Notes de cours de l'ISIMA, deuxième année
http://www.isima.fr/~leborgne

Produit vectoriel, pseudo-produit vectoriel, et endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^3$

Gilles Leborgne

28 avril 2015

Table des matières

1 Le (vrai) produit vectoriel $\wedge$

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ et de son produit scalaire euclidien $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^3}$: donc $\vec{E}_1 = (1,0,0)$, $\vec{E}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{E}_3 = (0,0,1)$, et si $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{E}_i$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \vec{E}_i$ alors :

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=}^{n} x_i y_i \overset{\text{noté}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y}. \tag{1.1}$$

Et on note $||.||_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^3}}$ la norme associée.

On rappelle que le déterminant dans $\mathbb{R}^3$ est la forme trilinéaire alternée $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = 1$. En particulier $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \le ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{w}||_{\mathbb{R}^3}$, avec égalité ssi les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux. Et le volume algébrique (positif ou négatif) du parallélépipède de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est par définition $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. (Voir polycopié "Valeurs propres et valeurs propres généralisées".)

1.1 Définition du produit vectoriel

Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\ell_{\vec{a},\vec{b}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\ell_{\vec{a},\vec{b}}(\vec{v}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}). \tag{1.2}$$

(La linéarité est immédiate.) Le théorème de représentation de Riesz (voir cours d'éléments finis) appliqué avec le produit scalaire euclidien $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^3}$ donne : il existe un unique vecteur $\vec{w}_{\vec{a},\vec{b}}$ tel que :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \ell_{\vec{a},\vec{b}}(\vec{v}) = (\vec{w}_{\vec{a},\vec{b}}, \vec{v})_{\mathbb{R}^3} \qquad (= \vec{w}_{\vec{a},\vec{b}} \cdot \vec{v}). \tag{1.3}$$

Définition 1.1 Le vecteur $\vec{w}_{\vec{a},\vec{b}} =^{\text{noté}} \vec{a} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ est appelé le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (dans cet ordre).

Donc, par définition du produit vectoriel de deux vecteurs, on a, pour tout $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{1.4}$$

En particulier, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont indépendants, si on note :

$$\text{si} \quad \vec{n} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{||\vec{a} \wedge \vec{b}||}, \qquad \text{alors} \qquad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{n} = ||\vec{a} \wedge \vec{b}|| \tag{1.5}$$

est l'aire du parallélogramme de côté $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (= volume du parallélépipède de base $\vec{a}, \vec{b}$ et de hauteur unité).

Proposition 1.2 *1- L'application $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\wedge(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est bilinéaire et alternée :*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \tag{1.6}$$

2- Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}^\perp, \tag{1.7}$$

où $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3- Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3} \le ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3}, \tag{1.8}$$

et

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3} = ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}. \tag{1.9}$$

Preuve. 1- Le déterminant étant multilinéaire et alterné, (1.4) donne immédiatement : $\wedge$ est bilinéaire et (1.6).

2- Le déterminant étant alterné, (1.4) donne immédiatement $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$, et de même $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$, donc (1.7).

3- (1.4) donne $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2_{\mathbb{R}^3}$. Et le déterminant vérifie $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})| \le ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3}$, avec égalité ssi les trois vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux, D'où (1.8).

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, avec (1.7) on a $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})| = ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3}$, d'où $||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3} = ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3}$.

Si $\vec{u} \not\perp \vec{v}$, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) < ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3}$, donc $||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3} < ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3}$. Donc si $||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\mathbb{R}^3} = ||\vec{u}||_{\mathbb{R}^3} ||\vec{v}||_{\mathbb{R}^3}$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$. ∎

1.2 Caractérisation dans la base canonique

Soit $\wedge$ l'application :

$$\wedge : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \to \wedge(\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{u} \wedge \vec{v}. \end{cases} \tag{1.10}$$

On note $\vec{E}_4 = \vec{E}_1$ et $\vec{E}_5 = \vec{E}_2$.

Proposition 1.3 *$\wedge$ est bilinéaire et alternée, et pour $i = 1, 2, 3$:*

$$\vec{E}_i \wedge \vec{E}_{i+1} = \vec{E}_{i+2}, \tag{1.11}$$

soit $\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 = \vec{E}_3$, $\vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 = \vec{E}_1$, et $\vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1 = \vec{E}_2$. Donc $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{E}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{E}_i$ donnent $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{E}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{E}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{E}_3$. Notant $[\vec{u}]_E$, $[\vec{v}]_E$ et $[\vec{u} \wedge \vec{v}]_E$ les matrices colonnes stockant les composantes des vecteurs dans la base canonique $E = (\vec{E}_i)$, on a donc :

$$[\vec{u}]_E = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{donnent} \quad [\vec{u} \wedge \vec{v}]_E = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Preuve. det étant trilinéaire alternée, la bilinéarité et le caractère alterné de $\wedge$ sont immédiats.

D'une part $\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = 1$, et d'autre part $\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = (\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2) \cdot \vec{E}_3$, cf. (1.4). Idem avec les autres indices. Donc (1.7) et (1.9) donnent (1.11).

Puis, $\wedge$ étant bilinéaire et alternée, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j \vec{E}_i \wedge \vec{E}_j = \sum_{1 \le i < j \le 3} (u_i v_j - u_j v_i) \vec{E}_i \wedge \vec{E}_j \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{E}_1 \wedge \vec{E}_3 \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{E}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{E}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{E}_2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

D'où (1.12). ▪

Exercice 1.4 Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})_{\mathbb{R}^3} \vec{v} - (\vec{u}, \vec{v})_{\mathbb{R}^3} \vec{w}$.

Réponse. Dans la base canonique :

$$[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\vec{w}]_E = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{donnent} \quad [\vec{v} \wedge \vec{w}]_E = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

D'où $[\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})]_E \begin{pmatrix} u_2(v_1 w_2 - v_2 w_1) - u_3(v_3 w_1 - v_1 w_3) \\ u_3(v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_1(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ u_1(v_3 w_1 - v_1 w_3) - u_2(v_2 w_3 - v_3 w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum_{i=1}^3 u_i w_i) v_1 - (\sum_{i=1}^3 u_i v_i) w_1 \\ (\sum_{i=1}^3 u_i w_i) v_2 - (\sum_{i=1}^3 u_i v_i) w_2 \\ (\sum_{i=1}^3 u_i w_i) v_3 - (\sum_{i=1}^3 u_i v_i) w_3 \end{pmatrix}$. ▪

Remarque 1.5 On calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base canonique avec l'écriture formelle :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{E}_1 & u_1 & v_1 \\ \vec{E}_2 & u_2 & v_2 \\ \vec{E}_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

où on développe formellement le déterminant suivant la première colonne, ce qui redonne (1.12). ▪

1.3 Base orthonormée (b.o.n.) et matrice de passage

Définition 1.6 $(\vec{e}_i)_{i=1,2,3}$ est une b.o.n. dans $(\mathbb{R}^3, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^3})$ ssi $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$.

Exemple 1.7 La base canonique $(\vec{E}_i)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ (pour produit scalaire euclidien). ▪

Notation : soit $(\vec{a}_i)$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{si} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{a}_i \quad \text{alors on note} \quad [\vec{x}]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

où donc $[\vec{x}]_a$ est la matrice colonne des composantes de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{a}_i)$.

Proposition 1.8 *Soit $(\vec{a}_i)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On a, avec la notation . du produit matriciel :*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, \quad (\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^3} = [\vec{x}]_a^T . [\vec{y}]_a \quad \iff \quad (\vec{a}_i) \text{ une b.o.n. dans } \mathbb{R}^3. \tag{1.16}$$

Écriture équivalente :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = [\vec{x}]_a^T . [\vec{y}]_a \quad \iff \quad (\vec{a}_i) \text{ une b.o.n. dans } \mathbb{R}^3. \tag{1.17}$$

Preuve. Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{a}_i$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{a}_i$. On a $[\vec{x}]_a^T . [\vec{y}]_a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ par définition du produit matriciel. (En particulier $[\vec{a}_i]_a^T . [\vec{a}_j]_a = \delta_{ij}$ pour tout i, j est toujours vrai puisque $[\vec{a}_1]_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\vec{a}_2]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\vec{a}_3]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

Et, par bilinéarité du produit scalaire, $(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j (\vec{a}_i, \vec{a}_j)_{\mathbb{R}^3}$, donc $(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^3} = [\vec{x}]_a^T . [\vec{y}]_a$ pour tout $\vec{x}, \vec{y}$ ssi $(\vec{a}_i, \vec{a}_j)_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ij}$ pour tout i, j, c-à-d ssi $(\vec{a}_i)$ une b.o.n.. ▪

Définition 1.9 Soit $(\vec{a}_i)$ une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice de passage de la base canonique $(\vec{E}_i)$ à la base $(\vec{a}_i)$ est la matrice :

$$P = [P_{ij}] = \begin{pmatrix} [\vec{a}_1]_E & [\vec{a}_2]_E & [\vec{a}_3]_E \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Donc, pour $j = 1, 2, 3$, la j-ème colonne $[\vec{a}_j]_E$ de la matrice P stocke les composantes de $\vec{a}_j$ dans la base $(\vec{E}_i)$:

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{3} P_{ij}\vec{E}_i, \qquad [\vec{a}_j]_E = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ P_{3j} \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Proposition 1.10 *On a :*

$$(\vec{a}_i) \text{ est une b.o.n.} \quad \text{ssi} \quad P^T.P = I. \tag{1.20}$$

Preuve. Pour tout i, j on a $(\vec{a}_i, \vec{a}_j)_{\mathbb{R}^3} = \sum_{k,\ell=1}^{3} P_{ki}P_{\ell j}(\vec{E}_k, \vec{E}_\ell)_{\mathbb{R}^3} = \sum_{k,\ell=1}^{3} P_{ki}P_{\ell j}\delta_{k\ell} = \sum_{k=1}^{3} P_{ki}P_{kj} = \sum_{k=1}^{3}(P^T)_{ik}P_{kj} = (P^T.P)_{ij} = [\vec{a}_i]_E^T.[\vec{a}_j]_E$. D'où (1.16) donne (1.20). ∎

1.4 B.o.n. directe et indirecte

On rappelle que, par définition, le déterminant d'une matrice P est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique, donc pour (1.19) :

$$\det(P) \stackrel{\text{déf}}{=} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3). \tag{1.21}$$

Et que $\det(PQ) = \det(P)\det(Q)$ pour toute matrice P, Q, ainsi que $\det(P) = \det(P^T)$. (Voir polycopié valeurs propres et valeurs propres généralisées.)

Proposition 1.11 *Si $(\vec{e}_i)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ alors $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \pm 1$.*

Preuve. Soit P la matrice de passage de la base $(\vec{E}_i)$ à la b.o.n. $(\vec{e}_i)$; donc $P^T.P = I$, donc $\det(P^T.P) = 1 = \det(P^T)\det(P) = \det(P)^2$, donc $\det(P) = \pm 1$. Et $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \det(P)$. ∎

Définition 1.12 La b.o.n. $(\vec{e}_i)$ est directe ssi $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = +1$, et indirecte ssi $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = -1$.

Exemple 1.13 $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ est directe, et $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, -\vec{E}_3)$ est indirecte. ∎

1.5 Produit vectoriel dans une b.o.n. directe ou indirecte

On pose $\vec{e}_4 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_5 = \vec{e}_2$.

Proposition 1.14 *Soit $(\vec{e}_i)$ une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$. On a :*

$$\begin{cases} \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe} & \text{alors} \quad \vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1} = +\,\vec{e}_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \\[2ex] \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte} & \text{alors} \quad \vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1} = -\,\vec{e}_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{1.22}$$

Donc $\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i\vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i\vec{e}_i$ donnent, avec la notation (1.15) :

$$\begin{cases} \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est une b.o.n. directe} & \text{alors} \quad [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e = +\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}, \\[2ex] \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est une b.o.n. indirecte} & \text{alors} \quad [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e = -\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.23}$$

Preuve. Avec (1.4) on a $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{\mathbb{R}^3}$. Donc $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{\mathbb{R}^3} = +1$ si la b.o.n. est directe et $= -1$ si la b.o.n est indirecte, cf. définition 1.12. Donc, avec (1.7) et (1.9), $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = +\vec{e}_3$ si b.o.n. directe, et $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_3$ si b.o.n. indirecte. Mêmes calculs avec les autres indices.

Soit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$. On a, $\wedge$ étant bilinéaire et alternée :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j &= \sum_{1 \le i < j \le 3} (u_i v_j - u_j v_i) \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \\
&= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\
&= \varepsilon \Big((u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 \Big),
\end{aligned} \tag{1.24}$$

où $\varepsilon = +1$ si la b.o.n. est directe, et $\varepsilon = -1$ si la b.o.n. est indirecte. D'où (1.23). ∎

Donc attention : un produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur dont l'expression matricielle $[\vec{u} \wedge \vec{v}]_e$ (la représentation) dans une b.o.n. en fonction de $[\vec{u}]_e$ et $[\vec{v}]_e$ dépend de l'orientation de la b.o.n., cf. (1.23) : formellement :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \vec{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \vec{e}_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} + \text{ si } (\vec{e}_i) \text{ b.o.n. directe,} \\ - \text{ si } (\vec{e}_i) \text{ b.o.n. indirecte,} \end{matrix} \tag{1.25}$$

où on développe le déterminant suivant la première colonne.

2 Le produit matriciel $\widetilde{\wedge}$ (le pseudo-produit vectoriel)

2.1 Le produit matriciel $\widetilde{\wedge}$

Définition 2.1 Pour deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, on définit leur pseudo-produit vectoriel comme étant le produit matriciel (entre deux matrices colonnes) :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \widetilde{\wedge} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

(C'est un produit au sens ou c'est distributif.)

Corollaire 2.2 *Avec la notation $\widetilde{\wedge}$, cf. (2.1), on a pour $i = 1, 2, 3$:*

$$\begin{cases} \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est une b.o.n. directe} \quad \text{alors} \quad [\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1}]_e = +\, [\vec{e}_i]_e \widetilde{\wedge} [\vec{e}_{i+1}]_e \quad (= +\, [\vec{e}_{i+2}]_e), \\[2ex] \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est une b.o.n. indirecte} \quad \text{alors} \quad [\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1}]_e = -\, [\vec{e}_i]_e \widetilde{\wedge} [\vec{e}_{i+1}]_e \quad (= -\, [\vec{e}_{i+2}]_e). \end{cases} \tag{2.2}$$

Plus généralement, pour $\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$, avec donc $[\vec{u}]_e = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe} \quad \text{alors} \quad [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e = +\, [\vec{u}]_e \widetilde{\wedge} [\vec{v}]_e, \\[2ex] \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte} \quad \text{alors} \quad [\vec{u} \wedge \vec{v}]_e = -\, [\vec{u}]_e \widetilde{\wedge} [\vec{v}]_e. \end{cases} \tag{2.3}$$

Preuve. (1.23) et (2.1) donnent (2.3). D'où en particulier (2.2). ∎

N.B. : $[\vec{u}]_e \wedge [\vec{v}]_e$ n'a pas de sens car $[\vec{u}]_e$ et $[\vec{v}]_e$ ne sont pas des vecteurs mais des matrices : c'est $[\vec{u}]_e \widetilde{\wedge} [\vec{v}]_e$ qui a un sens (produit matriciel). De même $\vec{u} \widetilde{\wedge} \vec{v}$ n'a pas de sens car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas des matrices mais des vecteurs : c'est $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui a un sens (produit vectoriel).

Remarque 2.3 On note souvent abusivement (mais pas dans ce polycopié) :

$$\widetilde{\wedge} \overset{\text{noté}}{=} \wedge\,. \tag{2.4}$$

Éviter cet abus de notation permet d'éviter les erreurs de signe.

Exercice 2.4 Démontrer directement (2.2).

Réponse. On a $[\vec{e}_1]_e \widetilde{\wedge} [\vec{e}_2]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \widetilde{\wedge} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [\vec{e}_3]_e$, cf. (2.1). Et on a $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_3$, cf. (1.22). Donc $[\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2]_e = \pm [\vec{e}_3]_e$. Idem par permutation circulaire sur les indices. D'où (2.2).

2.2 Matrice antisymétrique et pseudo-vecteur

Dans $\mathbb{R}^3$ une matrice antisymétrique est une matrice $M = [M_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,3 \\ j=1,\dots,3}}$ telle que :

$$\forall i, j = 1, 2, 3, \qquad M_{ji} = -M_{ij}. \tag{2.5}$$

Donc M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\text{avec la matrice } [\vec{x}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{on a} \qquad M.[\vec{x}] = \begin{pmatrix} -cy + bz \\ cx - az \\ -bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \widetilde{\wedge} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

où on a utilisé le pseudo-produit vectoriel (2.1). Soit :

$$M.[\vec{x}] = \overset{\circlearrowleft}{R}_M \widetilde{\wedge} [\vec{x}], \qquad \text{où on a posé} \qquad \overset{\circlearrowleft}{R}_M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Définition 2.5 La matrice colonne $\overset{\circlearrowleft}{R}_M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est appelée le pseudo-vecteur associé à M. (Ce n'est pas un vecteur : c'est une matrice colonne.)

Attention : c'est le pseudo-produit vectoriel $\widetilde{\wedge}$ qui est utilisé dans (2.7) et (2.8), cf. (2.1). D'ailleurs $\overset{\circlearrowleft}{R}_M \wedge [\vec{x}]$ n'a pas de sens, car le produit vectoriel $\wedge$ est un produit entre deux vecteurs, pas entre deux matrices.

3 Endomorphismes antisymétriques dans $\mathbb{R}^3$

3.1 Endomorphisme et matrice associée

Définition 3.1 Une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application qui vérifie $L(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = L(\vec{x}) + \lambda L(\vec{y})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Et on note alors $L(\vec{x}) = L.\vec{x}$ (notation de la distributivité : $L.(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = L.\vec{x} + \lambda L.\vec{y}$).

Définition 3.2 Un endomorphisme dans $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme. Soit $(\vec{e}_i)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Notons L_{ij} les composantes de $L.\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{e}_i)$:

$$L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \vec{e}_i, \qquad [L.\vec{e}_j]_e = \begin{pmatrix} L_{1j} \\ \vdots \\ L_{nj} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Définition 3.3 La matrice de L dans la base $(\vec{e}_i)$ est la matrice :

$$[L]_e = [L_{ij}] = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L.\vec{e}_1]_e & \dots & [L.\vec{e}_n]_e \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Elle stocke dans sa colonne j les composantes de $L.\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{e}_i)$.

Proposition 3.4 *Soit L un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On a avec le produit matriciel :*

$$[L.\vec{x}]_e = [L]_e.[\vec{x}]_e. \tag{3.3}$$

(Propriété essentielle du produit matriciel relativement aux applications linéaires.)

Preuve. $L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i$ pour tout j et $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ donnent $L.\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j L.\vec{e}_j$ (linéarité de L), donc $L.\vec{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j(\sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n L_{ij}x_j)\vec{e}_i$, donc $[L.\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n L_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n L_{nj}x_j \end{pmatrix}$ qui vaut bien $[L]_e.[\vec{x}]_e$. ▪

Proposition 3.5 *Soit $(\vec{e}_i)$ une base de $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n})$. Soit $[L]_e$ la matrice de L dans la base $(\vec{e}_i)$. Alors :*

$$\forall i,j = 1,2,3, \quad L_{ij} = (L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\vec{e}_i) \text{ est une b.o.n.}. \tag{3.4}$$

Preuve. On a $(L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = (\sum_{k=1}^n L_{kj}\vec{e}_k, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^n L_{kj}(\vec{e}_k, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n}$. Donc $(L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = L_{ij}$ pour tout $i,j = 1,2,3$ ssi $(\vec{e}_k, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ki}$ pour tout $i,k = 1,2,3$. ▪

3.2 Endomorphisme transposé (relativement au produit scalaire euclidien)

Définition 3.6 Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme. L'endomorphisme transposé (relatif au produit scalaire euclidien $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$) est l'application linéaire $L^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad (L^T.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} = (L.\vec{y}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} \qquad (= (\vec{x}, L.\vec{y})_{\mathbb{R}^n}). \tag{3.5}$$

Proposition 3.7 *Si $(\vec{e}_i)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ alors :*

$$[L^T]_e = ([L]_e)^T, \qquad \text{soit} \qquad (L^T)_{ij} = L_{ji}, \quad \forall i,j. \tag{3.6}$$

Preuve. Avec (3.4) et (3.5), on a $(L^T)_{ij} = (L^T.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = (L.\vec{e}_i, \vec{e}_j)_{\mathbb{R}^n} = L_{ji}$. ▪

3.3 Endomorphisme antisymétrique

Définition 3.8 Un endomorphisme $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est antisymétrique dans $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n})$ ssi :

$$L^T = -L. \tag{3.7}$$

Proposition 3.9 *L est antisymétrique ssi sa matrice $[L]_e$ dans une b.o.n. $(\vec{e}_i)$ est antisymétrique :*

$$[L]_e^T = -[L]_e, \qquad \text{soit} \qquad L_{ji} = -L_{ij}, \quad \forall i,j. \tag{3.8}$$

En particulier $L_{ii} = 0$ pour tout i.

Preuve. Avec (3.4) on a $L_{ji} = (L^T)_{ij} = (L^T.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = (-L.\vec{e}_j, \vec{e}_i)_{\mathbb{R}^n} = -L_{ij}$. En particulier $L_{ii} = -L_{ii}$, soit $2L_{ii} = 0$. ▪

Exercice 3.10 Montrer que si L est antisymétrique, alors $L.\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{x}$, pour tout $\vec{x}$.

Réponse. $(L^T.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = (L.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n}$ par définition de L^T, et $(L^T.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = (-L.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n}$ car L est antisymétrique, d'où $(L.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = -(L.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n}$, donc $(L.\vec{x}, \vec{x})_{\mathbb{R}^n} = 0$. ▪

3.4 Endomorphisme antisymétrique dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, la matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une b.o.n. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est de la forme, cf. (3.8) :

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

soit donc (lecture colonne par colonne) $L.\vec{e}_1 = c\vec{e}_2 - b\vec{e}_3$, $L.\vec{e}_2 = -c\vec{e}_1 + a\vec{e}_2$, $L.\vec{e}_3 = b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, cf. (3.1).

Donc, cf. (3.3) :

$$\text{avec} \quad [\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad [L.\vec{x}]_e = [L]_e.[\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

soit donc $L.\vec{x} = (bz - cy)\vec{e}_1 + (cx - az)\vec{e}_2 + (ay - bx)\vec{e}_3$.

Remarque 3.11 Dans $\mathbb{R}^2$ un endomorphisme antisymétrique a une matrice de la forme :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

C'est donc la matrice de rotation d'un quart de tour (dans le sens trigonométrique pour $\alpha > 0$) composée avec l'homothétie de rapport α. ▪

3.5 Vecteur représentant un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$

Proposition 3.12 *L est un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ ssi il existe un vecteur $\vec{R}_L \in \mathbb{R}^3$ t.q. :*

$$L.\vec{x} = \vec{R}_L \wedge \vec{x} \tag{3.12}$$

Et on a, avec $(\vec{E}_i)$ la base canonique :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{ssi} \qquad [\vec{R}_L]_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Preuve. Soit $F_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $F_L(\vec{x}, \vec{y}) = (L.\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^3}$: on a immédiatement F_L bilinéaire (et alternée).

Soit $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$ et soit $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée donné par $G_{\vec{R}}(\vec{x}, \vec{y}) = \det(\vec{R}, \vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^3}$: on a immédiatement $G_{\vec{R}}$ bilinéaire (et alternée).

On a $F_L = G_{\vec{R}}$ ssi F_L et $G_{\vec{R}}$ ont mêmes valeurs sur les vecteurs d'une base. Donc $F = G$ ssi $F_L(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = G_{\vec{R}}(\vec{E}_i, \vec{E}_j)$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$, c-à-d ssi $\vec{R} = \vec{R}_L$ donné par (3.13). ▪

3.6 Pseudo-vecteur associé à un endomorphisme antisymétrique

On dispose de (2.6) et (2.7).

Soit $(\vec{e}_i)$ une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$.

Soit L est un endomorphisme antisymétrique de matrice $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e} = + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ le pseudo-vecteur associé à la matrice $[L]_e$, cf. (2.8).

Définition 3.13 Le pseudo-vecteur $\overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e}$ est appelée le pseudo-vecteur associé à L relativement à la base $(\vec{e}_i)$.

Proposition 3.14 *Soit L un endomorphisme antisymétrique. Soit $\vec{R}_L$ le vecteur associé par (3.12). Soit $(\vec{e}_i)$ une b.o.n.. Soit $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de L dans la b.o.n. $(\vec{e}_i)$. Soit $\overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ le pseudo-vecteur associée à la matrice $[L]_e$, cf. (2.8). Alors :*

$$\begin{cases} [\vec{R}_L]_e = +\overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e} = + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est directe,} \\ [\vec{R}_L]_e = -\overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e} = - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} & \text{si } (\vec{e}_i) \text{ est indirecte.} \end{cases} \tag{3.14}$$

Preuve. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ donné par $[\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a $[L.\vec{x}]_e = [L]_e.[\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} = \overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e} \widetilde{\wedge} [\vec{x}]_e$, cf. (3.3) et (2.8). Et $L.\vec{x} = \vec{R}_L \wedge \vec{x}$, donc $[L.\vec{x}]_e = [\vec{R}_L \wedge \vec{x}]_e = \varepsilon [\vec{R}_L]_e \widetilde{\wedge} [\vec{x}]_e$, cf. (2.3) avec $\varepsilon = +1$ si b.o.n. directe et $\varepsilon = -1$ si b.o.n. indirecte. Donc $[\vec{R}_L]_e = \varepsilon \overset{\circlearrowleft}{R}_{[L]_e}$. ▪

Exemple 3.15 Cas particulier : L donnée dans la base canonique par :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc par} \qquad [\vec{R}_L]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Et $L.\vec{x} = \vec{R}_L \wedge \vec{x} = \gamma \, \vec{E}_3 \wedge \vec{x}$ indique que, pour $\gamma > 0$, L est une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{E}_3$, suivie d'une homothétie de rapport γ. ▪

Exercice 3.16 Montrer que tout endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme (3.15) où E est remplacé par $e = (\vec{e}_i)$ une b.o.n. directe.

Réponse. Soit $L \neq 0$ donné par (3.9) où $(\vec{e}_i) = (\vec{E}_i)$. On pose $\vec{e}_3 = \frac{\vec{R}}{||\vec{R}||_{\mathbb{R}^3}}$. Et on prend $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ t.q. $(\vec{e}_i)$ est une b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$, par exemple on prend $\vec{e}_1 = \frac{\vec{R}_L \wedge \vec{E}_k}{||\vec{R}_L \wedge \vec{E}_k||_{\mathbb{R}^3}}$ où k est choisi t.q. $\vec{R}_L \wedge \vec{E}_k \neq \vec{0}$, puis on prend $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$. Puis on applique les formules de changement de base. ▪