d\theta(\vec{f}_1)$. Et donc $i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = d\theta$. \blacksquare

Exemple B.38 Dans \mathbb{R}^2 , on prend les coordonnées polaires avec donc les vecteurs de base $\vec{e}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2(\vec{x}) = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, et la base duale $(dr(\vec{x}), d\theta(\vec{x}))$. L'élément de volume est $d\Omega = dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$.

Soit un "rayon" à θ_0 fixé, i. e. la courbe $\vec{\varphi} : r \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \theta_0 \\ r \sin \theta_0 \end{pmatrix}$. Cette courbe définit un système de coordonnées sur la variété de dimension 1 (le rayon $\text{Im} \vec{\varphi}$) ; le vecteur directeur est donnée par $\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{e}_1(\vec{x})$ et le vecteur normal unitaire par $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{r} \vec{e}_2(\vec{x})$, cf. exemple 5.16, qui fait de (\vec{f}_1, \vec{n}) une base directe. Le système de coordonnées Φ de \mathbb{R}^2 associé à $\vec{\varphi}$ est donc donné par, cf. (10.41) :

$$\Phi(r, z) = \vec{\varphi}(r) + z\vec{n}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r \cos \theta_0 \\ r \sin \theta_0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

et les vecteurs de base sont :

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1(\vec{x}), \quad \vec{f}_2(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(r, z) = \vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{r} \vec{e}_2(\vec{x}).$$

La base duale est donc $f^1(\vec{x}) = dr(\vec{x})$ et $f^2(\vec{x}) = r d\theta(\vec{x}) = dz(\vec{x})$ (et ici dz est une mesure "dimensionnelle", tout comme dr , et contrairement à $d\theta$ qui est "adimensionnelle" ; ici z mesure l'éloignement au rayon).

Soit $\mu = z dr$ la mesure au point $\vec{x} = \Phi(r, z)$. (Par rapport à l'exemple précédent, ici on a $q^n = z$ et $dq^n = dz$). Donc $d_{\text{ext}}\mu = dz \wedge dr = -r dr \wedge d\theta$, et $-d_{\text{ext}}\mu$ est l'élément de volume.

Puis $i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ est caractérisé par $i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}}(\vec{f}_1) = d_{\text{ext}}\mu(\vec{n}, \vec{f}_1) = (dz \wedge dr)(\vec{n}, \vec{f}_1) = 1 = dr(\vec{f}_1)$. Donc $i_{\vec{n}}d_{\text{ext}}\mu_{\vec{x}} = dr$. \blacksquare

Théorème B.39 Si $f \in C^2$, alors $d_{\text{ext}}(d_{\text{ext}}f) = 0$

Preuve. La différentielle seconde $f'' = d^2f$ est symétrique dans ce cas, et donc sa partie antisymétrique d_{ext}^2f est nulle. \blacksquare

Remarque B.40 N.B. : attention aux notations : la différentiation extérieure d'une forme β est souvent noté $d\beta$ (notation de Cartan réservée aux p -formes différentielles, i.e. aux formes multilinéaires alternées) et non $d_{\text{ext}}\beta$, et dans ce cas (Cartan) la différentiation usuelle est notée β' et non $d\beta$. Attention donc au contexte. \blacksquare

B.11 Théorème de Stokes

Proposition B.41 *Théorème de Stokes.* Soit Ω ouvert régulier borné de \mathbb{R}^n de bord la surface régulière $S = \partial\Omega$ orientée de telle sorte que la normale soit entrante dans Ω ; i.e., si $\vec{\varphi} : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est un paramétrage de Ω , l'orientation de ce paramétrage qui donne $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{n})$ repère direct vérifie \vec{n} pointe vers l'intérieur de Ω .

Alors pour α une $n-1$ -forme sur S :

$$\int_{\Omega} d_{\text{ext}}\alpha = \int_S \alpha. \quad (\text{B.11})$$

Preuve. Dans \mathbb{R}^2 : une surface S est une variété de dimension 1 (une courbe). Soit α une 1-forme. Elle est de la forme $\alpha(\vec{x}) = P(\vec{x})dx + Q(\vec{x})dy$, qui donne $d_{\text{ext}}\alpha(\vec{x}) = \frac{\partial P}{\partial y}(\vec{x})dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}(\vec{x})dx \wedge dy = (-\frac{\partial P}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\vec{x}))dx \wedge dy$. Et la formule de Green-Riemann (voir cours de 1ère année) indique que :

$$\int_{\Omega} (-\frac{\partial P}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\vec{x}))dxdy = \int_S P(\vec{x})dx + Q(\vec{x})dy,$$

ce qui n'est autre que (B.11).

Dans \mathbb{R}^3 , c'est la formule d'Ostrogradski :

$$\int_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \int_S P dydz + Q dzdx + R dxdy,$$

et ici avec α qui est forcément de la forme $\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Ou encore avec $dx^1 dx^2 = n^3 d\sigma$ et permutation sur les indices, c'est la formule de la divergence $\int_{\Omega} \text{div} \vec{v} d\Omega = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$.

Dans \mathbb{R}^n , voir par exemple Abraham et Marsden (démonstration à l'aide d'une partition de l'unité et d'un changement de variables). \blacksquare

C Connexion sur une variété de \mathbb{R}^n

C.1 Connexion et dérivée covariante pour les champs de vecteurs sur TS

Soit S une variété.

Même si \vec{v} et \vec{w} sont des champs de vecteurs sur S (i.e. $\vec{v}, \vec{w} \in TS$), il n'y a aucune raison pour que $(d\vec{w} \cdot \vec{v})(\vec{x}) \in TS_{\vec{x}}$ (soit dans le plan tangent $TS_{\vec{x}}$); par exemple, sur la sphère de \mathbb{R}^3 , on a $d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -r \cos^2 \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3$, voir (2.5) et (2.6), i.e. bien que $\vec{e}_2(\vec{x})$ soit un vecteur tangent, quand $r \neq 0$ et $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$, $d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2(\vec{x})$ est un vecteur entrant dans la sphère et non tangent (terme $-r \cos^2 \varphi \vec{e}_1$).

Ici on veut définir une dérivation sur la sphère qui reste sur la sphère. On va voir qu'une telle dérivation appelée connexion est par exemple la dérivation usuelle qu'on projette ensuite sur le plan tangent : si on vit dans le plan tangent, on ne voit que ce qui est tangent, i.e. on ne voit que les projections sur le plan tangent. Cela donnera la connexion riemannienne (celle qui est utilisée en physique).

Définition C.1 Une connexion (affine) sur une variété S est une application ∇ :

$$\nabla : \begin{cases} TS \times TS & \rightarrow TS, \\ (\vec{v}, \vec{w}) & \rightarrow \nabla_{\vec{v}}\vec{w}, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

qui à deux champs de vecteurs du plan tangent associent un troisième champ de vecteurs du plan tangent, telle que :

- (i) ∇ est bilinéaire, et
- (ii) pour $f \in C^\infty(S; \mathbb{R})$ (fonction sur S à valeurs scalaires) et tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS$:

$$\nabla_{(f\vec{v})}\vec{w} = f \nabla_{\vec{v}}\vec{w}, \quad (\text{C.2})$$

- (iii) et :

$$\nabla_{\vec{v}}(f\vec{w}) = f \nabla_{\vec{v}}\vec{w} + (df.\vec{v})\vec{w}. \quad (\text{C.3})$$

Définition C.2 Et $\nabla_{\vec{v}}\vec{w}$ est appelée dérivée covariante de \vec{w} dans la direction \vec{v} .

Exemple C.3 On retrouve le cas particulier classique de la dérivation covariante dans un ouvert dans \mathbb{R}^n : ∇ défini par $\nabla_{\vec{v}}\vec{w} = d\vec{w}.\vec{v}$ est une connexion. En effet, (i) $(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \nabla_{\vec{v}}\vec{w} = d\vec{w}.\vec{v}$ est bilinéaire, (ii) $d\vec{w}.(f\vec{v}) = f d\vec{w}.\vec{v}$, et (iii) $d(f\vec{w}).\vec{v} = f d\vec{w}.\vec{v} + (df.\vec{v})\vec{w}$. \blacksquare

Exemple C.4 (La connexion riemannienne sur la sphère.) Dans \mathbb{R}^3 , on prend la la sphère $S = S(0, R)$ donnée par (1.7) avec $r = R$ constant. En un point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, on dispose des vecteurs tangents $\vec{e}_2(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta}(\vec{q})$, et $\vec{e}_3(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \varphi}(\vec{q})$, et on ne veut considérer que les vecteurs en \vec{x} de $TS_{\vec{x}}$ du plan tangent à la sphère au point \vec{x} . On considère alors la connexion donnée par la projection de la différentielle usuelle dans \mathbb{R}^3 sur le plan tangent :

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{w} = \text{Proj}_{TS}(d\vec{w}.\vec{v}). \quad (\text{C.4})$$

Ainsi, avec (2.6) et (2.7), on définit la connexion Riemannienne sur la sphère par :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 &= \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3 \quad (= \Gamma_{\theta\theta}^\theta \vec{e}_2 + \Gamma_{\theta\theta}^\varphi \vec{e}_3), \\ \nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_3 &= -\tan \varphi \vec{e}_2 = \nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_2, \quad (= \Gamma_{\theta\varphi}^\theta \vec{e}_2 + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \vec{e}_3), \\ \nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_3 &= 0 \quad (= \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \vec{e}_2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \vec{e}_3). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

C.2 Symboles de Christoffel pour une connexion

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^m , avec $m \leq n$, et une surface paramétrée $\vec{\varphi} : \vec{q} = (q^1, \dots, q^m) \in U \rightarrow \varphi(\vec{q}) \in S \subset \mathbb{R}^n$. Soit $(\vec{e}_i(\vec{x}))_{i=1, \dots, m}$ la base de $TS_{\vec{x}}$ du système de coordonnées $\vec{\varphi}$ au point $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, i.e. $\vec{e}_i(\vec{x}) = \stackrel{\text{déf}}{\partial \vec{\varphi}}_{\partial q^i}(\vec{q})$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$.

Définition C.5 Soit ∇ une connexion sur S . Par définition d'une connexion sur S , disposant des deux champs de vecteurs \vec{e}_i et \vec{e}_j dans TS pour $i, j \in [1, m]$, on sait que $\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j \in TS$ (est un champ de vecteurs sur S), qui donc s'exprime sur la base $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, m}$. On note $\Gamma_{ij}^k(\vec{x})$ les composantes de ce champ de vecteurs en tout $\vec{x} \in S$:

$$\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j(\vec{x}) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(\vec{x}) \vec{e}_k(\vec{x}). \quad (\text{C.5})$$

(Noter la cohérence de position des indices.) Les $\Gamma_{ij}^k(\vec{x})$ sont appelés les symboles de Christoffel en \vec{x} de la connexion ∇ (relativement au système $\vec{\varphi}$). Et les Γ_{ij}^k sont appelés les symboles de Christoffel de la connexion ∇ (relativement au système $\vec{\varphi}$).

On se donne une connexion ∇ et un système de coordonnées $\vec{\varphi} : U \rightarrow S$ de base $(\vec{e}_i(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial q^i}(\vec{q}))$ quand $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$.

Proposition C.6 Pour un champ de vecteurs $\vec{w} \in TS$ avec $\vec{w} = \sum_i w^i \vec{e}_i$, les composantes de $\nabla_{\vec{e}_j}\vec{w}$ (dérivée covariante de \vec{w} dans la direction de la j -ème ligne de coordonnées) dans la base

(\vec{e}_i) du système sont données par :

$$(\nabla_{\vec{e}_j} \vec{w})^i = \frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i w^k \stackrel{\text{noté}}{=} w^i|_j. \quad (\text{C.6})$$

Si on dispose d'un second champ de vecteurs $\vec{v} \in TS$ avec $\vec{v} = \sum_j v^j \vec{e}_j$, les composantes de $\nabla_{\vec{v}} \vec{w}$ dans la base (\vec{e}_i) du système sont données par :

$$(\nabla_{\vec{v}} \vec{w})^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial w^i}{\partial q^j} v^j + \sum_{j,k=1}^m \Gamma_{jk}^i v^j w^k. \quad (\text{C.7})$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_j} \vec{w} &= \nabla_{\vec{e}_j} \left(\sum_i w^i \vec{e}_i \right) = \sum_i (dw^i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_i + \sum_i w^i \nabla_{\vec{e}_j} \vec{e}_i \\ &= \sum_i \frac{\partial w^i}{\partial q^j} \vec{e}_i + \sum_i w^i \sum_k \Gamma_{ji}^k \vec{e}_k = \sum_i \frac{\partial w^i}{\partial q^j} \vec{e}_i + \sum_{ki} w^k \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i, \end{aligned}$$

et avec $\nabla_{\vec{v}} \vec{w} = \sum_j v^j \nabla_{\vec{e}_j} \vec{w}$, on a les résultats. \blacksquare

Exemple C.7 On reprend la connexion $\nabla_{\vec{v}} \vec{w} = d\vec{w} \cdot \vec{v}$ dans un ouvert donné dans l'exemple C.3. On peut paramétrer localement cet ouvert à l'aide d'un système de coordonnées cartésien, et les vecteurs \vec{e}_i obtenus sont des vecteurs constants ; et dans ce cas les Γ_{ij}^k sont tous nuls. Immédiat. \blacksquare

Exemple C.8 On reprend la connexion riemannienne de l'exemple C.4 des coordonnées sphériques. Les vecteurs du plan tangent sont des combinaisons linéaires de \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . On calcule donc $d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$, $d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2$ et $d\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$, et on ne retient que les composantes en \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . La connexion est définie par les symboles donnés dans (2.6) : $\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3$, $\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 = -\tan \varphi \vec{e}_2 = \nabla_{\vec{e}_3} \vec{e}_2$, et $\nabla_{\vec{e}_3} \vec{e}_3 = \vec{0}$:

$$\Gamma_{\theta\theta}^\varphi = \sin \varphi \cos \varphi, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\theta = \Gamma_{\varphi\theta}^\theta = -\tan \varphi. \quad (\text{C.8})$$

\blacksquare

Exemple C.9 (La connexion Riemannienne sur le cercle.) Dans \mathbb{R}^2 , on prend la "surface" 1-D donnée par le cercle $c(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = \vec{x}$. En un point \vec{x} , on dispose du vecteur tangent $\vec{c}'(\theta) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{e}_2(\vec{x})$, et on ne veut considérer que les vecteurs en \vec{x} de $TS_{\vec{x}}$ du "plan tangent" au cercle au point \vec{x} (i.e. de la droite tangente au cercle en \vec{x}), i.e. les vecteurs en \vec{x} parallèles à $\vec{e}_2(\vec{x})$.

On considère alors la connexion donnée par la projection de la différentielle usuelle dans \mathbb{R}^2 sur la droite engendrée par le vecteur $\vec{e}_2(\vec{x})$ parallèlement à $\vec{e}_1(\vec{x})$, projection donnée par :

$$P : \vec{v} \rightarrow (d\theta \cdot \vec{v}) \vec{e}_2.$$

(On vérifie que $P(\vec{e}_1) = 0$ et que $P(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$: le vecteur \vec{e}_2 est conservé.) Donc la connexion est :

$$\nabla : (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \nabla_{\vec{v}} \vec{w} = (d\theta \cdot (d\vec{w} \cdot \vec{v})) \vec{e}_2(\vec{x}).$$

On vérifie que ∇ est bien une connexion sur TS : (i) la bilinéarité est immédiate, (ii) car $d\vec{w} \cdot (f\vec{w}) = f d\vec{w} \cdot \vec{w} + (df \cdot \vec{w}) \vec{w}$, (iii) car $d(f\vec{w}) \cdot \vec{v} = f d\vec{w} \cdot \vec{v} + (df \cdot \vec{v}) \vec{w}$.

En particulier, on a $\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = (d\theta \cdot (\Gamma_{\theta\theta}^r \vec{e}_1 + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \vec{e}_2)) \vec{e}_2 = 0$ car $e^2 \cdot \vec{e}_1 = 0$ et $\Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0$.

Les seuls vecteurs tangents sont de la forme $\vec{v}(\vec{x}) = a(\vec{x}) \vec{e}_2(\vec{x})$ avec donc $d\vec{v} = da \vec{e}_2 + a d\vec{e}_2$ et $d\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = \frac{\partial a}{\partial \theta} \vec{e}_2 + a d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$. Et on a donc :

$$\nabla_{\vec{e}_2} \vec{v} = \frac{\partial a}{\partial \theta}(\vec{x}) \vec{e}_2(\vec{x}),$$

car $\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = 0$. Donc avec un champ de vecteur tangent $\vec{w}(\vec{x}) = b(\vec{x}) \vec{e}_2(\vec{x})$, on obtient

$$\nabla_{\vec{w}} \vec{v}(\vec{x}) = b(\vec{x}) \frac{\partial a}{\partial \theta}(\vec{x}) \vec{e}_2(\vec{x}),$$

dérivée covariante de \vec{v} dans la direction \vec{w} sur le cercle. \blacksquare

C.3 La dérivation ∇ associée

La connexion ∇ telle que définie en (C.1) n'est pas symétrique : c'est de fait une dérivation de \vec{w} dans la direction \vec{v} (qui n'est pas dérivé). C'est immédiat dans un système de coordonnées $\vec{\varphi}$ de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$: comme ∇ est bilinéaire, ∇ est défini par ses images sur les vecteurs de base, à savoir les :

$$\vec{C}_{ij} = \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k,$$

pour $i, j = 1, \dots, m$ où m est la dimension de la variété S , au sens $\vec{C}_{ij}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(\vec{x}) \vec{e}_k(\vec{x})$.

Soient \vec{v} et \vec{w} les champs de vecteurs définis par leurs composantes :

$$\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i, \quad \vec{w} = \sum_i w^i \vec{e}_i.$$

Avec (C.2) on a :

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{e}_j = \sum_i v^i \vec{C}_{ij}, \quad (\text{C.9})$$

et les composantes v^i ne sont pas dérivées : seules les valeurs ponctuelles $\vec{v}(\vec{x})$ interviennent.

Avec (C.3) on a :

$$\nabla_{\vec{e}_i} \vec{w} = \sum_j w^j \vec{C}_{ij} + \sum_j (dw^j \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_j, \quad (\text{C.10})$$

et, dans le dernier terme, les composantes w^i sont dérivées : $(dw^j \cdot \vec{e}_i)(\vec{x}) = \frac{\partial w^j}{\partial q^i}(\vec{x})$.

De manière générale :

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{w} = \sum_{i,j} \left(v^i w^j \vec{C}_{ij} + v^i \frac{\partial w^j}{\partial q^i} \vec{e}_j \right) \quad (\text{C.11})$$

fait intervenir les valeurs ponctuelles de \vec{v} et de \vec{w} et les valeurs dérivées de \vec{w} .

Comme dans $\nabla_{\vec{v}} \vec{w}$ seules les valeurs ponctuelles de \vec{v} interviennent (pas les dérivées), pour tout champ de vecteurs $\vec{w} \in TS = T_0^1(S)$ on peut définir :

$$\tilde{\nabla} \vec{w} : \begin{cases} TS & \rightarrow TS \\ \vec{v} & \rightarrow \tilde{\nabla} \vec{w} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_{\vec{v}} \vec{w}. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

(Dans \mathbb{R}^n usuel on a $\tilde{\nabla} \vec{w} \cdot \vec{v} = d\vec{w} \cdot \vec{v}$.) Et $\tilde{\nabla} \vec{w}$ peut être identifié au tenseur $\tilde{\tilde{\nabla}} \in T_1^1(S)$ donné par :

$$\tilde{\tilde{\nabla}} \vec{w}(\vec{v}, \ell) = \ell \cdot (\tilde{\nabla} \vec{w} \cdot \vec{v}), \quad (\text{C.13})$$

pour tout $\vec{v} \in TS$ et tout $\ell \in T_1^0(S)$. (Autrement dit, $\tilde{\tilde{\nabla}} \vec{w}(\vec{x}) = \tilde{\tilde{\nabla}} \vec{w}_{\vec{x}}$ est la forme bilinéaire $\tilde{\tilde{\nabla}} \vec{w}_{\vec{x}} : T_{\vec{x}} S \times T_{\vec{x}} S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{\tilde{\nabla}} \vec{w}_{\vec{x}}(\vec{v}, \ell) = \ell \cdot (\tilde{\nabla} \vec{w}_{\vec{x}} \cdot \vec{v})$ pour tout $\vec{v} \in T_{\vec{x}} S$ et tout $\ell \in (T_{\vec{x}} S)^*$.)

Pour simplifier les notations, et qu'il n'y a pas d'ambiguïté (quand on fait attention), on note abusivement $\tilde{\tilde{\nabla}} = \tilde{\nabla} = \nabla$. Donc :

$$\nabla : \begin{cases} TS & \rightarrow T_1^1(S) \\ \vec{w} & \rightarrow \tilde{\nabla} \vec{w}, \quad \nabla \vec{w} \cdot \vec{v} = \nabla_{\vec{v}} \vec{w} \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

est donné par (C.11) : c'est la dérivation (associée à la connexion) de \vec{w} dans la direction \vec{v} . Ainsi, notant :

$$\nabla \vec{w} = \sum_{ij} (\nabla \vec{w})_{ij}^i \vec{e}_i \otimes e^j,$$

on a $e^i(\nabla \vec{w} \cdot \vec{e}_j) = (\nabla \vec{w})_{ij}^i$, et donc cf. (C.10) (ou encore avec (C.6)) :

$$(\nabla \vec{w})_{ij}^i = \frac{\partial w^i}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i w^k = w_{|j}^i. \quad (\text{C.15})$$

composantes du tenseur de dérivation de \vec{w} sur la surface dans la base du système de coordonnées.

Remarque C.10 Le fait que dans $\nabla_{\vec{v}}\vec{w}$ seules les valeurs ponctuelles de \vec{v} interviennent (pas les dérivées), a permis de définir le tenseur $\tilde{\nabla}\vec{w}$ en (C.13).

Mais on ne peut pas définir du “tenseur” de type :

$$Z\vec{v} : \vec{w} \rightarrow Z\vec{v}.\vec{w} = \nabla_{\vec{v}}\vec{w},$$

avec donc $Z\vec{v}.\vec{w}$ donné par (C.11) ; $Z\vec{v}$ est également linéaire en \vec{w} mais ne permet pas de définir un tenseur $T_1^1(\Omega)$ puisqu’il fait intervenir à la fois $\vec{w} \in T_0^1(\Omega)$ et $d\vec{w} \in T_1^1(\Omega)$. ■

Remarque C.11 Définition alternative : étant donnée une connexion ∇ sur S et $\vec{w} \in TS = T_0^1(S)$, on appelle dérivée du champ de vecteurs \vec{w} sur S le tenseur $\nabla\vec{w} \in T_1^1(S)$ tel que la contraction $\nabla\vec{w}.\vec{v}$ soit égale à $\nabla_{\vec{v}}\vec{w}$, pour tout champ de vecteurs $\vec{v} \in TS$:

$$\nabla\vec{w}.\vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_{\vec{v}}\vec{w}.$$

I.e., pour tout $(\ell, \vec{v}) \in T_1^0(S) \times T_0^1(S)$:

$$\nabla\vec{w}(\ell, \vec{v}) = \ell(\nabla_{\vec{v}}\vec{w}). \quad (\text{C.16})$$

On retrouve bien sûr les résultats précédents. ■

Exemple C.12 Dans un ouvert de \mathbb{R}^n , on retrouve les notations usuelles : dans la base canonique, on a $\vec{w}(\vec{x}) = \sum_i w^i(\vec{x})\vec{E}_i$, puis $\nabla_{\vec{v}}\vec{w}(\vec{x}) = d\vec{w}(\vec{x}).\vec{v} = \sum_i (dw^i(\vec{x}).\vec{v})\vec{E}_i$ et en particulier $\nabla_{\vec{e}_j}\vec{w}(\vec{x}) = d\vec{w}(\vec{x}).\vec{e}_j = \sum_i \frac{\partial w^i}{\partial x^j}(\vec{x})\vec{E}_i$, et donc $d\vec{w}(\vec{x}) = \sum_{ij} \frac{\partial w^i}{\partial x^j}(\vec{x})\vec{E}_i \otimes E^j$. Et la matrice $[d\vec{w}(\vec{x})]$ représentant $d\vec{w}(\vec{x})$ dans la base canonique est la matrice $[\frac{\partial w^i}{\partial x^j}]$. ■

C.4 Divergence $\text{div}\vec{w}$ d’un champ de vecteurs \vec{w} sur TS

Définition C.13 La divergence d’un champ de vecteurs $\vec{w} \in TS$ est $\text{Tr}(\nabla\vec{w}) = \text{la trace du tenseur } \nabla\vec{w} \in T_1^1(S)$ (la divergence d’un champ de vecteurs est une fonction à valeurs réelles).

Dans la base d’un système de coordonnées, la divergence est obtenue par contraction des indices :

$$\text{div}\vec{w} = \sum_i w^i{}_{|i} = \sum_i \left(\frac{\partial w^i}{\partial q^i} + \sum_k \Gamma_{ik}^i w^k \right) \in T_0^0(S), \quad (\text{C.17})$$

i.e. pour tout $\vec{x} \in S$, $\text{div}\vec{w}(\vec{x}) = \sum_i w^i{}_{|i}(\vec{x}) = \sum_i \left(\frac{\partial w^i}{\partial q^i}(\vec{x}) + \sum_k \Gamma_{ik}^i w^k(\vec{x}) \right)$.

Exemple C.14 Dans un ouvert de \mathbb{R}^n et la dérivation usuelle (les symboles de Christoffel sont nuls) on a :

$$\text{div}\vec{w} = \sum_i w^i{}_{,i} = \sum_i \frac{\partial w^i}{\partial x^i} \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_i w^i{}_{|i},$$

cette dernière notation n’ayant ici pas d’intérêt. ■

C.5 Métrique et connexion riemannienne

Définition C.15 Une métrique riemannienne $g(\cdot, \cdot)$ sur une surface S est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur TS :

$$g : \vec{x} \in S \rightarrow g_{\vec{x}} \in T_2^0(TS_{\vec{x}}), \quad g_{\vec{x}} \text{ symétrique définie positive.}$$

(I.e. $g_{\vec{x}}$ est un produit scalaire sur $TS_{\vec{x}}$, i.e. est bilinéaire sur $TS_{\vec{x}}$, avec $g_{\vec{x}}(\vec{v}, \vec{w}) = g_{\vec{x}}(\vec{w}, \vec{v})$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS_{\vec{x}}$ et $g_{\vec{x}}(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ pour tout $\vec{v} \in TS_{\vec{x}}$.)

Remarque C.16 On choisit souvent (dans un premier temps) pour métrique Riemannienne celle qui localement est donnée par le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n : localement au voisinage d’un point \vec{x} , la surface (la variété) est approchée par son plan tangent $TS_{\vec{x}}$ dans lequel on choisit le produit scalaire euclidien. ■

Définition C.17 Si S est une surface et ∇ une connexion sur la surface, on définit la torsion comme étant l’application bilinéaire $TS \times TS \rightarrow TS$ définie par :

$$\text{Tor}(\vec{v}, \vec{w}) = \nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{w}}\vec{v} - [\vec{v}, \vec{w}].$$

Exemple C.18 Dans \mathbb{R}^n avec $\nabla = d$ la dérivation usuelle, la torsion est nulle. \blacksquare

On va se restreindre aux connexions les plus simples sur les surfaces : celles de torsion nulle, qui de plus tuent la métrique (ces connexions transportent les vecteurs parallèlement sur une surface). En clair on se restreint aux connexions qui fonctionnent comme la connexion riemannienne sur la sphère, voir exemple C.4.

Théorème C.19 On se donne une métrique riemannienne. Il existe une unique connexion ∇ sur S telle que :

- (i) la torsion est nulle, i.e. $\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{w}}\vec{v} = [\vec{v}, \vec{w}]$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in TS$,
- (ii) la connexion appliquée à la métrique riemannienne est nulle (la connexion tue la métrique), i.e. $\nabla_{\vec{v}}g = 0$ pour tout $\vec{v} \in TS$.

Sur la base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ d'un système de coordonnées, de base duale $(e^i(\vec{x}))$, (i) et (ii) s'expriment respectivement :

- (iii) les symboles de Christoffel vérifient "la symétrie en i, j " :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \forall i, j, k, \quad (\text{C.18})$$

- (iv) si $g_{\vec{x}} = \sum_{jk} g_{jk}(\vec{x})e^j(\vec{x}) \otimes e^k(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in S$ alors :

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \sum_{\ell} (\Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k} + \Gamma_{ik}^{\ell} g_{j\ell}). \quad (\text{C.19})$$

D'où on déduit, notant $[g^{ij}] = \text{déf } [g_{ij}]^{-1}$ (matrice inverse) :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} \right), \quad (\text{C.20})$$

équations donnant les Γ_{ij}^k en fonction de la métrique choisie (pour un système de coordonnées donné).

Preuve. Les équations (C.18) à l'aide de (i) et (C.19) à l'aide de (ii) sont immédiates. Puis on forme $\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}$, de qui donne, à l'aide de la symétrie " $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ " :

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \sum_{\ell} 2g_{\ell k} \Gamma_{ij}^{\ell}.$$

D'où (C.20). \blacksquare

Exemple C.20 Les hypothèses (i) et (ii) ont été faites pour reproduire ce qui se passe sur la sphère de \mathbb{R}^3 . Sur cette sphère, on veut que la connexion ∇ souhaitée soit celle donnée dans l'exemple C.4 (projection de la différentiation usuelle dans \mathbb{R}^3 sur le plan tangent). De la matrice $[g]_{sph}$ trouvée, cf (3.4) et (3.5), on ne retient que le dernier bloc 2*2 en θ, φ en fixant $r = R$, à savoir

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où } [g^{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}.$$

Et on retrouve (C.8) à l'aide de (C.20). Par exemple, ayant $(q_1, q_2) = (\theta, \varphi)$:

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} (g^{21}(\dots) + g^{22}(\frac{\partial g_{12}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2})) = \frac{1}{2} (0 - \frac{1}{R^2} (0 - 2R^2 \cos \varphi \sin \varphi)) = \cos \varphi \sin \varphi. \quad \blacksquare$$

C.6 Connexion sur les formes et sur les tenseurs

Définition C.21 Une connexion sur les champs de tenseurs de $T_s^r(S)$, encore appelée une dérivée sur les champs de tenseurs, est une forme bilinéaire :

$$\nabla : \begin{cases} TS \times T_s^r(S) & \rightarrow T_s^r(S), \\ (\vec{v}, T) & \rightarrow \nabla_{\vec{v}} T, \end{cases}$$

telle que :

- (i) pour $T_s^r(S) = T_0^0(S)$ (champ de fonctions), $\nabla_{\vec{v}}$ est la différentiation “ $\nabla_{\vec{v}}f = df \cdot \vec{v}$ ”,
(ii) pour $T_s^r(S) = TS = T_0^1(S)$ (champ de vecteurs), $\nabla_{\vec{v}}$ est une connexion sur les champs de vecteurs,
(iii) ∇ compatible avec les contractions, i.e., pour α une forme sur TS et \vec{v} un champ de vecteurs sur TS , on a $\nabla_{\vec{v}}(\alpha \cdot \vec{w}) = (\nabla_{\vec{v}}\alpha) \cdot \vec{w} + \alpha \cdot (\nabla_{\vec{v}}\vec{w})$ (donc $= d(\alpha \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$),
(iv) ∇ est une dérivation : $\nabla_{\vec{v}}(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_{\vec{v}}T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_{\vec{v}}T_2)$ quand $T_1 \in T_{s_1}^{r_1}(S)$ et $T_2 \in T_{s_2}^{r_2}(S)$.
Et $\nabla_{\vec{v}}T$ est appelée la dérivée covariante de T dans la direction \vec{v} .

Proposition C.22 Etant donnée une base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ d'un système de coordonnées de base duale $(e^i(\vec{x}))$ (avec les $e^i \in T_1^0(S)$), on a :

$$\nabla_{\vec{e}_j} e^i = - \sum_k \Gamma_{jk}^i e^k \in T_1^0(S), \quad (\text{C.21})$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel pour la connexion ∇ , cf. (C.5). (Noter la cohérence de position des indices, et ne pas oublier le signe $-$.)

Et si $\ell = \sum_i \ell_i e^i \in T_1^0(S)$ (une forme sur S), on a $\nabla_{\vec{e}_j} \ell \in T_1^0(S)$ de la forme $\nabla_{\vec{e}_j} \ell = \sum_i (\nabla_{\vec{e}_j} \ell)_i e^i$, les composantes $(\nabla_{\vec{e}_j} \ell)_i$ étant données par :

$$(\nabla_{\vec{e}_j} \ell)_i = \frac{\partial \ell_i}{\partial q^j} - \sum_k \ell_k \Gamma_{ji}^k \stackrel{\text{noté}}{=} \ell_{i|j}. \quad (\text{C.22})$$

Preuve. On a $e^i \cdot \vec{e}_k = \delta_k^i$ est une fonction constante sur S , et donc $d(e^i \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j = 0$, et donc :

$$d(e^i \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j = 0 = \nabla_{\vec{e}_j} (e^i \cdot \vec{e}_k) = (\nabla_{\vec{e}_j} e^i) \cdot \vec{e}_k + e^i \cdot (\nabla_{\vec{e}_j} \vec{e}_k) = (\nabla_{\vec{e}_j} e^i) \cdot \vec{e}_k + \Gamma_{jk}^i,$$

d'où (C.21). Puis $\nabla_{\vec{e}_j} \ell = \sum_i \nabla_{\vec{e}_j} (\ell_i e^i) = \sum_i \frac{\partial \ell_i}{\partial q^j} e^i + \sum_i \ell_i \nabla_{\vec{e}_j} e^i = \sum_i \frac{\partial \ell_i}{\partial q^j} e^i - \sum_i \ell_i \sum_k \Gamma_{jk}^i e^k$, d'où (C.22). \blacksquare

Proposition C.23 (Cas particulier des métriques.) On se donne un système de coordonnées sur S de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ en $\vec{x} \in S$, de base duale $(e^i(\vec{x}))$. On a :

$$\nabla_{\vec{e}_k} (e^i \otimes e^j) = - \sum_{\ell} (\Gamma_{k\ell}^i e^\ell \otimes e^j + \Gamma_{k\ell}^j e^i \otimes e^\ell). \quad (\text{C.23})$$

Et si $T \in T_2^0(S)$ avec $T = \sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes e^j$, on a $\nabla_{\vec{e}_k} T \in T_2^0(S)$ et :

$$(\nabla_{\vec{e}_k} T)_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - \sum_{\ell} (T_{\ell j} \Gamma_{ki}^{\ell} + T_{i\ell} \Gamma_{kj}^{\ell}). \quad (\text{C.24})$$

Preuve. On a $\nabla_{\vec{e}_k} (e^i \otimes e^j) = (\nabla_{\vec{e}_k} e^i) \otimes e^j + e^i \otimes (\nabla_{\vec{e}_k} e^j) = - \sum_{\ell} \Gamma_{k\ell}^i e^\ell \otimes e^j - e^i \otimes \sum_{\ell} \Gamma_{k\ell}^j e^\ell$.

Puis $\nabla_{\vec{e}_k} T = \sum_{ij} \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} e^i \otimes e^j + T_{ij} \nabla_{\vec{e}_k} e^i \otimes e^j + T_{ij} e^i \otimes \nabla_{\vec{e}_k} e^j \right]$. Et $\sum_{ij} T_{ij} \nabla_{\vec{e}_k} e^i \otimes e^j = - \sum_{ij\ell} T_{ij} \Gamma_{k\ell}^i e^\ell \otimes e^j = - \sum_{ij\ell} T_{\ell j} \Gamma_{ki}^{\ell} e^i \otimes e^j$, et de même $\sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes \nabla_{\vec{e}_k} e^j = - \sum_{ij\ell} T_{ij} e^i \otimes \Gamma_{k\ell}^j e^\ell = - \sum_{ij\ell} T_{i\ell} \Gamma_{kj}^{\ell} e^i \otimes e^j$, d'où (C.24). \blacksquare

Proposition C.24 Pour $T = \sum T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \in T_s^r(S)$ dans la base du système de coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\vec{e}_k} T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial q^k} + \sum_{\ell} T_{j_1 \dots j_s}^{\ell i_2 \dots i_r} \Gamma_{k\ell}^{i_1} + \sum_{\ell} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \ell \dots i_r} \Gamma_{k\ell}^{i_2} + \dots \\ &\quad - \sum_{\ell} T_{\ell j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{kj_1}^{\ell} - \sum_{\ell} T_{j_1 \ell \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{kj_2}^{\ell} - \dots \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Preuve. Exercice. \blacksquare

C.7 Dérivée ∇T d'un champ de tenseurs T sur TS

Soit $T \in T_s^r(S)$ un tenseur de type $\binom{r}{s}$.

Définition C.25 Sa dérivée est le tenseur $\nabla T \in T_{s+1}^r$ de type $\binom{r}{s+1}$ tel que la contraction $\nabla T \cdot \vec{v}$ soit égale à $\nabla_{\vec{v}} T$.

Soit $\vec{\varphi} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un système de coordonnées sur S de base $(\vec{e}_i(\vec{x}))$ en $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{q})$, et de base duale $(e^i(\vec{x}))$.

Proposition C.26 Soit $\ell \in T_1^0(S)$ avec $\ell(\vec{x}) = \sum_i \ell_i(\vec{x}) e^i(\vec{x})$ pour $\vec{x} \in S$. On a $\nabla \ell \in T_2^0(S)$ avec :

$$\nabla \ell = \sum_{ij} \ell_{i|j} e^i \otimes e^j, \quad (\text{C.26})$$

i.e. les $\ell_{i|j}$ sont les composantes de $\nabla \ell$ données par (C.22).

Preuve. On a $(\sum_{ij} \ell_{i|j} e^i \otimes e^j) \cdot \vec{e}_k = \sum_i \ell_{i|k} e^i$ et on a $\nabla_{\vec{e}_k} \ell = \sum_i \ell_{i|k} e^i = \nabla \ell \cdot \vec{e}_k$, d'où l'égalité. \blacksquare

Proposition C.27 Quand $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ sont les composantes de T sur cette base les composantes de ∇T notées $T_{j_1 \dots j_s | k}^{i_1 \dots i_r}$ sur cette base sont données par :

$$T_{j_1 \dots j_s | k}^{i_1 \dots i_r} = (\nabla_{\vec{e}_k} T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

Preuve. Exercice. \blacksquare

Exemple C.28 Dans un ouvert de \mathbb{R}^n , on retrouve les notations usuelles avec le gradient d'un champ de tenseurs T . Par exemple pour un tenseur $T \in T_0^2(S)$, dans la base canonique, on a $T(\vec{x}) = \sum_{ij} T^{ij}(\vec{x}) \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j$, puis $\nabla_{\vec{v}} T(\vec{x}) = dT(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \sum_{ij} (dT^{ij}(\vec{x}) \cdot \vec{v}) \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j$ et en particulier $\nabla_{\vec{E}_k} T(\vec{x}) = \sum_{ij} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}(\vec{x}) \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j$, et donc $\nabla T(\vec{x}) = dT(\vec{x}) = \sum_{ijk} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}(\vec{x}) \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j \otimes E^k$. \blacksquare

C.8 Divergence $\text{div} T$ d'un champ de tenseurs T sur TS

Pour $T \in T_s^r(S)$ on a $\nabla T \in T_{s+1}^r$.

Définition C.29 On suppose $r \geq 1$. Alors $\text{div} T$ est le tenseur de T_s^{r-1} obtenu par contraction des derniers indices covariant et contravariant de ∇T , i.e. dans la base d'un système de coordonnées ou les composantes de T sont les $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$:

$$(\text{div} T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} k}$$

Exemple C.30 Pour un champ de vecteurs $\vec{w} \in T_0^1(S)$ de matrice $[w^i]$, on a $\text{div} \vec{w}$ une fonction sur S donnée par :

$$\text{div} \vec{w} = \sum_i w^i_{|i}$$

Pour un champ de tenseurs $T \in T_1^1(S)$ de matrice $[T_j^i]$, i.e. $T = \sum_{ij} T_j^i \vec{e}_i \otimes e^j$ et donc $\nabla T = \sum_{ijk} T_j^i |k \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k$, on a $\text{div} T$ champ de formes donné par :

$$\text{div} T = \sum_j \left(\sum_i T_j^i |i \right) e^j,$$

i.e. $(\text{div} T)_j = \sum_i T_j^i |i$, et donc dans \mathbb{R}^3 , $\text{div} T = (\sum_i T_1^i |i \quad \sum_i T_2^i |i \quad \sum_i T_3^i |i)$ (matrice ligne donc pour la divergence d'un tenseur de type $\binom{1}{1}$ qui correspond à un endomorphisme). Ainsi, en mécanique, $\int_{\Omega} \text{div} T \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{ij} T_j^i |i v^j d\Omega$ pour tout champ de vecteurs $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$.

Pour un champ de tenseurs $T \in T_0^2(S)$ de matrice $[T^{ij}]$, i.e. $T = \sum_{ij} T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ on a $\text{div} T$ champ de vecteurs donné par :

$$\text{div} T = \sum_i \left(\sum_j T^{ij} |j \right) \vec{e}_i.$$

Et en mécanique, si $\ell = \sum_i v_i e^i$ est un champ de formes (noter la position des indices), on obtient $\ell \cdot \text{div} T = \sum_{ij} T^{ij} |j v_i = \text{noté} \text{div} T \cdot \ell$, d'où $\int_{\Omega} \text{div} T \cdot \ell d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{ij} T^{ij} |j v_i d\Omega$.

La divergence d'un tenseur de $T_2^0(S)$ n'est pas définie. En particulier, la divergence d'une métrique n'a pas de sens. \blacksquare

C.9 Transport parallèle d'un champ de vecteurs

On reprend le paragraphe 8.1 avec le langage des connexions.

Soit S une surface régulière et soit ∇ une connexion sur S .

Soit $\vec{c}: [0, T] \rightarrow S$ une courbe régulière sur S de vecteur tangent $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ en $\vec{x} = \vec{c}(t)$.

Définition C.31 Soit \vec{w} un champ de vecteurs sur S ; la dérivée covariante de \vec{w} le long de \vec{c} est définie par $\nabla_{\vec{v}}\vec{w}$, est notée $\nabla_{\vec{c}'}\vec{w}$, et est appelée la dérivée matérielle de \vec{w} le long de \vec{c} ; avec $\vec{x} = \vec{c}(t)$ c'est donc :

$$\nabla_{\vec{c}'}\vec{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_{\vec{v}}\vec{w} \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{D\vec{w}}{dt}. \quad (\text{C.27})$$

Exemple C.32 Si on se place dans un ouvert de \mathbb{R}^n , et si on prend comme connexion la connexion usuelle (la dérivation), on retrouve :

$$(\nabla_{\vec{c}'}\vec{w})(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} (\nabla_{\vec{v}}\vec{w})(\vec{x}) = d\vec{w}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) = d\vec{w}(\vec{x}) \cdot \vec{c}'(t) = \frac{d(\vec{w} \circ \vec{c})}{dt}(t),$$

dérivée covariante usuelle de \vec{w} le long du vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{c}'(t)$ au point $\vec{x} = \vec{c}(t)$. ▀

Définition C.33 (Cette définition dépend de la connexion choisie.) Un champ de vecteurs \vec{w} est dit transporté parallèlement à la courbe \vec{c} ssi, pour tout t avec $\vec{x} = \vec{c}(t)$:

$$\frac{D\vec{w}}{dt}(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \text{relativement à la connexion } \nabla,$$

i.e. ssi $d\vec{w}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{c}}{dt}(t) = 0$, i.e. ssi \vec{w} est invariant le long de la courbe \vec{c} (i.e. les variations de \vec{w} sont nulles dans la direction des vecteurs tangents à la courbe).

Exemple C.34 Dans un ouvert de \mathbb{R}^n avec la connexion = la dérivation, on veut que $\frac{d(\vec{w} \circ \vec{c})}{dt}(t) = 0$, et donc que $\vec{w} \circ \vec{c} = \text{constant} = \vec{w}(\vec{x})$ en tout \vec{x} point de la courbe : le champ de vecteurs est en chaque point de la courbe donné par un même vecteur (constant). ▀

Définition C.35 Un vecteurs \vec{w}_0 en $\vec{c}(0)$ est dit transporté parallèlement le long de \vec{c} s'il existe un champ de vecteurs \vec{w} transporté parallèlement à la courbe \vec{c} tel que $\vec{w}_0 = \vec{w}(0)$. (Un tel champ de vecteurs est unique puisque solution de l'équation différentielle $\frac{D\vec{w}}{dt} = 0$ avec condition initiale $\vec{w}(0) = \vec{w}_0$.)

Remarque C.36 Si \vec{w} est un champ de vecteurs sur S qui dépend de t , i.e. $\vec{w}: [0, T] \times S \rightarrow TS$, on note :

$$\frac{D\vec{w}}{Dt}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \frac{D\vec{w}}{dt}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \nabla_{\vec{v}}\vec{w}(t, \vec{x}), \quad (\text{C.28})$$

et est appelée la dérivée matérielle de \vec{w} le long de \vec{c} (ou dérivée totale). ▀

Références

- [1] Abraham R., Marsden J.E. : *Foundation of mechanics, 2nd edition*. Addison-Wesley, 1985.
- [2] Arnold V.I. : *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Second Edition, Springer 1989.
- [3] Cartan H. : *Cours de calcul différentiel*. Hermann 1990.
- [4] Ciarlet P.G. : *An Introduction to Differential Geometry, with Applications to Elasticity*. Springer, 2005
- [5] Germain P. : *Mécanique des milieux continus*. Masson 1972.
- [6] Gurtin M. E. : *Topics in Finite Elasticity*. Regional conference series in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1981. Philadelphia, Pennsylvania 19103.
- [7] Iglesias P. : <http://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artPIglesias/artPIglesias.html>
- [8] Leborgne D. : *Calcul différentiel et géométrie*. PUF, 1982.
- [9] Marsden J.E., Hughes T.J.R. : *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover publications, 1993.
- [10] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. : *Gravitation*. W.H. Freeman and Cie, 1973.

- [11] Spivak M. : *A comprehensive introduction to differential geometry, Volume 1*. Publish or Perish, Inc. 1979.
- [12] Strang G. : *Linear Algebra and its Applications*. Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich 1988.
- [13] Truesdell C., Noll W. : *The non-linear field theory of mechanics*. Handbuch der physik Band III/3, Springer-Verlag 1965