

Différentielles secondes des tenseurs, et dérivées secondes de Lie

Gilles LEBORGNE

22 avril 2017

On utilise ici les tenseurs et les contractions tensorielles.

Table des matières

1	Dualité	1
1.1	Espace vectoriel V	1
1.2	Espace vectoriel dual V^*	2
1.3	Contraction et symbole de Kronecker	2
1.4	Bidual, isomorphisme	2
2	Tenseurs \mathcal{L}_s^r	3
2.1	Définition	3
2.2	Produit tensoriel	3
2.3	Composantes	3
2.4	Isomorphisme et application linéaire associée à une forme bilinéaire	4
2.5	Isomorphisme et application linéaire associée à un tenseur d'ordre 3	5
3	Tenseurs $T_s^r(\Omega)$	5
3.1	Champ de fonctions	6
3.2	Champ de vecteurs	6
3.3	Champ de formes linéaires : les formes différentielles	6
3.4	Tenseurs de type 1 1	6
3.5	Tenseurs de type 0 2	6
3.6	Tenseurs de type 1 2	7
3.7	Tenseurs de type 0 3	7
4	Fonctions différentiables à valeurs scalaires	7
4.1	Définition	7
4.2	Propriété de conservation versus de non conservation	8
5	Fonctions différentiables, cas général	9
5.1	Définition générale	9
5.2	Différentielle $d\vec{v}$ d'un champ de vecteurs	9
5.3	Différentielle $d\alpha$ d'une forme différentielle	10
5.4	Cas particulier de la différentielle seconde d^2f	11
5.5	Une relation entre les différentielles premières	12
6	Différentielles secondes	12
6.1	Différentielle seconde $d^2\vec{v}$ d'un champ de vecteurs	12
6.2	Dérivations $d(d\vec{u}\cdot\vec{v})$	13
6.3	Dérivée seconde de Lie : $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u})$	14
6.4	Différentielle seconde $d^2\alpha$ d'une forme différentielle	14
6.5	Dérivations $d(d\alpha\cdot\vec{v})$ et $d(\alpha\cdot d\vec{v})$	15
6.6	Dérivée seconde de Lie : $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha)$	16

1 Dualité

1.1 Espace vectoriel V

Soit V un espace vectoriel de dimension n isomorphe à \mathbb{R}^n . On n'utilisera pas de produit scalaire. Soit $(\vec{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ =noté (\vec{e}_i) de V une base indépendante du point $p \in \Omega$. Représentation matricielle d'un vecteur relativement à une base (\vec{e}_i) :

$$\text{si } \vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i \in V, \text{ on note } [\vec{v}] = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \text{ matrice colonne,} \quad (1.1)$$

où on utilise la notation "indice-exposant" d'Einstein.

1.2 Espace vectoriel dual V^*

Soit $V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ le dual de V , i.e. l'ensemble des formes linéaires sur V , i.e. l'ensemble des applications linéaires à valeurs réelles.

Pour $\ell \in V^*$ et $\vec{v} \in V$ on note $\ell(\vec{v}) = \ell.\vec{v}$, notation d'un produit (distributivité) car ℓ est linéaire.

Les $\ell \in V^*$ sont des "instruments de mesure des vecteurs" : si $\vec{v} \in V$ alors $\ell.\vec{v} \in \mathbb{R}$ donne une valeur de \vec{v} , pour l'instruments de mesure ℓ .

On note (e^i) la base duale de la base (\vec{e}_i) , i.e. la base constituée des formes linéaires $e^i \in V^*$ t.q. :

$$(e^i(\vec{e}_j) =) \quad e^i.\vec{e}_j = \delta_j^i. \quad (1.2)$$

Donc e^i est la forme linéaire de projection sur la droite vectorielle engendrée par \vec{e}_i parallèlement aux autres directions. Ainsi, si $\vec{v} = \sum_j v^j \vec{e}_j$, alors $e^i.\vec{v} = v^i$ donne la valeur de la i -ème composante de \vec{v} sur la base (\vec{e}_i) . Autrement dit, on calcule v^i à partir de \vec{v} grâce à e^i .

Représentation matricielle d'une forme linéaire relativement à la base duale (e^i) :

$$\text{si } \ell = \sum_i \ell_i e^i \in V^*, \quad \text{on note } [\ell] = (\ell_1 \quad \dots \quad \ell_n) \quad \text{matrice ligne}, \quad (1.3)$$

où on utilise la notation "indice-exposant" d'Einstein. En particulier, si $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$ alors :

$$\ell.\vec{v} = \sum_i \ell_i v^i, \quad \text{et} \quad \ell.\vec{v} = (\ell_1 \quad \dots \quad \ell_n) \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

produit matriciel d'une matrice ligne $1 * n$ par une matrice colonne $n * 1$. La convention d'Einstein permet de s'assurer que le calcul fait est objectif (indépendant de la base choisie).

1.3 Contraction et symbole de Kronecker

La fonction δ suivante, trivialement bilinéaire, est appelée opération de Kronecker :

$$\delta : \begin{cases} V^* \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (\ell, \vec{v}) \rightarrow \delta(\ell, \vec{v}) \stackrel{\text{déf}}{=} \ell.\vec{v}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Également appelé la "contraction d'une forme linéaire et d'un vecteur".

En particulier si on dispose d'une base (\vec{e}_i) alors $\delta(e^i, \vec{e}_j) = \delta_j^i =$ le symbole de Kronecker.

1.4 Bidual, isomorphisme

On note $V^{**} \stackrel{\text{déf}}{=} (V^*)^* = \mathcal{L}(V^*; \mathbb{R})$ le dual du dual, appelé le bidual.

Les vecteurs $\ell \in V^*$ sont mesurés à l'aide des $v \in V^{**}$ (les formes linéaires sur V^*), le résultat étant le réel $v.\ell$.

On note :

$$\mathcal{J} : \begin{cases} V \rightarrow V^{**} \\ \vec{v} \rightarrow \mathcal{J}(\vec{v}) \stackrel{\text{noté}}{=} v, \quad \text{où} \quad \forall \ell \in V^*, \quad \mathcal{J}(\vec{v}).\ell \stackrel{\text{déf}}{=} \ell.\vec{v} \stackrel{\text{noté}}{=} v.\ell. \end{cases} \quad (1.6)$$

\mathcal{J} est un isomorphisme canonique (application linéaire bijective dont la définition ne dépend que des objets et non de leur représentation). Et le bidual V^{**} est interprété comme l'ensemble des dérivations directionnelles. Et on note alors souvent abusivement :

$$v.\ell \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{v}.\ell. \quad (1.7)$$

Soit (\vec{e}_i) une base de base duale (e^i) . On note (e_i) la base duale de la base (e^i) , dite base biduale de la base (\vec{e}_i) . Donc on a $e_i.e^j = e^j.\vec{e}_i = \delta_i^j$, et $e_i.e^j \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{e}_i.e^j$.

Et si $\ell = \sum_j \ell_j e^j$, alors $e_i.\ell = \ell_i (= \ell.\vec{e}_i)$ donne la valeur de la i -ème composante de ℓ sur la base (e^i) .

N.B. : il n'y a pas de règle de calcul matriciel qui tienne avec $v \in V^{**}$ et $\ell \in V^*$ pour calculer $v.\ell$: pour faire du calcul matriciel il faut passer par \mathcal{J} et écrire $v.\ell = \ell.\vec{v} = [\ell].[\vec{v}] =$ le réel produit d'une matrice $1 * n$ par une matrice $n * 1$.

En revanche toutes les règles de contractions tensorielles tiennent : la convention d'Einstein sur la position des indices exposants permet de ne pas se tromper car on ne peut contracter qu'un indice avec un exposant (et pas deux indices, et pas deux exposants).

Ainsi si $v = \sum_i v^i e_i$ et $\ell = \sum_j \ell_j e^j$, alors $v.\ell = \sum_{ij} v^i \ell_j (e_i.e^j) = \sum_i v^i \ell_i$.

Et si $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$ et $\ell = \sum_j \ell_j e^j$, alors $\ell.\vec{v} = \sum_{ij} \ell_j v^i (e^j.e_i) = \sum_i \ell_i v^i = v.\ell$ quand $v = \mathcal{J}(\vec{v})$.

En effet si $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$ alors $v = \mathcal{J}(\vec{v}) = \sum_i v^i e_i$, car $v.e^i = e^i.\vec{v} = v^i$.

2 Tenseurs \mathcal{L}_s^r

2.1 Définition

Soit V un espace vectoriel, et soit V^* son dual.

Les tenseurs \mathcal{L}_s^r sont définis à l'aide des deux espaces vectoriels V et V^* .

Définition 2.1 Soit $r, s \in \mathbb{N}$ avec r ou s non nul. Un tenseur de type r s sur V (ou de type $\binom{r}{s}$ sur V) est une forme multilinéaire $T \in \mathcal{L}(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r \text{ fois}}, \underbrace{V, \dots, V}_{s \text{ fois}}; \mathbb{R}) \stackrel{\text{noté}}{=} \mathcal{L}_s^r$, et T est aussi appelé un tenseur \mathcal{L}_s^r .

Et on note $\mathcal{L}_0^0 = \mathbb{R}$,

Exemple 2.2

$\mathcal{L}_1^0 = L(V; \mathbb{R}) = V^*$,

$\mathcal{L}_0^1 = L(V^*; \mathbb{R}) = V^{**} \simeq V$, grâce à l'isomorphisme \mathcal{J} , cf. (1.6),

$\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}(V, V; \mathbb{R}) =$ les formes bilinéaires sur $V \times V$,

$\mathcal{L}_1^1 = \mathcal{L}(V^*, V; \mathbb{R}) =$ les formes bilinéaires sur $V^* \times V$, isomorphe à l'ensemble des endomorphismes,

...

Dans tous les cas les tenseurs sont des instruments de mesure de formes et de vecteurs. \blacksquare

2.2 Produit tensoriel

Rappel : si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on appelle produit tensoriel de f et g la fonction de deux variables $f \otimes g : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in A$ et $y \in B$:

$$(f \otimes g)(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x)g(y). \quad (2.1)$$

En particulier avec $v \in \mathcal{L}_0^1 = \mathcal{L}(V^*; \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathcal{L}_1^0 = \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$, le produit tensoriel de v et ℓ est la fonction $v \otimes \ell : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $m \in V^*$ et tout $\vec{w} \in V$:

$$(v \otimes \ell)(m, \vec{w}) = (v.m)(\ell.\vec{w}) \stackrel{\text{noté}}{=} (\vec{v} \otimes \ell)(m, \vec{w}). \quad (2.2)$$

(On a utilisé l'isomorphisme \mathcal{J} dans la notation). Trivialement $v \otimes \ell$ bilinéaire : $v \otimes \ell = \text{noté} \vec{v} \otimes \ell \in \mathcal{L}_1^1$.

Et $\ell, m \in \mathcal{L}_1^0$ donnent $\ell \otimes m \in \mathcal{L}_2^0$, où $(\ell \otimes m)(\vec{v}, \vec{w}) = (\ell.\vec{v})(m.\vec{w})$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

Et $v, w \in \mathcal{L}_0^1$ donnent $v \otimes w = \text{noté} \vec{v} \otimes \vec{w} \in \mathcal{L}_0^2$, où $(\vec{v} \otimes \vec{w})(\ell, m) = (v \otimes w)(\ell, m) = (v.\ell)(w.m) = (\ell.\vec{v})(m.\vec{w})$ pour tout $\ell, m \in V^*$.

Les tenseurs de type $a \otimes b$, où $a \in V$ ou V^* et $b \in V$ ou V^* , sont appelés "tenseurs élémentaires".

Plus généralement, $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_s$ est un tenseur élémentaire de \mathcal{L}_s^r . Et à l'aide de l'isomorphisme \mathcal{J} , on le note également $\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_r \otimes \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_s \in \mathcal{L}_s^r$.

2.3 Composantes

Si on dispose d'une base (\vec{e}_i) de base duale (e^i) , alors $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s})$ est une base de \mathcal{L}_s^r , également notée $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s})$ grâce à l'isomorphisme \mathcal{J} . Et on utilise les notations d'Einstein. Par exemple pour $T \in \mathcal{L}_2^1$ (cas de $d^2 \vec{v}(p)$ voir plus loin) :

$$T = \sum_{ijk} T_{ijk}^i \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k, \quad \text{et} \quad T(\ell, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{ijk} T_{ijk}^i \ell_i v^j w^k, \quad (2.3)$$

car $(\vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k)(\ell, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{e}_i.\ell)(e^j.\vec{v})(e^k.\vec{w})$. On note $T_{ijk}^i = T_{jk}^i$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Et pour $T \in \mathcal{L}_3^0$ (cas de $d^2 \alpha(p)$ voir plus loin) :

$$T = \sum_{ijk} T_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k, \quad \text{et} \quad T(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{ijk} T_{ijk} u^i v^j w^k. \quad (2.4)$$

2.4 Isomorphisme et application linéaire associée à une forme bilinéaire

Si A et B sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(A; B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B . (Le cas $B = \mathbb{R}$ vient d'être traité.)

Si C est un autre espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(A, B; C)$ l'ensemble des applications bilinéaires sur $A \times B$ à valeurs dans C . Et quand $C = \mathbb{R}$ les applications bilinéaires sont appelées les formes bilinéaires.

Soit $L \in \mathcal{L}(A; B)$ (une application linéaire de A dans B). On note :

$$\mathcal{I}_2 : \begin{cases} \mathcal{L}(A; B) \rightarrow \mathcal{L}(B^*, A; \mathbb{R}) \\ L \rightarrow T = \mathcal{I}_2(L) \quad \text{où} \quad T(\ell_b, \vec{a}) \stackrel{\text{déf}}{=} \ell_b.(L.\vec{a}), \end{cases} \quad (2.5)$$

qui est un isomorphisme canonique.

On identifie ainsi une application linéaire L et la forme bilinéaire $\mathcal{I}_2(L) = T$.

Notation de la contraction : si $b \in B^{**}$ et $\ell_a \in A^*$ alors $T = b \otimes \ell_a \in \mathcal{L}(B^* \times A; \mathbb{R})$ est l'application linéaire définie par $(b \otimes \ell_a)(\ell_b, \vec{a}) = (b.\ell_b)(\ell_a.\vec{a})$. Et on note également, pour une utilisation avec les contractions :

$$L = \mathcal{I}_2^{-1}(b \otimes \ell_a) \stackrel{\text{noté}}{=} b \otimes \ell_a \quad \text{au sens} \quad (2.6)$$

où on doit utiliser la contraction tensorielle pour faire les calculs. De manière générique la contraction s'écrit ;

$$(a \otimes b).c = a(b.c) = (b.c)a, \quad (2.7)$$

dès que $(b, c) \in V \times V^*$ ou bien $(b, c) \in V^* \times V$ (compatibilité pour avoir $b.c \in \mathbb{R}$).

Exemple 2.3 Cas $A = V$ et $B = V^*$. On a $\mathcal{L}(V; V^*) \simeq \mathcal{L}(V^{**}, V; \mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(V, V; \mathbb{R}) = \mathcal{L}_2^0$.

Soit $L \in \mathcal{L}(V; V^*)$. On identifie L à la forme bilinéaire $T = \mathcal{I}_2(L) \in \mathcal{L}_2^0$.

Pour les calculs : si (\vec{e}_i) est une base de V de base duale (e^i) :

$$\text{si } \mathcal{I}_2(L) = T = \sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes e^j \quad \text{alors on note aussi } L \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes e^j, \quad \text{au sens} \quad (2.8)$$

où on doit utiliser la contraction tensorielle pour faire les calculs : $(e^i \otimes e^j).\vec{v} = e^i(e^j.\vec{v})$ donne :

$$L.\vec{v} = \left(\sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes e^j \right).\vec{v} = \sum_{ij} T_{ij} e^i(e^j.\vec{v}) = \sum_{ij} T_{ij} v^j e^i \in V^*. \quad (2.9)$$

Il n'y a pas d'ambiguïté (la matrice $[T_{ij}] = [\vec{e}_i.(L.\vec{e}_j)]$ est la matrice usuelle de L). Et :

$$(L.\vec{v}).\vec{w} = T(\vec{w}, \vec{v}) = \sum_{ij} T_{ij} w^i v^j. \quad \text{Attention à l'ordre entre } \vec{v} \text{ et } \vec{w}. \quad (2.10)$$

■

Exemple 2.4 Cas $A = B = V$. On a $\mathcal{L}(V; V) \simeq \mathcal{L}(V^*, V; \mathbb{R}) = \mathcal{L}_1^1$.

Soit $L \in \mathcal{L}(V; V)$. On identifie L à la forme bilinéaire $T = \mathcal{I}_2(L) \in \mathcal{L}_1^1$.

Pour les calculs : si (\vec{e}_i) est une base de V de base duale (e^i) :

$$\text{si } \mathcal{I}_2(L) = T = \sum_{ij} T_j^i \vec{e}_i \otimes e^j \quad \text{alors on note aussi } L \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{ij} T_j^i \vec{e}_i \otimes e^j, \quad \text{au sens} \quad (2.11)$$

où on doit utiliser la contraction tensorielle pour faire les calculs : $(\vec{e}_i \otimes e^j).\vec{v} = \vec{e}_i(e^j.\vec{v})$ donne :

$$L.\vec{v} = \left(\sum_{ij} T_j^i \vec{e}_i \otimes e^j \right).\vec{v} = \sum_{ij} T_j^i \vec{e}_i(e^j.\vec{v}) = \sum_{ij} T_j^i v^j \vec{e}_i \in V \simeq V^{**}. \quad (2.12)$$

Il n'y a pas d'ambiguïté (la matrice $[T_j^i] = [e^i.(L.\vec{e}_j)]$ est la matrice usuelle de L). Et :

$$(L.\vec{v}).\ell = T(\ell, \vec{v}) = \sum_{ij} T_j^i \ell_i v^j. \quad \text{Attention à l'ordre entre } \vec{v} \text{ et } \ell. \quad (2.13)$$

■

2.5 Isomorphisme et application linéaire associée à un tenseur d'ordre 3

On se contente du cas des tenseurs d'ordre 3 dont on aura besoin dans la suite, le cas général étant traité de la même manière.

Soit $L \in \mathcal{L}(A; \mathcal{L}(B; C^*)) = \mathcal{L}(A; \mathcal{L}(B; \mathcal{L}(C; \mathbb{R})))$ une application linéaire de A dans $\mathcal{L}(B; C^*)$. Pour $\vec{a} \in A$, $\vec{b} \in B$ et $\vec{c} \in C$ on a :

$$L \xrightarrow{\vec{a}} L.\vec{a} \in \mathcal{L}(B; C^*) \xrightarrow{\vec{b}} (L.\vec{a}).\vec{b} \in C^* \xrightarrow{\vec{c}} ((L.\vec{a}).\vec{b}).\vec{c} \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

On note alors :

$$\mathcal{I}_3 : \begin{cases} \mathcal{L}(A; \mathcal{L}(B; C^*)) \rightarrow \mathcal{L}(C, B, A; \mathbb{R}) \\ L \rightarrow T = \mathcal{I}_3(L) \quad \text{où} \quad T(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) \stackrel{\text{déf}}{=} ((L.\vec{a}).\vec{b}).\vec{c}, \end{cases} \quad (2.15)$$

qui est un isomorphisme canonique. Attention à l'ordre.

Exemple 2.5 On a $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V^*)) \simeq \mathcal{L}(V, V, V; \mathbb{R}) = \mathcal{L}_3^0$, cf. (2.15).

Soit l'application linéaire $L \in \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V^*))$. On l'identifie à la forme trilinéaire $\mathcal{I}_3(L) \in \mathcal{L}_3^0$.

Si (\vec{e}_i) est une base de V de base duale (e^i) :

$$\text{si } \mathcal{I}_3(L) = T = \sum_{ijk} T_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k \quad \text{alors on note } L \stackrel{\text{noté}}{=} T, \quad \text{au sens} \quad (2.16)$$

où on doit utiliser la contraction tensorielle pour faire les calculs : pour $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$:

$$\begin{cases} L.\vec{a} = \sum_{ijk} T_{ijk} e^i \otimes e^j (e^k.\vec{a}) = \sum_{ijk} T_{ijk} a^k e^i \otimes e^j, \\ (L.\vec{a}).\vec{b} = \sum_{ijk} T_{ijk} a^k e^i (e^j.\vec{b}) = \sum_{ijk} T_{ijk} b^j a^k e^i, \\ ((L.\vec{a}).\vec{b}).\vec{c} = \sum_{ijk} T_{ijk} b^j a^k (e^i.\vec{c}) = \sum_{ijk} T_{ijk} c^i b^j a^k = T(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}). \end{cases} \quad (2.17)$$

Attention à l'ordre. Il n'y a pas d'ambiguïté. ▀

Exemple 2.6 On a $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V)) \simeq \mathcal{L}(V^*, V, V; \mathbb{R}) = \mathcal{L}_2^1$, cf. \mathcal{I}_3 dans (2.15).

Soit l'application linéaire $L \in \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V))$. On l'identifie à la forme trilinéaire $\mathcal{I}_3(L) \in \mathcal{L}_2^1$.

Soit (\vec{e}_i) est une base de V de base duale (e^i) .

$$\text{Si } \mathcal{I}_3(L) = T = \sum_{ijk} T_{jk}^i \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k \quad \text{alors on note } L \stackrel{\text{noté}}{=} T, \quad \text{au sens} \quad (2.18)$$

où on doit utiliser la contraction tensorielle pour faire les calculs : pour $\vec{a}, \vec{b} \in V$ et $\gamma \in V^*$:

$$\begin{cases} L.\vec{a} = \sum_{ijk} T_{jk}^i \vec{e}_i \otimes e^j (e^k.\vec{a}) = \sum_{ijk} T_{jk}^i a^k \vec{e}_i \otimes e^j, \\ (L.\vec{a}).\vec{b} = \sum_{ijk} T_{jk}^i a^k \vec{e}_i (e^j.\vec{b}) = \sum_{ijk} T_{jk}^i b^j a^k \vec{e}_i, \\ ((L.\vec{a}).\vec{b}).\gamma = \sum_{ijk} T_{ijk} b^j a^k (\vec{e}_i.\gamma) = \sum_{ijk} T_{jk}^i \gamma_i b^j a^k = T(\gamma, \vec{b}, \vec{a}). \end{cases} \quad (2.19)$$

Attention à l'ordre. Il n'y a pas d'ambiguïté. ▀

3 Tenseurs $T_s^r(\Omega)$

Soit \mathcal{V} un espace affine d'espace vectoriel associé V , et soit Ω un ouvert dans \mathcal{V} . Les points $p \in \Omega$ représentent par exemple les positions de particules d'un objet.

Plus généralement on pourrait considérer Ω une variété différentiable de dimension n avec son fibré tangent (l'ensemble des espaces vectoriels tangents en chaque point). Dans ce cas on utiliserait aux points $p \in \Omega$ une base $(\vec{e}_i(p))$ de l'espace tangent en p . Et alors pour le calcul des dérivées, les dérivées notées $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ seraient à remplacer par les dérivées v_{ij}^i , incluant les symboles de Christoffel. Voir polycopié : Mécanique, tenseurs 2ème partie. Pour simplifier les notations on restera dans le cadre affine avec une base (\vec{e}_i) indépendante de p . (Pour les dérivées de Lie les symboles de Christoffel disparaissent.)

3.1 Champ de fonctions

On notera $C^0(\Omega; \mathbb{R}) =^{\text{noté}} T_0^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^0 sur Ω .

3.2 Champ de vecteurs

On notera $T_0^1(\Omega)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur Ω , dits tenseurs de type $\binom{1}{0}$ (grâce à l'isomorphisme \mathcal{J}) : c'est l'ensemble des fonctions :

$$\vec{v} : \begin{cases} \Omega \rightarrow V \simeq V^{**} = L(V^*; \mathbb{R}) \\ p \rightarrow \vec{v}(p) \end{cases} \quad (3.1)$$

(Définition précise : voir poly "Tenseurs..."; dessin : en chaque point p on dessine un vecteur.)

Et, grâce à l'isomorphisme \mathcal{J} entre V et V^{**} , on a $\ell \cdot \vec{v}(p) = v(p) \cdot \ell =^{\text{noté}} \vec{v}(p) \cdot \ell$ pour tout $\ell \in V^*$.

Si on dispose d'une base (\vec{e}_i) de base duale (e^i) , on a pour $p \in \Omega$:

$$\text{si } \vec{v}(p) = \sum_i v^i(p) \vec{e}_i \in V \simeq \mathcal{L}_0^1, \quad \text{alors } \vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i \in T_0^1(\Omega). \quad (3.2)$$

3.3 Champ de formes linéaires : les formes différentielles

On notera $T_1^0(\Omega)$ l'ensemble des champs de formes linéaires sur Ω , appelées formes différentielles, ou encore tenseurs de type $\binom{0}{1}$: c'est l'ensemble des fonctions :

$$\alpha : \begin{cases} \Omega \rightarrow V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{R}) \\ p \rightarrow \alpha(p) \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc $\alpha(p)$ est la forme linéaire caractérisée par les valeurs réelles $\alpha(p) \cdot \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$.

Contraction : si on dispose d'un champ de vecteurs $\vec{v} \in T_0^1(\Omega)$, en chaque point p on peut calculer le réel $(\alpha \cdot \vec{v})(p) = \alpha(p) \cdot \vec{v}(p)$, mesure du champ \vec{v} par la forme α en p .

Si on dispose d'une base (\vec{e}_i) de base duale (e^i) , on a pour $p \in \Omega$:

$$\text{si } \alpha(p) = \sum_i \alpha_i(p) e^i \in V^* = \mathcal{L}_1^0, \quad \text{alors } \alpha = \sum_i \alpha_i e^i \in T_1^0(\Omega). \quad (3.4)$$

Et avec $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i \in T_0^1(\Omega)$, on a $\alpha(p) \cdot \vec{v}(p) = \sum_{ij} \alpha_i(p) v^j(p) \in \mathbb{R}$ et $\alpha \cdot \vec{v} = \sum_{ij} \alpha_i v^j \in T_0^0(\Omega)$.

3.4 Tenseurs de type 1 1

On notera $T_1^1(\Omega)$ l'ensemble des champs de tenseurs de type $\binom{1}{1}$ sur Ω , appelés simplement des tenseurs. C'est l'ensemble des fonctions :

$$T : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{L}_1^1 = \mathcal{L}(V^*, V; \mathbb{R}) \\ p \rightarrow T(p) \end{cases} \quad (3.5)$$

Donc $T(p)$ est la forme bilinéaire caractérisée par les valeurs réelles $T(p)(\ell, \vec{w})$ pour tout $\ell \in V^*$ et $\vec{w} \in V$. (Application à la différentielle $d\vec{v} \in T_1^1(\Omega)$.) Dans une base :

$$T = \sum_{ij} T_{ij}^i \vec{e}_i \otimes e^j \in T_1^1(\Omega), \quad \text{et} \quad T(\ell, \vec{v}) = \sum_{ij} T_{ij}^i \ell_i v^j \in T_0^0(\Omega). \quad (3.6)$$

Et T est isomorphe à un champ d'endomorphismes, cf. (2.11).

3.5 Tenseurs de type 0 2

Définition similaire pour $T \in T_2^0(\Omega)$:

$$T : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}(V, V; \mathbb{R}) \\ p \rightarrow T(p) \end{cases} \quad (3.7)$$

Donc $T(p)$ est la forme bilinéaire caractérisée par les valeurs réelles $T(p)(\vec{v}, \vec{w})$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in V$. (Application à la différentielle $d\alpha \in T_2^0(\Omega)$.) Dans une base :

$$T = \sum_{ij} T_{ij} e^i \otimes e^j \in T_2^0(\Omega), \quad \text{et} \quad T(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{ij} T_{ij} v^i w^j \in T_0^0(\Omega). \quad (3.8)$$

3.6 Tenseurs de type 1 2

Définition similaire pour $T \in T_2^1(\Omega)$:

$$T : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}(V^*, V, V; \mathbb{R}) \\ p \rightarrow T(p) \end{cases} \quad (3.9)$$

(Pour les dérivées secondes $d^2\vec{v}$ des champs de vecteurs.) Dans une base :

$$T = \sum_{ijk} T_{ijk}^i \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k \in T_2^1(\Omega), \quad \text{et} \quad T(\vec{\ell}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{ijk} T_{ijk}^i \ell_i v^j w^k. \quad (3.10)$$

3.7 Tenseurs de type 0 3

Définition similaire pour $T \in T_3^0(\Omega)$:

$$T : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{L}_3^0 = \mathcal{L}(V, V, V; \mathbb{R}) \\ p \rightarrow T(p) \end{cases} \quad (3.11)$$

(Pour les dérivées secondes $d^2\alpha$ des formes différentielles.) Dans une base :

$$T = \sum_{ijk} T_{ijk} i^i \otimes e^j \otimes e^k \in T_3^0(\Omega), \quad \text{et} \quad T(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{ijk} T_{ijk} u^i v^j w^k. \quad (3.12)$$

4 Fonctions différentiables à valeurs scalaires

4.1 Définition

On suppose connue la notion de fonction continue sur Ω .

Définition 4.1 La fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $p \in \Omega$ (ou dérivable en p) ssi elle admet un développement limité au premier ordre au voisinage de p , i.e. ssi il existe une forme linéaire $\ell_p = \text{noté } df(p) \in V^*$ telle que pour tout $\vec{v} \in V$ et au voisinage de $h = 0$ (pour $h \in \mathbb{R}$ suffisamment petit pour que $p + h\vec{v} \in \Omega$) :

$$f(p + h\vec{v}) = f(p) + h df(p) \cdot \vec{v} + o(h). \quad (4.1)$$

Autrement dit son graphe admet un hyperplan tangent en p (un droite si $n = 1$, un plan si $n = 2$).

Donc si la différentielle $df(p)$ existe, on a $df(p) \in V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{R}) = L_1^0$, et :

$$df(p) \cdot \vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h\vec{v}) - f(p)}{h} \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Et $df(p) \cdot \vec{v}$ est appelé la dérivée directionnelle de f en p dans la direction \vec{v} .

Définition 4.2 Si f est différentiable en tout point $p \in \Omega$ alors f est dite différentiable dans Ω . Et la différentielle de f est alors l'application df définie par :

$$df : \begin{cases} \Omega \rightarrow V^* \\ p \mapsto df(p), \end{cases} \quad (4.3)$$

qui à un point $p \in \Omega$ associe la forme linéaire $df(p)$. Et alors $df \in T_1^0(\Omega)$.

Et si df est continue, alors on dit que $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Définition 4.3 La fonctionnelle d :

$$d : \begin{cases} C^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\Omega; V^*) \\ f \mapsto df \end{cases} \quad (4.4)$$

est appelée différentielle, ou dérivation.

Si on dispose d'une base (\vec{e}_i) , on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} df(p) \cdot \vec{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h\vec{e}_j) - f(p)}{h}, \end{cases} \quad (4.5)$$

d\u00e9riv\u00e9e directionnelle dans la direction \vec{e}_j . Ainsi :

$$df(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) e^j \in V^*, \quad [df(p)] = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right), \quad (4.6)$$

une forme lin\u00e9aire \u00e9tant repr\u00e9sent\u00e9e par une matrice ligne.

Exemple 4.4 Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ espace affine muni d'une origine O et d'une base cart\u00e9sienne (\vec{e}_i) , et on note $\vec{Op} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Soit $f(p) = \frac{x}{y}$ pour $y \neq 0$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{1}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = -\frac{x}{y^2}$, et $[df(p)] = \left(\frac{1}{y} \quad -\frac{x}{y^2} \right)$. Et on v\u00e9rifie que : $df(p) : \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow df(p) \cdot \vec{v}$ avec, pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ avec $\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2$:

$$df(p) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(p) v^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p) v^2 = \frac{1}{y} v^1 - \frac{x}{y^2} v^2 = \left(\frac{1}{y} \quad -\frac{x}{y^2} \right) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = [df(p)] \cdot [\vec{v}].$$

Dans " $df(p) \cdot \vec{v}$ " le point est le point de la contraction "forme lin\u00e9aire" \u00b0 "vecteur", alors que dans " $[df(p)] \cdot [\vec{v}]$ " le point est le point de la multiplication matricielle. \blacksquare

Et on a d\u00e9fini la fonctionnelle (lin\u00e9aire) de d\u00e9rivation $\frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} : \begin{cases} C^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\Omega; \mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j} f = \frac{\partial f}{\partial x^j} = df \cdot \vec{e}_j. \end{cases} \quad (4.7)$$

Et \u00e0 p fix\u00e9, on a aussi d\u00e9fini la fonction $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ de d\u00e9rivation en p :

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) : \begin{cases} C^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \cdot f \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} df(p) \cdot \vec{e}_j \quad (= \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)), \end{cases} \quad (4.8)$$

et $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ est identifiable \u00e0 e_j le j -\u00e8me vecteur de la base biduale de (\vec{e}_i) , voir polycopi\u00e9 alg\u00e8bre lin\u00e9aire. Ainsi $e_j = \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ est l'op\u00e9rateur de d\u00e9rivation dans la direction \vec{e}_j , interpr\u00e9tation de l'isomorphisme (1.6).

4.2 Propri\u00e9t\u00e9 de conservation versus de non conservation

D\u00e9finition 4.5 Une forme diff\u00e9rentielle $\alpha \in T_1^0(\Omega)$ est dite exacte ssi il existe $f \in C^1$ telle que $\alpha = df$.

Proposition 4.6 Soit $t_1 < t_2$ et soit $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega$ une fonction C^1 (une courbe param\u00e9tr\u00e9e diff\u00e9rentiable dans Ω). On note $\text{Im}(\gamma) = \{p \in \Omega, \exists t \in [t_1, t_2], p = \gamma(t)\}$ (courbe g\u00e9om\u00e9trique), et on note $p_1 = \gamma(t_1)$ et $p_2 = \gamma(t_2)$ les extr\u00e9mit\u00e9s de la courbe.

Si $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ alors l'int\u00e9grale :

$$\int_{\text{Im}(\gamma)} df \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{t=t_1}^{t_2} df(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = f(p_2) - f(p_1) \quad (4.9)$$

est une valeur r\u00e9elle ind\u00e9pendante du chemin γ joignant p_1 et p_2 . En particulier si $p_1 = p_2$ alors $\int_{\text{Im}(\gamma)} df = 0$, et on dit que "le travail de la diff\u00e9rentielle df le long d'un chemin diff\u00e9rentiable γ est conservatif". C'est faux en g\u00e9n\u00e9ral pour les formes diff\u00e9rentielles $\alpha \in T_1^0(\Omega)$ quelconques.

Preuve. $df(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = (f \circ \gamma)'(t)$ et donc $\int_{\Gamma} df \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{t=t_1}^{t_2} (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(t_2) - (f \circ \gamma)(t_1)$.

Pour les formes diff\u00e9rentielles, voir l'exemple suivant. \blacksquare

Exemple 4.7 (Spin.) Dans l'espace affine de dimension 2, soit un référentiel d'origine O et de base cartésienne (\vec{e}_i) . Notons (e^i) la base duale. On repère un point $p \in \Omega$ à l'aide de $\vec{O}p = \sum_{i=1}^2 x^i \vec{e}_i$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^2$ la forme différentielle "de spin" définie par :

$$\alpha(p) = -x^2 e^1 + x^1 e^2 \in (\mathbb{R}^2)^*, \quad [\alpha(p)] = \begin{pmatrix} -x^2 & x^1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

C'est "le prototype" de la forme différentielle exprimant la perte d'énergie le long du cercle paramétré $\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow \gamma(t)$ donné par $\vec{O}\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$. Ici le travail de α le long de $\text{Im}\gamma$ est non nul :

$$\int_{\text{Im}\gamma} \alpha = \int_{t=0}^{2\pi} \alpha(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \sin t & R \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^{2\pi} R^2 dt \neq 0,$$

bien que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. En particulier α n'est pas une différentielle exacte, cf. proposition 4.6. \blacksquare

5 Fonctions différentiables, cas général

Toujours avec Ω un ouvert dans \mathcal{V} espace affine d'espace vectoriel associé V .

Soit Z un espace vectoriel. $\mathcal{L}(V; Z)$ est l'ensemble des applications linéaires de V dans Z .

5.1 Définition générale

Définition 5.1 Une fonction $F : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow Z$ est différentiable en $p \in \Omega$ ssi il existe une application linéaire $L_p = {}^{\text{noté}} dF(p) : V \rightarrow Z$ telle que pour tout $\vec{v} \in V$:

$$F(p + h\vec{v}) = F(p) + h dF(p) \cdot \vec{v} + o(h) \in Z. \quad (5.1)$$

(Le développement limité au premier ordre au voisinage de p existe.)

Donc si la différentielle $dF(p)$ existe, on a $dF(p) \in \mathcal{L}(V; Z)$, et :

$$dF(p) \cdot \vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p + h\vec{v}) - F(p)}{h} \in Z. \quad (5.2)$$

Et $dF(p) \cdot \vec{v}$ est appelé la dérivée directionnelle de F en p dans la direction \vec{v} . On a ainsi défini la fonction (quand elle existe) :

$$dF : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathcal{L}(V; Z) \\ p & \rightarrow dF(p). \end{cases} \quad (5.3)$$

Et si dF est continue, on dit que F est C^1 . (Le cas $Z = \mathbb{R}$ a été traité au § 4.1.)

5.2 Différentielle $d\vec{v}$ d'un champ de vecteurs

Cas $Z = V$ dans la définition 5.1.

La fonction $\vec{v} : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow V$ est différentiable en $p \in \Omega$ ssi il existe une application linéaire, alors notée $d\vec{v}(p) \in \mathcal{L}(V; V)$, telle que pour tout $\vec{w} \in V$:

$$d\vec{v}(p) \cdot \vec{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(p + h\vec{w}) - \vec{v}(p)}{h} \in V. \quad (5.4)$$

On a $d\vec{v}(p) \in \mathcal{L}(V; V)$, et on a l'isomorphisme \mathcal{I}_2 , cf. (2.5) avec $A = B = V$.

On note $\mathcal{I}_2(d\vec{v}(p)) = \tilde{d}\vec{v}(p) \in \mathcal{L}(V^*, V; \mathbb{R})$. Donc pour $\ell \in V^*$ on a :

$$(d\vec{v}(p) \cdot \vec{w}) \cdot \ell = \tilde{d}\vec{v}(p)(\ell, \vec{w}), \quad \tilde{d}\vec{v} \in T_1^1(\Omega). \quad (5.5)$$

On a ainsi identifié l'endomorphisme $d\vec{v}(p)$ avec la forme bilinéaire $\tilde{d}\vec{v}(p)$. Attention à l'ordre, cf. (2.13).

Et on "identifie" la différentielle $d\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V)$ et le tenseur $\tilde{d}\vec{v} \in T_1^1(\Omega)$.

Proposition 5.2 Dans une base (\vec{e}_i) de V on a :

$$\tilde{d}\vec{v}(p) = \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \vec{e}_i \otimes e^j \in L(V^*, V; \mathbb{R}), \quad [d\vec{v}(p)] = \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \right] = [v^i, j(p)]. \quad (5.6)$$

Et on note également, pour une utilisation avec les contractions :

$$d\vec{v}(p) \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \vec{e}_i \otimes e^j \in L(V; V), \quad [d\vec{v}(p)] = \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \right]. \quad (5.7)$$

• Contraction $(\vec{e}_i \otimes e^j) \cdot \vec{z} = \vec{e}_i(e^j \cdot \vec{z}) = z^j \vec{e}_i$, donc :

$$d\vec{v}(p) \cdot \vec{z} = \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) z^j \vec{e}_i \in V, \quad (5.8)$$

• contraction $\vec{e}_i \cdot \ell = \ell_i$:

$$(d\vec{v}(p) \cdot \vec{z}) \cdot \ell = \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \ell_i z^j \quad (= \tilde{d}\vec{v}(\ell, \vec{z})). \quad (5.9)$$

Preuve. Avec $\vec{v}(p) = \sum_i v^i(p) \vec{e}_i$, (5.4) donne pour tout j :

$$d\vec{v}(p) \cdot \vec{e}_j = \sum_i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v^i(p + h\vec{e}_j) - v^i(p)}{h} \vec{e}_i = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \vec{e}_i \in V, \quad (5.10)$$

donc pour tout i, j :

$$(d\vec{v}(p) \cdot \vec{e}_j) \cdot e^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) = \tilde{d}\vec{v}(p)(e^i, \vec{e}_j). \quad (5.11)$$

D'où (5.6), (5.8) et (5.9). ▀

Exemple 5.3 Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ muni d'une origine O et d'une base cartésienne (\vec{e}_i) , et $\vec{O}p = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Soit \vec{v} donné par $[\vec{v}(p)] = \begin{pmatrix} v^1(p) = \sqrt{x} \\ v^2(p) = \frac{x}{y} \end{pmatrix}$ pour $x > 0$ et $y \neq 0$. Alors $[d\vec{v}(p)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$. ▀

5.3 Différentielle $d\alpha$ d'une forme différentielle

Cas $Z = V^*$ dans la définition 5.1.

La fonction $\alpha : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow V^*$ est différentiable en $p \in \Omega$ ssi il existe une application linéaire, alors notée $d\alpha(p) \in \mathcal{L}(V; V^*)$, telle que pour tout $\vec{w} \in V$:

$$d\alpha(p) \cdot \vec{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(p + h\vec{w}) - \alpha(p)}{h} \in V^*. \quad (5.12)$$

On a $d\alpha(p) \in \mathcal{L}(V; V^*)$, et on a l'isomorphisme \mathcal{I}_2 , cf. (2.5) avec $A = V$ et $B = V^*$.

On note $\tilde{\mathcal{I}}_2(d\alpha(p)) = \tilde{d}\alpha(p) \in \mathcal{L}(V, V; \mathbb{R})$. Donc pour $\vec{y} \in V^*$ on a :

$$(d\alpha(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} \stackrel{\text{noté}}{=} \tilde{d}\alpha(p)(\vec{y}, \vec{w}), \quad \tilde{d}\alpha \in T_2^0(\Omega). \quad (5.13)$$

On a ainsi identifié l'application linéaire $d\alpha(p)$ avec la forme bilinéaire $\tilde{d}\alpha(p)$. Attention à l'ordre, cf. (2.10).

Et on "identifie" la différentielle $d\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V)$ et le tenseur $\tilde{d}\vec{v} \in T_1^1(\Omega)$.

Proposition 5.4 Dans une base (\vec{e}_i) de V on a :

$$\tilde{d}\alpha(p) = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) e^i \otimes e^j \in L(V, V; \mathbb{R}), \quad [d\alpha(p)] = \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) \right] = [\alpha_i, j(p)]. \quad (5.14)$$

Et on note également, pour une utilisation avec les contractions :

$$d\alpha(p) \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) e^i \otimes e^j \in L(V; V^*), \quad [d\alpha(p)] = \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) \right]. \quad (5.15)$$

- Contraction $(e^i \otimes e^j) \cdot \vec{w} = e^i(e^j \cdot \vec{w}) = w^j e^i$, donc :

$$d\alpha(p) \cdot \vec{w} = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) w^j e^i \in V^*, \quad (5.16)$$

- contraction $e^i \cdot \vec{y} = y^i$:

$$(d\alpha(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) y^i w^j \quad (= \tilde{d}\alpha(p)(\vec{y}, \vec{w})). \quad (5.17)$$

Preuve. Avec $\alpha(p) = \sum_i \alpha_i(p) e^i$, (5.12) donne :

$$d\alpha(p) \cdot \vec{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_i \frac{\alpha_i(p + h\vec{e}_j) - \alpha_i(p)}{h} e^i = \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) e^i, \quad (5.18)$$

donc :

$$(d\alpha(p) \cdot \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) = \tilde{d}\alpha(p)(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \quad (5.19)$$

D'où (5.14), (5.16) et (5.17). ▀

Exemple 5.5 Suite de l'exemple 4.7. Ici $\alpha(p) = \alpha_1(p)e^2 + \alpha_2(p)e^1$ où $\alpha_1(p) = -x_2$ et $\alpha_2(p) = x_1$.

Donc $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1} = 0$, $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} = -1$, $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} = 1$, $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^2} = 0$, d'où :

$$d\alpha(p) = -e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1, \quad (5.20)$$

et donc $d\alpha(p) \cdot \vec{e}_1 = +e^2$ et $d\alpha(p) \cdot \vec{e}_2 = -e^1$, et :

$$(d\alpha(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} = \tilde{d}\alpha(p)(\vec{y}, \vec{w}) = -w^2 y^1 + w^1 y^2. \quad (5.21)$$

Noter que $\tilde{d}\alpha(p)(\vec{y}, \vec{w}) \neq \tilde{d}\alpha(p)(\vec{w}, \vec{y})$: la forme bilinéaire $\tilde{d}\alpha(p)$ n'est pas symétrique.

Ici la matrice de l'application bilinéaire $\tilde{d}\alpha(p)$ est $[\tilde{d}\alpha(p)] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice non symétrique. ▀

5.4 Cas particulier de la différentielle seconde $d^2 f$

Dans le cas particulier d'une forme différentielle exacte : $\alpha = df$, avec $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$:

$$d(df)(p) \cdot \vec{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{df(p + h\vec{w}) - df(p)}{h} \stackrel{\text{noté}}{=} d^2 f(p) \cdot \vec{w} \in V^*. \quad (5.22)$$

Et pour tout $\vec{y}, \vec{w} \in V$:

$$((d(df)(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y}) = (d^2 f(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} \stackrel{\text{noté}}{=} \tilde{d}^2 f(p)(\vec{y}, \vec{w}), \quad (5.23)$$

avec $\tilde{d}^2 f \in T_2^0(\Omega)$.

Théorème 5.6 (de Schwarz.) Quand f est C^2 sur Ω alors $d^2 f$ est symétrique au sens où $\tilde{d}^2 f$ est symétrique : pour tout $p \in \Omega$ et tous $\vec{y}, \vec{w} \in V$:

$$(d^2 f(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} = (d^2 f(p) \cdot \vec{y}) \cdot \vec{w}, \quad \text{soit} \quad \tilde{d}^2 f(p)(\vec{y}, \vec{w}) = \tilde{d}^2 f(p)(\vec{w}, \vec{y}). \quad (5.24)$$

En particulier si (\vec{e}_i) est une base cartésienne, on a :

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x^i}}{\partial x^j} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x^j}}{\partial x^i} \stackrel{\text{noté}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (5.25)$$

et la matrice $[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}]$ est symétrique, appelée matrice hessienne de f .

Preuve. Voir polycopié 1ère année : Fonctions de plusieurs variables. ▀

5.5 Une relation entre les différentielles premières

Soit $\alpha \in T_1^0(\Omega)$ et $\vec{v} \in T_0^1(\Omega)$.

On définit le produit contracté $\alpha.\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $(\alpha.\vec{v})(p) = \alpha(p)\vec{v}(p)$.

Ainsi $\alpha.\vec{v} \in T_0^0(\Omega)$ et quand α et \vec{v} sont C^1 , $d(\alpha.\vec{v}) \in T_1^0(\Omega)$.

Avec $d\vec{v}(p) \in \mathcal{L}(V; V)$ et $\tilde{d}\vec{v}(p) \in L_1^1$, et avec $d\alpha(p) \in \mathcal{L}(V; V^*)$ et $\tilde{d}\alpha(p) \in L_2^0$.

Ainsi pour $\vec{w} \in V$ on a $d\vec{v}(p).\vec{w} \in V$ et $d\alpha(p).\vec{w} \in V^*$.

Proposition 5.7 On a la “formule de dérivation d'un produit” :

$$d(\alpha.\vec{v}) = (d\alpha).\vec{v} + \alpha.(d\vec{v}), \quad (5.26)$$

au sens, pour $\vec{w} \in V$ (dérivée dans la direction \vec{w}) :

$$d(\alpha.\vec{v}).\vec{w} = (d\alpha.\vec{w}).\vec{v} + \alpha.(d\vec{v}.\vec{w}). \quad (5.27)$$

Preuve. On a :

$$d(\alpha.\vec{v})(p).\vec{w} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(p+h\vec{w}).\vec{v}(p+h\vec{w}) - \alpha(p).\vec{v}(p)}{h},$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha(p+h\vec{w}).\vec{v}(p+h\vec{w}) - \alpha(p).\vec{v}(p) &= \alpha(p+h\vec{w}).(\vec{v}(p+h\vec{w}) - \vec{v}(p)) + (\alpha(p+h\vec{w}) - \alpha(p)).\vec{v}(p) \\ &= (\alpha(p) + o(1))(h d\vec{v}(p).\vec{w} + o(h)) + (h d\alpha(p).\vec{w} + o(h)).\vec{v}(p) \\ &= h \alpha(p).(d\vec{v}(p).\vec{w}) + h (d\alpha(p).\vec{w}).\vec{v}(p) + o(h), \end{aligned}$$

d'où (5.27). ▀

Remarque 5.8 Démonstration à l'aide d'une base : $\alpha.\vec{v} = \sum_i \alpha_i v^i$, d'où $d(\alpha.\vec{v}) = \sum_i (d\alpha_i) v^i + \sum_i \alpha_i (dv^i)$, d'où :

$$d(\alpha.\vec{v}) = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} e^j \right) v^i + \sum_i \alpha_i \left(\sum_j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j \right), \quad (5.28)$$

d'où $d(\alpha.\vec{v}).\vec{w} = \sum_{ij} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} v^i w^j + \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} w^j \right)$. ▀

6 Différentielles secondes

6.1 Différentielle seconde $d^2\vec{v}$ d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{v} : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow V$ supposé C^2 . On a $d\vec{v} : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}(V; V)$.

On prend $Z = \mathcal{L}(V; V)$ dans la définition 5.1 : on a :

$$d^2\vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} d(d\vec{v}) : \begin{cases} \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V)) \\ p \rightarrow d^2\vec{v}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} d(d\vec{v})(p), \end{cases} \quad (6.1)$$

où donc pour tout $\vec{w} \in V$:

$$d^2\vec{v}(p).\vec{w} = d(d\vec{v})(p).\vec{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\vec{v}(p+h\vec{w}) - d\vec{v}(p)}{h} \in \mathcal{L}(V; V). \quad (6.2)$$

Donc $d^2\vec{v}(p).\vec{w}$ est caractérisé à l'aide des vecteurs $\vec{y} \in V$:

$$(d^2\vec{v}(p).\vec{w}).\vec{y} \in V \simeq V^{**}. \quad (6.3)$$

Et pour $\ell \in V^*$ on note, cf. (2.18) (attention à l'ordre) :

$$((d^2\vec{v}(p).\vec{w}).\vec{y}).\ell \stackrel{\text{noté}}{=} \tilde{d}^2\vec{v}(p)(\ell, \vec{y}, \vec{w}) \in \mathbb{R}, \quad (6.4)$$

où donc $\tilde{d}^2\vec{v} \in T_2^1(\Omega)$.

On rappelle que dans une base (\vec{e}_i) on a $d\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j$.

Proposition 6.1 Dans une base (\vec{e}_i) de V on a :

$$\tilde{d}^2 \vec{v}(p) = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}(p) \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k, \quad \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \stackrel{\text{noté}}{=} v^i_{,jk}, \quad (6.5)$$

le théorème de Schwarz indiquant que l'ordre entre j et k n'a pas d'importance dès que $\vec{v} \in C^2$. Et on note également, pour une utilisation avec les contractions :

$$d^2 \vec{v}(p) \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{ijk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}(p) \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k, \quad (6.6)$$

• Contraction $(\vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k) \cdot \vec{w} = (\vec{e}_i \otimes e^j)(e^k \cdot \vec{w})$:

$$d^2 \vec{v}(p) \cdot \vec{w} = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}(p) w^k \vec{e}_i \otimes e^j \in L(V^*, V; \mathbb{R}) \simeq L(V; V). \quad (6.7)$$

• contraction $(\vec{e}_i \otimes e^j) \cdot \vec{y} = \vec{e}_i(e^j \cdot \vec{y})$:

$$(d^2 \vec{v}(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}(p) y^j w^k \vec{e}_i \in V, \quad (6.8)$$

• contraction $\vec{e}_i \cdot \ell = \ell_i$:

$$((d^2 \vec{v}(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y}) \cdot \ell = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}(p) \ell_i y^j w^k \in \mathbb{R} \quad (= \tilde{d}^2(\vec{v})(p)(\ell, \vec{y}, \vec{w})). \quad (6.9)$$

Preuve. (6.1) donne :

$$(d(d\vec{v})(p) \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\vec{v}(p+h\vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j - d\vec{v}(p) \cdot \vec{e}_j}{h}, \quad (6.10)$$

avec $d\vec{v}(q) \cdot \vec{e}_j = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(q) \vec{e}_i$, d'où :

$$\begin{aligned} (d(d\vec{v})(p) \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p+h\vec{e}_k) \vec{e}_i - \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \vec{e}_i}{h} \\ &= \sum_i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p+h\vec{e}_k) - \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p)}{h} \vec{e}_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (6.11)$$

D'où $(d(d\vec{v})(p) \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j \cdot e^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}(p) = \tilde{d}^2 \vec{v}(p)(e^i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$, d'où (6.5). ▀

6.2 Dérivations $d(d\vec{u} \cdot \vec{v})$

On définit le produit contracté $d\vec{u} \cdot \vec{v} : \Omega \rightarrow V$ par $(d\vec{u} \cdot \vec{v})(p) = d\vec{u}(p) \cdot \vec{v}(p) \in V$. Ainsi $d\vec{u} \cdot \vec{v} \in T_0^1(\Omega)$. Et $d(d\vec{u} \cdot \vec{v}) \in T_1^1(\Omega)$.

Proposition 6.2 On a (formules de dérivation d'un produit), pour $\vec{u} \in C^2$ et $\vec{v} \in C^1$:

$$d(d\vec{u} \cdot \vec{v}) = (d^2 \vec{u}) \cdot \vec{v} + d\vec{u} \cdot (d\vec{v}) \in T_1^1(\Omega), \quad (6.12)$$

au sens, pour tout $\vec{w} \in V$:

$$d(d\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = (d^2 \vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} + d\vec{u} \cdot (d\vec{v} \cdot \vec{w}) \in T_0^1(\Omega), \quad (6.13)$$

Preuve. On a :

$$d(d\vec{u} \cdot \vec{v})(p) \cdot \vec{w} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(d\vec{u} \cdot \vec{v})(p+h\vec{w}) - (d\vec{u} \cdot \vec{v})(p)}{h} \in V^*,$$

avec :

$$\begin{aligned} d\vec{u}(p+h\vec{w}) \cdot \vec{v}(p+h\vec{w}) - d\vec{u}(p) \cdot \vec{v}(p) &= d\vec{u}(p+h\vec{w}) \cdot (\vec{v}(p+h\vec{w}) - \vec{v}(p)) + (d\vec{u}(p+h\vec{w}) - d\vec{u}(p)) \cdot \vec{v}(p) \\ &= (d\vec{u}(p) + o(1)) \cdot (h d\vec{v}(p) \cdot \vec{w} + o(h)) + (h d(d\vec{u})(p) \cdot \vec{w} + o(h)) \cdot \vec{v}(p) \\ &= h d\vec{u}(p) \cdot (d\vec{v}(p) \cdot \vec{w}) + h (d(d\vec{u})(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}(p) + o(h), \end{aligned}$$

d'où (6.13). ▀

Démonstration à l'aide d'une base : on a $d\vec{u}.\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j \vec{e}_i$, et $d(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j) \vec{e}_k = \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} v^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k}$, d'où :

$$d(d\vec{u}.\vec{v}).\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} v^j \vec{e}_i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_i. \quad (6.14)$$

Avec (6.6), donc $d^2\vec{u}.\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j$, donc $(d^2\vec{u}.\vec{e}_k).\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} v^j \vec{e}_i$.

Et $d\vec{u} = \sum_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j$, et $d\vec{v}.\vec{e}_k = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_j$, donc $d\vec{u}.(d\vec{v}.\vec{e}_k) = \sum_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_i$. Vrai pour tout k .

6.3 Dérivée seconde de Lie : $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u})$

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in T_0^1(\Omega)$ deux champs de vecteurs C^1 . La dérivée de Lie autonome de \vec{u} le long d'un flot de champ de vecteurs vitesses \vec{v} est définie par (voir poly "Flots et dérivées de Lie dans \mathbb{R}^n ") :

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u} = d\vec{u}.\vec{v} - d\vec{v}.\vec{u} \in T_0^1(\Omega). \quad (6.15)$$

Dans une base (\vec{e}_i) on a :

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u} = \sum_{ij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} u^j \right) \vec{e}_i. \quad (6.16)$$

Lemme 6.3 On suppose $\vec{u}, \vec{v} \in C^2$. On a :

$$d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}) = (d^2\vec{u}).\vec{v} + d\vec{u}.(d\vec{v}) - (d^2\vec{v}).\vec{u} - d\vec{v}.(d\vec{u}) \in T_1^1(\Omega), \quad (6.17)$$

au sens, pour $\vec{w} \in V$:

$$d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}).\vec{w} = (d^2\vec{u}.\vec{w}).\vec{v} + d\vec{u}.(d\vec{v}.\vec{w}) - (d^2\vec{v}.\vec{w}).\vec{u} - d\vec{v}.(d\vec{u}.\vec{w}) \in T_0^1(\Omega), \quad (6.18)$$

Preuve. On applique (6.12). ▀

Démonstration à l'aide d'une base : $d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}) = \sum_{ijk} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} v^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} u^j - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \right) \vec{e}_i \otimes e^k$.

Donc $d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}).\vec{e}_k = \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} v^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} u^j - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \right) \vec{e}_i$.

Avec $d^2\vec{u}.\vec{e}_k = (\sum_{ijm} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^m \partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^m) \cdot (\vec{e}_k) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j$.

Donc $(d^2\vec{u}.\vec{e}_k).\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^k \partial x^j} v^j \vec{e}_i$.

Avec $d\vec{u}.(d\vec{v}.\vec{e}_k) = (\sum_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j) (\sum_j \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_j) = \sum_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_i$.

Et termes similaires pour $-(d^2\vec{v}.\vec{e}_k).\vec{u} - d\vec{v}.(d\vec{u}.\vec{e}_k)$. D'où (6.18) pour tout \vec{e}_k . D'où (6.18).

Corollaire 6.4 Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in T_0^1(\Omega)$. On suppose $\vec{u}, \vec{v} \in C^2$ et $\vec{w} \in C^1$. On a :

$$\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}) = (d^2\vec{u}.\vec{w}).\vec{v} + d\vec{u}.(d\vec{v}.\vec{w}) - (d^2\vec{v}.\vec{w}).\vec{u} - d\vec{v}.(d\vec{u}.\vec{w}) - d\vec{w}.d\vec{u}.\vec{v} + d\vec{w}.d\vec{v}.\vec{u}. \quad (6.19)$$

En particulier :

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}) = (d^2\vec{u}.\vec{v}).\vec{v} + d\vec{u}.d\vec{v}.\vec{v} - (d^2\vec{v}.\vec{v}).\vec{u} - 2d\vec{v}.d\vec{u}.\vec{v} + d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{u}. \quad (6.20)$$

Preuve. On a $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}) = d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}).\vec{w} - d\vec{w}.\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}$ et (6.18). ▀

6.4 Différentielle seconde $d^2\alpha$ d'une forme différentielle

Soit $\alpha : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow V^*$ supposé C^2 . On a $d\alpha : \Omega \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}(V; V^*)$.

On prend $Z = \mathcal{L}(V; V^*)$ dans la définition 5.1 : on a :

$$d^2\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} d(d\alpha) : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V^*)) \\ p \rightarrow d^2\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} d(d\alpha)(p), \end{cases} \quad (6.21)$$

où donc pour tout $\vec{w} \in V$:

$$d^2\alpha(p).\vec{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\alpha(p+h\vec{w}) - d\alpha(p)}{h} \in \mathcal{L}(V; V^*) \quad (6.22)$$

Donc $d^2\alpha(p).\vec{w}$ est caractérisé à l'aide des vecteurs $\vec{y} \in V$:

$$(d^2\alpha(p).\vec{w}).\vec{y} \in V^*. \quad (6.23)$$

Et pour $\vec{z} \in V$ on note, cf. (2.16) (attention à l'ordre) :

$$((d^2\alpha(p).\vec{w}).\vec{y}).\vec{z} \stackrel{\text{noté}}{=} \tilde{d}^2\alpha(p)(\vec{z}, \vec{y}, \vec{w}) \in \mathbb{R}, \quad (6.24)$$

où donc $\tilde{d}^2\alpha \in T_3^0(\Omega)$.

Proposition 6.5 Dans une base (\vec{e}_i) de V on a :

$$\tilde{d}^2(\alpha)(p) = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}(p) e^i \otimes e^j \otimes e^k, \quad \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} \stackrel{\text{noté}}{=} \alpha_{i,jk}, \quad (6.25)$$

le théorème de Schwarz indiquant que l'ordre entre j et k n'a pas d'importance dès que $\alpha \in C^2$. Et on note également, pour une utilisation avec les contractions :

$$(d(d\alpha)(p) =) \quad d^2\alpha(p) \stackrel{\text{noté}}{=} \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}(p) e^i \otimes e^j \otimes e^k. \quad (6.26)$$

• Contraction $(e^i \otimes e^j \otimes e^k) \cdot \vec{w} = (e^i \otimes e^j)(e^k \cdot \vec{w})$, donc :

$$d^2\alpha(p) \cdot \vec{w} = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}(p) w^k e^i \otimes e^j \in L(V, V; \mathbb{R}) \simeq L(V; V^*), \quad (6.27)$$

• contraction $(e^i \otimes e^j) \cdot \vec{y} = e^i(e^j \cdot \vec{y})$, donc :

$$(d^2\alpha(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y} = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}(p) y^j w^k e^i \in V^*, \quad (6.28)$$

• contraction $e^i \cdot \vec{z} = z^i$:

$$((d^2\alpha(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z} = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}(p) z^i y^j w^k \quad (= \tilde{d}^2(\alpha)(p)(\vec{z}, \vec{y}, \vec{w})). \quad (6.29)$$

Preuve. (6.21) donne :

$$(d(d\alpha)(p) \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\alpha(p+h\vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j - d\alpha(p) \cdot \vec{e}_j}{h}, \quad (6.30)$$

avec $d\alpha(q) = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(q) e^i \otimes e^j$, donc $d\alpha(q) \cdot \vec{e}_j = \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(q) e^i$, d'où :

$$\begin{aligned} (d(d\alpha)(p) \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p+h\vec{e}_k) e^i - \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) e^i}{h} \\ &= \sum_i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p+h\vec{e}_k) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p)}{h} e^i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) e^i. \end{aligned} \quad (6.31)$$

D'où $((d(d\alpha)(p) \cdot \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i = \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}(p) = \tilde{d}^2\alpha(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$, d'où (6.25). ▀

6.5 Dérivations $d(d\alpha \cdot \vec{v})$ et $d(\alpha \cdot d\vec{v})$

Soit $\vec{v} : \Omega \rightarrow V$ C^2 , donc $d\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V)$, et $d(d\vec{v}) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V))$.

Soit $\alpha : \Omega \rightarrow V^*$ C^2 , donc $d\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V^*)$, et $d(d\alpha) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V^*))$.

On définit le produit contracté $d\alpha \cdot \vec{v} : \Omega \rightarrow V^*$ par $(d\alpha \cdot \vec{v})(p) = d\alpha(p) \cdot \vec{v}(p) \in V^*$ au sens, pour tout $\vec{w} \in V$:

$$(d\alpha \cdot \vec{v})(p) \cdot \vec{w} = (d\alpha(p) \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}(p) \in \mathbb{R} \quad (6.32)$$

(pas d'autre possibilité pour obtenir un réel). Ainsi $d\alpha \cdot \vec{v} \in T_1^0(\Omega)$. Et $d(d\alpha \cdot \vec{v}) \simeq \tilde{d}(d\alpha \cdot \vec{v}) \in T_2^0(\Omega)$.

On définit le produit (contracté) $\alpha \cdot d\vec{v} : \Omega \rightarrow V^*$ par $(\alpha \cdot d\vec{v})(p) = \alpha(p) \cdot d\vec{v}(p) \in V^*$, au sens, pour $\vec{w} \in V$:

$$(\alpha \cdot d\vec{v})(p) \cdot \vec{w} = \alpha(p) \cdot (d\vec{v}(p) \cdot \vec{w}) \in \mathbb{R} \quad (6.33)$$

(pas d'autre possibilité pour obtenir un réel). Ainsi $\alpha \cdot d\vec{v} \in T_1^0(\Omega)$. Et $d(\alpha \cdot d\vec{v}) \simeq \tilde{d}(\alpha \cdot d\vec{v}) \in T_2^0(\Omega)$.

Proposition 6.6 On a (formules de dérivation d'un produit) :

$$\begin{cases} d(d\alpha.\vec{v}) = (d^2\alpha).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V^*), \\ d(\alpha.d\vec{v}) = (d\alpha).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V^*), \end{cases} \quad (6.34)$$

au sens, pour $\vec{w} \in V$:

$$\begin{cases} d(d\alpha.\vec{v}).\vec{w} = (d^2\alpha.\vec{w}).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}).\vec{w} : \Omega \rightarrow V^*, \\ d(\alpha.d\vec{v}).\vec{w} = (d\alpha.\vec{w}).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}).\vec{w} : \Omega \rightarrow V^*. \end{cases} \quad (6.35)$$

Donc pour tout $\vec{y} \in V$:

$$\begin{cases} (d(d\alpha.\vec{v}).\vec{w}).\vec{y} = ((d^2\alpha.\vec{w}).\vec{v}).\vec{y} + (d\alpha.(d\vec{v}).\vec{w}).\vec{y}), \\ (d(\alpha.d\vec{v}).\vec{w}).\vec{y} = (d\alpha.\vec{w}).(d\vec{v}).\vec{y} + \alpha.((d^2\vec{v}).\vec{w}).\vec{y}). \end{cases} \quad (6.36)$$

Preuve. On a :

$$d(d\alpha.\vec{v})(p).\vec{w} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(d\alpha.\vec{v})(p+h\vec{w}) - (d\alpha.\vec{v})(p)}{h} \in V^*,$$

avec :

$$\begin{aligned} d\alpha(p+h\vec{w}).\vec{v}(p+h\vec{w}) - d\alpha(p).\vec{v}(p) &= d\alpha(p+h\vec{w}).(\vec{v}(p+h\vec{w}) - \vec{v}(p)) + (d\alpha(p+h\vec{w}) - d\alpha(p)).\vec{v}(p) \\ &= (d\alpha(p) + o(1)).(h d\vec{v}(p).\vec{w} + o(h)) + (h d(d\alpha)(p).\vec{w} + o(h)).\vec{v}(p) \\ &= h d\alpha(p).(d\vec{v}(p).\vec{w}) + h (d(d\alpha)(p).\vec{w}).\vec{v}(p) + o(h), \end{aligned}$$

d'où (6.35)₁.

On a :

$$d(\alpha.d\vec{v})(p).\vec{w} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha.d\vec{v})(p+h\vec{w}) - (\alpha.d\vec{v})(p)}{h} \in V^*,$$

avec :

$$\begin{aligned} (\alpha.d\vec{v})(p+h\vec{w}) - (\alpha.d\vec{v})(p) &= (\alpha(p+h\vec{w}) - \alpha(p)).d\vec{v}(p+h\vec{w}) + \alpha(p).(d\vec{v}(p+h\vec{w}) - d\vec{v}(p)) \\ &= (h d\alpha(p).\vec{w} + o(h)).(d\vec{v}(p) + o(1)) + \alpha(p).(h d(d\vec{v})(p).\vec{w} + o(h)) \\ &= (h (d\alpha(p).\vec{w}).d\vec{v}(p) + o(h)) + (h \alpha(p).d(d\vec{v})(p).\vec{w} + o(h)), \end{aligned}$$

d'où (6.35)₂. ▀

Démonstration à l'aide d'une base. Pour (6.35)₁ : on a $d\alpha.\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} v^j e^i$, d'où :

$$d(d\alpha.\vec{v}).\vec{e}_k = \sum_{ij} (d(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}).\vec{e}_k) v^j e^i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} (dv^j).\vec{e}_k e^i = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} v^j e^i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} e^i.$$

Avec (6.25), donc $d^2\alpha.\vec{e}_k = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} e^i \otimes e^j$, donc $(d^2\alpha.\vec{e}_k).\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} v^j e^i$.

Et avec $d\alpha = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} e^i \otimes e^j$, et avec $d\vec{v}.\vec{e}_k = \sum_{jk} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_j$, donc $d\alpha.(d\vec{v}.\vec{e}_k) = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} e^i$.

On a vérifié : $d(d\alpha.\vec{v}).\vec{e}_k = (d^2\alpha.\vec{e}_k).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}.\vec{e}_k)$ pour tout k , d'où (6.35)₁.

Pour (6.35)₂ : on a $\alpha.d\vec{v} = \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j$, d'où :

$$d(\alpha.d\vec{v}).\vec{e}_k = \sum_{ij} d(\alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j).\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j + \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} e^j.$$

Avec $d\alpha = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} e^i \otimes e^j$, donc $d\alpha.\vec{e}_k = \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} e^i$, et avec $d\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j$.

Donc : $(d\alpha.\vec{e}_k).d\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j$.

Et avec $d^2\vec{v}.\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j$, donc $\alpha.(d^2\vec{v}.\vec{e}_k) = \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} e^j$.

On a vérifié : $d(\alpha.d\vec{v}).\vec{e}_k = (d\alpha.\vec{e}_k).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{e}_k)$ pour tout k , d'où (6.35)₂.

6.6 Dérivée seconde de Lie : $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha)$

Soit $\alpha \in T_1^0(\Omega)$ et $\vec{v} \in T_0^1(\Omega)$ une forme différentielle et un champ de vecteurs C^1 . La dérivée de Lie autonome de α le long d'un flot de champ de vecteurs vitesses \vec{v} est définie par :

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha = d\alpha.\vec{v} + \alpha.d\vec{v} \in T_1^0(\Omega), \quad (6.37)$$

et, pour tout $\vec{w} \in V$:

$$(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} = (d\alpha.\vec{v}).\vec{w} + (\alpha.d\vec{v}).\vec{w} \in T_0^0(\Omega). \quad (6.38)$$

Remarque 6.7 La dérivée de Lie autonome d'une fonction f est la dérivée directionnelle usuelle $\mathcal{L}_{\vec{v}}f = df.\vec{v}$. Et la dérivée de Lie autonome $\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha$ a été construite de telle sorte que

- $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w}) = d(\alpha.\vec{w}).\vec{v}$, car $f = \alpha.\vec{w}$ est une fonction, et en supposant
- $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w}) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} + \alpha.(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})$, car la dérivée de Lie est une dérivation.

Donc $(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} = \mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w}) - \alpha.(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})$.

Comme d'une part $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w}) = d(\alpha.\vec{w}).\vec{v} = (d\alpha.\vec{v}).\vec{w} + \alpha.(d\vec{w}.\vec{v})$ et d'autre part $\alpha.(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}) = \alpha.(d\vec{w}.\vec{v} - d\vec{v}.\vec{w})$, on obtient $(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} = (d\alpha.\vec{v}).\vec{w} + \alpha.(d\vec{w}.\vec{v}) - \alpha.(d\vec{w}.\vec{v} - d\vec{v}.\vec{w})$, d'où (6.38). \blacksquare

Dans une base (\vec{e}_i) on a :

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} v^j e^i + \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j, \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} w^i v^j + \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} w^j. \quad (6.39)$$

Lemme 6.8 On suppose α et $\vec{v} \in C^2$. On a :

$$d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) = (d^2\alpha).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}) + (d\alpha).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V; V^*), \quad (6.40)$$

au sens, pour $\vec{w} \in V$:

$$d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} = (d^2\alpha.\vec{w}).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}.\vec{w}) + (d\alpha.\vec{w}).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{w}) : \Omega \rightarrow V^*, \quad (6.41)$$

Donc pour tout $\vec{u} \in V$:

$$(d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w}).\vec{u} = ((d^2\alpha.\vec{w}).\vec{v}).\vec{u} + (d\alpha.(d\vec{v}.\vec{w})).\vec{u} + (d\alpha.\vec{w}).d\vec{v}.\vec{u} + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{w}).\vec{u} \in \mathbb{R}. \quad (6.42)$$

Preuve. On applique (6.34), (6.35) et (6.36). \blacksquare

Démonstration à l'aide d'une base. Avec (6.39) :

$$d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) = \sum_{ijk} \left(\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} v^j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \right) e^i \otimes e^k + \sum_{ijk} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \alpha_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \right) e^j \otimes e^k.$$

$$\text{Donc } d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{e}_k = \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} v^j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \right) e^i + \sum_{ij} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \alpha_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \right) e^j.$$

$$\text{Avec } d^2\alpha = \sum_{ijk} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} e^i \otimes e^j \otimes e^k, \text{ donc } d^2\alpha.\vec{e}_k = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} e^i \otimes e^j, \text{ donc } (d^2\alpha.\vec{e}_k).\vec{v} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j} v^j e^i.$$

$$\text{Avec } d\alpha.(d\vec{v}.\vec{e}_k) = \left(\sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} e^i \otimes e^j \right) . \left(\sum_j \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \vec{e}_j \right) = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} e^i.$$

$$\text{Avec } (d\alpha.\vec{e}_k).d\vec{v} = \left(\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} e^i \right) . \left(\sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j \right) = \sum_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e^j.$$

$$\text{Avec } \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{e}_k) = \left(\sum_i \alpha_i e^i \right) \sum_{ij} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \vec{e}_i \otimes e^j = \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} e^j.$$

D'où (6.41) pour tout \vec{e}_k , donc pour tout \vec{w} .

Corollaire 6.9 Soit $\vec{v}, \vec{w} \in T_0^1(\Omega)$ et $\alpha \in T_1^0(\Omega)$. On suppose $\vec{w} \in C^1$, et \vec{v} et $\alpha \in C^2$.

On a $\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha \in T_1^0(\Omega)$ et $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) \in T_1^0(\Omega)$ avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) &= (d^2\alpha.\vec{w}).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}.\vec{w}) + (d\alpha.\vec{w}).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{w}) \\ &\quad + (d\alpha.\vec{v}).d\vec{w} + (\alpha.d\vec{v}).d\vec{w} \in T_1^0(\Omega), \end{aligned} \quad (6.43)$$

donc, pour tout $\vec{u} \in V$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{u} &= ((d^2\alpha.\vec{w}).\vec{v}).\vec{u} + (d\alpha.(d\vec{v}.\vec{w})).\vec{u} + (d\alpha.\vec{w}).d\vec{v}.\vec{u} + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{w}).\vec{u} \\ &\quad + (d\alpha.\vec{v}).d\vec{w}.\vec{u} + \alpha.d\vec{v}.d\vec{w}.\vec{u} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Preuve. On a $\mathcal{L}_{\vec{w}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) = d(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} + (\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).d\vec{w}$. Et (6.41) et $\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha.d\vec{w} = ((d\alpha).\vec{v} + \alpha.(d\vec{v})).d\vec{w}$. \blacksquare