

Formules de changement de bases, formules de changement de vecteurs de représentation, et objectivité isométrique

Gilles LEBORGNE

24 avril 2017

On rappelle les formules connues de changement de bases, et on donne les formules moins connues de changement de vecteurs de représentations d'une forme linéaire donnée, représentations dépendantes du choix d'un produit scalaire.

Table des matières

1	Les observateurs	1
1.1	Bases	1
1.2	Bases duales	2
1.3	Notations matricielles	2
1.3.1	Vecteurs	2
1.3.2	Formes linéaires	2
1.3.3	Endomorphismes	3
1.3.4	Formes bilinéaires	3
1.4	Base euclidienne	3
1.5	Vecteur normal et forme normale à une surface	4
1.6	Produit scalaire euclidien	4
2	Matrice de passage entre bases	4
3	Formules de changement de base	5
3.1	Pour les vecteurs	5
3.2	Pour les formes linéaires	5
3.3	Pour les endomorphismes	5
3.4	Pour les formes bilinéaires	6
4	Représentations d'une forme linéaire par des vecteurs	6
4.1	Théorème de représentation de Riesz	6
4.2	Cas d'un seul produit scalaire et objectivité isométrique	6
4.3	Cas de deux produits scalaires	7
4.4	... Les représentants de Riesz	7
4.5	... La formule de changement de vecteurs	7
4.6	... qui n'est pas une formule de changement de base	8
5	Espace pivot, (pseudo) objectivité isométrique, et (pseudo) identification	8

1 Les observateurs

1.1 Bases

Dans \mathbb{R}^n , $n = 1, 2$ ou 3 par exemple, un observateur anglais choisit une base $(\vec{a}_i)_{i=1,\dots,n} =^{\text{noté}} (\vec{a}_i)$, et un observateur français choisit une base (\vec{b}_i) . L'anglais mesure en pieds, chaque \vec{a}_i représentant "un bâton" de longueur 1 pied (1 ft) dans une direction donnée, et le français mesure en mètre, chaque \vec{b}_i représentant "un bâton" de longueur 1 mètre (1 m) dans la direction donnée. Dessin. On notera :

$$\lambda = \frac{1}{0,3048} \simeq 3.2808, \tag{1.1}$$

avec donc $1 \text{ m} = \lambda \text{ ft}$. Et on prendra souvent :

$$\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i, \tag{1.2}$$

pour la simplicité des calculs et l'interprétation des résultats.

Une base quelconque de \mathbb{R}^n sera notée (\vec{c}_i) .

1.2 Bases duales

L'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^n (applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) est noté \mathbb{R}^{n*} . Pour $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$, on utilise la notation usuelle de la linéarité (distributivité) : pour $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\ell(\vec{u}) \stackrel{\text{noté}}{=} \ell.\vec{u}. \quad (1.3)$$

Si (\vec{c}_i) est une base de \mathbb{R}^n , on note c^i les formes linéaires définies par, pour tout i, j :

$$(c^i(\vec{c}_j) =) \quad c^i.\vec{c}_j = \delta_j^i, \quad (1.4)$$

une forme linéaire étant définie par ses valeurs sur les vecteurs d'une base. Et (c^i) est une base de \mathbb{R}^{n*} appelée base duale de la base (\vec{c}_i) .

Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ alors le réel :

$$u_c^i \stackrel{\text{déf}}{=} c^i.\vec{u} \quad (1.5)$$

est appelé la i -ème composante de \vec{u} relativement à la base (\vec{c}_i) . Et on a :

$$\vec{u} = \sum_j u_c^j \vec{c}_j, \quad (1.6)$$

puisque $c^i.\vec{u} = \sum_j u_c^j (c^i.\vec{c}_j)$ (par linéarité de c^i) donne $c^i.\vec{u} = \sum_j u_c^j \delta_j^i = u_c^i$. On a utilisé, et on utilisera, la convention d'Einstein.

En particulier l'anglais a sa base duale (a^i) et le français a sa base duale (b^i) .

1.3 Notations matricielles

1.3.1 Vecteurs

On notera $\sum_{i=1}^n = \sum_i$. Soit \vec{u} est un vecteur dans \mathbb{R}^n .

$$\text{Si } \vec{u} = \sum_i u_c^i \vec{c}_i \quad \text{alors on note} \quad [\vec{u}]_c = \begin{pmatrix} u_c^1 \\ \vdots \\ u_c^n \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

où $[\vec{u}]_c$ est la matrice colonne des composantes u_c^i de \vec{u} dans la base (\vec{c}_i) .

1.3.2 Formes linéaires

Soit ℓ une forme linéaire dans \mathbb{R}^{n*} (un outil simple de mesure des vecteurs).

$$\text{Si } \ell = \sum_i \ell_{i,c} c^i, \quad \text{alors on note} \quad [\ell]_c = (\ell_{1,c} \quad \dots \quad \ell_{n,c}), \quad (1.8)$$

où $[\ell]_c$ est la matrice ligne des composantes $\ell_{i,c}$ de ℓ dans la base (\vec{c}_i) .

L'écriture en matrice ligne et matrice colonne permet de bénéficier du calcul matriciel :

$$\ell.\vec{u} = [\ell]_c.[\vec{u}]_c = \sum_i \ell_{i,c} u_c^i \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Ce sont également les notations de la contraction tensorielle :

$$\ell.\vec{u} = \left(\sum_i \ell_{i,c} c^i \right) . \left(\sum_j u_c^j \vec{c}_j \right) = \sum_{ij} \ell_{i,c} u_c^j (c^i.\vec{c}_j) = \sum_{ij} \ell_{i,c} u_c^j \delta_j^i = \sum_i \ell_{i,c} u_c^i. \quad (1.10)$$

N.B. : jusqu'à présent on ne s'est servi d'aucun produit scalaire.

1.3.3 Endomorphismes

L'ensemble des endomorphismes dans \mathbb{R}^n (applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un endomorphisme.

$$\text{Si } L.\vec{c}_j = \sum_{ij} L_{j,c}^i \vec{c}_i, \quad \text{donc } L_{j,c}^i \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} c^i.(L.\vec{c}_j), \quad \text{alors on note } [L]_{|c} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} [L_{j,c}^i], \quad (1.11)$$

où $[L]_{|c}$ est la matrice de L relativement à la base (\vec{c}_i) . Et on utilise la notation tensorielle :

$$L = \sum_{ij} L_{j,c}^i \vec{c}_i \otimes c^j, \quad (1.12)$$

au sens, pour $\vec{u} = \sum_i u_c^i \vec{c}_i \in \mathbb{R}^n$, à l'aide des contractions tensorielles :

$$L.\vec{u} = \sum_{ij} L_{j,c}^i (\vec{c}_i \otimes c^j).\vec{u} = \sum_{ij} L_{j,c}^i \vec{c}_i (c^j.\vec{u}) = \sum_{ij} L_{j,c}^i u_c^j \vec{c}_i. \quad (1.13)$$

Et on a les règles usuelles du produit matriciel pour calculer les composantes du vecteur $L.\vec{u}$ dans une base (\vec{c}_i) :

$$[L.\vec{u}]_{|c} = [L]_{|c} \cdot [\vec{u}]_{|c} = \begin{pmatrix} \sum_j L_{j,c}^1 u_c^j \\ \vdots \\ \sum_j L_{j,c}^n u_c^j \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

1.3.4 Formes bilinéaires

L'ensemble des formes bilinéaires sur \mathbb{R}^n est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Une forme bi-linéaire est un outil de mesure des vecteurs. Soit $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

$$\text{Si } \beta_{ij,c} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \beta(\vec{c}_i, \vec{c}_j), \quad \text{alors } \beta(\cdot, \cdot) = \sum_{ij} \beta_{ij,c} c^i \otimes c^j, \quad \text{et on note } [\beta]_{|c} = [\beta_{ij,c}], \quad (1.15)$$

où $[\beta]_{|c}$ est la matrice ligne des composantes $\beta_{ij,c}$ de $\beta(\cdot, \cdot)$ dans la base (\vec{c}_i) .

Et le calcul tensoriel donne, quand $\vec{u} = \sum_i u_c^i \vec{c}_i$ et $\vec{w} = \sum_i w_c^i \vec{c}_i$:

$$\beta(\vec{u}, \vec{w}) = \sum_{ij} \beta_{ij,c} (c^i \otimes c^j)(\vec{u}, \vec{w}) = \sum_{ij} \beta_{ij,c} (c^i.\vec{u})(c^j.\vec{w}) = \sum_{ij} u_c^i \beta_{ij,c} w_c^j = [\vec{u}]_{|c}^T \cdot [\beta]_{|c} \cdot [\vec{w}]_{|c}, \quad (1.16)$$

la dernière égalité utilisant le produit matriciel usuel. Et on retrouve en particulier $\beta(\vec{c}_i, \vec{c}_j) = \beta_{ij,c}$.

Un produit scalaire sur \mathbb{R}^n est une forme bilinéaire $g(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est symétrique ($g(\vec{u}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{u})$ pour tout \vec{u}, \vec{w}) et définie positive ($g(\vec{u}, \vec{u}) > 0$ pour tout $\vec{u} \neq \vec{0}$). Et (1.16) donne :

$$g(\vec{u}, \vec{w}) = [\vec{u}]_{|c}^T \cdot [g]_{|c} \cdot [\vec{w}]_{|c} = [\vec{w}]_{|c}^T \cdot [g]_{|c} \cdot [\vec{u}]_{|c}, \quad (1.17)$$

grâce à la symétrie de $[g]_{|c}$ (on a $g(\vec{c}_i, \vec{c}_j) = g(\vec{c}_j, \vec{c}_i)$).

1.4 Base euclidienne

Une base euclidienne dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$ est une base "orthonormée au sens d'Euclide", i.e. telle que :

- On prend trois "bâtons" de longueur 3, 4 et 5 relativement à une "longueur unité choisie" (le pied pour l'anglais et le mètre pour le français par exemple). Dessin.
- On forme un triangle avec ces bâtons, un tel triangle étant rectangle (Pythagore $3^2 + 4^2 = 5^2$). Dessin.
- Deux vecteurs, chacun modélisant un "bâton", sont dits orthogonaux s'ils sont distincts et parallèles "aux côtés droits" d'un triangle rectangle. Dessin.
- Une base (\vec{c}_i) est "orthonormée au sens d'Euclide" ssi les \vec{c}_i sont deux à deux orthogonaux et de longueur unité (le pied pour l'anglais et le mètre pour le français par exemple). Une telle base est dite euclidienne.

N.B. : Euclide ne connaissait ni les pieds anglais ni les mètres... il avait sa propre longueur unité. Et il ne connaissait pas les produits scalaires...

1.5 Vecteur normal et forme normale à une surface

Soit une surface régulière S de dimension $n-1$ dans \mathbb{R}^n (admet un plan tangent en tout point). Dans l'espace tangent à S , soit $(\vec{e}_i(p))_{i=1,\dots,n-1}$ une base euclidienne en un point $p \in S$, cf. § 1.4.

Et soit $\vec{e}_n(p) = {}^{\text{noté}} \vec{n}(p)$ un vecteur de \mathbb{R}^n construit comme au § 1.4 pour obtenir une base euclidienne $(\vec{e}_i(p))_{i=1,\dots,n}$ de \mathbb{R}^n . Dessin.

Le vecteur $\vec{n}(p) = \vec{e}_n(p)$ est appelé un vecteur normal normal à S en p (unique au signe près).

La base duale $(e^i(p))_{i=1,\dots,n}$ permet de connaître les composantes d'un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sur la base $(\vec{e}_i(p))$. En particulier :

$$(e^n(p) \cdot \vec{v} =) \quad n^b(p) \cdot \vec{v} = v_n(p) \quad (1.18)$$

est la composante de \vec{v} en p le long de la normale à la surface. (Cette définition du vecteur normal, et donc de la forme normale, est faite avant l'introduction d'un produit scalaire : c'est une notion de base euclidienne.) (La notation n^b fait référence à la position des indices d'une forme linéaire dans une base : en bas : si (\vec{c}_i) est une base dans \mathbb{R}^n , alors $n^b(p) = \sum_i n_i(p) c^i$.)

Et par exemple la formule de la divergence s'écrit, pour $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 , pour Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n de bord Γ , avec $\vec{n}(p)$ le vecteur normal unitaire sortant :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f}(p) d\Omega = \int_{\Gamma} n^b(p) \cdot \vec{f}(p) d\Omega, \quad (1.19)$$

le réel $n^b(p) \cdot \vec{f}(p)$ donnant la composante de $\vec{f}(p)$ normale à la surface.

1.6 Produit scalaire euclidien

Un produit scalaire euclidien n'a de sens que si on s'est donné au préalable une base euclidienne (choisi par un anglais ou un français par exemple).

Le produit scalaire euclidien relatif à une base euclidienne (\vec{c}_i) est la forme bilinéaire définie par :

$$g_c(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n c^i \otimes c^i, \quad \text{où donc} \quad [g_c]_c = I. \quad (1.20)$$

L'outil produit scalaire euclidien permet alors :

- de mesurer la longueur, dans l'unité choisie, de tout vecteur $\vec{u} = \sum_i u^i \vec{c}_i$ à l'aide de la formule de Pythagore $\|\vec{u}\|_{g_c} = \sqrt{g_c(\vec{u}, \vec{u})} = \sqrt{\sum_i (u^i)^2}$ (en pied pour l'anglais et en mètre pour le français),
- de savoir si deux vecteurs \vec{u}, \vec{w} sont orthogonaux au sens d'Euclide, ce qui est le cas ssi $g_c(\vec{u}, \vec{w}) = 0$, et plus généralement de donner l'angle θ entre deux vecteurs \vec{u}, \vec{w} grâce à $g_c\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_{g_c}}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|_{g_c}}\right) = \cos \theta$.

Et si on tient à utiliser le produit scalaire euclidien alors (1.19) s'écrit aussi $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f}(p) d\Omega = \int_{\Gamma} g_c(\vec{n}(p), \vec{f}(p)) d\Omega$ (notation usuelle mais inutile).

2 Matrice de passage entre bases

Soit deux bases (\vec{a}_i) et (\vec{b}_i) dans \mathbb{R}^n . On note P_j^i les composantes de \vec{b}_j dans la base (\vec{a}_i) :

$$\vec{b}_j = \sum_i P_j^i \vec{a}_i, \quad \text{donc} \quad P_j^i \stackrel{\text{déf}}{=} a^i \cdot \vec{b}_j. \quad (2.1)$$

La matrice $P = [P_j^i]$ est la matrice de passage de la base (\vec{a}_i) vers la base (\vec{b}_i) (matrice de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de changement de base). Et on note :

$$Q \stackrel{\text{déf}}{=} P^{-1} \stackrel{\text{noté}}{=} [Q_j^i], \quad \text{et donc} \quad \vec{a}_j = \sum_i Q_j^i \vec{b}_i, \quad \text{et} \quad Q_j^i = b^i \cdot \vec{a}_j. \quad (2.2)$$

En effet, $\sum_i Q_j^i \vec{b}_i = \sum_i Q_j^i (\sum_k P_i^k \vec{a}_k) = \sum_k (\sum_i P_i^k Q_j^i) \vec{a}_k = \sum_k (PQ)_j^k \vec{a}_k = \sum_{ik} \delta_j^k \vec{a}_k = \vec{a}_j$.

Et pour les bases duales on a :

$$b^i = \sum_j Q_j^i a^j, \quad \text{et} \quad a^i = \sum_j P_j^i b^j. \quad (2.3)$$

En effet $(\sum_i Q_j^i a^i) \cdot \vec{b}_k = \sum_{im} Q_j^i a^i \cdot (P_k^m \vec{a}_m) = \sum_{im} Q_j^i P_k^m \delta_m^j = \sum_i Q_j^i P_k^j = \delta_k^i = b^i \cdot \vec{b}_k$, pour tout k . Idem pour a^i .

Exemple 2.1 Notre anglais et notre français du § 1.1. Avec $\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i$ pour tout i , on a :

$$P = \lambda I, \quad P^T = \lambda I, \quad P^T \cdot P = \lambda^2 I, \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{\lambda} I \stackrel{\text{noté}}{=} Q. \quad (2.4)$$

N.B. : la matrice P n'est pas orthonormale : $P^T \cdot P \neq I$, ou encore $P^T \neq P^{-1}$, car $\lambda \neq 1$ cf. (1.1). ■

3 Formules de changement de base

Les formules de changement de base permettent à deux observateurs d'échanger leurs informations : les formules traduisent, pour un même "objet", ses coordonnées relatives à la base d'un observateur en ses coordonnées relatives à la base de l'autre observateur.

3.1 Pour les vecteurs

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur dans \mathbb{R}^n (notre "objet"). L'anglais et le français le décrivent dans leurs bases : $\vec{u} = \sum_i u_a^i \vec{a}_i = \sum_i u_b^i \vec{b}_i$. Avec (1.7) et (2.1) on a :

$$[\vec{u}]_b = P^{-1} \cdot [\vec{u}]_a, \quad (3.1)$$

dite formule de changement de base des composantes d'un vecteur. En effet :

$$\vec{u} = \sum_j u_a^j \vec{a}_j = \sum_j u_a^j (\sum_i Q_j^i \vec{b}_i) = \sum_i (\sum_j Q_j^i u_a^j) \vec{b}_i \text{ donne } u_b^i = \sum_j Q_j^i u_a^j.$$

On dit qu'un vecteur est "contravariant" : ses composantes se transforment avec P^{-1} .

Donc connaissant $[\vec{u}]_a$, on obtient $[\vec{u}]_b$ en calculant $P^{-1} \cdot [\vec{u}]_a$.

Et connaissant $[\vec{u}]_b$, on obtient $[\vec{u}]_a$ en calculant $P \cdot [\vec{u}]_b$.

3.2 Pour les formes linéaires

Soit $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$ une forme linéaire sur \mathbb{R}^n (notre "objet"). L'anglais et le français la décrivent dans leurs bases (duales) : $\ell = \sum_i \ell_{i,a} a^i = \sum_i \ell_{i,b} b^i$. Avec (1.8) et (2.3) on a :

$$[\ell]_b = [\ell]_a \cdot P, \quad (3.2)$$

dite formule de changement de base des composantes d'une forme linéaire. En effet :

$$\ell = \sum_i \ell_{i,a} a^i = \sum_i \ell_{i,a} (\sum_j P_j^i b^j) = \sum_j (\sum_i \ell_{i,a} P_j^i) b^j, \text{ et donc } \ell_{j,b} = \sum_i \ell_{i,a} P_j^i.$$

On dit qu'une forme est un vecteur "covariant" (vecteur dans \mathbb{R}^{n*}) : ses composantes se transforment avec P .

Et $\ell \cdot \vec{u}$ est le réel donné par, cf. (1.9) :

$$\ell \cdot \vec{u} = [\ell]_a \cdot [\vec{u}]_a = [\ell]_b \cdot [\vec{u}]_b \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

égalité de vérification immédiate avec (3.2) et (3.1) : $[\ell]_b \cdot [\vec{u}]_b = ([\ell]_a \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot [\vec{u}]_a) = [\ell]_a \cdot I \cdot [\vec{u}]_a$.

3.3 Pour les endomorphismes

Soit un endomorphisme $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Représentons le dans des bases (\vec{a}_i) et (\vec{b}_i) :

$$L = \sum_{ij} L_{j,a}^i \vec{a}_i \otimes a^j = \sum_{ij} L_{j,b}^i \vec{b}_i \otimes b^j, \quad [L]_a = [L_{j,a}^i] \quad \text{et} \quad [L]_b = [L_{j,b}^i]. \quad (3.4)$$

On a :

$$[L]_b = P^{-1} \cdot [L]_a \cdot P, \quad (3.5)$$

dite formule de changement de base des composantes d'un endomorphisme L . En effet, (2.1) et (2.3) donnent :

$$b^i \cdot L \cdot \vec{b}_j = \sum_{km} Q_k^i P_j^m a^k \cdot L \cdot \vec{a}_m, \text{ soit } L_{j,b}^i = \sum_{km} Q_k^i L_{m,a}^k P_j^m = (Q \cdot [L]_a \cdot P)_j^i.$$

3.4 Pour les formes bilinéaires

Soit une forme bilinéaire $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Représentons la dans les bases (\vec{a}_i) et (\vec{b}_i) :

$$\beta(\cdot, \cdot) = \sum_{ij} \beta_{ij,a} a^i \otimes a^j = \sum_{ij} \beta_{ij,b} b^i \otimes b^j, \quad [\beta]_{|a} = [\beta_{ij,a}] \quad \text{et} \quad [\beta]_{|b} = [\beta_{ij,b}]. \quad (3.6)$$

On a :

$$[\beta]_{|b} = P^T \cdot [\beta]_{|a} \cdot P, \quad (3.7)$$

dite formule de changement de base des composantes d'une forme bilinéaire, où $P^T = [(P^T)_j^i]$ est la matrice transposée de $P = [P_j^i]$ (donc $(P^T)_j^i = P_j^i$). En effet, (2.1) donne :

$$\beta(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \sum_{km} P_i^k P_j^m \beta(\vec{a}_k, \vec{a}_m), \quad \text{soit} \quad \beta_{ij,b} = \sum_{km} P_i^k \beta_{km,a} P_j^m = (P^T \cdot [\beta]_{|a} \cdot P)_{ij}.$$

Et, pour $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, le réel $\beta(\vec{u}, \vec{w})$ est indépendant du choix de la base :

$$\beta(\vec{u}, \vec{w}) = [\vec{u}]_{|a}^T \cdot [\beta]_{|a} \cdot [\vec{w}]_{|a} = [\vec{u}]_{|b}^T \cdot [\beta]_{|b} \cdot [\vec{w}]_{|b} \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

la deuxième égalité étant de vérification immédiate avec (3.7) et (3.1) :

$$[\vec{u}]_{|b}^T \cdot [\beta]_{|b} \cdot [\vec{w}]_{|b} = (Q \cdot [\vec{u}]_{|a})^T \cdot (P^T \cdot [\beta]_{|a} \cdot P) \cdot (Q \cdot [\vec{w}]_{|a}) = [\vec{u}]_{|a}^T \cdot (P \cdot Q)^T \cdot [\beta]_{|a} \cdot (I) \cdot [\vec{w}]_{|a}.$$

N.B. : $P^T \neq P^{-1}$ en général, cf. (2.4), au moins pour notre anglais et notre français. Donc les formules de changement de base des formes bilinéaires cf. (3.7), sont différentes des formules de changement de base des endomorphismes cf. (3.5).

4 Représentations d'une forme linéaire par des vecteurs

4.1 Théorème de représentation de Riesz

Soit $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$ (une forme linéaire sur \mathbb{R}^n). C'est ici "l'objet considéré".

Pour "dessiner" ℓ , on la "représente" à l'aide d'un vecteur, à condition de disposer d'un produit scalaire. Si on dispose d'un produit scalaire $g(\cdot, \cdot)$, le théorème de représentation de Riesz indique :

$$\exists! \vec{z}_g \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \ell \cdot \vec{u} = g(\vec{z}_g, \vec{u}). \quad (4.1)$$

(Voir polycopié "Eléments finis".) Attention le vecteur \vec{z}_g n'est pas intrinsèque (à ℓ) : il dépend du choix du produit scalaire (la suite traite essentiellement de cet inconvénient).

4.2 Cas d'un seul produit scalaire et objectivité isométrique

Soit $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$ une forme linéaire. L'anglais et le français veulent la représenter à l'aide d'un vecteur.

Soit $g(\cdot, \cdot)$ un même produit scalaire choisi à la fois par l'anglais et le français (on peut rêver...!).

Soit $\vec{z}_g \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de représentation de ℓ relativement au produit scalaire $g(\cdot, \cdot)$, cf. (4.1).

Proposition 4.1 et définition. *Le vecteur de représentation de Riesz est un vecteur (un "vrai vecteur"!). En particulier il vérifie la formule de changement de base :*

$$[\vec{z}_g]_{|b} = P^{-1} \cdot [\vec{z}_g]_{|a}. \quad (4.2)$$

Si "tout le monde" utilise le même produit scalaire $g(\cdot, \cdot)$, i.e. le même "outil", alors \vec{z}_g est dit "objectif isométrique". C'est une "objectivité en un sens restreint", voir § suivant.

(Cela ne convient pas pour notre anglais et de notre français.)

Preuve. Première démonstration : comme ℓ et $g(\cdot, \cdot)$ sont des tenseurs, il en est de même de \vec{z}_g .

Deuxième démonstration : à l'aide des formules de changement de base. Soit $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$. Soit $\vec{z}_g = \sum_i z_a^i \vec{a}_i = \sum_i z_b^i \vec{b}_i$ le vecteur \vec{z}_g donné en (4.1). On a $[\vec{u}]_{|b}^T \cdot [g]_{|b} \cdot [\vec{z}_g]_{|b} = [\vec{u}]_{|a}^T \cdot [g]_{|a} \cdot [\vec{z}_g]_{|a}$, cf. (3.8), avec $[\vec{u}]_{|b} = Q \cdot [\vec{u}]_{|a}$ et $[g]_{|b} = P^T \cdot [g]_{|a} \cdot P$, donc :

$$([\vec{u}]_{|a}^T \cdot Q^T) \cdot (P^T \cdot [g]_{|a} \cdot P) \cdot [\vec{z}_g]_{|b} = [\vec{u}]_{|a}^T \cdot [g]_{|a} \cdot [\vec{z}_g]_{|a}, \quad (4.3)$$

vrai pour tout \vec{u} , avec $Q^T \cdot P^T = (P \cdot Q)^T = I$, et avec $[g]_{|a}$ inversible (matrice d'un produit scalaire), donc $P \cdot [\vec{z}_g]_{|b} = [\vec{z}_g]_{|a}$, i.e. (4.2). \blacksquare

4.3 Cas de deux produits scalaires ...

Dans le cas de nos observateurs anglais et français, on a a priori deux produits scalaires distincts (on arrête de rêver...), un noté $g_a(\cdot, \cdot)$ pour l'anglais et son pied, et l'autre noté $g_b(\cdot, \cdot)$ pour le français et son mètre. Si l'anglais utilise une base (\vec{a}_i) et le français une base (\vec{b}_i) , on a :

$$\begin{cases} g_a(\cdot, \cdot) = \sum_{ij} g_{a_{ij},a} a^i \otimes a^j, & [g_a]_a = [g_{a_{ij},a}] = [g_a(\vec{a}_i, \vec{a}_j)], \\ g_b(\cdot, \cdot) = \sum_{ij} g_{b_{ij},b} b^i \otimes b^j, & [g_b]_b = [g_{b_{ij},b}] = [g_b(\vec{b}_i, \vec{b}_j)], \end{cases} \quad (4.4)$$

Exemple 4.2 Si (\vec{a}_i) est une base euclidienne (en pied) et si $g_a(\cdot, \cdot)$ est le produit euclidien associé alors $[g_a]_a = I$, i.e. $g_a = \sum_i a^i \otimes a^i$.

Si (\vec{b}_i) est une base euclidienne (en mètre) et si $g_b(\cdot, \cdot)$ est le produit euclidien associé alors $[g_b]_b = I$, i.e. $g_b = \sum_i b^i \otimes b^i$.

Si en plus $\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i$, alors $a^i = \lambda b^i$, et donc :

$$g_a(\cdot, \cdot) = \lambda^2 g_b(\cdot, \cdot) \neq g_b(\cdot, \cdot), \quad (4.5)$$

cf. (1.1) : on est en présence de deux produits scalaires euclidiens distincts. \blacksquare

4.4 ... Les représentants de Riesz ...

Soit ℓ une forme linéaire donnée (notre "objet"), observée à la fois par l'anglais et le français.

Soit \vec{z}_a le vecteur de représentation de ℓ à l'aide du produit scalaire $g_a(\cdot, \cdot)$, et soit \vec{z}_b le vecteur de représentation de ℓ à l'aide du produit scalaire $g_b(\cdot, \cdot)$.

Et soit \vec{u} un vecteur observé à la fois par l'anglais et le français. Donc avec (4.1) :

$$\ell \cdot \vec{u} = g_a(\vec{z}_a, \vec{u}) = g_b(\vec{z}_b, \vec{u}). \quad (4.6)$$

4.5 ... La formule de changement de vecteurs ...

Proposition 4.3 On a pour les composantes dans la base (\vec{b}_i) :

$$[\vec{g}_a]_b \cdot [\vec{z}_a]_b = [\vec{g}_b]_b \cdot [\vec{z}_b]_b, \quad (4.7)$$

formule de changement de vecteurs de représentation de Riesz. Donc :

$$\vec{z}_a \neq \vec{z}_b \quad \text{en général}, \quad (4.8)$$

i.e. le vecteur de représentation dépend de l'observateur : le vecteur de représentation de Riesz n'est pas objectif (il dépend de l'observateur ; voir (4.12) dans le cas de l'anglais et du français).

Preuve. (4.6) exprimée dans la base (\vec{b}_i) donne avec (3.8) :

$$\ell \cdot \vec{u} = [\vec{u}]_b^T \cdot [\vec{g}_a]_b \cdot [\vec{z}_a]_b = [\vec{u}]_b^T \cdot [\vec{g}_b]_b \cdot [\vec{z}_b]_b, \quad (4.9)$$

pour tout \vec{u} , d'où (4.7). En particulier $[\vec{z}_b]_b \neq [\vec{z}_a]_b$ en général. Et deux vecteurs sont égaux ssi ils ont mêmes coordonnées (sur une même base), d'où (4.8). \blacksquare

Corollaire 4.4. Cas particulier de produits scalaires euclidiens :

$$\text{si } [g_a]_a = [g_b]_b = I \quad \text{alors} \quad [\vec{z}_b]_b = P^T \cdot P \cdot [\vec{z}_a]_b, \quad (4.10)$$

dite formule de changement de vecteurs de représentation de Riesz dans le cas de bases euclidiennes relatives à chaque observateur (bien que ce soit une formule liant leurs coordonnées dans la base (\vec{b}_i)).
Donc :

$$\vec{z}_a \neq \vec{z}_b \quad \text{quand} \quad P^T \cdot P \neq I, \quad (4.11)$$

comme dans le cas de l'anglais et du français, cf. (2.4) (et voir exemple suivant).

Donc représenter systématiquement une forme linéaire par un vecteur (lequel?) n'est pas une bonne idée quand on veut s'assurer de l'objectivité des résultats.

Preuve. On a $[g_a]_b = P^T \cdot [g_a]_a \cdot P$, cf. (3.7) ; donc (4.7) donne (4.10). \blacksquare

Exemple 4.5 Suite de l'exemple 4.2 : on a $[g_a]_a = [g_b]_b = I$, et donc $[\vec{z}_b]_b = P^T \cdot P \cdot [\vec{z}_a]_a = \lambda^2 [\vec{z}_a]_a$, donc :

$$\vec{z}_b = \lambda^2 \vec{z}_a, \quad (4.12)$$

avec ici $\lambda^2 = \frac{1}{0,3048^2} \simeq 10,76$, donc le vecteur \vec{z}_b est plus de 10 fois plus long que le vecteur \vec{z}_a .

Exemple : considérons le cas $\ell = a^1$, et donc $\vec{z}_a = \vec{a}_1$. Et soit $\vec{u} = \vec{a}_1$. Alors $\ell \cdot \vec{u} = 1$, et on a bien $g_a(\vec{z}_a, \vec{u}) = 1$ car $g_a(\vec{z}_a, \vec{u}) = g_a(\vec{a}_1, \vec{a}_1)$, et on a bien $g_b(\vec{z}_b, \vec{u}) = 1$ car $g_b(\vec{z}_b, \vec{u}) = g_b(\lambda^2 \vec{z}_a, \vec{u}) = g_b(\lambda^2 \vec{a}_1, \vec{a}_1) = g_b(\lambda \vec{b}_1, \frac{\vec{b}_1}{\lambda}) = g_b(\vec{b}_1, \vec{b}_1)$: on a bien (4.9). \blacksquare

Remarque 4.6 Les unités internationales en aviation sont dans “le plan horizontal” le mile nautique, et “sur la verticale” le pied anglais. Et se tromper de vecteur de représentation, peut-être catastrophique lors d'un atterrissage... Il vaut mieux travailler avec l'objet original (la forme linéaire) qui est le même pour les deux observateurs, plutôt qu'avec un représentant (un vecteur de représentation, lequel?). \blacksquare

Remarque 4.7 Autre application : cas d'une puissance P proportionnelle à la vitesse. Notons $\ell = \sum_i \ell_{i,a} a^i = \sum_i \ell_{i,b} b^i$ la forme linéaire donnant cette puissance (l'instrument de mesure fonction de la vitesse \vec{u}), où donc $P = \ell \cdot \vec{u}$ pour une vitesse \vec{u} .

Et supposons que cette puissance P est donnée en Watt à la fois par l'anglais et le français (James Watt est un écossais, donc ça va...).

Pour un vecteur vitesse $\vec{u} = \sum_i u_a^i \vec{a}_i = \sum_i u_b^i \vec{b}_i$, l'anglais mesure la puissance $P_a = \ell \cdot \vec{u} = [\ell]_a \cdot [\vec{u}]_a \in \mathbb{R}$, et le français mesure la puissance $P_b = \ell \cdot \vec{u} = [\ell]_b \cdot [\vec{u}]_b \in \mathbb{R}$. Et aux erreurs de mesure près, pour une même vitesse, on a $P_a = P_b = P$ (en Watt). Ici on a une seule forme linéaire ℓ représentant P , et le calcul donne un résultat indépendant de la base choisie.

En revanche, pour trouver P à l'aide des vecteurs de représentation, il ne faut pas se tromper de choix, puisqu'ici $\vec{z}_a \neq \vec{z}_b$, alors que les deux observateurs veulent obtenir la même puissance P (la même forme linéaire). \blacksquare

4.6 ... qui n'est pas une formule de changement de base

Les formules de changement de base concernent un unique vecteur : elles donnent la relation entre les composantes de ce même vecteur dans deux bases différentes, cf. (3.1).

Alors que la formule (4.7) (et la formule (4.10)) donne la relation entre deux vecteurs différents.

5 Espace pivot, (pseudo) objectivité isométrique, et (pseudo) identification

Définition 5.1 Quand on choisit pour tous les observateurs un même produit scalaire euclidien $(\cdot, \cdot)_g$ (donc les mêmes unités de mesure), l'espace $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot)_g)$ est dit être l'espace pivot.

Donc le choix d'un espace pivot est subjectif : celui de l'anglais ou celui du français?...

Corollaire 5.2. Cas particulier d'un changement de base orthonormée : si on se donne a priori un espace pivot $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot)_g)$, alors un changement de base euclidienne est un changement de base orthonormée, et les vecteurs de représentation de Riesz sont identiques :

$$\text{si } P^T \cdot P = I \quad \text{et} \quad [g_a]_a = [g_b]_b = I, \quad \text{alors} \quad \vec{z}_a = \vec{z}_b. \quad (5.1)$$

et on parle alors de “l'objectivité isométrique” (ou d'objectivité par changement de base orthonormée).

Dans ce cas on peut “identifier” une forme linéaire ℓ et son vecteur de représentation \vec{z} .

Cette identification n'est pas intrinsèque puisqu'elle dépend du choix du produit scalaire.

Et elle est absurde dans le cas de notre anglais et de notre français qui ont chacun leur produit scalaire euclidien et donc chacun leur vecteur de représentation, et donc chacun une “identification différente”... Ce n'est donc pas une identification...

On peut qualifier l'“identification” du corollaire précédent de “pseudo identification”.

De même on peut qualifier l'“objectivité isométrique” de “pseudo objectivité”.

Autrement dit l'objectivité isométrique concerne un unique observateur qui veut vérifier : si je change de b.o.n. (si je tourne la tête), alors je dois vérifier que mes calculs sont corrects...

Elle est cependant très utile et très utilisée dans le cas de mouvements de solides.